PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **6** (1978/1979)
Številka 3
Stran 165

Dušan Repovš:

TETIVNI ČETVEROKOTNIK

Ključne besede: matematika, geometrija, olimpijada, četverokotnik, naloge.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/6/368-Repovs-cetverokotnik.pdf

TETIVNI ČETVEROKOTNIK * *

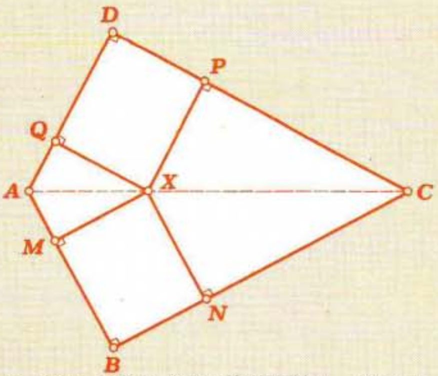
Dokaži, da lahko poljuben tetiven štirikotnik razrežemo na n tetivnih štirikotnikov, čim je $n = 4$.

Dušan Repovš

---

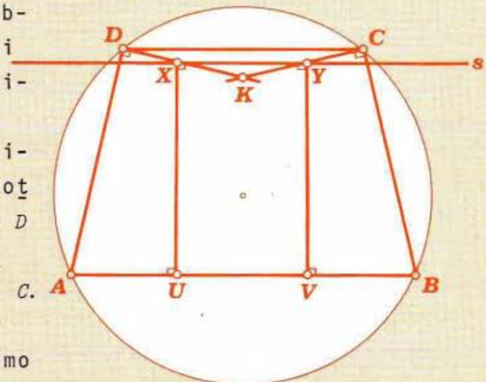
* Karikaturo je prispeval *Božo Kos*
** Naloga je s 14. *mednarodne matematične olimpiade*, Torun 1972

1° Naj ima četverokotnik vsaj en pravi kot. Ker je tetiven, je tudi nasproten kot pravi. Razdelitev na 4 tetivne četverokotnike poteka takole:



Pravi kot je v oglišču B. Izberemo poljubno točko na diagonali AC. Iz nje narišemo pravokotnico na stranice. S tem smo že dobili 4 tetivne četverokotnike, dva sta celo pravokotnika. Pravokotnik lahko razdelimo na poljubno število pravokotnikov. Potemtakem je v tem primeru razdelitev možna.

2° Naj bodo zdaj vsi koti ostri ali topi, le 90° naj ne meri nobeden izmed njih. Enostavno dokažemo, da obstaja stranica, ob kateri sta oba kota topa. Označimo jo s CD.



Takole ravnajmo: Konstruirajmo daljico XD, pravokotno na daljico AD v točki D in prav tako daljico YC, pravokotno na BC v točki C. Presečno točko daljic XD in YC označimo K. Narišimo premico s, vzporedno daljici AB, in sicer naj se s seka z daljico XD znotraj daljice DK in z daljico YC znotraj daljice CK* Narišimo pravokotnici iz X in Y na daljico AB.

*Bralec naj premisli o eksistenci take premice s.

Tako smo dobili 4 četverokotnike. Četverokotnika $AUXD$ in $VBCY$ sta tetivna. $UVYX$ je pravokotnik. Pokazati moramo še, da je četverokotnik $XYCD$ prav tako tetiven. V ta namen je potrebno in zadostno, če pokažemo, da je

$$\mathrm{kot}(XDC) + \mathrm{kot}(XYC) = \pi$$

Ker je četverokotnik $ABCD$ tetiven, velja

$$\mathrm{kot}(ADC) + \mathrm{kot}(ABC) = \pi$$

Poiščimo

$$\mathrm{kot}(XDC)+\mathrm{kot}(XYC)=\mathrm{kot}(ADC)-\pi/2+2\pi-\pi/2-\mathrm{kot}(VYC)$$

Iz četverokotnika $VBCY$ vidimo, da je

$$\mathrm{kot}(VYC) = \pi - \mathrm{kot}(ABC)$$

To uporabimo in dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{kot}(XDC) + \mathrm{kot}(XYC) &= \mathrm{kot}(ADC) + \pi - \pi + \mathrm{kot}(ABC) = \\ &= \mathrm{kot}(ADC) + \mathrm{kot}(ABC) = \pi\end{aligned}$$

S tem smo trditev dokazali.

Ker lahko pravokotnik vedno razdelimo na poljubno število pravokotnikov, smo z našim sklepanjem dokazali, da lahko vsak tetivni četverokotnik razdelimo na poljubno število tetivnih četverokotnikov, če jih sme biti več kot tri. Bralec naj razmisli, kako bi bilo za $n = 2$ ali 3.

Dušan Repovš

[1] Matematičko-fizički list, Zagreb, 23(1972/73)3