

# ANALIZA DVOSLOJNIH LESENIH NOSILCEV Z UPOŠTEVANJEM ZDRSA IN RAZMIKA

## ANALYSIS OF TWO-LAYERED TIMBER BEAMS CONSIDERING INTERLAYER SLIP AND UPLIFT

Aleš Kroflič\*, univ. dipl. inž. grad.<sup>1</sup>  
izr. prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.<sup>1</sup>  
doc. dr. Bojan Čas, univ. dipl. inž. grad.<sup>1,2</sup>

Znanstveni članek  
UDK: 624.011.1:624.072.2

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,  
Jamova 2, 1000 Ljubljana

<sup>2</sup> Gradbeni inštitut ZRMK, d. o. o., PE Maribor,  
Jezdarska ulica 3, 2000 Maribor

akroflic@fgg.uni-lj.si  
iplaninc@fgg.uni-lj.si  
bojan.cas@gi-zrmk.si

\* Za predstavljeno delo je prvi avtor prejel Prešernovo nagrado Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani decembra 2007.

**Povzetek** | V članku je predstavljen nov matematični model in pripadajoča analitična rešitev za analizo napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih lesenih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika med slojema. S predstavljeno analitično rešitvijo je bila izdelana parametrična študija vpliva prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na togost dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca. Ugotovljeno je bilo, da ima prečna togost stika pomemben vpliv predvsem na normalno komponento vektorja napetosti na stiku med slojema ter na prerazporeditev upogibnih momentov in prečnih sil med slojema, medtem ko debelina vmesnega sloja nima bistvenega vpliva na togost obravnavanega dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca.

**Summary** | A mathematical model and its analytic solution for the analysis of stress-strain state of elastic two-layered beams is presented. The theory considers a possibility of slip and uplift at the interface. The developed analytical solution is used for studying the effect of the vertical stiffness and thickness of inner layer on the behaviour of two-layered timber beams. Parametric study has confirmed that vertical stiffness between the layers has substational influence on the stress-strain state of the two-layer timber beams, while the tickness of inner layer can be neglected in practical analysis of serviceability limite states.

## 1 • UVOD

Sestavljeni oziroma slojeviti leseni nosilci, sovprežni nosilci iz betona in jekla, sovprežni nosilci iz betona in lesa in številni drugi sodijo med bolj inovativne konstrukcijske elemente. Umeščamo jih med tako imenovane kompozitne konstrukcije in jih v nadaljevanju imenujemo kompozitni nosilci. Njihova uporaba v gradbeništvu strmo narašča. Vzrokov za razširjenost uporabe je več. V osnovi lahko s kompozitnimi nosilci v večji meri izkoristimo ugodne lastnosti materialov posameznih sestavnih elementov. Do uporabe pogosto pripeljejo tehnološki postopki gradnje, kot sta na primer montažna in polmontažna gradnja. Uporabljamo jih pri sanacijah in ojačitvah obstoječih dotrajanih in funkcionalno zastarelih konstrukcij. Zelo uporabni so tudi v primeru premoščanja velikih razpetin, saj z njimi enostavneje zagotovimo potrebno statično višino.

Na obnašanje kompozitnih konstrukcij bistveno vpliva način povezave med sloji. Najpogosteje izvedemo povezavo med sloji z žebli, mozniki, svorniki in podobnimi veznimi sredstvi. Če je povezava slojev popolnoma toga, lahko za analizo kompozitnih konstrukcij uporabimo standardne matematične modele. Ker pa je večina povezav med sloji gradbenih kompozitnih konstrukcij podajnih in ker le-ta bistveno vpliva na njihovo togost, duktilnost in nosilnost, morajo matematični modeli za analizo kompozitnih konstrukcij upoštevati tudi podajnost stika. Ta med sloji kompozitnih konstrukcij povzroči nezveznosti komponent pomikov tako v vzdolžni kot tudi v prečni smeri. Ko se pojavijo nezveznosti pomikov v vzdolžni smeri, govorimo o zdrsuh med slojema, ko pa se pojavijo nezveznosti pomikov v prečni smeri, pa govorimo o razmikanju slojev oziroma o vtiskanju slojev (v nadaljevanju razmikanje in vtiskanje slojev označimo s skupnim izrazom *razmik*).

Začetki matematičnega modeliranja kompozitnih konstrukcij (predvsem nosilcev) segajo v sredino prejšnjega stoletja (Newmark, 1951). Raziskovalci tega časa so skušali predvsem z relativno preprostimi matematičnimi modeli čim natančneje opisati vpliv delne povezanosti med slojema kompozitnega nosilca, ki so jo ugotovili z eksperimentalnim opazovanjem kompozitnih mostnih konstrukcij (Viest, 1960). V novejšem času so se z razvojem računalništva razvili številni numerični modeli za analizo vseh vrst kompozitnih nosilcev. Večina teh modelov je zasnovanih na metodi končnih elementov in t. i. linearni teoriji ravninskih nosilcev. Modeli pa so prirejani za analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zgolj zamikov na stiku med slojema. Razlikujejo pa se predvsem glede na uporabljene materialne modele slojev in stika med slojema, ki so najpogosteje nelinearni ((Wheat, 1994), (Gattesco, 1999), (Čas, 2004), (Planinc, 2008)). Poleg omenjenih modelov pa v literaturi zasledimo tudi modele, ki so zasnovani na t. i. geometrijsko nelinearni teoriji ravninskih nosilcev. S temi modeli raziskovalci analizirajo predvsem vpliv zdrsna na uklonsko nosilnost dvoslojnih kompozitnih stebrov ((Rassam, 1970), (Girhammar, 2007), (Čas, 2007), (Kryžanowski, 2009)). Adekola je najverjetneje prvi raziskoval vpliv zdrsna in razmika na obnašanje kompozitnih nosilcev (Adekola, 1968). Izpeljal je matematični model za analizo sovprežnega prostoležečega nosilca iz jekla in betona z upoštevanjem zamikov in razmikov. Dobljeni sistem navadnih diferencialnih enačb je rešil z diferenčno metodo. V nadaljevanju sta analitično rešitev za delno modificiran Adekolov sistem diferencialnih enačb v obliki eksplicitnih izrazov predstavila Robinson in Naraiane (Robinson, 1988). Poleg analitičnih rešitev najdemo v zadnjem času v literaturi tudi numerične modele za analizo dvoslojnih

kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zamikov in razmikov. Za zdaj pa so ti modeli prirejani zgolj za geometrijsko in materialno linearno analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev ((Gara, 2006), (Ranzi, 2006)).

V članku predstavimo nov matematični model in pripadajočo analitično rešitev za določitev napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih lesenih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zdrsna in razmika med slojema. Čeprav prikažemo izpeljavo matematičnega modela za dvoslojne lesene nosilce, je izpeljava praktično enaka za vse elastične dvoslojne kompozitne nosilce. Pri izpeljavi matematičnega modela bomo upoštevali linearno teorijo ravninskih nosilcev in elastično obnašanje obeh slojev kompozitnega nosilca ter stika med slojema. Predpostavili pa bomo, da se interakcija med slojema vzpostavi preko vmesnega sloja, katerega debelina je odvisna od mehanskih lastnosti lesa in veznih sredstev. Tako v model vpeljemo posplošene zamike in razmike med slojema, kar predstavlja posplošitev dosedanjih, v literaturi znanih materialnih modelov stika med sloji (Čas, 2004). Poleg novega matematičnega modela bomo v članku predstavili tudi pripadajočo analitično rešitev. Ta omogoča točno analizo tudi statično nedoločenih dvoslojnih lesenih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zamika in razmika med slojema, kot so to na primer dvoslojni leseni kontinuirni nosilci. Taka razširjena analitična rešitev dvoslojnih lesenih nosilcev predstavlja pomembno razširitev v literaturi poznanih analitičnih rešitev, ki so omejene zgolj na prostoležeče dvoslojne elastične nosilce ((Adekola, 1968), (Robinson, 1988)). Članek ima poleg uvoda še tri poglavja. V drugem poglavju predstavimo nov matematični model za analizo dvoslojnih lesenih nosilcev z upoštevanjem zamikov in razmikov med slojema in analitično rešitev pripadajočega sistema navadnih diferencialnih enačb. Vpliv prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na togost dvoslojnih lesenih nosilcev prikažemo v tretjem poglavju. Na koncu podamo zaključke.

## 2 • MATEMATIČNI MODEL DVOSLOJNEGA LESENEGA NOSILCA

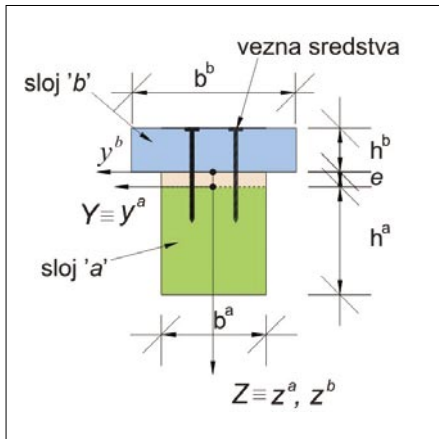
### 2.1 Osnovne predpostavke

Opazujemo raven dvoslojen leseni nosilec z dolžino  $L$  in s konstantnim prečnim prečnikom (slika 1). Deformiranje nosilca opazujemo v ravnini  $(X, Z)$  evklidskega prostora

z desnosučnim Kartezijevim prostorskim koordinatnim sistemom  $(X, Y, Z)$ . Materialna koordinatna sistema sloja 'a' označimo z  $x^a, y^a, z^a$ , sloja 'b' pa z  $x^b, y^b, z^b$ . Lego prostorskega ter materialnih koordinatnih sistemov

ter pomen osnovnih kinematičnih količin prikazujemo na sliki 2.

Dodatno pri izpeljavi osnovnih in veznih enačb matematičnega modela dvoslojnega lesenega nosilca upoštevamo geometrijsko in materialno linearno teorijo ravninskih nosilcev. Skladno s tem privzamemo za vsak sloj posebej znano Bernoullijevo predpostavko o ravnih prečnih prerezhih ter predpostavko, da se velikost in

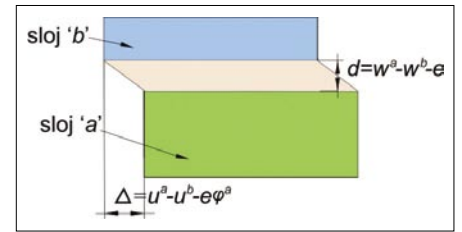


Slika 1 • Značilni prečni prerez dvoslojnega lesenega nosilca

veznih sredstev v sloja ali pa prečno vtiakanje med slojema, potem pripišemo zdrsa in razmik tankemu vmesnemu sloju z debelino  $e \neq 0$ . Glede na povedano, definiramo zdrsa in razmik kot »povprečen zdrsa« in »povprečen razmik« tankega vmesnega sloja (Čas, 2004). Taka definicija zdrsa in razmika je splošnejša, kot jo zasledimo v literaturi ((Adekola, 1968), (Robinson, 1988), (Gara, 2006), (Ranzi, 2006)). Geometrijski pomen zdrsa,  $\Delta$ , in razmika,  $d$ , med slojema dvoslojnega lesenega nosilca prikazujemo na sliki 3.

**2.2 Osnovne in vezne enačbe**

Osnovne enačbe dvoslojnega lesenega nosilca sestavljajo kinematične, ravnotežne



Slika 3 • Geometrijski pomen zdrsa,  $\Delta$ , in razmika,  $d$ , med slojema

$$w^{b'} + \varphi^b = 0, \tag{5}$$

$$\varphi^{b'} - \kappa^b = 0, \tag{6}$$

ravnotežne enačbe:

$$N^{a'} + \mathcal{P}_x^a = 0, \tag{7}$$

$$Q^{a'} + \mathcal{P}_z^a = 0, \tag{8}$$

$$M^{a'} - Q^a + M_y^a = 0, \tag{9}$$

$$N^{b'} + \mathcal{P}_x^b = 0, \tag{10}$$

$$Q^{b'} + \mathcal{P}_z^b = 0, \tag{11}$$

$$M^{b'} - Q^b + M_y^b = 0, \tag{12}$$

konstitucijske enačbe:

$$N^a = C_{11}^a \varepsilon^a + C_{12}^a \kappa^a, \tag{13}$$

$$M^a = C_{21}^a \varepsilon^a + C_{22}^a \kappa^a, \tag{14}$$

$$N^b = C_{11}^b \varepsilon^b + C_{12}^b \kappa^b, \tag{15}$$

$$M^b = C_{21}^b \varepsilon^b + C_{22}^b \kappa^b, \tag{16}$$

vezne enačbe:

$$x^b + u^b = x^{a*} + u^a - e\varphi^a, \tag{17}$$

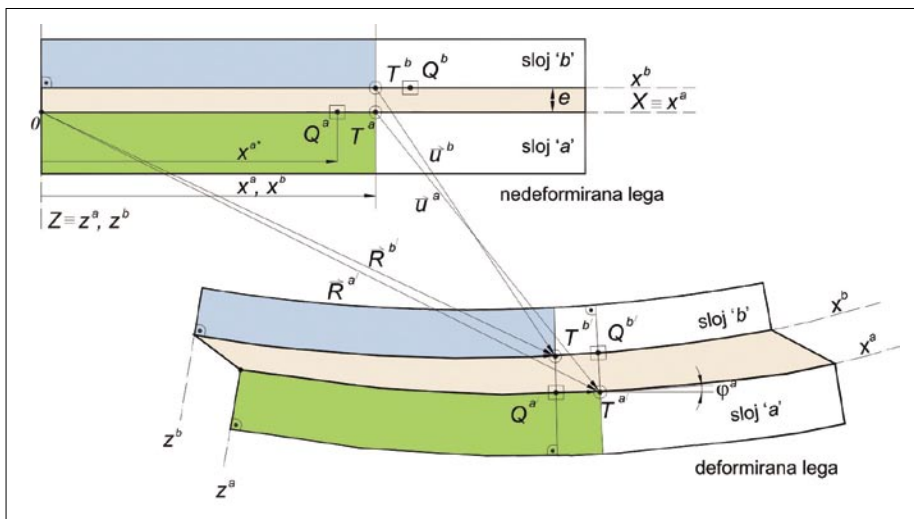
$$d = w^a - w^b - e, \tag{18}$$

$$\Delta = u^a - u^b - e\varphi^a, \tag{19}$$

$$p_t = K \Delta, \tag{20}$$

$$p_n = C d. \tag{21}$$

Pomen količin v enačbah (1)–(21) je dobro znan. Tako  $u^a, u^b, w^a, w^b$  predstavljajo komponente pomikov referenčnih osi sloja 'a' in sloja 'b' dvoslojnega lesenega nosilca v vzdolžni in



Slika 2 • Nedeformirana in deformirana lega matematičnega modela dvoslojnega lesenega nosilca ter geometrijski pomen osnovnih kinematičnih količin

oblika prečnih prerezov med deformiranjem ne spreminjata. Pri tem zaradi delovanja zunanje obtežbe med slojema dopuščamo tako možnost zamika kot tudi razmika med slojema. Interakcija med slojema 'a' in 'b' dvoslojnega lesenega nosilca pa se vzpostavi preko vmesnega sloja z začetno debelino  $e$ . Debelina vmesnega sloja je odvisna od dejanskega razmika med slojema in tudi od materialnih lastnosti obeh slojev nosilca in od obdelave stika ter povezave med slojema – vezni sredstev. Ko debelino določajo materialne lastnosti slojev in veznih sredstev, jo določimo na podlagi eksperimentov. V splošnem pa za kompozitne nosilce velja: ko sta sloja nosilca mnogo bolj toga kot vezna sredstva ali pa sloja med seboj sploh nista povezana z veznimi sredstvi, potem običajno privzamemo  $e \approx 0$ . Če pa so materialne lastnosti enega ali obeh slojev takšne, da dopuščajo delno vzdolžno vtiakanje

in konstitucijske enačbe s pripadajočimi robnimi pogoji za vsakega izmed slojev. Poleg osnovnih enačb so za določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih konstrukcij izjemnega pomena tudi vezne enačbe, s katerimi povežemo posamezne sloje kompozitne konstrukcije v enovito celoto. Podrobna izpeljava osnovnih in veznih enačb dvoslojnega lesenega nosilca je predstavljena v Krofličevi raziskovalni nalogi (Kroflič, 2007), zato v članku enačbe le povzamemo:

kinematične enačbe:

$$u^{a'} - \varepsilon^a = 0, \tag{1}$$

$$w^{a'} + \varphi^a = 0, \tag{2}$$

$$\varphi^{a'} - \kappa^a = 0, \tag{3}$$

$$u^{b'} - \varepsilon^b = 0, \tag{4}$$

prečni smeri ter  $\varphi^a$  in  $\varphi^b$  zasuka referenčnih osi, statične količine  $N^a, N^b, Q^a, Q^b, M^a, M^b$  predstavljajo osne in prečne sile ter upogibna momenta vsakega sloja nosilca posebej,  $\varepsilon^a, \varepsilon^b, \kappa^a, \kappa^b$  pa predstavljajo specifične spremembe dolžin referenčne osi spodnjega in zgornjega sloja dvoslojnega lesenega nosilca ter pripadajoče ukrivljenosti. Linijsko obtežba dvoslojnega lesenega nosilca  $\mathcal{P}_x^a, \mathcal{P}_x^b, \mathcal{P}_z^a, \mathcal{P}_z^b, \mathcal{M}_y^a, \mathcal{M}_y^b$  sestavlja zunanja obtežba  $p_x^a, p_x^b, p_z^a, p_z^b$  in  $m_y^a$  in  $m_y^b$  ter komponenti kontaktne linijske obtežbe med slojema v vzdolžni smeri  $p_t$  in v prečni smeri  $p_n$ :

$$\mathcal{P}_x^a = p_x^a - p_t, \quad (22)$$

$$\mathcal{P}_z^a = p_z^a - p_n, \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_x^b = p_x^b + p_t, \quad (24)$$

$$\mathcal{P}_z^b = p_z^b + p_n, \quad (25)$$

$$\mathcal{M}_y^a = m_y^a, \quad (26)$$

$$\mathcal{M}_y^b = m_y^b. \quad (27)$$

Konstante  $C_{11}^a, C_{12}^a, C_{22}^a, C_{11}^b, C_{12}^b, C_{22}^b$  v konstitucijskih enačbah (13)–(16) predstavljajo koeficiente materialne matrike prečnega prereza vsakega sloja dvoslojnega lesenega nosilca in so določene z enačbami:

$$C_{11}^a = \int_{A^a} E^a dA^a = E^a A^a, \quad (28)$$

$$C_{12}^a = C_{21}^a = \int_{A^a} z E^a dA^a = E^a S^a, \quad (29)$$

$$C_{22}^a = \int_{A^a} z^2 E^a dA^a = E^a I^a, \quad (30)$$

$$C_{11}^b = \int_{A^b} E^b dA^b = E^b A^b, \quad (31)$$

$$C_{12}^b = C_{21}^b = \int_{A^b} z E^b dA^b = E^b S^b, \quad (32)$$

$$C_{22}^b = \int_{A^b} z^2 E^b dA^b = E^b I^b, \quad (33)$$

kjer so  $A^a, A^b, S^a, S^b, I^a$  in  $I^b$  geometrijske karakteristike spodnjega oziroma zgornjega sloja dvoslojnega lesenega nosilca,  $E^a$  in  $E^b$  pa sta pripadajoča elastična modula. Materialni

konstanti v veznih enačbah (20) in (21) sta vzdolžna ali strižna togost stika  $K$  in prečna togost stika  $C$ . Geometrijski pomen količine  $x^a$  pa je prikazan na sliki 2.

Pri reševanju enačb (1)–(21) je treba upoštevati še pripadajoče statične in kinematične robne pogoje (Kroflič, 2007). Sistem enačb (1)–(21) sestavlja 21 navadnih diferencialnih in algebrskih enačb za prav toliko neznanih funkcij:  $u^a, w^a, \varphi^a, u^b, w^b, \varphi^b, N^a, Q^a, M^a, \varepsilon^a, \kappa^a, N^b, Q^b, M^b, \varepsilon^b, \kappa^b, \Delta, d, x^a, p_t$  in  $p_n$ .

### 2.3 Analitično reševanje

Kot smo prikazali v prejšnjem poglavju, sestavlja osnovne in vezne enačbe matematičnega modela dvoslojnega lesenega nosilca 21 linearnih algebrskih in navadnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti za prav toliko neznank. Znano je, da za take sisteme diferencialnih enačb obstajajo analitične rešitve (Deo, 1994). Splošni sistem enačb (1)–(21) najlažje rešimo, če ga pretvorimo v linearno diferencialno enačbo sedmega reda s konstantnimi koeficienti za zamik na stiku

$$\Delta^{(VII)} - k_1 \Delta^{(V)} - k_5 \Delta''' + (k_5 k_1 - k_2 k_4) \Delta' + k_5 k_3 - k_2 k_6 = 0, \quad (34)$$

kjer so konstante  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  odvisne od materialnih in geometrijskih lastnosti obeh slojev obravnavanega nosilca. Ker je rešitev navadne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti odvisna od ničel pripadajočega karakterističnega polinoma

$$y^7 - k_1 y^5 - k_5 y^3 + (k_5 k_1 - k_2 k_4) y' + k_5 k_3 - k_2 k_6 = 0, \quad (35)$$

smo s parametrično analizo v računalniškem okolju Mathematica ugotovili, da ima karakteristični polinom (35) za inženirsko zanimive parametre  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  tri realne in dve konjugirano kompleksni ničli. Karakteristični polinom (35) lahko tako zapišemo v obliki

$$(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)(y - c_1)(y - \bar{c}_1)(y - c_2)(y - \bar{c}_2) = 0, \quad (36)$$

kjer so  $r_1, r_2, r_3$  realne ničle,  $c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 i$ ,  $\bar{c}_1 = \alpha_1 - \alpha_2 i$ ,  $c_2 = \beta_1 + \beta_2 i$ ,  $\bar{c}_2 = \beta_1 - \beta_2 i$ , pa konjugirano kompleksni ničli karakterističnega polinoma (35). S pomočjo ničel karakterističnega polinoma je splošna rešitev diferencialne enačbe (34) (Deo, 1994)

$$\Delta(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + e^{\alpha_1 x} (C_4 \cos \alpha_2 x + C_5 \sin \alpha_2 x) + e^{\beta_1 x} (C_6 \cos \beta_2 x + C_7 \sin \beta_2 x). \quad (37)$$

Neznane konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$  v enačbi (37) določimo s pomočjo robnih pogojev, ki so vrednosti zdrsa in prvih dveh odvodov zdrsa ter vrednosti razmika in prvih treh odvodov razmika na začetku dvoslojnega lesenega nosilca. Ko poznamo zdrs na stiku med slojema, določimo razmik med slojema z enačbo

$$d(x) = \frac{1}{k_2} (\Delta'''(x) - k_1 \Delta'(x) - k_3). \quad (38)$$

Ostale kinematične, statične in deformacijske količine dvoslojnega lesenega nosilca pa določimo z integracijo osnovnih enačb (1)–(12) oziroma z rešitvijo enačb (13)–(16), pripadajoče integracijske konstante pa s pomočjo statičnih in kinematičnih robnih pogojev. Tak način reševanja osnovnih in veznih enačb nam omogoča tudi relativno preprosto reševanje statično nedoločenih dvoslojnih linijskih konstrukcij, kot so to na primer dvoslojni kontinuirni leseni nosilci. Za take konstrukcije tvorimo podobno kot pri metodi končnih elementov enačbo konstrukcije

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (39)$$

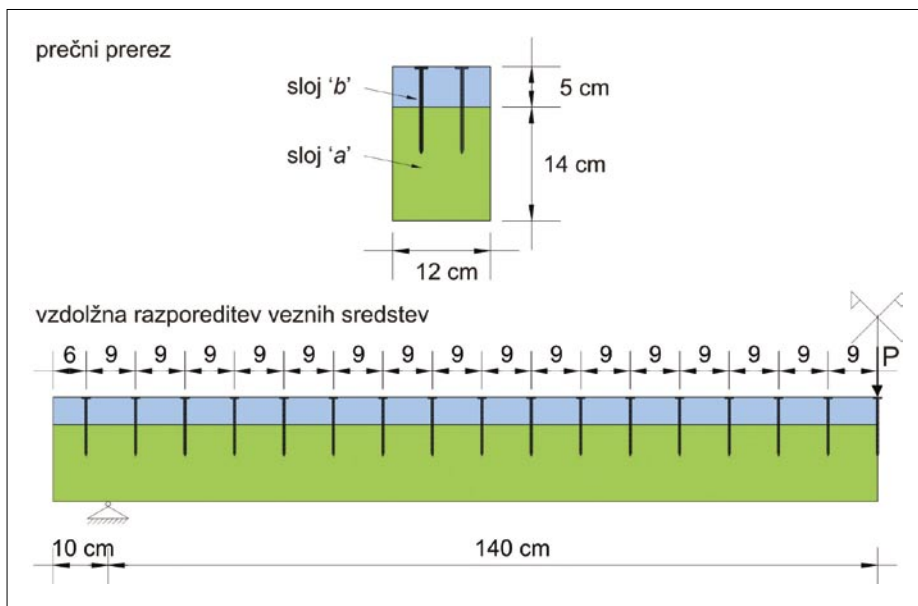
kjer  $\mathbf{K}_T$  predstavlja posplošeno tangentno togostno matriko konstrukcije,  $\mathbf{u}$  vektor vzdolžnih in robnih vrednosti, stolpec  $\mathbf{g}$  pa predstavlja vektor desnih strani. Rešitve linearnega sistema enačb (39) določajo napetostno in deformacijsko stanje poljubne dvoslojne lesene linijske konstrukcije.

deformacijsko stanje prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca z dolžino  $L = 280$  cm. Obravnavani nosilec je v svoji diplomski nalogi detajlno eksperimentalno in numerično analiziral Čas (Čas, 1999).

## 3 • PARAMETRIČNA ANALIZA

V tem poglavju s prikazanim analitičnim modelom dvoslojnega lesenega nosilca de-

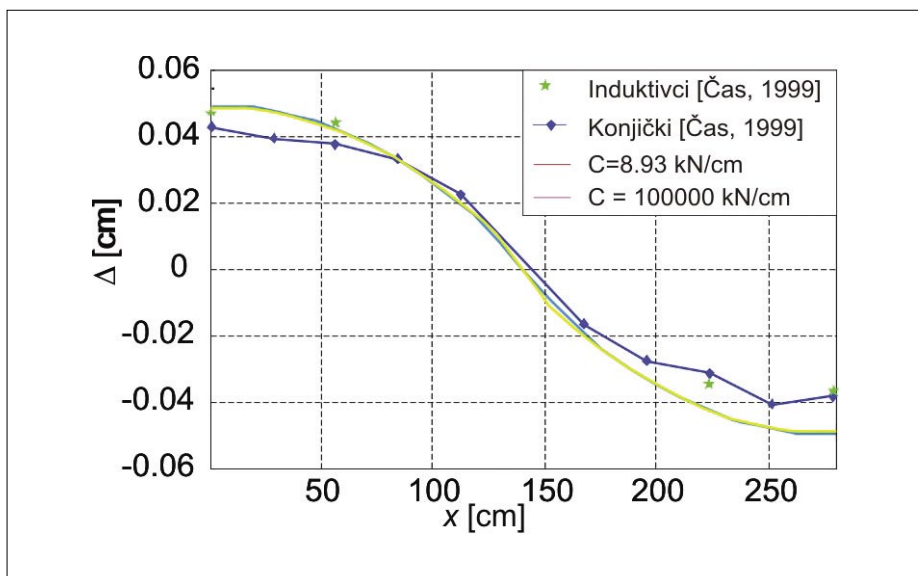
tajno analiziramo vpliva prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na napetostno in



Slika 4 • Geometrijski podatki dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca in razporeditev veznih sredstev (Čas, 1999)

Geometrijske podatke obravnavanega nosilca ter razporeditev veznih sredstev prikazujemo na sliki 4. Za vezna sredstva, ki povezujejo zgornji in spodnji sloj nosilca, so bili izbrani žebliji  $d/l = 4,0/100$  mm. Razporejeni so bili v dveh vzporednih vrstah simetrično glede na

ravnino deformiranja nosilca. V analizi smo previsna dela nosilca v dolžini 10 cm zanemarili (slika 4). Skladno s prikazanim matematičnim modelom dvoslojnega lesenega nosilca smo mehanske lastnosti žebeljev enakomerno »razmazali« po celotnem vmesnem sloju.



Slika 5 • Primerjava med analitičnimi in izmerjenimi zamiki na stiku dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca

Prečna togost	Značilne vrednosti (kN/CM)				
$C$	$\infty$	100000	8,93 (eksperiment)	1	0,1

Preglednica 1 • Značilne vrednosti prečne togosti stika

Obtežbo obravnavanega nosilca sestavljata lastna teža in navpična točkovna sila na sredini razpona zgornjega sloja.

Meritve so bile izvedene za tri različne obtežne nivoje (Čas, 1999):

- karakteristično obtežbo ( $P = 7,624$  kN),
- projektno obtežbo ( $P = 11,055$  kN) in
- porušno obtežbo ( $P = 16,123$  kN).

Ker je predstavljeni matematični model za analizo dvoslojnih lesenih nosilcev zasnovan na elastičnem modelu za les, prikazujemo parametrično študijo samo za najnižji nivo obtežbe, tj. pri sili  $P = 7,624$  kN, ko se nosilec še obnaša elastično. Skladno s tem smo elastični modul lesa določili z linearizacijo eksperimentalno določenega nelinearnega materialnega modela okoli nedeformirane lege. Hkrati pa predpostavimo tako v tlaku kot v nategu tlačni elastični modul, ki je  $E = 1500$  kN/cm<sup>2</sup>.

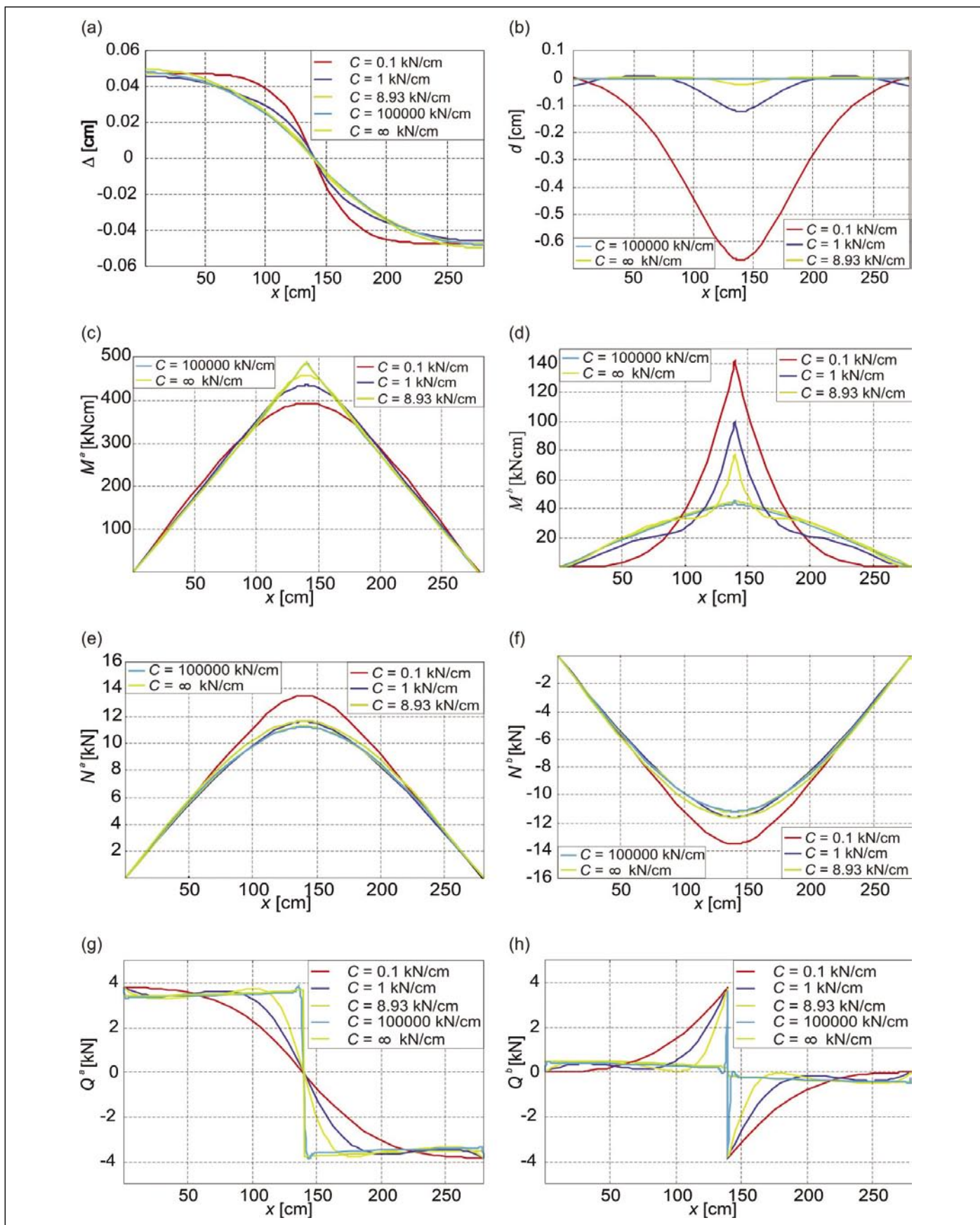
Podobno določimo tudi materialne lastnosti stika med slojema. Tako z linearizacijo eksperimentalno določenega nelinearnega modela stika določimo strižno in prečno togost stika, ki sta:  $K = 2,448$  kN/cm in  $C = 8,93$  kN/cm (na izvlek) oziroma  $C = 100000$  kN/cm (na vtisk). Opozorimo pa, da je prečna togost stika na vtisk odvisna od mehanskih lastnosti žebeljev in obeh slojev obravnavanega lesenega nosilca.

Na sliki 5 prikazujemo primerjavo izmerjenih (induktivni merilci pomikov – induktivci in merilci pomikov – konjički) in analitičnih zamikov na stiku med slojema obravnavanega nosilca. Dobro ujemanje zamikov dokazuje ustreznost predstavljenega elastičnega matematičnega modela za analizo togosti dvoslojnih lesenih nosilcev. V nadaljevanju detajlneje prikažemo vpliva prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na velikosti kinematičnih in statičnih količin dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca.

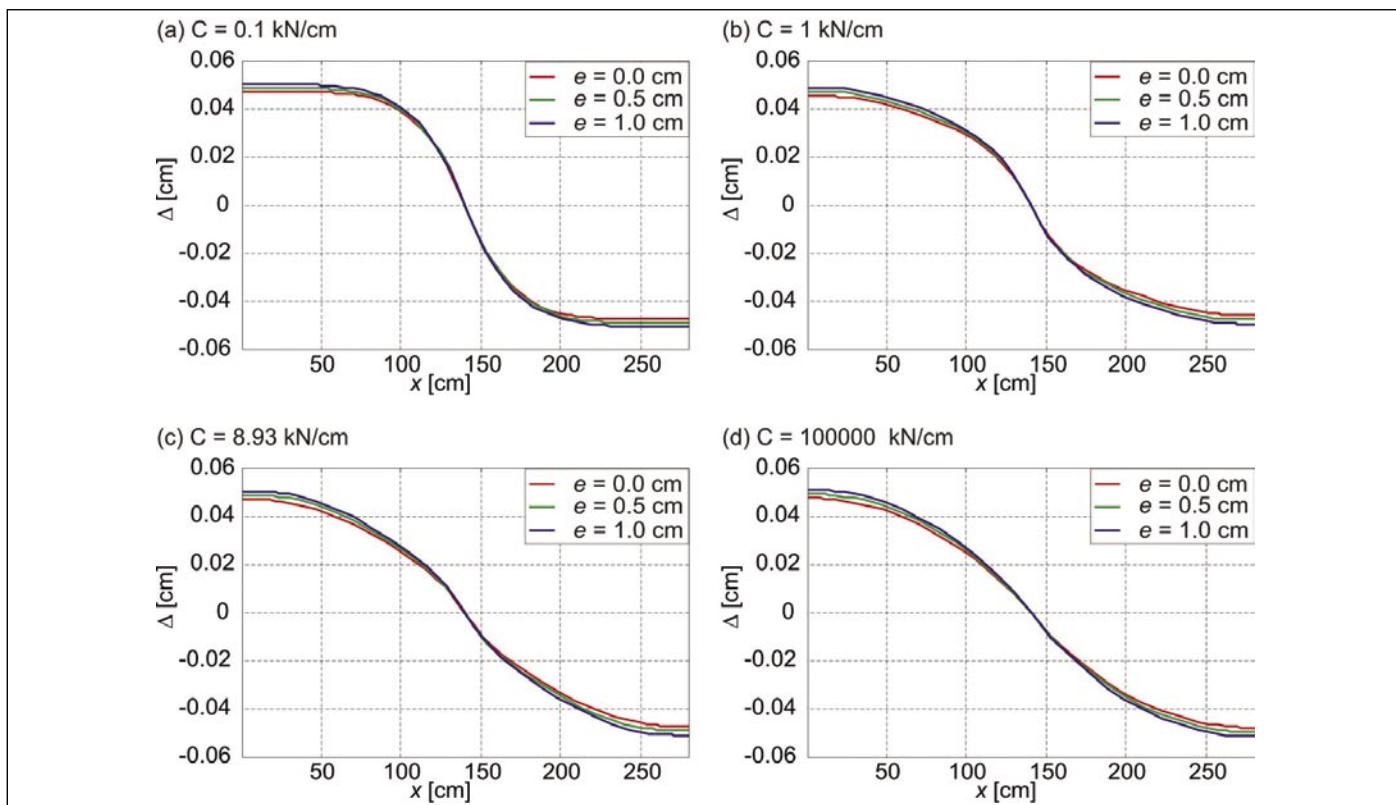
### 3.1 Vpliv prečne togosti stika med slojema

V prvem koraku analiziramo vpliv prečne togosti stika na statične in kinematične količine obravnavanega dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca. Značilne prečne togosti stika so prikazane v preglednici 1. Izbrane so tako, da se prečna povezava med slojema nosilca spreminja od praktično toge povezave pa do zelo podajne. V vseh prikazanih študijah smo za debelino vmesnega sloja izbrali  $e = 0$  cm.

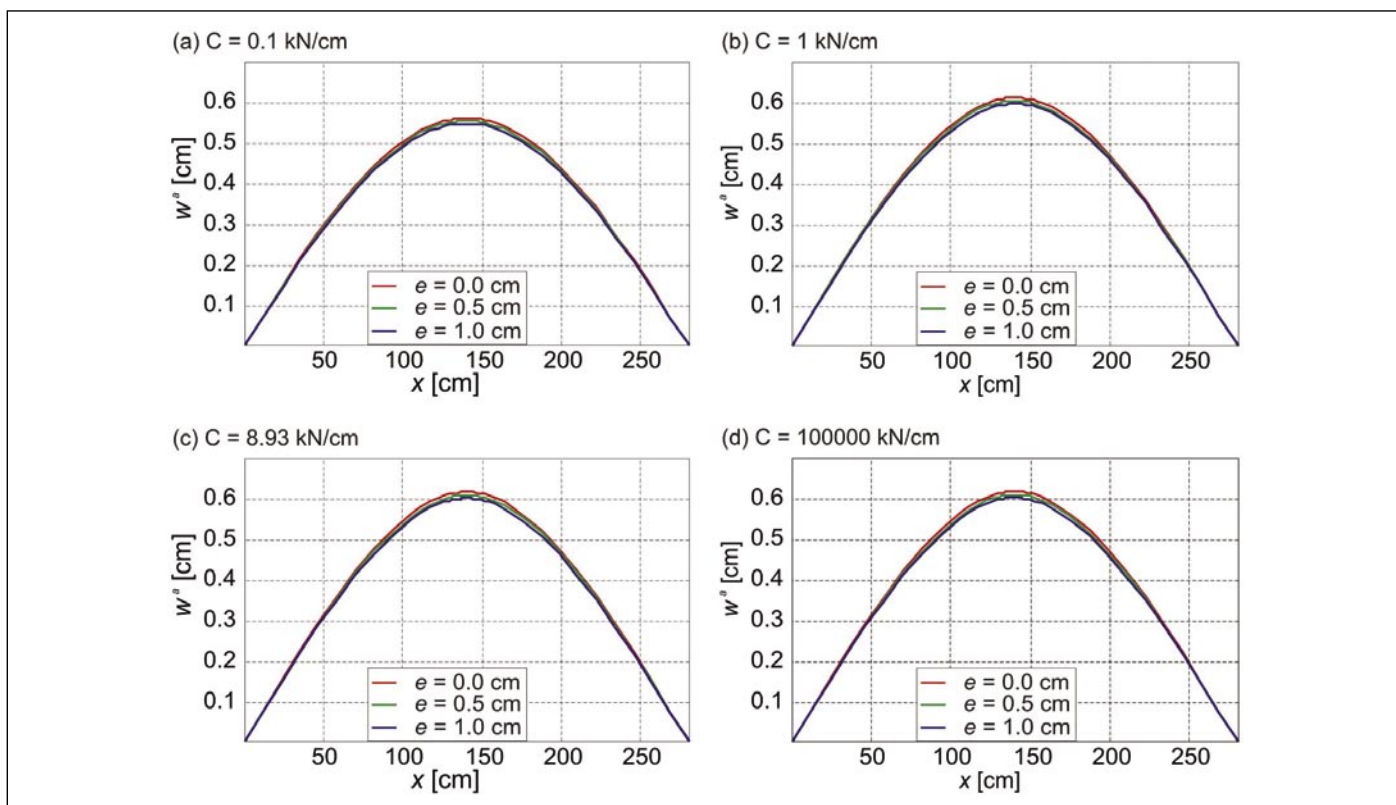
Na sliki 6a prikazujemo spreminjanje zamika na stiku med slojema obravnavanega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika. Kot vidimo, je vpliv prečne togosti stika na zamike



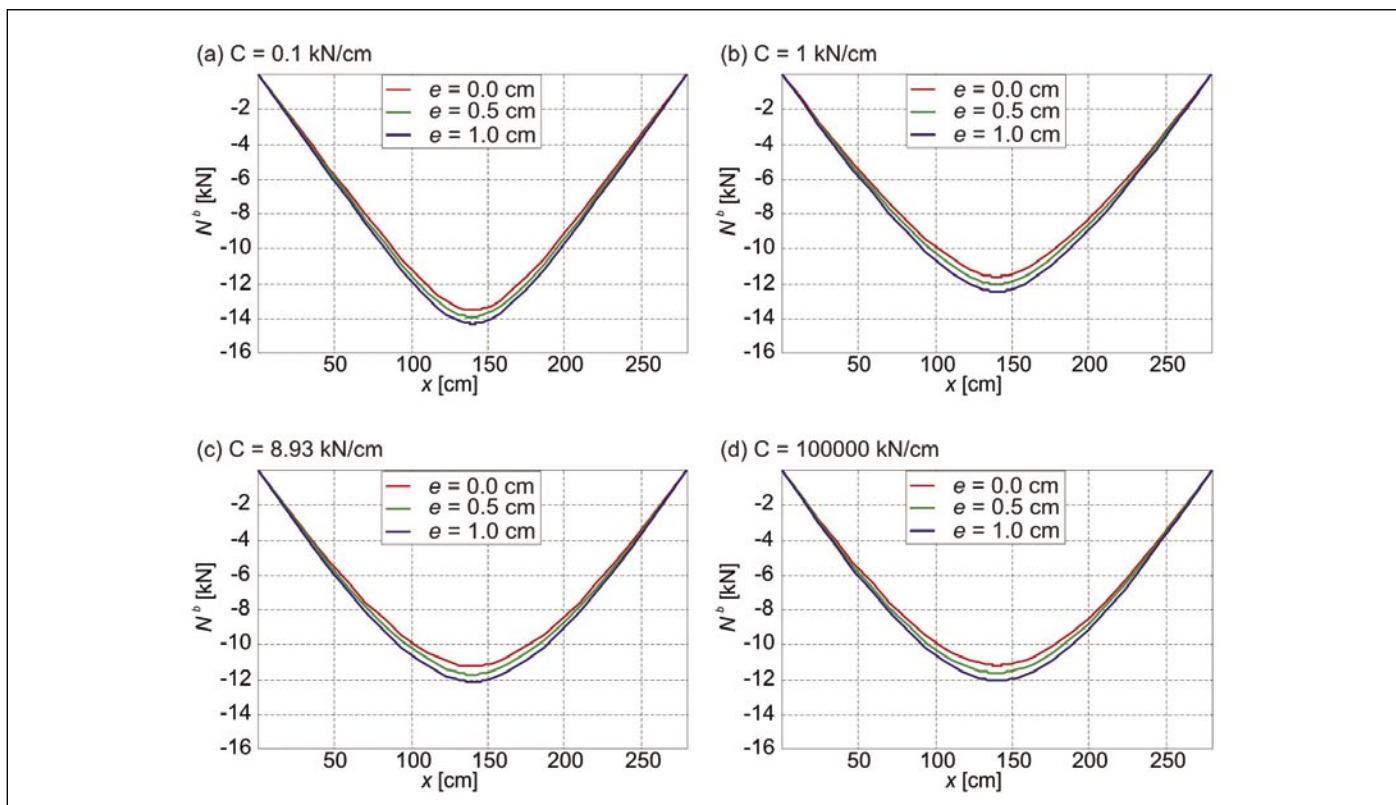
Slika 6 • Vpliv prečne togosti stika na velikosti kinematičnih in statičnih količin dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca



Slika 7 • Spreminjanje zamika med slojema dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za značilne prečne togosti stika med slojema ( $K = 2,488 \text{ kN/cm}$ ,  $E^a = E^b = 1500 \text{ kN/cm}^2$ ,  $P = 7,624 \text{ kN}$ )



Slika 8 • Spreminjanje navpičnega pomika spodnjega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za značilne prečne togosti stika med slojema ( $K = 2,488 \text{ kN/cm}$ ,  $E^a = E^b = 1500 \text{ kN/cm}^2$ ,  $P = 7,624 \text{ kN}$ )



Slika 9 • Spreminjanje osne sile zgornjega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za značilne prečne togosti stika med slojema ( $K = 2,488 \text{ kN/cm}$ ,  $E^a = E^b = 1500 \text{ kN/cm}^2$ ,  $P = 7,624 \text{ kN}$ )

ob robovih nosilca minimalen, nekoliko večji pa je v polju. Se pa zamik z zmanjševanjem prečne togosti stika povečuje proti sredini nosilca. Slika 6b prikazuje spreminjanje razmika v odvisnosti od prečne togosti stika. Jasno je vidno, da se zgornji sloj vtisne v spodnjega in manjša kot je prečna togost stika, bolj se vtisne. To je tudi pričakovano, saj je s točkovno silo obtežen zgornji sloj obravnavanega nosilca, in je togost zgornjega sloja manjša od togosti spodnjega. Zanimivo pa je, da izmerjena prečna togost stika (število veznih sredstev) predstavlja zelo togo prečno povezavo med slojema. Največji vtisk med slojema se po pričakovanjih pojavi na mestu delovanja točkovne sile. Spreminjanje upogibnih momentov spodnjega in zgornjega sloja obravnavanega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika prikazujemo na slikah 6c in 6d. Pri spodnjem sloju se največja vrednost upogibnega momenta z zmanjševanjem prečne togosti stika manjša. Hkrati pa se značilna trikotna oblika grafov upogibnih momentov spremeni v parabolčno. Posledično se s povečevanjem prečne togosti stika upogibna obremenitev zgornjega sloja manjša. Ob tem pa se z zmanjševanjem prečne togosti stika obremenitev zgornjega sloja povečuje na mestu delovanja točkovne sile, proti robovom

pa manjša. Prav tako je na sliki 6d jasno vidna sprememba oblike grafa upogibnega momenta. S slik 6e in 6f vidimo, da prečna togost stika nima bistvenega vpliva na velikost osnih sil tako v zgornjem kot tudi v spodnjem sloju obravnavanega nosilca. Na koncu na slikah 6g in 6h prikazujemo vpliv prečne togosti stika na velikost prečnih sil v obeh slojih obravnavanega nosilca. Podobno kot pri upogibnih momentih se tudi diagrami prečnih sil zaradi prečne togosti stika spremenijo od značilne stopničaste oblike ( $C = \infty$ ) do parabolčne oblike ( $C = 0,1 \text{ kN/cm}$ ). Prav tako tudi pri prečnih silah vidimo opazen vpliv prečne togosti stika med slojema obravnavanega nosilca na njihovo prerazporeditev med slojema.

### 3.2 Vpliv debeline vmesnega sloja

V nadaljevanju analiziramo tudi vpliv debeline vmesnega sloja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca. Parametrično študijo prikazujemo le za tri značilne količine obravnavanega nosilca: za zamik med slojema, za prečni pomik spodnjega sloja in za osno silo zgornjega sloja. V parametrični študiji za debelino vmesnega sloja izberemo:  $e = 0 \text{ cm}$ ,  $e = 0,5 \text{ cm}$ , in  $e = 1 \text{ cm}$ . Na sliki 7 najprej prikazujemo vpliv debeline vmesnega sloja na

zamike med slojema obravnavanega nosilca za štiri značilne vrednosti prečne togosti stika. Kot lahko vidimo na sliki 7, debelina vmesnega sloja nima bistvenega vpliva na velikost zamikov med slojema obravnavanega dvoslojnega prostoležečega nosilca. Na sliki 8 prikazujemo spreminjanje navpičnega pomika spodnjega sloja obravnavanega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za značilne prečne togosti stika. Tudi sedaj opazimo, da ima debelina vmesnega sloja minimalen vpliv na velikost navpičnega pomika spodnjega sloja obravnavanega nosilca.

Na koncu analiziramo še vpliv debeline vmesnega sloja na spreminjanje osne sile zgornjega sloja obravnavanega nosilca za značilne prečne togosti stika. Analizo prikazujemo na sliki 9.

Kot lahko vidimo na sliki 9, je tudi vpliv debeline vmesnega sloja na velikost osne sile zgornjega sloja obravnavanega nosilca minimalen. Se pa osna sila povečuje s povečevanjem debeline vmesnega sloja. Ker je vpliv debeline vmesnega sloja na druge statične, kinematične in deformacijske količine podoben ali celo manjši, sklepamo, da je vpliv debeline vmesnega sloja na togost dvoslojnih lesenih nosilcev praktično zanemarljiv.



## 4 • SKLEP

V članku smo predstavili novi matematični model in pripadajočo analitično rešitev za analizo napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih lesenih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zdrsa in razmika med slojema. Pri izpeljavi matematičnega modela smo upoštevali t. i. linearno teorijo ravninskih nosilcev in linearno elastično obnašanje obeh slojev kompozitnega nosilca ter stika med slojema. Dodatno pa smo pri izpeljavi modela predpostavili, da se interakcija med slojema vzpostavi preko vmesnega sloja, katerega debelina je odvisna od mehanskih

lastnosti lesa in veznih sredstev. Poleg novega matematičnega modela smo v članku predstavili tudi novo analitično rešitev. Ta omogoča točno analizo tudi statično nedoločenih dvoslojnih lesenih linijskih konstrukcij, kot so to na primer kontinuirni dvoslojni leseni nosilci. S prikazanim analitičnim modelom za analizo dvoslojnih lesenih linijskih konstrukcij smo analizirali vpliv prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca. Obravnavani nosilec je bil na sredini razpona zgornjega sloja obtežen

z navpično točkovno silo. S parametričnimi študijami smo ugotovili, da ima prečna togost stika bistven vpliv na normalno komponento vektorja napetosti na stiku med slojema ter na prerazporeditev upogibnih momentov in prečnih sil med slojema, medtem ko debelina vmesnega sloja nima bistvenega vpliva na togost obravnavanega dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca.

Upošteva je veljavno zakonodajo s področja projektiranja lesenih konstrukcij, bo v nadaljnjem raziskovalnem delu smiselno izdelati tudi primerjavo med rezultati predstavljenega matematičnega modela in rezultati t. i.  $\gamma$ -metode po slovenskem standardu SIST EN 1995-1-1: 2005: Projektiranje lesenih konstrukcij.

## 5 • ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujemo prof. dr. Miranu Sajetu za nesebično pomoč pri nastanku članka.

## 6 • LITERATURA

- Adekola, A. O., Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam, *International Journal of Solids and Structures*, 4(11), 1125–1135, 1968.
- Čas, B., Vpliv podajnosti stika na togost in nosilnost sestavljenih nosilcev, *Diplomska naloga*, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani, 1999.
- Čas, B., Bratina, S., Saje, M., Planinc, I., Non-linear analysis of composite steel-concrete beams with incomplete interaction, *Steel and Composite Structures*, 4(6), 489–507, 2004.
- Čas, B., Saje, M., Planinc, I., Buckling of layered wood columns, *Advances in Engineering Software*, 38(8–9), 586–597, 2007.
- Deo, S. G., Raghavendra, V., *Ordinary differential equations and stability theory*, Eighth Reprint, New Delhi, Tata McGraw – Hill Publishing Company Limited, 1994.
- Gara, F., Ranzi, G., Leoni, G., Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(8), 1197–1220, 2006.
- Gattesco, N., Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection, *Journal of Constructional Steel Research*, 52(2), 195–218, 1999.
- Girhammar, U. A., Pan, D. H., Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(2), 239–255, 2007.
- Kryżanowski, A., Schnabl, S., Turk, G., Planinc, I., Exact slip-buckling analysis of two-layer composite columns, *International Journal of Solids and Structures*, 46 (14-15), 2929–2938, 2009.
- Kroflič, A., Analiza obnašanja dvoslojnih elastičnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika, *Raziskovalna naloga*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2007.
- Newmark, N. M., Siess, C. P., Viest, I. M., Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction, *Proceeding of the Society for Experimental Stress Analysis*, 9, 75–92, 1951.
- Ranzi, G., Gara, F., Ansourian, P., General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction, *Computers and Structures*, 84(31–32), 2373–2384, 2006.
- Rassam, H. Y., Goodman, J. R., Buckling behavior of layered wood columns, *Wood Science*, 2(4), 238–246, 1970.
- Robinson, H., Naraine, K. S., Slip and uplift effects in composite beams, *International Conference on Composite Construction in Steel And Concrete. Proceedings of an Engineering Foundation Conference ASCE*, New England College, Henniker, New Hampshire, 487–497, 1988.
- Planinc, I., Schnabl, S., Saje, M., Lopatič, J., Čas, B., Numerical and experimental analysis of timber composite beams with interlayer slip, *Engineering Structures*, 30(11), 2959–2969, 2008.
- Viest, I. M., Review of research on composite steel–concrete beams, *Journal of Structural Division*, *Proceeding of ASCE*, 86(6), 1–21, 1960.
- Wheat, D. L., Calixto, J. M., Nonlinear analysis of two-layered wood members with interlayer slip, *Journal of Structural Engineering*, *ASCE*, 120(6), 1909–1929, 1994.