UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Roman Drnovšek

POZITIVNI OPERATORJI NA BANACHOVIH MREŽAH

Doktorska disertacija

LJUBLJANA , 1996

Kazalo

Povzetek

Doktorska disertacija je razdeljena na štiri poglavja. Prvo uvodno poglavje obravnava osnovne lastnosti Banachovih mrež in operatorjev na njih. Nekoliko podrobneje so obdelani Banachovi funkcijski prostori.

V drugem poglavju najprej definiramo Volterrove integralske operatorje na Banachovih funkcijskih prostorih in spoznamo njihove osnovne lastnosti. V nadaljevanju pa se posvetimo operatorju, ki je posplošitev Volterrovega operatorja (operatorja integriranja) na prostoru $L^2[0,1]$. V primeru, ko je operator injektiven, določimo vse njegove kvazispektralno maksimalne podprostore. Posplošimo tudi znan rezultat o mreži zaprtih invariantnih podprostorov Volterrovega operatorja na $L^2[0,1]$.

V tretjem poglavju obravnavamo Collatz-Wielandtovi oceni spektralnega radija pozitivnega operatorja. Kot aplikacijo dobljenih rezultatov izpeljemo zgornjo in spodnjo oceno za spektralni radij produkta pozitivnih operatorjev v odvisnosti od spektralnih radijev posameznih operatorjev in od pozitivnih lastnih vektorjev, ki ustrezajo tem spektralnim radijem.

V zadnjem poglavju se ukvarjamo z vprašanjem, pri katerih pogojih za polgrupo pozitivnih operatorjev na Banachovi mreži obstaja netrivialen zaprt ideal, ki je invarianten za vse operatorje iz polgrupe. Med drugim dokažemo naslednji rezultat. Če je L diskretna Banachova mreža z urejenostno zvezno normo in če je $\mathcal{S}$ multiplikativna polgrupa kvazinilpotentnih pozitivnih operatorjev na L, potem obstaja veriga pasov prostora L, ki so invariantni za vse operatorje iz $\mathcal{S}$. Ta veriga je maksimalna v mreži vseh zaprtih podprostorov prostora L.

Ključne besede: Banachove mreže, Banachovi funkcijski prostori, integralski operatorji, pozitivni operatorji, spektralni radij, invariantni podprostori.

Summary

The thesis is divided into four chapters. The first one gives some basic facts about Banach lattices and operators defined on them. Banach function spaces are also considered.

The second chapter introduces Volterra kernel operators on Banach function spaces and their fundamental properties. The main part of the chapter is devoted to the operator that generalizes Volterra integration operator on the space $L^2[0,1]$. If the operator is injective, then all its quasispectral maximal subspaces are determined. The well-known result about closed invariant subspaces of Volterra integration operator on $L^2[0,1]$ is extended as well.

The next chapter deals with the Collatz-Wielandt bounds for the spectral radius of positive operators. An application of the obtained results gives simple upper and lower bounds for the spectral radius of a product of positive operators in terms of positive eigenvectors corresponding to the spectral radii of given operators.

In the last chapter we are concerned with the existence of a nontrivial closed ideal (of a Banach lattice) that is invariant under every member of a given multiplicative semigroup of positive operators. We prove the following result. If a discrete Banach lattice L has order continuous norm and if $\mathcal{S}$ is a multiplicative semigroup of quasinilpotent positive operators on L, then there exists a chain of bands, which are invariant under every member of $\mathcal{S}$. Moreover, this chain is maximal in the lattice of all closed subspaces of L.

Math. Subj. Class. (1991) : 46B42, 47B65, 47B38, 47A10, 47A15.

Key words: Banach lattices, Banach function spaces, kernel operators, positive operators, spectral radius, invariant subspaces.

Zahvale

Mentor prof. dr. Matjaž Omladič me je usmeril na zanimivo področje teorije operatorjev. Prisrčno se mu zahvaljujem za vse predlagane smeri mojega raziskovalnega dela, za dragocene nasvete pri nastajanju znanstvenih člankov in za skrbne preglede le teh. Brez njegove pomoči moje usposabljanje za raziskovalno delo ne bi bilo tako uspešno.

Zahvaljujem se tudi vsem ostalim, ki so mi v vseh letih mojega šolanja in študija kakorkoli pomagali. Zahvalo sem dolžan predvsem mojim staršem, ki so mi vedno stali ob strani.

1. Uvod

1.1 Rieszovi prostori

Naj bo M neprazna delno urejena množica, torej je M opremljena z relacijo delne urejenosti $\leq$ (manjše ali enako), ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Relacija $\leq$ določa s predpisom

$$a < b \iff a \leq b \text{ in } a \neq b$$

na M relacijo $<$ (manjše). Namesto $a \leq b$ pišemo tudi $b \geq a$, namesto $a < b$ pa $b > a$. Element $a \in M$ imenujemo **najmanjši element** množice M, kadar za vsak $b \in M$ velja $a \leq b$. Analogno opredelimo **največji element**. Če najmanjši (ali največji) element obstaja, je en sam. Element $a \in M$ je **zgornja meja** podmnožice $N \subseteq M$, če za vsak $b \in N$ velja $b \leq a$. Podobno definiramo **spodnjo mejo**. Kadar je množica vseh zgornjih mej podmnožice $N \subseteq M$ neprazna in ima najmanjši element a, potem elementu a pravimo **najmanjša zgornja meja** oziroma **supremum** množice N, ki ga označimo s $\sup N$. Analogno definiramo **največjo spodnjo mejo** oziroma **infimum** množice N, ki ga zaznamujemo z $\inf N$. Podmnožica $N \subseteq M$ je **navzgor omejena**, kadar ima zgornjo mejo v M, **navzdol omejena**, kadar ima spodnjo mejo v M, in **(urejenostno) omejena**, če je navzgor in navzdol omejena. Množica M je **linearno urejena**, kadar sta poljubna dva elementa $a, b \in M$ primerljiva, torej kadar je $a \leq b$ ali pa $b \leq a$. Linearno urejeno podmnožico delno urejene množice imenujemo **veriga**. Delno urejeni množici M pravimo **mreža**, kadar za vsak par $a, b \in M$ obstajata elementa

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \quad , \quad a \wedge b = \inf\{a, b\} \ .$$

Delno urejen vektorski prostor je realen vektorski prostor L, opremljen z relacijo delne urejenosti $\leq$, ki je usklajena z algebrskima operacijama vektorskega prostora na naslednji način: za vse $\lambda \in \mathbb{R}^+$ in vse $f, g, h \in L$, ki ustrezajo pogoju $f \leq g$, velja $\lambda f \leq \lambda g$ in $f + h \leq g + h$.

Delno urejen vektorski prostor L imenujemo **Rieszov prostor** oziroma **vektorska mreža**, kadar je L skupaj z relacijo delne urejenosti $\leq$ mreža. Hitro vidimo, da v Rieszovem prostoru L za vsak par $f, g \in L$ velja enakost

$$f \wedge g + f \vee g = f + g \ .$$

Podmnožico

$$L^+ = \{f \in L : f \geq 0\}$$

Rieszovega prostora L imenujemo **pozitivni stožec**, vektorje iz L^+ pa **pozitivne vektorje**. **Pozitivni del** vektorja $f \in L$ je vektor $f^+ = f \vee 0$, **negativni del** vektorja f je vektor $f^- = (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$, njegova **absolutna vrednost** pa vektor $|f| = f \vee (-f)$.

Kadar za vektorja f in g Rieszovega prostora L velja $|f| \wedge |g| = 0$, pravimo, da sta f in g **disjunktna** ali **ortogonalna**. Naj bo D poljubna neprazna podmnožica Rieszovega prostora L. Potem množico

$$D^d = \{f \in L : |f| \wedge |g| = 0 \ \ \forall\, g \in D\}$$

imenujemo **disjunktni komplement** množice D.

Trditev 1.1 *Naj bo L Rieszov prostor in $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L^+$.*
(a) Za vsak $g \in L^+$ velja

$$(f_1 + \ldots + f_n) \wedge g \leq f_1 \wedge g + \ldots + f_n \wedge g \ .$$

(b) Če so $f_1, \ldots, f_n$ paroma disjunktni, potem velja enakost

$$\sup\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \ .$$

Dokaz. (a) Dovolj je dokazati neenakost pri $n = 2$, saj potem veljavnost neenakosti pri poljubnem $n \in \mathbb{N}$ dobimo s preprosto indukcijo. Ker je $g \leq f_2 + g$, velja

$$(f_1 + f_2) \wedge g = (f_1 + f_2) \wedge (g + f_2) \wedge g = (f_1 \wedge g + f_2) \wedge g \,.$$

Nadalje zaradi $f_1 \wedge g \geq 0$ velja

$$(f_1 \wedge g + f_2) \wedge g \leq (f_1 \wedge g + f_2) \wedge (f_1 \wedge g + g) = f_1 \wedge g + f_2 \wedge g$$

in dokaz je sklenjen.

(b) Ker je $f_1 \wedge f_2 = 0$, je

$$f_1 + f_2 = f_1 \wedge f_2 + f_1 \vee f_2 = f_1 \vee f_2 \ ,$$

torej pri $n = 2$ enakost velja. Pri dokazu indukcijskega koraka najprej z uporabo točke (a) ugotovimo, da je $(f_1 + \ldots + f_n) \wedge f_{n+1} = 0$. Če sedaj enakost velja pri n, potem imamo

$$(f_1 + \ldots + f_n) + f_{n+1} = (f_1 + \ldots + f_n) \vee f_{n+1} = (f_1 \vee \ldots \vee f_n) \vee f_{n+1} \ ,$$

torej enakost velja tudi pri $n + 1$. Dokaz trditve je tako končan. □

Kadar je Rieszov prostor L normiran prostor in za vsak par $f, g \in L$, ki ustreza pogoju $|f| \leq |g|$, velja $\|f\| \leq \|g\|$, je L **normiran Rieszov prostor** oziroma **normirana mreža**. Polno normirano mrežo imenujemo **Banachova mreža**.

Rieszov prostor L je **arhimedski**, kadar velja sklep

$$f, g \in L^+, \ \ nf \leq g \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f = 0 \ .$$

Ekvivalentno je zahtevati, da velja sklep

$$f, g \in L, \ \ nf \leq g \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f \leq 0 \ .$$

Vsaka normirana mreža je arhimedski prostor. Če namreč za par $f, g \in L^+$ velja $nf \leq g$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem je $n \|f\| \leq \|g\|$ za vse $n \in \mathbb{N}$, od koder sledi $f = 0$.

Podprostor I Rieszovega prostora L imenujemo **ideal**, kadar za vsak $f \in I$ velja sklep

$$g \in L, \, |g| \leq |f| \ \Rightarrow \ g \in I \ .$$

Naj bo D poljubna neprazna podmnožica Rieszovega prostora L. Presek vseh idealov, ki vsebujejo množico D, je najmanjši ideal, ki vsebuje D. Zaznamujemo ga z $I(D)$ in imenujemo ideal, generiran z D. Hitro se prepričamo, da velja enakost

$$I(D) = \{f \in L : \exists f_1, \ldots, f_n \in D, \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : |f| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |f_i|\} .$$

Kadar ima D samo en element u, ideal $I(\{u\})$ imenujemo **glavni ideal** in ga označimo z I_u. Torej velja enakost

$$I_u = \{f \in L : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : |f| \leq \lambda |u|\} .$$

Kadar vektor $u \in L^+$ ustreza pogoju $I_u = L$, ga imenujemo **krepka enota** prostora L. Če je L normirana mreža in je glavni ideal I_u vektorja $u \in L^+$ gost podprostor v L, vektor u imenujemo **kvazinotranja točka** stožca L^+.

Ideal A Rieszovega prostora L imenujemo **pas**, če velja $\sup D \in A$ za vsako neprazno podmnožico $D \subseteq A$, ki ima supremum v L. Naj bo D poljubna neprazna podmnožica Rieszovega prostora L. Presek vseh pasov, ki vsebujejo množico D, je najmanjši pas, ki vsebuje D. Označimo ga z $B(D)$ in imenujemo pas, generiran z D. Kadar ima D samo en element u, pas $B(\{u\})$ imenujemo **glavni pas** in ga označimo z B_u. Če je glavni pas B_u vektorja $u \in L^+$ enak L, imenujemo u **šibka enota** prostora L.

Naj bo L normirana mreža. Očitno je vsaka krepka enota prostora L kvazinotranja točka stožca L^+, vsaka kvazinotranja točka pa je šibka enota prostora L. Oglejmo si na primeru, da obratni trditvi ne veljata.

Primer 1.2 Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots) \in (l^\infty)^+$ je kvazinotranja točka stožca $(l^\infty)^+$ natanko tedaj, ko je $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Pri tem pogoju je x tudi krepka enota. Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots) \in (l^\infty)^+$ je šibka enota natanko tedaj, ko je $x_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Naj bo sedaj $L = l^p$ $(1 \leq p < \infty)$ ali $L = c_0$. Podobno kot prej je vektor $x = (x_1, x_2, \ldots) \in L^+$ šibka enota, če in samo če je $x_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je x tudi kvazinotranja točka. Krepkih enot pa L nima.

Podmnožica D delno urejenega vektorskega prostora L je **navzgor usmerjena**, kadar za vsak par $f, g \in D$ obstaja tak vektor $h \in D$, da velja $f \leq h$ in $g \leq h$. Podobno opredelimo pojem **navzdol usmerjene** množice. Vsako podmnožico D delno urejenega vektorskega prostora L lahko obravnavamo kot indeksno množico $\{f_\tau\}$, kjer τ teče po primerni množici. Če je množica $\{f_\tau\}$ navzgor usmerjena, to dejstvo označimo na kratko s $f_\tau \uparrow$. Zapis $f_\tau \uparrow f$ pa naj pomeni, da poleg tega obstaja supremum $f = \sup f_\tau$. Analogno za navzdol usmerjeno množico $\{f_\tau\}$ vpeljemo oznaki $f_\tau \downarrow$ in $f_\tau \downarrow f$. Kadar je množica D zaporedje vektorjev $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, naj oznaki $f_n \uparrow$ in $f_n \downarrow$ zaporedoma pomenita, da je zaporedje naraščajoče oziroma padajoče, torej je $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$ oziroma $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$. Podobno kot prej vpeljemo oznaki $f_n \uparrow f$ in $f_n \downarrow f$.

Delno urejen vektorski prostor L je **Dedekindovo poln**, kadar ima vsaka njegova neprazna navzgor omejena podmnožica najmanjšo zgornjo mejo, oziroma **σ-Dedekindovo poln**, kadar ima vsaka njegova neprazna navzgor omejena števna podmnožica najmanjšo zgornjo mejo. Rieszov prostor L je Dedekindovo poln (σ-Dedekindovo poln) natanko tedaj, ko ima vsaka neprazna navzgor usmerjena omejena podmnožica stožca L^+ najmanjšo zgornjo mejo v L, oziroma L je σ-Dedekindovo poln natanko tedaj, ko ima vsako navzgor omejeno naraščajoče zaporedje stožca L^+ najmanjšo zgornjo mejo v L (glej [33, trditev 3.10]).

Množica $\{f_\tau\}$ vektorjev iz Rieszovega prostora L **urejenostno konvergira** proti vektorju $f \in L$, kadar v L obstaja taka navzdol usmerjena množica $p_\tau \downarrow 0$, da je $|f_\tau - f| \leq p_\tau$ za vse τ. Tedaj pravimo, da je f **urejenostna limita** množice $\{f_\tau\}$ in to zaznamujemo s $f_\tau \xrightarrow{o} f$. Lahko je videti, da je urejenostna limita linearna, tj. iz $f_\tau \xrightarrow{o} f$ in $g_\tau \xrightarrow{o} g$ sledi $af_\tau + bg_\tau \xrightarrow{o} af + bg$ za poljubni realni števili a in b.

Normirana mreža L ima **urejenostno zvezno normo**, kadar je $\|f_\tau\| \downarrow 0$ za vsako navzdol usmerjeno množico $f_\tau \downarrow 0$ v L, oziroma σ-**urejenostno zvezno normo**, kadar je $\|f_n\| \downarrow 0$ za vsako padajoče zaporedje $f_n \downarrow 0$ v L.

Primer 1.3 Banachova mreža $L^p(E, \mu)$ $(1 \le p < \infty)$ ima urejenostno zvezno normo. Če je Banachova mreža $L^\infty(E, \mu)$ neskončnorazsežna, potem nima σ-urejenostno zvezne norme. Res! Tedaj obstaja zaporedje $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktnih merljivih množic s pozitivno mero. Če je f_n karakteristična funkcija množice $\cup_{k=n}^\infty E_k$, potem velja $f_n \downarrow 0$ in $\|f_n\|_\infty = 1$ za vsak n.

1.2 Linearni funkcionali in operatorji

Naj bosta L in M Rieszova prostora. Linearna preslikava (krajše: operator) $T : L \to M$ je **pozitivna**, kadar velja $T(L^+) \subseteq M^+$. Naj bo $\mathcal{L}(L, M)$ vektorski prostor vseh operatorjev iz L v M. Pozitivni stožec $\mathcal{L}^+(L, M) \subseteq \mathcal{L}(L, M)$ vseh pozitivnih operatorjev iz L v M na prostoru $\mathcal{L}(L, M)$ določa kanonično delno urejenost in v njem generira podprostor vseh **regularnih operatorjev** $\mathcal{L}_r(L, M) = \mathcal{L}^+(L, M) - \mathcal{L}^+(L, M)$.

Operator $T \in \mathcal{L}(L, M)$ je **urejenostno omejen**, kadar vsako urejenostno omejeno podmnožico prostora L preslika v urejenostno omejeno podmnožico prostora M. Množica $\mathcal{L}_b(L, M)$ vseh urejenostno omejenih operatorjev je podprostor v $\mathcal{L}(L, M)$ in vsebuje $\mathcal{L}_r(L, M)$. Delno urejeni vektorski prostori $\mathcal{L}(L, M)$, $\mathcal{L}_b(L, M)$ in $\mathcal{L}_r(L, M)$ niso nujno Rieszovi. Kadar je M Dedekindovo poln, pa velja naslednji Kantorovičev izrek (glej npr. [33, izrek 5.2]).

Izrek 1.4 *Naj bosta L in M Rieszova prostora, M Dedekindovo poln. Potem je $\mathcal{L}_b(L,M)$ Dedekindovo poln Rieszov prostor, ki se ujema z $\mathcal{L}_r(L,M)$. Za vsak par operatorjev $S,T \in \mathcal{L}_b(L,M)$ in vsak $f \in L^+$ veljata formuli:*

$$(S \vee T)f = \sup\{Sg + T(f-g) : 0 \leq g \leq f\} ,$$

$$(S \wedge T)f = \inf\{Sg + T(f-g) : 0 \leq g \leq f\} .$$

Prostor $\mathcal{L}_b(L,\mathbb{R})$ urejenostno omejenih linearnih funkcionalov na Rieszovem prostoru L imenujemo **urejenostni dual** prostora L in ga zaznamujemo z $L^\sim$. Ker je $\mathbb{R}$ Dedekindov poln Rieszov prostor, je po izreku 1.4 $L^\sim$ Dedekindovo poln Rieszov prostor, vsak njegov element pa je razlika dveh pozitivnih linearnih funkcionalov.

Pozitiven operator na normirani mreži ni nujno omejen. Vendar velja naslednji rezultat (glej npr. [58, izrek 83.12]).

Izrek 1.5 *Naj bo L Banachova mreža in M normirana mreža. Potem je vsak operator $T \in \mathcal{L}^+(L,M)$ omejen. Če je M Dedekindovo poln, je vsak operator $T \in \mathcal{L}_b(L,M)$ omejen. V posebnem primeru $M = \mathbb{R}$ to pomeni, da je vsak linearen funkcional $\varphi \in L^\sim$ omejen.*

Dokaz naslednjega izreka lahko bralec najde v [58, izrek 85.6].

Izrek 1.6 *Dualni prostor L^* normirane mreže L je ideal v urejenostnem dualu $L^\sim$. Če je L Banachova mreža, je $L^* = L^\sim$.*

Operator $T \in \mathcal{L}(L,M)$ je **Rieszov homomorfizem**, kadar za vsak par $f,g \in L$ velja $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$. Z uporabo enakosti $f \wedge g = f + g - f \vee g$ ugotovimo, da tedaj velja tudi enakost $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$. Rieszov homomorfizem imenujemo **Rieszov izomorfizem**, kadar je bijektiven in je tudi njegov obrat Rieszov homomorfizem.

Trditev 1.7 *Za operator T so ekvivalentne naslednje izjave:*

(a) T je Rieszov izomorfizem.

(b) T je bijektiven Rieszov homomorfizem.

(c) T je pozitivna bijekcija s pozitivnim obratom.

Naj bosta L in M Banachovi mreži. Operator $T \in \mathcal{L}(L, M)$ je **izomorfizem Banachovih mrež**, če je T Rieszov izomorfizem in izomorfizem Banachovih prostorov. Naj bo $T \in \mathcal{L}(L, M)$ Rieszov izomorfizem. Ker je T pozitiven operator, je po izreku 1.5 omejen. Zato je po izreku o odprti preslikavi operator T izomorfizem Banachovih prostorov. Dokazali smo torej, da je vsak Rieszov izomorfizem med Banachovima mrežama pravzaprav izomorfizem Banachovih mrež.

Operator $T \in \mathcal{L}_b(L, M)$ je **σ-urejenostno zvezen**, če iz $f_n \downarrow 0$ v L sledi $\inf_n |Tf_n| = 0$, in je **urejenostno zvezen**, kadar za vsako navzdol usmerjeno podmnožico $f_\tau \downarrow 0$ velja $\inf_\tau |Tf_\tau| = 0$.

Naj bo L normirana mreža z dualom L^*. Z L_c^* in L_n^* zaporedoma označimo prostora vseh σ-urejenostno zveznih in urejenostno zveznih funkcionalov iz L^*. Po [58, izrek 102.6] sta L_c^* in L_n^* pasova prostora L^*.

Izrek 1.8 *Za normirano mrežo L so naslednje trditve ekvivalentne:*

(a) L ima urejenostno zvezno normo.

(b) Vsak zaprt ideal je pas.

(c) $L_n^* = L^*$.

Če je L Banachova mreža, so vse tri trditve ekvivalentne naslednji:

(d) L ima σ-urejenostno zvezno normo in L je σ-Dedekindovo poln.

Primer 1.9 Naj bo φ pozitiven linearen funkcional na Banachovi mreži c vseh konvergentnih zaporedij, definiran s predpisom

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} x_n \, , \ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in c \, .$$

Ni težko videti, da lahko φ razširimo do pozitivnega linearnega funkcionala ϕ na Banachovi mreži l^∞. Naj bo $x^{(n)}$ vektor, ki ima na prvih n mestih ničle, naprej pa enke. Potem je $x^{(n)} \downarrow 0$, toda $\phi(x^{(n)}) = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej ϕ ni σ-urejenostno zvezen funkcional. Posebni primer takih funkcionalov ϕ so Banachove limite (glej npr. [34, str. 317]).

Naj bo X normiran prostor in T omejen operator na X. Podprostor Y prostora X je **invarianten** za operator T, če je $Ty \in Y$ za vse $y \in Y$. Podprostor Y je **netrivialen**, če ni enak $\{0\}$ ali X.

Trditev 1.10 *Naj bo I ideal Rieszovega prostora L in T urejenostno zvezen pozitiven operator na L. Če je I invarianten za T, potem je tudi pas $B(I)$ invarianten za T.*

Dokaz. Za vsak pozitiven vektor $f \in B(I)$ obstaja navzgor usmerjena množica $\{f_\tau\}$ vektorjev iz I, za katere velja $0 \leq f_\tau \uparrow f$ (glej npr. [33, izrek 4.10]). Ker je T urejenostno zvezen, je $0 \leq Tf_\tau \uparrow Tf$. Ker je $Tf_\tau \in I \subseteq B(I)$ in je $B(I)$ pas, imamo končno $Tf \in B(I)$, torej je $B(I)$ invarianten za T. □

1.3 Banachovi funkcijski prostori

Pomemben primer Banachovih mrež so Banachovi funkcijski prostori. Naj bo μ pozitivna σ-končna mera na σ-algebri $\mathcal{B}$ podmnožic množice E. Z $M(E,\mu)$ označimo vektorski prostor vseh (ekvivalenčnih razredov skoraj povsod enakih) merljivih realnih funkcij na E. V $M(E,\mu)$ vpeljemo delno urejenost s predpisom

$$f \leq g \iff f(t) \leq g(t) \text{ skoraj za vse } t \in E \ .$$

Tedaj $M(E,\mu)$ postane Rieszov prostor. Naj bo L poljuben ideal v $M(E,\mu)$. Merljivo množico $A \subseteq E$ imenujmo **ničelna** množica, kadar je za vsak $f \in L$ $f = 0$ skoraj povsod na A. Pri študiju ideala L lahko tako množico odstranimo, to pomeni, da množico E zamenjamo z množico $E - A$. V naslednji trditvi bomo dokazali, da lahko odstranimo vse ničelne množice s pozitivno mero.

Trditev 1.11 *Obstaja največja ničelna množica A_∞, to pomeni, da množica $E - A_\infty$ ne vsebuje nobene ničelne množice s pozitivno mero. Ta množica je do množice z mero 0 enolično določena.*

Dokaz. Najprej obravnavajmo primer, ko je mera μ končna. Z $\mathcal{N}$ označimo družino vseh ničelnih množic. Če postavimo

$$a = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{N}\} ,$$

potem obstaja tako naraščajoče zaporedje množic $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s končno mero, da je $\mu(A_n) \uparrow a$. Unija $A_\infty = \cup_{n=1}^\infty A_n$ je ničelna množica, za katero velja $\mu(A_\infty) = a$. Če je $A \subseteq E - A_\infty$ ničelna množica, potem je $A \cup A_\infty$ tudi ničelna množica, katere mera je večja ali enaka a. Z ozirom na definicijo števila a je zato $\mu(A) = 0$, torej je A_∞ največja ničelna množica.

Naj bo sedaj $\mu(E) = \infty$. Ker je μ σ-končna mera, obstajajo tako zaporedje paroma disjunktnih množic $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s končno mero, katerih unija je množica E. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj bo A_k največja ničelna množica v E_k. Taka množica obstaja po prvem delu tega dokaza in je določena do množice z mero 0 natančno. Potem je $A_\infty = \cup_{k=1}^\infty A_k$ ničelna množica. Če je $A \subseteq E - A_\infty$ ničelna množica, potem je za vsak k tudi množica $A \cap E_k$ ničelna. Ker je $A \cap E_k \subseteq E_k - A_k$, ima $A \cap E_k$ mero nič. Od tod sledi, da je tudi mera množice A enaka 0, torej je A_∞ največja ničelna množica. Enoličnost množice A_∞ je očitna. $\square$

Množico $E_L := E - A_\infty$ imenujemo **nosilec** ideala L. Nosilec je do množice z mero 0 enolično določen. Pokažimo s primerom, da karakteristična funkcija χ_{E_L} nosilca E_L nujno ne pripada idealu L.

Primer 1.12 Naj bo $E = [0, \infty)$, μ Lebesgueova mera in $L = L^p[0, \infty)$, kjer je $1 \le p < \infty$. Nosilec ideala L je tedaj enak E, vendar funkcija, identično enaka 1, ne pripada idealu L.

Vendar pa velja naslednji rezultat (glej [58, izrek 86.2]).

Trditev 1.13 *Za vsak ideal L v $M(E,\mu)$ z nosilcem E_L obstaja tako naraščajoče zaporedje množic $\{E_n\}$, da je $\cup_n E_n = E_L$ ter za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\mu(E_n) \in (0,\infty)$ in $\chi_{E_n} \in L$.*

Banachova mreža L je **Banachov funkcijski prostor**, če je L ideal prostora $M(E,\mu)$. Če je $f \in M(E,\mu)$ in $f \notin L$, potem postavimo $\|f\| = \infty$. V celotnem delu velja naslednja predpostavka:

Nosilec Banachovega funkcijskega prostora L je enak E.

Najbolj znani primeri Banachovih funkcijskih prostorov so prostori $L^p(E,\mu)$, kjer je $1 \le p \le \infty$.

Trditev 1.14 *Vsak Banachov funkcijski prostor L vsebuje šibko enoto, to je funkcijo, ki je skoraj povsod pozitivna.*

Dokaz. Po trditvi 1.13 obstaja tako naraščajoče zaporedje množic $\{E_n\}$, da je $\cup_n E_n = E$ ter za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $0 < \mu(E_n) < \infty$ in $\chi_{E_n} \in L$. Potem funkcija u, definirana s predpisom

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \, \|\chi_{E_n}\|} \, \chi_{E_n} \ ,$$

pripada prostoru L in je očitno povsod pozitivna. $\square$

Naj bo L Banachov funkcijski prostor. Z L' označimo ideal vseh funkcij $g \in M(E,\mu)$, za katere je s predpisom

$$\varphi_g(f) = \int_E f(t)\, g(t)\, d\mu(t)$$

definiran omejen linearen funkcional φ_g na L. Rieszov prostor L' opremimo z normo $\|g\|' = \|\varphi_g\|$, torej

$$\|g\|' = \sup\left\{ \int_E |f(t)\, g(t)|\, d\mu(t) : \|f\| \le 1 \right\} \ .$$

Izrek 1.15 *Preslikava $g \to \varphi_g$ je izometrični Rieszov izomorfizem normirane mreže L' na Banachovo mrežo L_n^*.*

Iz izreka sledi, da je L' tudi Banachov funkcijski prostor. Imenujemo ga **pridruženi prostor** prostora L (oziroma Köthejev dual), normo $\|\cdot\|'$ pa **pridružena norma**.

Banachov funkcijski prostor L' loči točke prostora L (tj. $f = 0$ je edina funkcija iz L, za katero velja $\varphi_g(f) = 0$ za vse $g \in L'$), njegov nosilec pa je enak E (glej [58, izrek 112.1]).

Očitno za vsak $f \in L$ in vsak $g \in L'$ velja neenakost

$$\int_E |f(t)\, g(t)|\, d\mu(t) \leq \|f\|\, \|g\|' \,, \tag{1.1}$$

ki jo imenujemo **posplošena Hölderjeva neenakost**. O izvoru tega imena nas bo seznanil naslednji zgled.

Primer 1.16 Naj bo $L = L^p(E, \mu)$, kjer je $1 \leq p \leq \infty$. Potem je $L' = L^q(E, \mu)$, kjer sta p in q konjungirana eksponenta, to pomeni, da velja enakost $1/p + 1/q = 1$. (Tukaj velja dogovor, da je $1/\infty = 0$.) Neenakost (1.1) je tedaj dobro znana Hölderjeva neenakost.

Ker je Banachov funkcijski prostor L σ-Dedekindovo poln, je po izreku 1.8 njegova norma σ-urejenostno zvezna natanko tedaj, ko je urejenostno zvezna.

Posebno mesto med operatorji na Banachovih funkcijskih prostorih zavzemajo integralski operatorji. Linearen operator K na Banachovem funkcijskem prostoru L imenujemo **integralski operator**, če obstaja taka $\mu\times\mu$-merljiva funkcija $k(s,t)$ na $E \times E$, da za vsako funkcijo $f \in L$ velja

$$\int_E |k(s,t) f(t)|\, d\mu(t) < \infty \quad \text{in}$$

$$(Kf)(s) = \int_E k(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

skoraj za vse $s \in E$.

Ni težko videti, da je integralski operator K pozitiven natanko tedaj, ko je njegovo jedro k skoraj povsod pozitivna funkcija (glej [58, izrek 93.1]).

2. Volterrovi integralski operatorji

2.1 Motivacija

Naj bo V Volterrov operator (operator integriranja) na $L^p[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$, to je operator, definiran s predpisom

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy \ , \quad f \in L^p[0,1] \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

Očitno je za vsak $a \in [0,1]$ zaprt podprostor

$$B(a) = \{f \in L^p[0,1] : \ f = 0 \ \text{ s.p. na } \ [0,a]\}$$

invarianten za operator V. Zanimivo (in morda presenetljivo) pa je dejstvo, da so v primeru $p < \infty$ to edini zaprti invariantni podprostori operatorja V. Velja namreč naslednji rezultat (glej [14] ali [31]).

Izrek 2.1 *Naj bo V Volterrov operator na $L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$. Potem je veriga podprostorov $\{B(a) : a \in [0,1]\}$ enaka mreži vseh zaprtih podprostorov prostora $L^p[0,1]$, ki so invariantni za operator V.*

Namen tega poglavja je primerno definirati Volterrov operator na poljubnem Banachovem funkcijskem prostoru in o njegovih invariantnih podprostorih (poleg drugih izrekov) dokazati rezultat, ki je razširitev izreka 2.1. Naslednji primer nas prepriča, da ni očitno, kako posplošiti izrek 2.1, saj v primeru $p = \infty$ izrek ne velja.

Primer 2.2 Naj bo V Volterrov operator na Banachovem prostoru $L^\infty[0,1]$. Dokažimo, da veriga pasov $\{B(a) : a \in [0,1]\}$ ni enaka niti mreži vseh invariantnih zaprtih idealov operatorja V. Z I označimo množico vseh $f \in L$, za katere pri vsakem $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta \in (0,1)$, da je $|f(t)| \leq \epsilon$ skoraj za vse $t \in [0,\delta]$. Lahko se je prepričati, da je I zaprt ideal, invarianten za operator V. Očitno je tudi, da ne obstaja $a \in [0,1]$ z lastnostjo $I = B(a)$.

V naslednjih dveh razdelkih bomo definirali Volterrove integralske operatorje (s poljubnim jedrom) na Banachovih funkcijskih prostorih, spoznali njihove osnovne lastnosti, v nadaljevanju pa se bomo posvetili operatorju, ki je posplošitev (zgoraj omenjenega) Volterrovega operatorja. Naš operator je hkrati posplošitev operatorja iz [43], ki je definiran na prostoru $L^p(E,\mu)$, $1 \le p \le \infty$.

2.2 Operatorji s končno dvakratno normo

Naj bo μ pozitivna σ-končna mera na σ-algebri $\mathcal{B}$ podmnožic množice E in naj bo L Banachov funkcijski prostor na merljivem prostoru $(E,\mathcal{B},\mu)$. Integralski operator K na L z jedrom k imenujemo **operator s končno dvakratno normo** (ali **Hille-Tamarkinov** operator), če

(i) skoraj za vsak $s \in E$ funkcija $k_s \in M(E,\mu)$, definirana s predpisom $k_s(t) = k(s,t)$, pripada prostoru L', in

(ii) funkcija $h : E \to [0,\infty)$, definirana s predpisom $h(s) = \|k_s\|'$ skoraj za vse $s \in E$, pripada prostoru L.

Število $\|\!|K|\!\| := \|h\|$ imenujemo **dvakratna norma** operatorja K. Operatorsko normo bomo (kot običajno) označevali z $\|\cdot\|$. Precej težko je dokazati, da je funkcija h vedno merljiva (glej [58, posledica 99.3]).

Na Banachovem funkcijskem prostoru $L^p(E,\mu)$ $(1 < p < \infty)$ sta take integralske operatorje že leta 1934 obravnavala Hille in Tamarkin [28].

Primer 2.3 Naj bo $L = L^p(E,\mu)$ $(1 < p < \infty)$ in $1/p + 1/q = 1$. Naj ima integralski operator K na L (z jedrom k) končno dvakratno normo. Potem je

$$\|\!|K|\!\| = \left(\int_E \left(\int_E |k(s,t)|^q \, d\mu(t)\right)^{p/q} d\mu(s)\right)^{1/p} .$$

V posebnem primeru $p = q = 2$ imamo

$$\|\!|K|\!\| = \|k\|_2 = \left(\int_E\int_E |k(s,t)|^2 \, d\mu(s)d\mu(t)\right)^{1/2} .$$

V tem primeru je potemtakem razred operatorjev s končno dvakratno normo enak razredu Hilbert-Schmidtovih operatorjev.

Znano je, da je vsak Hilbert-Schmidtov operator omejen. Dokažimo, da to velja tudi za vsak operator s končno dvakratno normo.

Trditev 2.4 *Naj bo K integralski operator na L s končno dvakratno normo. Potem je K omejen operator in velja $\|K\| \le \|\!|K|\!\|$.*

Dokaz. Za vsako funkcijo $f \in L$ in skoraj vse $s \in E$ velja neenakost

$$|(Kf)(s)| \le \int_E |k(s,t)\, f(t)|\, d\mu(t) \le \|k_s\|' \, \|f\| = h(s)\, \|f\| \ ,$$

od koder sledi $\|Kf\| \le \|h\| \, \|f\| = \|\!|K|\!\| \, \|f\|$. Torej je res $\|K\| \le \|\!|K|\!\|$. □

Naslednji rezultat o kompaktnosti operatorjev s končno dvakratno normo povzemamo po članku [52, izrek 2.3].

Izrek 2.5 *Če imata prostora L in L' urejenostno zvezni normi, potem je vsak operator s končno dvakratno normo kompakten.*

2.3 Volterrovi integralski operatorji na Banachovih funkcijskih prostorih

Naj bo L Banachov funkcijski prostor in K integralski operator na L z jedrom k in s končno dvakratno normo. Če obstaja taka merljiva funkcija $\phi : E \to \mathbb{R}$, da je $k(s,t) = 0$ skoraj za vse $(s,t) \in E \times E$, za katere velja $\phi(s) \le \phi(t)$, potem operator K imenujemo **Volterrov integralski operator**. Očitno smemo predpostaviti, da je zaloga vrednosti funkcije ϕ vsebovana v intervalu $[0,1]$, saj lahko ϕ komponiramo na primer s strogo naraščajočo funkcijo $\tau : \mathbb{R} \to [0,1]$, ki je definirana s predpisom $\tau(x) = 1/2 + (1/\pi)\,\mathrm{arctg}\, x$. Volterrov integralski operator je potemtakem definiran s predpisom

$$(Kf)(s) = \int_{E_s} k(s,t) f(t)\, d\mu(t)\ , \quad f \in L\ , \quad s \in E\,,$$

kjer je $E_s = \{t \in E : \phi(t) < \phi(s)\}$.

Primer 2.6 Naj bo $E = [0,1]$, μ Lebesgueova mera na E, $\phi(t) = t$, $L = L^2[0,1]$ in $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Potem je operator, podan s predpisom

$$(Kf)(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt\ , \quad f \in L^2[0,1]\ , \quad s \in [0,1]\ ,$$

Volterrov integralski operator na $L^2[0,1]$.

Znano je, da je operator K iz primera 2.6 kvazinilpotenten (glej npr. [27, problem 147]). V naslednjem izreku bomo pokazali, da ima vsak Volterrov integralski operator na L to lastnost, če imata le L in L' urejenostno zvezni normi. Dokaz tega rezultata je dejansko samo nekoliko predelan dokaz iz [27, problem 147].

Izrek 2.7 *Naj bo L tak Banachov funkcijski prostor, da sta normi prostorov L in L' urejenostno zvezni. Naj bo K Volterrov integralski operator na L. Potem je K kvazinilpotenten operator.*

Najprej bomo pokazali naslednji pomožni rezultat.

Lema 2.8 *Naj veljajo pogoji izreka in naj bo ϵ poljubno pozitivno število. Potem obstajata taka Volterrova integralska operatorja A in B na L in tak $m \in \mathbb{N}$, da je:*

(1) *$K = A + B$;* (2) *$\|A\| < \epsilon$;*

(3) *vsak produkt, sestavljen iz operatorjev A in B, v katerem je več kot m faktorjev enakih B, je enak* 0.

Dokaz. Naj bo k jedro operatorja K in naj bo

$$E(\delta) = \{(s,t) \in E \times E : \phi(s) \leq \phi(t) + \delta\} ,$$

kjer je $\delta \in (0, \infty)$. Zlahka se prepričamo, da je funkcija $k_n = k \cdot \chi_{E(1/n)}$ jedro nekega Volterrovega integralskega operatorja na L, ki ga označimo s K_n. Skoraj za vse $s \in E$ je s predpisom $(k_n)_s(t) = k_n(s,t)$ definirano padajoče zaporedje $\{|(k_n)_s|\}_{n \in \mathbb{N}}$ funkcij iz prostora L', ki urejenostno konvergira proti 0. S predpisom $h_n(s) = \|(k_n)_s\|'$ definiramo padajoče zaporedje $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funkcij iz L, ki prav tako konvergira proti 0, saj je norma prostora L' po predpostavki urejenostno zvezna. Ker je tudi norma prostora L urejenostno zvezna, števila $|||K_n||| = \|h_n\|$ tudi padajo proti 0. Ker po trditvi 2.4 velja neenakost $\|K_n\| \leq |||K_n|||$, zaporedje $\{\|K_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ prav tako konvergira proti 0. Zato obstaja tako naravno število m, da je $\|K_m\| < \epsilon$. Če postavimo $A = K_m$ in $B = K - K_m$, sta pogoja (1) in (2) očitno izpolnjena. Dokažimo, da ima operator B tudi nenavadno "nilpotentno" lastnost (3). Naj bo C poljuben integralski operator, katerega jedro k_C je enako 0 na množici $E(\delta)$, kjer je $\delta \in [0,1]$. Potem je jedro k_{BC} integralskega operatorja BC enako 0 skoraj povsod na množici $E(\delta + 1/m)$. Res! Ker je $k_B(s,u) = 0$ skoraj za vse $(s,u) \in E(1/m)$ in $k_C(u,t) = 0$ skoraj za vse $(u,t) \in E(\delta)$, je $k_{BC}(s,t) = \int_E k_B(s,u) k_C(u,t)\, d\mu(u) = 0$ skoraj za vse $(s,t) \in E(\delta + 1/m)$. Podobno pokažemo, da je jedro k_{AC} integralskega operatorja AC enako 0 skoraj povsod na množici $E(\delta)$.

Vzemimo sedaj poljuben produkt, ki je sestavljen iz operatorjev A in B, in ga začnimo množiti. Če smo že k-krat pomnožili z operatorjem B, je jedro dobljenega produkta enako 0 skoraj povsod na $E(k/m)$ in to ne glede na to, kolikokrat smo množili z operatorjem A. To pa pomeni, da je jedro produkta enako 0 skoraj povsod na $E \times E$, brž ko je več kot m faktorjev enakih B. Dokaz leme je tako končan. $\square$

Dokaz izreka 2.7. Naj veljajo oznake iz leme. Z upoštevanjem lastnosti (1)-(3) ugotovimo, da za vsak $n > m$ velja enakost

$$\|K^n\| \leq \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \epsilon^{n-i} \|B\|^i \ .$$

Če uporabimo očitno oceno $\binom{n}{i} \leq n^m$, ki velja za vse $0 \leq i \leq m$, dobimo neenakost

$$\|K^n\|^{1/n} \leq \epsilon \cdot n^{m/n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} \epsilon^{-i} \|B\|^i \right)^{1/n} \ ,$$

od koder sledi

$$r(K) = \lim_{n \to \infty} \|K^n\|^{1/n} \leq \epsilon \ .$$

Torej je $r(K) = 0$, kar je bilo treba dokazati. □

Naslednja primera dokazujeta, da izrek 2.7 ne velja, če norma prostora L ni urejenostno zvezna.

Primer 2.9 Naj bo S operator obratnega premika na Banachovem funkcijskem prostoru l^∞, to je operator, definiran s predpisom

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots) \ .$$

Brž se prepričamo, da je S Volterrov integralski operator na l^∞ in da je $|||S||| = \|S\| = r(S) = 1$.

Primer 2.10 Naj bo K integralski operator na Banachovem funkcijskem prostoru $L^\infty[0,1]$, definiran s predpisom

$$(Kf)(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t)\, dt \ , \quad s \in (0,1] \ .$$

Lahko je videti, da je K Volterrov integralski operator na $L^\infty[0,1]$ z dvakratno normo $|||K||| = 1$. Po drugi strani je za vsak $\alpha \in (0, \infty)$ funkcija $f_\alpha(t) = t^\alpha$ lastna funkcija operatorja K, ki ustreza lastni vrednosti $1/(1+\alpha)$. Od tod sledi, da je $r(K) \geq 1$. Ker je $r(K) \leq \|K\| \leq |||K||| = 1$, imamo končno $r(K) = \|K\| = 1$.

2.4 Volterrov integralski operator V

V tem razdelku bomo definirali operator, ki ga bomo podrobneje obravnavali v nadaljevanju tega poglavja. Naj bo $\phi : E \to [0,1]$ taka funkcija, da je množica $E_t = \{s \in E : \phi(s) \leq \phi(t)\}$ merljiva za vsak $t \in E$.

Trditev 2.11 *Funkcija ϕ je merljiva.*

Dokaz. Dovolj je dokazati, da je za vsak $c \in [0,1]$ množica $\{s \in E : \phi(s) \leq c\}$ merljiva. Smemo predpostaviti, da je ta množica neprazna. Postavimo $d = \sup\{\phi(s) : \phi(s) \leq c\}$ in izberimo tako zaporedje $\{s_n\}$ elementov iz E, da zaporedje $\{\phi(s_n)\}$ narašča proti d. (Če je $\phi(s) = d$ za neki element $s \in E$, potem definiramo $s_n = s$.) Potem je množica $\{s \in E : \phi(s) \leq c\} = \cup_n E_{s_n}$ merljiva. $\square$

Nadalje predpostavimo, da za vsak $t \in E$ velja

$$\mu(\{s \in E : \phi(s) = \phi(t)\}) = 0 \ . \tag{2.1}$$

Naj bosta $u \in L$ in $v \in L'$ poljubni skoraj povsod pozitivni funkciji. (Po trditvi 1.14 taki funkciji obstajata.) Naj bo integralski operator V na L podan s predpisom

$$(Vf)(t) = u(t) \int_{E_t} f(s)\, v(s)\, d\mu(s) = u(t) \int_{\phi(s)<\phi(t)} f(s)\, v(s)\, d\mu(s) \ ,$$

kjer je $f \in L$ in $t \in E$. Ker je $\|V\| = \|v\|' \, \|u\|$, operator V pripada razredu Volterrovih integralskih operatorjev in je posplošitev v prvem razdelku omenjenega Volterrovega operatorja na $L^p[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Operator V je hkrati posplošitev operatorja iz [43], ki je definiran na prostoru $L^p(E,\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Pokažimo, da se pri študiju invariantnih podprostorov operatorja V lahko omejimo na primer, ko je $\mu(E) = 1$ in $u = v = e \in L \cap L'$, kjer smo z e označili merljivo funkcijo, identično enako 1.

Ker je $c = \int_E uv\, d\mu = \varphi_v(u)$ pozitivno realno število, lahko funkcijo u zamenjamo s funkcijo $(1/c)\, u$. Tedaj velja $\int_E uv\, d\mu = 1$. Če sedaj z m označimo pozitivno mero na Σ, definirano s predpisom $m(A) = \int_A uv\, d\mu$, potem je $m(E) = 1$, torej je m verjetnostna mera. Očitno je m ekvivalentana z μ, to pomeni, da je $m(A) = 0$ natanko tedaj, ko je $\mu(A) = 0$. Od tod zaključimo, da je $M(E, m) = M(E, \mu)$. Banachov funkcijski prostor $L_m \subseteq M(E, m)$ definirajmo tako, da je preslikava $R : L \to L_m$, definirana s predpisom $R(f) = f/u$, izometrični izomorfizem Banachovih mrež. Potem je operator $V_m = RVR^{-1}$ na L_m definiran s predpisom

$$(V_m f)(t) = \int_{E_t} f(s)\, dm(s)$$

za vsak $f \in L_m$ in skoraj vsak $t \in E$. Naj bo L'_m pridruženi prostor prostoru L_m (glede na mero m). Brez težav pokažemo, da je preslikava $L' \to L'_m$, definirana s predpisom $g \to g/v$, izometrični izomorfizem Banachovih mrež. Očitno je $e \in L_m \cap L'_m$, torej je $L^\infty(E, m)$ podprostor prostorov L_m in L'_m. Potemtakem lahko namesto operatorja V študiramo operator V_m. S tem smo pokazali, da smemo predpostaviti, da je $\mu(E) = 1$ in $u = v = e \in L \cap L'$. Ker za vsak $f \in L$ velja $\int_E |f|\, d\mu = \varphi_e(|f|) < \infty$, za vsak $g \in L'$ pa $\int_E |g|\, d\mu = \varphi_{|g|}(e) < \infty$, imamo $L \cup L' \subseteq L^1(E, \mu)$. To dejstvo bomo večkrat uporabili.

Za vsak $a \in [0, 1]$ označimo z $B(a)$ množico vseh funkcij $f \in L$, za katere je $f(t) = 0$ skoraj za vse $t \in E$ z lastnostjo $\phi(t) \leq a$. Očitno je $B(a)$ pas, ki je invarianten za operator V.

V nadaljevanju tega poglavja bomo dokazali nekaj rezultatov naslednjega tipa: podprostori $B(a)$, $a \in [0, 1]$, so edini med invariantnimi podprostori operatorja V, ki imajo predpisano lastnost. Prvi tak rezultat je naslednji

Izrek 2.12 *Veriga podprostorov $\{B(a) : a \in [0, 1]\}$ je enaka družini vseh pasov, invariantnih za operator V.*

Dokaz. Naj bo B poljuben netrivialen pas, invarianten za operator V. Označimo $M = \{b \in [0, 1) : B \subseteq B(b)\}$ in $a = \sup M$. Ker je $\cap_{b \in M} B(b) = B(a)$, je

$B \subseteq B(a)$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja taka funkcija $f_n \in B$, da je

$$\mu(\{s \in E : \phi(s) \leq a + 1/n, f_n(s) \neq 0\}) > 0 .$$

Od tod sledi eksistenca takega števila $\alpha_n > 0$, da ima množica

$$C_n = \{s \in E : \phi(s) \leq a + 1/n, |f_n(s)| \geq \alpha_n\}$$

pozitivno mero. Ker je $|f_n| \geq \alpha_n \chi_{C_n}$, je $\chi_{C_n} \in B$. Če je $\phi(t) \geq a + 1/n$, potem je $(V\chi_{C_n})(t) = \mu(C_n)$ in zato $(V\chi_{C_n})\chi_{A_n} = \mu(C_n)\chi_{A_n}$, kjer je $A_n = \{t \in E : \phi(t) \geq a + 1/n\}$. Ker je $V\chi_{C_n} \in B$ in ker je B ideal, je $\chi_{A_n} \in B$. Če je $A = \{t \in E : \phi(t) \geq a\}$, potem je $\chi_A \in B$, saj je $\chi_A = \sup_n \chi_{A_n}$ in je B pas. Torej je $B(a) \subseteq B$ in končno $B = B(a)$. $\square$

V tem razdelku o operatorju V zabeležimo še nekaj pomembnih dejstev. Za vsak $t \in E$ definirajmo $\psi(t) = \mu(E_t)$ in $F_t = \{s \in E : \psi(s) \leq \psi(t)\}$. Od sedaj naprej predpostavimo, da velja $\{F_t : t \in E\} \subseteq \Sigma$. Iz dokaza naslednje trditve bo razvidno, da je ta pogoj izpolnjen, če je mera μ polna.

Trditev 2.13 *Za vsak $t \in E$ velja $E_t \subseteq F_t$ in $\mu(F_t - E_t) = 0$, torej je $\mu(F_t) = \psi(t)$. Funkcija ψ je merljiva in izpolnjuje pogoj*

$$\mu(\{s \in E\, ,\ \psi(s) = \psi(t)\}) = 0 \tag{2.2}$$

za vsak $t \in E$.

Dokaz. Ker iz $\phi(s) \leq \phi(t)$ očitno sledi $\psi(s) \leq \psi(t)$, je $E_t \subseteq F_t$. Izberimo $t \in E$ in postavimo $a = \sup\{\phi(s) : \psi(s) = \psi(t)\}$. Potem izberimo tako zaporedje $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementov množice E, da zaporedje $\{\phi(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ narašča proti a ter je $\phi(s_n) \geq \phi(t)$ in $\psi(s_n) = \psi(t)$ za vse n. (Če je $\phi(s) = a$ in $\psi(s) = \psi(t)$ pri nekem $s \in E$, definirajmo $s_n = s$.) Očitno je $E_t \subseteq E_{s_n}$ in $\mu(E_t) = \mu(E_{s_n})$, torej je $\mu(E_{s_n} - E_t) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Od tod sledi, da je $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_{s_n} - E_t) = 0$. Za dokaz prve trditve je potemtakem dovolj videti, da je $F_t \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_{s_n}$. Vzemimo poljuben $u \notin \cup_{n=1}^{\infty} E_{s_n}$. Potem je $\phi(u) > \phi(s_n)$ za vse n in zato $\psi(u) > \psi(t)$ (glej definicijo števila a), torej $u \notin F_t$, kar smo želeli pokazati.

Funkcija ψ je merljiva po trditvi 2.11. Dokažimo še enakost (2.2). Do sedaj smo dejansko dokazali, da je $\mu(\{s \in E\, :\, \psi(s) = \psi(t)\, ,\ \phi(s) > \phi(t)\}) = 0$. Če postavimo $b = \inf\{\phi(s) : \psi(s) = \psi(t)\}$, podobno kot zgoraj dokažemo, da je

$$\mu(\{s \in E\, :\, \psi(s) = \psi(t)\, ,\ b < \phi(s) \leq \phi(t)\}) = 0\ .$$

Z upoštevanjem enakosti (2.1) končno dobimo enakost (2.2). □

Na osnovi trditve 2.13 smemo privzeti (in to tudi bomo), da je $\mu(E_t) = \phi(t)$ za vse $t \in E$. Če namreč to ni res, zamenjamo E_t in ϕ zaporedoma s F_t in ψ.

Ni težko videti, da velja $\sup\{\phi(t) : t \in E\} = 1$ in $\inf\{\phi(t) : t \in E\} = 0$. Pravzaprav velja še nekaj več.

Trditev 2.14 *Če je* $0 \leq a \leq b \leq 1$, *potem* $\mu(\{t \in E : a \leq \phi(t) \leq b\}) = b - a$.

Dokaz. Očitno zadošča obravnavati primer, ko je $a = 0$ in $0 < b < 1$. Postavimo $c = \sup\{\phi(t) : \phi(t) \leq b\}$ in $d = \inf\{\phi(t) : \phi(t) \geq b\}$ ter izberimo taki zaporedji $\{s_n\}$ in $\{t_n\}$ elementov iz množice E, da je $\phi(s_n) \uparrow c$ in $\phi(t_n) \downarrow d$. Potem z upoštevanjem enakosti (2.1) dobimo

$$c = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{s_n}) = \mu(\{t \in E : \phi(t) \leq c\}) = \mu(\{t \in E : \phi(t) \leq b\}) \quad \text{in}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{t_n}) = \mu(\{t \in E : \phi(t) \leq d\}) = \mu(\{t \in E : \phi(t) \leq b\})\ .$$

Od tod sledi $c = d = b$ in zato je $\mu(\{t \in E : \phi(t) \leq b\}) = b$. □

Trditev 2.15 *Naj bo* $a \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ *in* $A = \{s \in E : \phi(s) \geq a\}$. *Potem je*

$$V^n \chi_A = \frac{(\phi - a)^n \chi_A}{n!}\ ,$$

kjer je število a *krajši zapis za funkcijo* $a\,e$.

Dokaz. Skoraj za vsak $t \in E$ velja

$$(V^n\chi_A)(t) = \int_{a<\phi(t_1)<\phi(t)} d\mu(t_1) \int_{a<\phi(t_2)<\phi(t_1)} d\mu(t_2) \cdot \ldots \cdot \int_{a<\phi(t_n)<\phi(t_{n-1})} d\mu(t_n) =$$

$$= \int_{a<\phi(t_n)<\phi(t_{n-1})<\ldots<\phi(t_1)<\phi(t)} d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_n) \ . \qquad (2.3)$$

Ker je enakost, ki jo dokazujemo, očitno izpolnjena v primeru, ko je $\phi(t) < a$, vzemimo, da je $\phi(t) \geq a$. Naj bo σ poljubna permutacija števil $1, 2, 3, \ldots, n$. Vrednost integrala

$$\int_{a<\phi(t_{\sigma(n)})<\phi(t_{\sigma(n-1)})<\ldots<\phi(t_{\sigma(1)})<\phi(t)} d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_n)$$

očitno ni odvisna od izbire permutacije σ, vsota vseh takih integralov po vseh permutacijah pa je enaka

$$\left(\int_{a<\phi(s)<\phi(t)} d\mu(s)\right)^n = (\mu(\{s \in E : a < \phi(s) < \phi(t)\}))^n = (\phi(t) - a)^n \ ,$$

kjer smo uporabili (2.1) in trditev 2.14. Od tod sledi željena enakost. □

Trditev 2.16 *Če je $a \in [0, 1]$ in $A = \{s \in E : \phi(s) \geq a\}$, potem je*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\phi - a)^n \chi_A\|^{1/n} = 1 - a \ .$$

Dokaz. Ker je enakost očitno izpolnjena, če je $a = 1$, vzemimo, da je $a < 1$. Tedaj ima po trditvi 2.14 za vsak $c \in [a, 1)$ množica $C = \{s \in E : \phi(s) \geq c\}$ pozitivno mero. Ker je $(c - a) \cdot \chi_C \leq (\phi - a) \cdot \chi_A \leq (1 - a) \cdot e$, imamo

$$c - a \leq \liminf_{n\to\infty} \|(\phi - a)^n \chi_A\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|(\phi - a)^n \chi_A\|^{1/n} \leq 1 - a \ ,$$

od koder sledi željena enakost. □

Trditev 2.17 *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $f \in L$ velja enakost*

$$(n-1)!\,(V^n f)(t) = \int_{\phi(s)<\phi(t)} (\phi(t) - \phi(s))^{n-1} f(s)\, d\mu(s)$$

skoraj za vse $t \in E$.

Dokaz. Očitno smemo predpostaviti, da je f nenegativna funkcija. Za vsak $s \in E$ definiramo množico $A(s) = \{u \in E : \phi(u) \geq \phi(s)\}$. Z uporabo Fubinijevega izreka dobimo enakost

$$(V^n f)(t) = \int_{\phi(s)<\phi(t)} f(s)\, d\mu(s) \int_{\phi(s)<\phi(t_{n-1})<\ldots<\phi(t_1)<\phi(t)} d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_{n-1}) \ ,$$

ki velja skoraj za vse $t \in E$. Če upoštevamo enakost (2.3), imamo

$$(V^n f)(t) = \int_{\phi(s)<\phi(t)} f(s)\, (V^{n-1}(\chi_{A(s)}))(t)\, d\mu(s) \ .$$

Uporabimo še trditev 2.15, pa je dokaz pri kraju. □

Trditev 2.18 *Naj bo $a \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ in $f \in L$ funkcija, za katero je $f(t) = 0$ skoraj za vse $t \in E$ z lastnostjo $\phi(t) \leq a$. Potem je*

$$(n-1)!\, \|V^n f\| \leq (1-a)^{n-1} \|e\|' \|e\| \|f\| \ .$$

Dokaz. Po trditvi 2.17 imamo

$$(n-1)!\, |V^n f|(t) = \left| \int_{E_t} (\phi(t) - \phi(s))^{n-1} f(s)\, d\mu(s) \right| \leq$$

$$\leq (1-a)^{n-1} \cdot \int_{E_t} |f(s)|\, d\mu(s) \leq (1-a)^{n-1}\, \|e\|'\, \|f\|$$

skoraj za vse $t \in E$. Od tod sledi rezultat. □

Če v trditvi 2.15 in 2.18 postavimo $a = 0$, dobimo naslednjo posledico.

Posledica 2.19 *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja*

$$\frac{\|\phi^n\|}{n!\|e\|} \leq \|V^n\| \leq \frac{\|e\|'\, \|e\|}{(n-1)!} \ .$$

Torej je operator V kvazinilpotenten, vendar ni nilpotenten.

2.5 Lokalni kvazispektralni radij in kvazispektralno maksimalni podprostori

Članek [43] se ukvarja z invariantnimi podprostori kvazinilpotentnih operatorjev, ki niso nilpotentni. Ker po posledici 2.19 med take operatorje spada tudi naš operator V, v tem razdelku povzemamo osnovne definicije in rezultate iz [43], ki jih bomo kasneje uporabili.

Naj bo X netrivialen Banachov prostor in naj bo T omejen operator na X, ki ni nilpotenten. **Lokalni kvazispektralni radij** $r_T(x)$ operatorja T pri vektorju $x \in X$ je definiran s predpisom

$$r_T(x) = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)^{1/n} .$$

Trditev 2.20 (a) *Za vsak $x \in X$ velja $0 \le r_T(x) \le 1$.*
(b) *Če omejen operator A na X komutira s T, potem je $r_T(Ax) \le r_T(x)$.*
(c) *Za vse $x, y \in X$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja*

$$r_T(\lambda x) \le r_T(x) \quad in \quad r_T(x+y) \le \max\{r_T(x), r_T(y)\} .$$

Dokaz. Točka (a) sledi iz neenakosti

$$0 \le \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \le \|x\| ,$$

ki velja za vsak $x \in X$ in vsak $n \in \mathbb{N}$.

Naj bo A omejen operator na X, ki komutira s T. Potem velja $\|T^n Ax\| \le \|A\|\,\|T^n x\|$ za vsak $x \in X$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zato je

$$r_T(Ax) \le r_T(x) \lim_{n\to\infty} \|A\|^{1/n} \le r_T(x) ,$$

kar trdi točka (b).

Če v (b) postavimo $A = \lambda I$, dobimo prvo neenakost iz točke (c). Za dokaz druge neenakosti vzemimo poljuben pozitiven ϵ in izberimo dovolj veliko število $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja

$$\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \leq (r_T(x) + \epsilon)^n \quad \text{in} \quad \frac{\|T^n y\|}{\|T^n\|} \leq (r_T(y) + \epsilon)^n$$

za vse $n \geq n_0$. Potem imamo

$$r_T(x+y) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|T^n x\| + \|T^n y\|}{\|T^n\|} \right)^{1/n} \leq \max\{r_T(x), r_T(y)\} + \epsilon \ .$$

Ker je v tej oceni ϵ poljubno pozitivno število, je dokaz trditve končan. □

Naj bo Y poljuben zaprt podprostor v X, invarianten za operator T. S $T^n|_Y$ označimo zožitev operatorja T^n na podprostor Y in definirajmo

$$r_T(Y) = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|T^n|_Y\|}{\|T^n\|} \right)^{1/n} \ .$$

Trditev 2.21 *Velja* $r_T(Y) = \sup\{r_T(y) : y \in Y\}$.

Dokaz. Označimo $a = \sup\{r_T(y) : y \in Y\}$. Ker za vsak $y \in Y$ velja neenakost $\|T^n y\| \leq \|T^n|_Y\| \, \|y\|$, je $a \leq r_T(Y)$. Za dokaz nasprotne neenakosti izberimo poljuben pozitiven ϵ in definirajmo zaporedje $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatorjev na Y s predpisom

$$T_n = \frac{1}{(a+\epsilon)^n \, \|T^n\|} \, T^n|_Y \ .$$

Ker je $\sup\{\|T_n y\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ za vsak $y \in Y$, izrek o enakomerni omejenosti zagotavlja obstoj konstante M, za katero velja $\|T_n\| \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Od tod sledi neenakost

$$\left(\frac{\|T^n|_Y\|}{\|T^n\|} \right)^{1/n} \leq M^{1/n} \, (a+\epsilon) \ ,$$

iz katere sledi $r_T(Y) \leq a + \epsilon$. Ker je ϵ poljuben, imamo končno $r_T(Y) = a$. □

Naj bo Y zaprt podprostor prostora X, ki je invarianten za T. Če za poljuben zaprt podprostor Z, ki je tudi invarianten za T, velja implikacija

$$r_T(Z) \leq r_T(Y) \Rightarrow Z \subseteq Y \ ,$$

potem je Y **kvazispektralno maksimalen podprostor** operatorja T.

Za vsak $a \in [0,1]$ definirajmo

$$X_T(a) = \{x \in X : r_T(x) \leq a\} \ .$$

Trditev 2.22 (a) *Množica $X_T(a)$ je (ne nujno zaprt) podprostor v X, ki je invarianten za vse operatorje, ki komutirajo s T.*
(b) *Če je podprostor $X_T(a)$ zaprt, potem je kvazispektralno maksimalen in zanj velja $r_T(X_T(a)) \leq a$.*

Dokaz. Točko (a) hitro dokažemo s pomočjo trditve 2.20 (b) in (c). Tudi dokaz trditve (b) poteka brez težav. Po trditvi 2.21 imamo

$$r_T(X_T(a)) = \sup\{r_T(x) : x \in X_T(a)\} \leq a \ .$$

Vzemimo za T invarianten zaprt podprostor Z prostora X, za katerega velja $r_T(Z) \leq r_T(X_T(a))$. Ker je $r_T(Z) \leq a$, je po trditvi 2.21 $r_T(z) \leq a$ za vsak $z \in Z$. Torej je $Z \subseteq X_T(a)$, kar je bilo treba dokazati. □

2.6 Kvazispektralno maksimalni podprostori operatorja V

Najprej pri danem $a \in [0,1]$ izračunajmo število $r_V(B(a))$.

Izrek 2.23 *Za vsak $a \in [0,1]$ velja* $r_V(B(a)) = 1 - a$.

Dokaz. Z uporabo trditve 2.18 in posledice 2.19 dobimo neenakost

$$\frac{\|V^n f\|}{\|V^n\|} \leq \frac{n\,(1-a)^{n-1}\,\|e\|^2\,\|e\|'\|f\|}{\|\phi^n\|} \ ,$$

ki velja za vsak $f \in B(a)$ in vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \|\phi^n\|^{1/n} = 1$ (trditev 2.16 v primeru $a = 0$), je $r_V(f) \leq 1 - a$ za vsak $f \in B(a)$, torej je $r_V(B(a)) \leq 1 - a$ po trditvi 2.21. Po drugi strani s pomočjo trditve 2.15 in posledice 2.19 dobimo neenakost

$$\frac{\|V^n \chi_A\|}{\|V^n\|} \geq \frac{\|(\phi - a)^n \chi_A\|}{n\|e\|\|e\|'} \ ,$$

kjer je $A = \{s \in E : \phi(s) \geq a\}$. Uporabimo še trditev 2.16, pa imamo $r_V(\chi_A) \geq 1 - a$, torej je $r_V(B(a)) \geq 1 - a$ po trditvi 2.21. S tem je izrek dokazan. $\square$

Za osvežitev spomina ponovimo naslednjo definicijo. Za vsak $a \in [0, 1]$ naj bo $L_V(a) = \{f \in L : r_V(f) \leq a\}$.

Izrek 2.24 *Za vsak* $a \in [0, 1]$ *velja* $L_V(a) = \operatorname{Ker} V^3 + B(1 - a)$.

Dokaz. Ker je $L_V(a)$ podprostor prostora L, inkluzija $\operatorname{Ker} V^3 + B(1 - a) \subseteq L_V(a)$ sledi iz izreka 2.23 in očitnega dejstva $\operatorname{Ker} V^3 \subseteq L_V(0) \subseteq L_V(a)$.

Za dokaz obratne inkluzije izberimo $f \in L_V(a)$ in pokažimo, da obstajata taki funkciji $u \in \operatorname{Ker} V^3$ in $v \in B(1-a)$, da je $f = u+v$. Če je $a = 1$, potem postavimo $u = 0$ in $v = f$. Predpostavimo torej, da je $a < 1$, in označimo $g = Vf$. Funkcija h, definirana s predpisom

$$h(\lambda) = \int_E \frac{g(s)}{\phi(s) - \lambda}\, d\mu(s) \ ,$$

je holomorfna na množici $\mathbb{C} - [0, 1]$ (glej na primer [49, izrek 10.7]).

Najprej bomo dokazali, da h lahko holomorfno razširimo na krog s polmerom $1 - a$ in s središčem v 0. Dovolj je pokazati, da je pri vsakem $\epsilon > 0$ konvergenčni polmer $R(h, -\epsilon)$ vrste, ki jo dobimo z razvojem funkcije h okoli točke $-\epsilon$, vsaj $1 - a$. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ in za vsak $t \in E$ definirajmo

$$g_k(t) = \int_{E_t} \frac{g(s)}{(\phi(s) + \epsilon)^{k+1}}\, d\mu(s)\ .$$

Ker je

$$\frac{1}{(\phi(s) + \epsilon)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{(\phi(t) - \phi(s))^n}{(\phi(t) + \epsilon)^{n+k+1}}\ ,$$

za vsak $s \in E_t$ z lastnostjo $\phi(s) < \phi(t)$, s pomočjo Lebesgueovega izreka o dominantni konvergenci dobimo

$$g_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{n!\,(V^{n+1}g)(t)}{(\phi(t) + \epsilon)^{n+k+1}}\ , \tag{2.4}$$

kjer smo uporabili tudi trditev 2.17. Zaradi neenačbe $|(V^{n+1}g)(t)| \leq \|V^{n+1}f\|\,\|e\|'$ in zaradi desne neenakosti v posledici 2.19 imamo

$$n!\,|(V^{n+1}g)(t)| \leq \frac{(\|e\|')^2 \|e\| \|V^{n+1}f\|}{\|V^{n+1}\|}\ . \tag{2.5}$$

Ker je $r_V(f) \leq a$, obstaja tako konstanta $C \geq 1$, odvisna od ϵ in neodvisna od t in k, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{\|V^{n+1}f\|}{\|V^{n+1}\|} \leq C\,(a + \epsilon)^n\ . \tag{2.6}$$

Če postavimo $M := C\,(\|e\|')^2 \|e\|$ in upoštevamo neenakosti (2.5) in (2.6) v enakosti (2.4), ugotovimo, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$|g_k(t)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{(a + \epsilon)^n}{(\phi(t) + \epsilon)^{n+k+1}}\ .$$

Zato za vsak $k \in \mathbb{N}$ in za vsak $t \in E$ z lastnostjo $\phi(t) > a$ velja

$$|g_k(t)| \leq \frac{M}{(\phi(t) - a)^{k+1}}\ . \tag{2.7}$$

Po trditvi 2.14 lahko izberemo tako zaporedje $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ elementov iz E, da je $a < \phi(t_m) \uparrow 1$. S pomočjo Lebesgueovega izreka o dominantni konvergenci in z uporabo ocene (2.7) končno dobimo neenakost

$$\frac{|h^{(k)}(-\epsilon)|}{k!} = \lim_{m \to \infty} |g_k(t_m)| \leq \frac{M}{(1 - a)^{k+1}}\ ,$$

ki velja za vsak $k \in \mathbb{N}$. Korenski kritej (za določanje konvergenčnega polmera potenčne vrste) nam potem zagotavlja, da je $R(h, -\epsilon) \geq 1 - a$. Torej funkcijo h lahko holomorfno razširimo na krog s središčem v 0 in s polmerom $1-a$. Dobljeno razširitev ponovno označimo s h.

Izberimo sedaj $t \in E$ z lastnostjo $0 < \phi(t) < 1-a$ in z γ označimo krožno pot s središčem v 0 in s polmerom $\phi(t)$, ki obkroži 0 v pozitivni smeri. Po Cauchyjevem izreku je

$$0 = \int_\gamma (\phi(t) - \lambda)h(\lambda)\, d\lambda = \int_{\gamma - \{\phi(t)\}} (\phi(t) - \lambda)\, d\lambda \int_E \frac{g(s)}{\phi(s) - \lambda}\, d\mu(s)\ . \tag{2.8}$$

Pokažimo, da smemo uporabiti Fubinijev izrek. Krožnico γ najprej parametrizirajmo na običajen način $\lambda = \phi(t)\exp(ix)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Potem je integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\int_E \frac{|\phi(t) - \phi(t)e^{ix}|}{|\phi(s) - \phi(t)e^{ix}|} |g(s)| d\mu(s) \right)$$

končen, ker je

$$\frac{|\phi(t) - \phi(t)e^{ix}|}{|\phi(s) - \phi(t)e^{ix}|} \leq \begin{cases} \frac{|x|}{|\sin x|}, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ |x|, & \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

in je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|x|}{|\sin x|} dx < \infty\ .$$

Po uporabi Fubinijevega izreka v (2.8) torej dobimo

$$\int_{\phi(s) \neq \phi(t)} g(s)\, d\mu(s) \int_\gamma \frac{\phi(t) - \lambda}{\phi(s) - \lambda}\, d\lambda = 0\ .$$

Upoštevajmo, da je (npr. po izreku o residuih)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\phi(t) - \lambda}{\phi(s) - \lambda}\, d\lambda = \begin{cases} 0, & \phi(s) > \phi(t) \\ \phi(s) - \phi(t), & \phi(s) < \phi(t) \end{cases}\ ,$$

pa imamo

$$\int_{\phi(s) < \phi(t)} (\phi(s) - \phi(t))(Vf)(s)\, d\mu(s) = 0\ .$$

Iz trditve 2.17 pri $n = 2$ dobimo $(V^3 f)(t) = 0$ za vse $t \in E$ z lastnostjo $0 < \phi(t) < 1 - a$, torej je $V^3 f \in B(1 - a)$.

Sedaj postavimo $u = f\,\chi_A$, kjer je $A = \{s \in E : \phi(s) < 1 - a\}$, in $v = f - u$. Brž vidimo, da je $V^3 u = 0$ in $v \in B(1 - a)$. Izrek je tako dokazan. □

Posledica 2.25 *Če je operator V injektiven, je $L_V(a) = B(1-a)$ za vsak $a \in [0,1]$. Veriga pasov $\{B(a) : a \in [0,1]\}$ je enaka družini vseh kvazispektralno maksimalnih podprostorov operatorja V.*

Dokaz. Prva trditev je očitna posledica izreka 2.24. Ker je za vsak $a \in [0,1]$ podprostor $B(a) = L_V(1-a)$ zaprt, je po trditvi 2.22 (b) kvazispektralno maksimalen. Če je Y poljuben kvazispektralno maksimalen podprostor operatorja V in je $a = r_V(Y)$, potem je $r_V(B(1-a)) = a = r_V(Y)$ po izreku 2.23. Od tod sledi $Y = B(1-a)$, saj sta Y in $B(1-a)$ oba kvazispektralno maksimalna podprostora operatorja V. Dokazali smo torej, da je poljuben kvazispektralno maksimalen podprostor operatorja V oblike $B(a)$ pri nekem $a \in [0,1]$. Tako je dokaz končan. □

2.7 L'-zaprti invariantni podprostori operatorja V

V prejšnjem razdelku smo raziskovali invariantne podprostore operatorja V, ki so kvazispektralno maksimalni. V tem razdelku se bomo ukvarjali z invariantnimi podprostori, ki so zaprti v šibki topologiji na L, porojeni s funkcionali iz prostora L'. S tem bomo posplošili izrek 2.1.

Kot v enem izmed znanih dokazov izreka 2.1 dokaz naše posplošitve temelji na slavnem Titchmarshovem izreku o konvoluciji (glej [31] ali [15]).

Izrek 2.26 *Naj za funkciji $f, g \in L^1[0,1]$ velja $\int_0^x f(x-y)g(y)\,dy = 0$ skoraj za vse $x \in [0,1]$. Potem obstaja tak $\alpha \in (0,1)$, da je $f(x) = 0$ skoraj za vse $x \in (0,\alpha)$ in $g(x) = 0$ skoraj za vse $x \in (0,1-\alpha)$.*

Ponovimo osnovne pojme o šibkih topologijah na L (glej [58, razdelek 89]). **Anihilator** A^0 neprazne podmnožice A prostora L je definiran s predpisom

$$A^0 = \{g \in L' : \varphi_g(f) = 0 \ \text{ za vse } \ f \in A\} ,$$

obratni anihilator neprazne podmnožice B prostora L' pa je enak

$$^0B = \{f \in L : \varphi_g(f) = 0 \ \text{ za vse } \ g \in B\} \ .$$

S $\sigma(L, L')$ zaznamujmo šibko topologijo na prostoru L, ki je generirana s funkcionali iz L', torej je $\sigma(L, L')$ najšibkejša topologija na L, v kateri so vsi funkcionali iz L' zvezni. Podprostor $S \subseteq L$ je **L'-zaprt**, kadar je zaprt v topologiji $\sigma(L, L')$. Po [58, izrek 89.2] je L'-zaprtje podprostora $S \subseteq L$ enako $^0(S^0)$.

V želji, da bistveno posplošimo izrek 2.1, najprej raziščimo primer, ko je μ Lebesgueova mera na $E = [0, 1]$ in $\phi(x) = x$ za $x \in [0, 1]$. V dokazu tega rezultata bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 2.27 *Naj bo μ Lebesgueova mera na $E = [0, 1]$ in $\phi(x) = x$ za $x \in [0, 1]$. Za funkcijo $f \in L$ definirajmo $a_f = \sup\{a \in [0, 1] : f \in B(a)\}$ in s S_f označimo ciklični podprostor vektorja f glede na operator V, to je najmanjši (ne nujno zaprt) podprostor, ki vsebuje množico $\{V^n f : n \in \mathbb{N}\}$. Potem je $B(a_f) \subseteq {}^0(S_f^0)$.*

Dokaz. Ker je $B(a_f)$ L'-zaprt podprostor, je dovolj dokazati inkluzijo $S_f^0 \subseteq (B(a_f))^0$. Vzemimo $g \in S_f^0$. Potem za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\varphi_g(V^n f) = \int_0^1 (V^n f)(t)\, g(t)\, dt = 0 \ .$$

Dokažimo, da za funkcijo $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $\gamma(u) = \int_u^1 f(t - u)\, g(t)\, dt$, velja $\int_0^1 e^{zu}\gamma(u)\, du = 0$ za vse $z \in \mathbb{C}$. Z razvojem funkcije e^{zu} v potenčno vrsto dobimo

$$\int_0^1 e^{zu}\gamma(u)\, du = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} \right) du \int_u^1 f(t - u) g(t)\, dt \ . \qquad (2.9)$$

Ker z uporabo Fubinijevega izreka za nenegativne funkcije dobimo

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} |u|^{n-1} \right) du \int_u^1 |f(t - u)||g(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 |g(t)|\,dt \int_0^t e^{|zu|}|f(t-u)|\,du \leq e^{|z|} \int_0^1 |g(t)|\,dt \int_0^1 |f(u)|\,du < \infty \ ,$$

smemo v (2.9) uporabiti Fubinijev izrek. (Če v zadnji oceni postavimo $z = 0$, dobimo tudi $\gamma \in L^1[0,1]$.) Torej za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$\int_0^1 e^{zu}\gamma(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \int_0^1 g(t)\,dt \,\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1} f(t-u)\,du =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \int_0^1 (V^n f)(t)\, g(t)\,dt = 0 \ .$$

Tukaj smo upoštevali, da je

$$(V^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1} f(t-u)\,du \ ,$$

kar lahko hitro preverimo s pomočjo indukcije in zamenjave vrstnega reda integriranja.

Iz dokazanega sledi, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja enakost $\int_0^1 e^{-ixu}\gamma(u)\,du = 0$, od koder dobimo $\gamma = 0$ po izreku o enoličnosti (glej [49, izrek 9.12]). Zato skoraj za vsak $u \in [0,1]$ velja

$$\gamma(1-u) = \int_{1-u}^1 f(t-1+u)\, g(t)\,dt = 0 \ .$$

Če definiramo funkcijo h s predpisom $h(t) = g(1-t)$ in v zadnjem integralu naredimo zamenjavo $s = 1-t$, dobimo enakost $\int_0^u f(u-s)h(s)\,ds = 0$, ki velja skoraj za vsak $u \in [0,1]$. Po Titchmarshovem izreku o konvoluciji (izrek 2.26) obstaja tak $\alpha \in [0,1]$, da je $f = 0$ skoraj povsod na $(0,\alpha)$ in $h = 0$ skoraj povsod na $(0, 1-\alpha)$. Od tod sledi, da je $\alpha \leq a_f$ in zato je $h = 0$ skoraj povsod na $(0, 1-a_f)$. Tako je $g = 0$ skoraj povsod na $(a_f, 1)$, torej je $g \in (B(a_f))^0$. Dokaz je tako končan. □

Trditev 2.28 *Naj bo μ Lebesgueova mera na $E = [0,1]$ in $\phi(x) = x$ za $x \in [0,1]$. Potem so podprostori $B(a)$, $a \in [0,1]$, edini L'-zaprti podprostori prostora L, ki so invariantni za operator V.*

Dokaz. Naj bo S netrivialen L'-zaprt podprostor, invarianten za operator V. Naj bo $a = \inf\{a_f : f \in S\}$, kjer je (kot v lemi 2.27) $a_f = \sup\{a \in [0,1] : f \in B(a)\}$. Zaradi $S \neq \{0\}$ imamo $a < 1$. Ker je $f \in B(a_f) \subseteq B(a)$ za vse $f \in S$, je $S \subseteq B(a)$. Po drugi strani s pomočjo leme 2.27 spoznamo, da je $B(a + 1/n) \subseteq S$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ki ustreza pogoju $a + 1/n \leq 1$. Res! Za vsak tak n obstaja taka funkcija $f \in S$, da je $a_f < a + 1/n$ in zato po lemi 2.27 velja

$$B(a + \frac{1}{n}) \subseteq B(a_f) \subseteq {}^0(S_f^0) \subseteq S \ .$$

Zadnja inkluzija je posledica dejstva, da je ${}^0(S_f^0)$ najmanjši L'-zaprt podprostor prostora L, invarianten za V. Za dokaz inkluzije $B(a) \subseteq S$ vzemimo poljubno funkcijo $f \in B(a)$. Z uporabo Lebesgueovega izreka o dominantni konvergenci ugotovimo, da zaporedje $\{f\,\chi_{(a+1/n,1]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ funkcij iz S konvergira proti funkciji f v topologiji $\sigma(L, L')$. Ker je podprostor S zaprt v tej topologiji, dobimo $f \in S$ in tako $B(a) \subseteq S$. Dokazali smo torej želeno enakost $S = B(a)$. $\square$

Iz primera 2.2 vidimo, da trditev 2.28 ne velja, če "L'-zaprt" nadomestimo z "zaprt".

Na σ-algebri $\mathcal{B}$ vpeljimo ekvivalenčno relacijo: množici A, $B \in \mathcal{B}$ sta ekvivalentni, če ima simetrična razlika $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ mero 0. Ekvivaletno je zahtevati, da skoraj povsod velja $\chi_A = \chi_B$. Pripadajočo kvocientno projekcijo označimo s p. Naj bo $\sigma(\phi) \subseteq \mathcal{B}$ najmanjša σ-algebra podmnožic množice E, v kateri je funkcija ϕ merljiva. Nadalje naj bo $\mathcal{B}(\phi) = p^{-1}(p(\sigma(\phi)))$, torej je $B \in \mathcal{B}(\phi)$ natanko tedaj, ko obstaja tak $A \in \sigma(\phi)$, da je $\mu(A \triangle B) = 0$.

Za vsako funkcijo $f \in L^1(E, \mathcal{B}, \mu)$ z $E(f|\mathcal{F})$ označimo pogojno matematično upanje funkcije f glede na σ-algebro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$. Naj bo Σ Borelova σ-algebra podmnožic intervala $[0,1]$ in naj bo m Lebesgueova mera na Σ. Ker je po trditvi 2.14 ϕ slučajna spremenljivka, ki je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0,1]$, za vsako funkcijo $f \in L^1(E, \mathcal{B}, \mu)$ obstaja (enolično določena) funkcija

$\tilde{f} \in L^1([0,1], \Sigma, m)$, za katero velja

$$\int_A \tilde{f}(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(A)} f\,d\mu$$

za vsak $A \in \Sigma$. Funkcijo $\tilde{f}$ imenujemo regresijska funkcija funkcije f glede na funkcijo ϕ. Lahko je pokazati, da je $E(f|\mathcal{B}(\phi)) = E(f|\sigma(\phi)) = \tilde{f} \circ \phi$ skoraj povsod.

Trditev 2.29 *Naj bo $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$. Potem je operator V injektiven, mreža vseh L'-zaprtih podprostorov prostora L, ki so invariantni za V, pa je enaka verigi podprostorov $\{B(a) : a \in [0,1]\}$.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$, je $f = \tilde{f} \circ \phi$ skoraj povsod. Brez težav se prepričamo, da je množica $\tilde{L} = \{\tilde{f} : f \in L\}$ Banachov funkcijski prostor na merljivem prostoru $([0,1], \Sigma, m)$, če normo definiramo s predpisom $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Prav tako je izometrični operator $R : f \to \tilde{f}$ Rieszov izomorfizem prostorov L in $\tilde{L}$, ker sta R in R^{-1} pozitivna operatorja (trditev 1.7). Torej sta L in $\tilde{L}$ izomorfni Banachovi mreži. Na podoben način ugotovimo, da je operator, definiran s predpisom $g \to \tilde{g}$, izometrični Rieszov izomorfizem med prostoroma L' in $(\tilde{L})'$. Če definiramo operator $\tilde{V}$ na $\tilde{L}$ s predpisom $(\tilde{V}\tilde{f})(x) = \int_0^x \tilde{f}(y)\,dy$, potem velja $RV = \tilde{V}R$. Res! Za vsako funkcijo $f \in L$ in skoraj za vsak $t \in E$ velja

$$(Vf)(t) = \int_{\phi(s)<\phi(t)} f(s)\,d\mu(s) = \int_0^{\phi(t)} \tilde{f}(y)\,dy = (\tilde{V}\tilde{f})(\phi(t))\ ,$$

zato je res $R(Vf) = \tilde{V}\tilde{f}$. Z uporabo trditve 2.28 za operator $\tilde{V}$ sedaj ugotovimo, da je vsak $\tilde{L}'$-zaprt podprostor prostora $\tilde{L}$, invarianten za operator $\tilde{V}$, oblike

$$\tilde{B}(a) = \{\tilde{f} \in \tilde{L} :\ \tilde{f} = 0 \ \text{ s.p. na } \ [0,a]\}$$

pri nekem $a \in [0,1]$. Ker je $\tilde{B}(a) = R(B(a))$, je drugi del trditve dokazan. Prvi del sledi iz dejstva, da je operator $\tilde{V}$ injektiven (glej npr. [49, izrek 7.11]). $\square$

Oglejmo si sedaj splošni primer, ko ne velja nujno enakost $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$. Preseke množic L, L' in $B(a)$ ($a \in [0,1]$) z Rieszovim prostorom $M(E, \mathcal{B}(\phi), \mu)$ zaznamujmo zaporedoma z L_ϕ, $(L')_\phi$ in $B_\phi(a)$. Naj bo $\mathbf{E}$ idempotenten operator na L, definiran s predpisom $\mathbf{E}f = E(f|\mathcal{B}(\phi))$. Ker je $\mathbf{E}$ pozitiven operator na Banachovi mreži, je po izreku 1.5 omejen. Torej je $L_\phi = \operatorname{Im} \mathbf{E}$ zaprt podprostor prostora L. Lahko se je prepričati, da sta L_ϕ in $(L')_\phi$ Banachova funkcijska prostora na $(E, \mathcal{B}(\phi), \mu)$. Prav tako brez težav preverimo, da je pridruženi prostor $(L_\phi)'$ Rieszovo izomorfen prostoru $(L')_\phi$. Ker norma operatorja $\mathbf{E}$ ni nujno enaka 1, nas ne preseneča, da ta izomorfizem ni nujno izometričen, kot bomo videli v naslednjem primeru. Omeniti velja, da je norma operatorja $\mathbf{E}$ enaka 1, ko je $L = L^p(E, \mu)$, $1 \le p \le \infty$ (glej npr. [39, trditev IV.2.6.1]).

Primer 2.30 Naj bo $E = [0,1] \times [0,1]$ in naj bosta $\mathcal{B}$ in μ zaporedoma σ-algebra Lebesgueovo merljivih podmnožic množice E in Lebesgueova mera na E. Za vsak $f \in M(E, \mathcal{B}, \mu)$ definirajmo

$$\|f\| = 5 \int_0^1 dx \int_0^{1/2} |f(x,y)|\, dy + \int_0^1 dx \int_{1/2}^1 |f(x,y)|\, dy \ .$$

Lahko je videti, da je $L = \{f \in M(E, \mathcal{B}, \mu) : \|f\| < \infty\}$ Banachov funkcijski prostor v normi $\|\cdot\|$, ki je ekvivalentna L^1-normi. Naj bo $\phi(x,y) = x$, $(x,y) \in E$. Potem je $\sigma(\phi) = \{A \times [0,1] : A$ je Borelova podmnožica intervala $[0,1]\}$. Če funkcijo f definiramo s predpisom $f(x,y) = y$, potem je $\|f\| = 1$, toda $\|\mathbf{E}f\| = 3/2$. Torej je $\|\mathbf{E}\| \ge 3/2$. Prav tako pridruženi prostor $(L_\phi)'$ ni izometrično izomorfen prostoru $(L')_\phi$. Norma funkcionala φ_e kot elementa prostora $(L_\phi)'$ je namreč enaka $1/3$, norma φ_e kot elementa $(L')_\phi$ pa je enaka 1.

Lema 2.31 *$V\mathbf{E} = \mathbf{E}V = V$.*

Dokaz. Ker za vsako funkcijo $f \in L$ in skoraj za vsak $t \in E$ velja enakost

$$(Vf)(t) = \int_{\phi(s) \le \phi(t)} E(f|\mathcal{B}(\phi))(s)\, d\mu(s) = (V\mathbf{E}f)(t) \ ,$$

imamo $V\mathbf{E} = V$. Zaradi iste enakosti je funkcija Vf (po Fubinijevem izreku) merljiva glede na σ-algebro $\mathcal{B}(\phi)$, torej velja $\mathbf{E}Vf = Vf$ za vsak $f \in L$. $\square$

Dokažimo sedaj glavni rezultat tega razdelka.

Izrek 2.32 *Naj bo S L'-zaprt podprostor prostora L. Potem je S invarianten za V, če in samo če obstaja tak $a \in [0,1]$, da je $B_\phi(a) \subseteq S \subseteq B(a) + \operatorname{Ker} \mathbf{E}$. Velja tudi* $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} \mathbf{E}$.

Dokaz. Če je $B_\phi(a) \subseteq S \subseteq B(a) + \operatorname{Ker} \mathbf{E}$, potem je

$$V(S) \subseteq V(B(a)) \subseteq B_\phi(a) \subseteq S$$

po lemi 2.31, torej je S invarianten podprostor operatorja V. Za dokaz nasprotne implikacije najprej pokažimo, da je $S_\phi = S \cap L_\phi$ L'_ϕ-zaprt podprostor prostora L_ϕ. Vzemimo poljubno posplošeno zaporedje funkcij $\{f_\tau\}$ iz S_ϕ, ki konvergira proti funkciji $f \in L_\phi$ v topologiji $\sigma(L_\phi, L'_\phi)$. Potem za vsak $g \in L'$ zaporedje števil

$$\int_E (f_\tau - f)\, g d\mu = \int_E (f_\tau - f)\, \mathbf{E}(g) d\mu$$

konvergira proti 0. Potemtakem zaporedje $\{f_\tau\}$ konvergira proti f v topologiji $\sigma(L, L')$. Od tod sledi, da je $f \in S_\phi$, torej je S_ϕ L'_ϕ-zaprt podprostor prostora L_ϕ. Ker je $V(L) \subseteq L_\phi$, je S_ϕ invarianten za operator V. Če za Banachov funkcijski prostor L_ϕ in za zožitev operatorja V na zaprt podprostor L_ϕ uporabimo trditev 2.29, dobimo tak $a \in [0,1]$, da je $S_\phi = B_\phi(a)$ in zato velja $B_\phi(a) \subseteq S \subseteq V^{-1}(B_\phi(a))$. Ker je zožitev operatorja V na L_ϕ injektivna in ker velja enakost $V\mathbf{E} = V$, je $\operatorname{Ker} \mathbf{E} = \operatorname{Ker} V$. Če pokažemo, da je $V^{-1}(B_\phi(a)) = B(a) + \operatorname{Ker} V$, je dokaz izreka končan. Vzemimo funkcijo $f \in L$ z lastnostjo $Vf \in B_\phi(a)$ in postavimo $g = f\chi_A$, kjer je $A = \{t \in E : \phi(t) \leq a\}$. Lahko se je prepričati, da je $g \in \operatorname{Ker} V$ in $(f - g) \in B(a)$, torej velja $V^{-1}(B_\phi(a)) \subseteq B(a) + \operatorname{Ker} V$. Ker je obratna inkluzija očitna, je s tem dokaz izreka sklenjen. $\square$

Če je norma prostora L urejenostno zvezna, potem je po izreku 1.8 pridružen prostor L' enaka dualu L^* prostora L. Zato je tedaj podprostor L'-zaprt, če in samo če je zaprt (v normni topologiji). Torej naslednji posledici neposredno sledita iz zadnjega izreka.

Posledica 2.33 *Če je norma prostora L urejenostno zvezna in če je S zaprt podprostor prostora L, potem je S invarianten za V natanko tedaj, ko obstaja tak $a \in [0,1]$, da je $B_\phi(a) \subseteq S \subseteq B(a) + \operatorname{Ker} \mathbf{E}$.*

Posledica 2.34 *Naj bo norma prostora L urejenostno zvezna in naj bo $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$. Potem so podprostori $B(a)$, $a \in [0,1]$, edini zaprti podprostori prostora L, ki so invariantni za operator V.*

Očitno zadnja posledica vključuje primer $L = L^p(E,\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ in s tem tudi izrek 2.1. Če je $L = L^\infty(E,\mu)$, potem je $L' = L^1(E,\mu)$ in zato je šibka topologija $\sigma(L,L')$ enaka šibki* topologiji na L. Tako očitno velja naslednja

Posledica 2.35 *Naj bo $L = L^\infty(E,\mu)$ in $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$. Potem so podprostori $B(a)$, $a \in [0,1]$, edini šibko* zaprti podprostori prostora L, ki so invariantni za operator V.*

Razdelek zaključimo s karakterizacijo pogoja $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$.

Trditev 2.36 *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}$;

(2) *operator V je injektiven;*

(3) $L_\phi = L$.

Dokaz. Implikacija (1) $\Rightarrow$ (2) velja po trditvi 2.29. Zaradi enakosti $\operatorname{Ker} \mathbf{E} = \operatorname{Ker} V$ velja tudi implikacija (2) $\Rightarrow$ (3). Za dokaz implikacije (3) $\Rightarrow$ (1) predpostavimo, da je $\mathcal{B}(\phi) \neq \mathcal{B}$. Potem obstaja taka množica $A \in \mathcal{B}$, za katero velja $A \notin \mathcal{B}(\phi)$ in $\mu(A) > 0$. Ker je $e \in L$ in $\chi_A \leq e$, imamo $\chi_A \in L$. Po drugi strani $\chi_A \notin L_\phi$, torej je $L_\phi \neq L$. $\square$

3. Spektralni radij pozitivnih operatorjev

3.1 Motivacija

Naj bo $f, g \in L^+$, $g \neq 0$. Definirajmo množici

$$\Delta(f,g) = \{c \geq 0 \ : \ f \geq c\, g\} \ \text{ in } \ \Sigma(f,g) = \{c \geq 0 \ : \ f \leq c\, g\} \ .$$

Ker je L arhimedski prostor, je neprazen interval $\Delta(f,g)$ omejen. Zato je definirano realno število $\delta(f,g) = \sup \Delta(f,g)$. Dokažimo, da je supremum dosežen. Če označimo $\delta = \delta(f,g)$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f \geq (\delta - 1/n)\, g$. Torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $n(\delta g - f) \leq g$. Ker ima L arhimedsko lastnost, od tod sledi $\delta g - f \leq 0$, kar smo želeli pokazati. Na podoben način ugotovimo, da je $\Sigma(f,g)$ zaprt polneskončen interval, če le ni prazen. Zato smemo definirati

$$\sigma(f,g) = \begin{cases} \min \Sigma(f,g), & \Sigma(f,g) \neq \emptyset \\ \infty, & \Sigma(f,g) = \emptyset \end{cases} .$$

Pri dogovoru $1/\infty = 0$ za poljubna neničelna vektorja $f, g \in L^+$ velja enakost

$$\delta(f,g) = \frac{1}{\sigma(g,f)} \ .$$

Naj bo T pozitiven operator na Banachovi mreži L in naj bo $f \in L^+$ neničeln vektor. V tem poglavju bomo našli zadostne pogoje na L, T in f, pri katerih velja neenakost

$$\delta(Tf,f) \leq r(T) \leq \sigma(Tf,f) \ . \tag{3.1}$$

S primeri bomo pokazali, da desna neenakost ne velja v splošnem. Števili $\delta(Tf,f)$ in $\sigma(Tf,f)$ imenujemo **Collatz-Wielandtovi** števili. Ti števili sta namreč v primeru $L = \mathbb{R}^n$ vpeljala Collatz [12] in Wielandt [54], ko sta raziskovala veljavnost neenakosti (3.1). Kasneje se je nekaj avtorjev ukvarjajo s Collatz-Wielandtovima številoma v primeru delno urejenega Banachovega prostora (glej [38]), [21] in [37]). Našli so nekaj zadostnih pogojev za veljavnost desne neenakosti

(3.1). Naši rezultati (in uporabljene metode dokazovanja) se delno ujemajo z njihovimi rezultati, zato niso popolnoma originalni.

Glavna motivacija za rezultate tega poglavja je bil članek [30]. V njem sta avtorja pri določenih pogojih ocenila spektralni radij produkta nenegativnih matrik. V tem poglavju bomo ta rezultat s pomočjo neenakosti (3.1) posplošili na pozitivne operatorje na Banachovih mrežah. Delna motivacija za naš študij neenakosti (3.1) je bil tudi članek [51], kjer sta za primer L^p-prostorov vpeljani števili, za kateri pa ni težko videti, da se ujemata s Collatz-Wielandtovima številoma.

3.2 Osnovne definicije in rezultati

V tem poglavju naj L pomeni Banachovo mrežo, razsežnosti vsaj 2. Naj bo T omejen operator na L. Adjungirani operator operatorja T označimo s T^*. Z $r(T)$ zaznamujmo spektralni radij kanonične razširitve operatorja T na kompleksifikacijo Banachove mreže L (glej [58, razdelek 92]). Operatorju T pravimo **potenčno kompakten**, če je neka njegova potenca T^n ($n \in \mathbb{N}$) kompakten operator. Operator T imenujemo **ireducibilen**, kadar nima netrivialnih invariantnih zaprtih idealov, torej tedaj, ko sta $\{0\}$ in L edina zaprta ideala, invariantna za T. Operator T je **pasovno ireducibilen**, kadar nima netrivialnih invariantnih pasov. Očitno je vsak ireducibilen operator tudi pasovno ireducibilen.

Za spektralni radij pozitivnega operatorja velja naslednja trditev (glej [40, trditev 4.1.1]).

Trditev 3.1 *Za vsak pozitiven operator T na L velja:*
(a) *Spektralni radij $r(T)$ pripada spektru operatorja T;*
(b) *Če λ pripada resolventni množici operatorja T, potem je operator $(\lambda - T)^{-1}$ pozitiven natanko tedaj, ko je $\lambda > r(T)$.*

O spektralnem radiju potenčno kompaktnega pozitivnega operatorja na L

lahko povemo več kot trditev 3.1 (a). Velja namreč slavni Krein-Rutmanov izrek (glej npr. [25] ali [58]).

Izrek 3.2 *Naj bo T pozitiven potenčno kompakten operator na L s spektralnim radijem $r(T) > 0$. Potem ima lastna vrednost $r(T)$ pozitiven lastni vektor, torej obstaja tak neničeln vektor $f \in L^+$, da je $Tf = r(T)f$.*

Zabeležimo še uporabno varianto Krein-Rutmanovega izreka za adjungirani operator pozitivnega operatorja (glej [25, izrek 5]). Funkcional $\varphi \in L^*$ je **strogo pozitiven**, kadar je $\varphi(f) > 0$ za vsak neničeln vektor $f \in L^+$.

Trditev 3.3 *Naj bo T pozitiven σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator na L s spektralnim radijem $r(T) > 0$. Potem obstaja neničeln σ-urejenostno zvezen funkcional $\varphi \in (L^*)^+$, za katerega velja $T^*\varphi = r(T)\,\varphi$. Če je operator T poleg tega pasovno ireducibilen, lahko za funkcional φ zahtevamo še, da je strogo pozitiven.*

V članku [25] je dokazana tudi naslednja posplošitev znamenitega Jentzsch-Perronovega izreka.

Izrek 3.4 *Naj bo T pozitiven σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator na L, ki je pasovno ireducibilen. Potem je $r(T) > 0$ in $r(T)$ je lastna vrednost operatorja T. Pripadajoči lastni podprostor je enorazsežen in generiran s šibko enoto prostora L.*

Dokaz naslednje trditve bo bralec našel npr. v [33, izrek 5.22].

Trditev 3.5 *(a) Za vsak $f \in L$ je s predpisom $F_f(\varphi) = \varphi(f)$ definiran urejenostno zvezen omejen linearen funcional na L_n^*, torej je $F_f \in (L_n^*)_n^*$.*
(b) Preslikava $\theta : L \to (L_n^*)_n^*$, definirana s predpisom $\theta(f) = F_f$, je Rieszov homomorfizem.

Norma Banachove mreže L je **šibko Fatoujeva**, kadar obstaja taka konstanta $k \geq 1$, da iz $0 \leq f_\tau \uparrow f$ v L sledi $\|f\| \leq k \sup_\tau \|f_\tau\|$. Če je $k = 1$, je norma **Fatoujeva**.

Primer 3.6 Norma Banachove mreže $L^p(E, \mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ je Fatoujeva. S predpisom

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \limsup_{n \to \infty} |x_n| \, , \quad x \in l^\infty \ ,$$

na prostoru l^∞ definiramo normo, ki ni Fatoujeva, je pa šibko Fatoujeva.

Prostor L_n^* **loči točke** prostora L, kadar za vsak neničeln $f \in L$ obstaja $\varphi \in L_n^*$ z lastnostjo $\varphi(f) \neq 0$.

Izrek 3.7 *Naj bo L Dedekindovo polna Banachova mreža, katere norma je šibko Fatoujeva (s konstanto k), prostor L_n^* pa loči točke prostora L. Naj bo (tako kot v trditvi* 3.5*) $\theta : L \to (L_n^*)_n^*$ Rieszov homomorfizem, definiran s predpisom $(\theta(f))(\varphi) = \varphi(f)$, kjer je $\varphi \in L_n^*$. Potem za vsak $f \in L^+$ velja*

$$\|\theta(f)\| \leq \|f\| \leq k^2 \, \|\theta(f)\| \ .$$

Od tod sledi, da je $\theta : L \to \theta(L)$ izomorfizem Banachovih mrež, torej L lahko identificiramo z neko Banachovo podmrežo mreže $(L_n^*)_n^*$.

Dokaz. Ker je

$$\|\theta(f)\| = \sup\{\varphi(f) : 0 \leq \varphi \in L_n^*, \|\varphi\| \leq 1\} \ ,$$

je prvi del trditve z drugimi oznakami napisan izrek 107.7 iz knjige [58] (glej tudi enakost (2) na str. 393). □

Trditev 3.8 *Naj bo T pozitiven urejenostno zvezen operator na L. Potem je prostor L_n^* invarianten za adjungirani operator T^*. Zožitev operatorja T^* na L_n^* označimo s T'.*

Dokaz. Naj bo $\varphi \in L_n^*$ in $f_\tau \downarrow 0$ v L. Ker je T pozitiven urejenostno zvezen operator, je potem $Tf_\tau \downarrow 0$ v L. Če upoštevamo še, da je φ urejenostno zvezen funkcional, dobimo

$$\inf_\tau |(T^*\varphi)(f_\tau)| = \inf_\tau |\varphi(Tf_\tau)| = 0 \ .$$

Torej je $T^*\varphi$ urejenostno zvezen funkcional. □

Trditev 3.9 *Naj bo norma Dedekindovo polne Banachove mreže L šibko Fatoujeva, prostor L_n^* pa naj loči točke prostora L. Za poljuben pozitiven urejenostno zvezen operator T na L velja $r(T') = r(T)$.*

Dokaz. Po izreku 3.7 lahko L identificiramo z Banachovo podmrežo Banachove mreže $(L_n^*)_n^*$. Zato veljajo neenakosti

$$r(T) \geq r(T') \geq r((T')') \geq r(T) \ ,$$

od koder sledi $r(T') = r(T)$. □

Trditev 3.10 *Naj bo f šibka enota v L in naj bo I ideal, ki vsebuje glavni ideal I_f. Potem je pozitiven operator $\gamma : L_n^* \to I_n^*$, definiran s predpisom $\gamma(\varphi) = \varphi|_I$, izometrični izomorfizem Banachovih mrež.*

Dokaz. Naj bo $\varphi|_I = 0$ pri nekem $\varphi \in L_n^*$ in naj bo $g \in L^+$. Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ postavimo $g_n = \inf\{g, nf\}$, potem je $g_n \in I$ za vsak n in $(g - g_n) \downarrow 0$. Ker je $\varphi \in L_n^*$, je $\inf_n |\varphi(g - g_n)| = 0$, torej je $\varphi(g) = 0$. Zaradi enakosti $L = L^+ - L^+$ in zaradi linearnosti je potem $\varphi = 0$. Torej je γ injektiven operator.

Za dokaz surjektivnosti operatorja γ vzemimo poljuben $\psi \in I_n^*$. Po izreku [58, izrek 83.7] obstajata taka pozitivna funkcionala $\varphi_1, \varphi_2 \in L_n^*$, da je $\varphi_1|_I = \psi^+$ in $\varphi_2|_I = \psi^-$. Potem funkcional $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ pripada Banachovi mreži L_n^*. Ker je $\varphi|_I = \psi$, je zato operator γ surjektiven. Hkrati smo se prepričali, da je γ^{-1}

pozitiven operator. Če je namreč funkcinal ψ pozitiven, potem je tudi njegova razširitev φ pozitivna. Po trditvi 1.7 je zato γ Rieszov izomorfizem.

Dokažimo še, da je γ izometrija. Naj bo $\varphi \in L_n^*$. Ker očitno velja $\|\varphi|_I\| \leq \|\varphi\|$, moramo dokazati le obratno neenakost $\|\varphi|_I\| \geq \|\varphi\|$. Vzemimo $\varepsilon > 0$ in izberimo tak vektor $g \in L$ z normo 1, da je $|\varphi(g)| \geq \|\varphi\| - \varepsilon$. Če definiramo $u_n = \inf\{g^+, nf\}$, $v_n = \inf\{g^-, nf\}$ in $g_n = u_n - v_n$, je $g_n \in I$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Poleg tega zaporedje $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ urejenostno konvergira proti g, saj velja $u_n \uparrow g^+$ in $v_n \uparrow g^-$. Ker je $|g_n| \leq u_n + v_n \leq g^+ + g^- = |g|$, je $\|g_n\| \leq \|g\| = 1$. Torej velja neenakost $|\varphi(g_n)| \leq \|\varphi|_I\|\|g_n\| \leq \|\varphi|_I\|$. Po drugi strani obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $|\varphi(g_n)| \geq |\varphi(g)| - \varepsilon$, saj zaradi urejenostne zveznosti funkcionala φ velja $\inf_n |\varphi(g - g_n)| = 0$. Potemtakem imamo oceno $\|\varphi|_I\| \geq |\varphi(g)| - \varepsilon \geq \|\varphi\| - 2\,\varepsilon$. Ker je ε poljubno pozitivno število, je torej $\|\varphi\| \leq \|\varphi|_I\|$ in dokaz je končan. □

3.3 Collatz-Wielandtovi oceni

V tem razdelku se ukvarjamo z neenakostjo (3.1). Najprej se posvetimo levi neenakosti.

Izrek 3.11 *Naj bo T pozitiven operator na Banachovi mreži L in $f \in L^+$ poljuben neničeln element. Potem velja neenakost*

$$\delta(Tf, f) \leq r(T)\ .$$

Predpostavimo še, da je T σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator, ki je pasovno ireducibilen. Potem v neenakosti velja enakost natanko tedaj, ko je f pozitivni lastni vektor operatorja T, ki ustreza lastni vrednosti $r(T)$.

Dokaz. Če označimo $\delta = \delta(Tf, f)$, potem iz neenakosti $Tf \geq \delta f$ dobimo $T^n f \geq \delta^n f$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zato velja neenakost $\delta^n\|f\| \leq \|T^n f\| \leq \|T^n\|\|f\|$, iz katere dobimo $\delta \leq \|T^n\|^{1/n}$. Ker je $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, imamo tako $\delta \leq r(T)$.

Za dokaz druge trditve predpostavimo, da je $\delta(Tf, f) = r(T)$, torej je $Tf - r(T)f \geq 0$. Po izreku 3.4 je $r(T) > 0$, zato po trditvi 3.3 obstaja tak strogo pozitiven funkcional $\varphi \in L_c^*$, da je $T^*\varphi = r(T)\varphi$. Ker je $\varphi(Tf - r(T)f) = (T^*\varphi)f - r(T)\,\varphi(f) = 0$, je $Tf = r(T)f$. Izrek je tako dokazan. □

Za pozitiven operator T na L pravimo, da ima **lastnost (p)**, kadar $r(T)$ leži v zaprtju množice $(-\infty, r(T)) \cap \rho(T)$, kjer smo z $\rho(T)$ označili resolventno množico operatorja T. Očitno imajo vsi potenčno kompaktni operatorji lastnost (p).

Izrek 3.12 *Naj ima Dedekindovo polna Banachova mreža L šibko Fatoujevo normo, prostor L_n^* pa naj loči točke prostora L. Če je T pozitiven urejenostno zvezen operator na L, ki ima lastnost (p), potem za vsako šibko enoto $f \in L^+$ velja*

$$r(T) \leq \sigma(Tf, f)\ .$$

Dokaz. Denimo nasprotno, da je $\sigma = \sigma(Tf, f) < r(T)$. Po izreku [5, izrek 12.20] je glavni ideal $I = I_f = \{g \in L : |g| \leq \lambda f \text{ pri nekem } \lambda \geq 0\}$ Banachova mreža (natančneje AM-prostor) v normi, definirani s predpisom $\|g\|_0 = \sigma(|g|, f)$. Dokažimo, da je I invarianten za operator T. Zaradi linearnosti je dovolj dokazati, da je $Tg \in I$ za vsak pozitiven vektor $g \in I$. Ker je $g \leq \|g\|_0 f$ in $Tf \leq \sigma f$, je $Tg \leq \|g\|_0 Tf \leq \sigma\|g\|_0 f$, torej je $Tg \in I$. Iz zadnje neenakosti tudi sledi $\|Tg\|_0 \leq \sigma\|g\|_0$. Če s T_0 označimo zožitev operatorja T na Banachovo mrežo I, je torej T_0 omejen pozitiven operator na I in za njegovo (operatorsko) normo velja ocena $\|T_0\|_0 \leq \sigma$. To pomeni, da za vsak $\lambda > \sigma$ obstaja resolventa $(\lambda - T_0)^{-1}$, ki je pozitiven omejen operator na I. Ker ima T po predpostavki lastnost (p), obstaja $\lambda \in (\sigma, r(T))$, ki pripada resolventni množici operatorja T. Pri tem λ je resolventa $(\lambda - T|_J)^{-1}$ omejen operator na zaprtju J ideala

I, ki je tudi pozitiven, ker je tak operator $(\lambda - T_0)^{-1}$, stožec L^+ pa je zaprta podmnožica v L. Po trditvi 3.1 od tod sledi, da je $\lambda \geq r(T|_J)$. Pokažimo, da je $r(T|_J) = r(T)$, kar potem vodi v očitno protislovje. Po trditvi 3.10 je preslikava $\varphi \to \varphi|_J$ izometrični izomorfizem Banachovih mrež L_n^* in J_n^*, Zato imamo $r(T') = r(T^*|_{J_n^*}) = r((T|_J)^*|_{J_n^*}) \leq r((T|_J)^*) = r(T|_J) \leq r(T)$. Ker je po trditvi 3.9 $r(T') = r(T)$, je tako $r(T|_J) = r(T)$, kar smo želeli videti. $\square$

S primerom se prepričajmo, da izrek 3.12 ne velja, če operator T ni urejenostno zvezen.

Primer 3.13 Naj bo ϕ Banachova limita na l^∞ in $e = (1, 1, 1, \ldots) \in l^\infty$. Pozitiven operator T na l^∞ naj bo definiran s predpisom $Tf = \phi(f)\, e$. Ker je $\|T\| = 1$ in $Te = e$, je $r(T) = 1$. Če je $f = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots) \in l^\infty$, potem je $Tf = 0$ in zato $0 = \sigma(Tf, f) < r(T) = 1$.

Izrek 3.14 *Naj bo T pozitiven operator na L, ki ima lastnost (p). Za vsako kvazinotranjo točko $f \in L^+$ velja neenakost*

$$r(T) \leq \sigma(Tf, f) \ .$$

Dokaz. Dokaz poteka tako kot dokaz izreka 3.12. Ker je f kvazinotranja točka, je ideal J enak L, zato je enakost $r(T|_J) = r(T)$ očitno izpolnjena. Tako v tem primeru za dokaz te enakosti ne potrebujemo dodatnih predpostavk o Banachovi mreži L. $\square$

V naslednjem primeru pokažimo, da neenakost iz izreka 3.14 ni nujno izpolnjena, če operator T nima lastnosti (p).

Primer 3.15 Spekter zveznega operatorja S na Banachovi mreži l^2, ki je podan s predpisom $S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, je enak zaprtemu enotskemu krogu.

Zato operator S nima lastnosti (p), spektralni radij $r(S)$ pa je enak 1. Po drugi strani je vektor $f = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots) \in l^2$ kvazinotranja točka z lastnostjo $\sigma(Sf, f) = 1/2$. Torej neenakost iz izreka 3.14 za operator S in vektor f ne velja.

V izreku 3.14 smo privzeli dodatno predpostavko o šibki enoti f, v izreku 3.12 pa dodatno predpostavko o prostoru L in (šibko) predpostavko o operatorju T. V naslednjem izreku za operator T predpostavljamo, da je potenčno kompakten, s čimer precej zmanjšamo razred obravnavanih operatorjev.

Izrek 3.16 *Naj bo T pozitiven σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator na L in naj bo $f \in L^+$ šibka enota. Potem velja neenakost*

$$r(T) \leq \sigma(Tf, f) \ .$$

Predpostavimo še, da je operator T pasovno ireducibilen. Če v neenakosti velja enakost, potem je f lastni vektor operatorja T, ki ustreza lastni vrednosti $r(T)$.

Dokaz. Ker neenakost očitno velja, če je $r(T) = 0$, vzemimo, da je $r(T) > 0$. Denimo, da obstaja tako število $c > 0$, da je $\sigma(Tf, f) = r(T) - c$. Po trditvi 3.3 obstaja tak neničeln σ-urejenostno zvezen pozitiven funkcional $\varphi \in L^*$, da je $T^*\varphi = r(T)\varphi$. Potem imamo

$$\varphi(r(T)f - Tf) = r(T)\,\varphi(f) - (T^*\varphi)f = 0 \ . \tag{3.2}$$

Ker je $r(T)f - Tf \geq cf$, je $\varphi(f) = 0$, od koder sledi $\varphi(g) = 0$ za vse $g \in I_f$. Ker je φ σ-urejenostno zvezen, se tako kot v dokazu trditve 3.10 prepričamo, da je $\varphi = 0$. S tem protislovjem smo končali dokaz neenakosti $r(T) \leq \sigma(Tf, f)$.

Pri dokazu druge trditve smemo po trditvi 3.3 privzeti, da je funkcional φ strogo pozitiven. (Po izreku 3.4 je $r(T) > 0$.) Če v neenakosti velja enakost, potem iz (3.2) sledi, da je $r(T)f - Tf = 0$, torej je f lastni vektor operatorja T, ki ustreza lastni vrednosti $r(T)$. $\square$

3.4 Spektralni radij produkta operatorjev

V tem razdelku bomo s pomočjo izrekov 3.11, 3.12, 3.14 in 3.16 ocenili spektralni radij produkta pozitivnih operatorjev. S tem bomo posplošili rezultat, ki sta ga v primeru nenegativnih matrik dokazala Johnson in Bru v članku [30].

Izrek 3.17 *Naj bodo T_1, T_2, ..., T_n pozitivni operatorji na Banachovi mreži L, vsi s pozitivnimi spektralnimi radiji. Predpostavimo, da obstajajo taki pozitivni neničelni vektorji f_1, f_2, ..., $f_n \in L^+$, da je $T_i\, f_i = r(T_i)\, f_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots, n$. Potem je*

$$\delta(f_n, f_{n-1})\, \delta(f_{n-1}, f_{n-2}) \cdots \delta(f_2, f_1)\, \delta(f_1, f_n) \le \frac{r(T_1 T_2 \cdots T_n)}{r(T_1)\, r(T_2) \cdots r(T_n)} \ .$$

Dokaz. Z večkratno uporabo neenakosti $f \ge \delta(f, g)\, g$, ki velja za poljubna neničelna vektorja $f, g \in L^+$, dobimo

$$(T_1 \cdots T_n) f_n = r(T_n)\, (T_1 \cdots T_{n-1}) f_n \ge r(T_n)\, \delta(f_n, f_{n-1})\, (T_1 \cdots T_{n-1}) f_{n-1} \ge$$

$$\ge r(T_n)\, r(T_{n-1})\, \delta(f_n, f_{n-1})\, \delta(f_{n-1}, f_{n-2})\, (T_1 \cdots T_{n-2}) f_{n-2} \ge \cdots$$

$$\cdots \ge r(T_n)\, r(T_{n-1}) \cdots r(T_2)\, \delta(f_n, f_{n-1})\, \delta(f_{n-1}, f_{n-2}) \cdots \delta(f_2, f_1)\, T_1 f_1 \ge$$

$$\ge r(T_1)\, r(T_2) \cdots r(T_n)\, \delta(f_n, f_{n-1})\, \delta(f_{n-1}, f_{n-2}) \cdots \delta(f_2, f_1)\, \delta(f_1, f_n)\, f_n \ .$$

Od tod sledi

$$\delta((T_1 \cdots T_n) f_n, f_n) \ge r(T_1) \cdots r(T_n)\, \delta(f_n, f_{n-1}) \cdots \delta(f_2, f_1)\, \delta(f_1, f_n) \ .$$

Dokaz zaključimo z upoštevanjem izreka 3.11. □

Po pričakovanjih je izrek o zgornji oceni spektralnega radija produkta pozitivnih operatorjev bolj zapleten kot izrek 3.17.

Izrek 3.18 *Naj bodo T_1, T_2, …, T_n taki pozitivni operatorji na L s pozitivnimi spektralnimi radiji, da ima operator $T = T_1 T_2 \cdots T_n$ lastnost (p). Naj bodo nadalje f_1, f_2, …, f_n take šibke enote iz L, da velja $T_i\, f_i = r(T_i)\, f_i$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Predpostavimo še, da je izpolnjen vsaj eden od naslednjih pogojev:*

(i) *L je Dedekindovo polna mreža s šibko Fatoujevo normo, prostor L_n^* loči točke prostora L in operator T je urejenostno zvezen;*

(ii) *vsaj eden od vektorjev f_1, …, f_n je kvazinotranja točka stožca L^+;*

(iii) *T je σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator.*

Potem velja

$$\frac{r(T_1 T_2 \cdots T_n)}{r(T_1)\, r(T_2) \cdots r(T_n)} \le \sigma(f_n, f_{n-1})\, \sigma(f_{n-1}, f_{n-2}) \cdots \sigma(f_2, f_1)\, \sigma(f_1, f_n)\ .$$

Dokaz. Očitno je zanimiv samo primer, ko je $\sigma(f_{i+1}, f_i) < \infty$ za vse $i = 1, 2, \ldots, n$, kjer smo definirali $f_{n+1} = f_1$. Tedaj so pri predpostavki (ii) vsi vektorji $\{f_k\}_{k=1}^n$ kvazinotranje točke stožca L^+. Potem postopamo podobno kot v dokazu izreka 3.17: večkrat uporabimo neenakost $f \le \sigma(f, g)\, g$ (ki velja za poljubni šibki enoti f, $g \in L^+$ z lastnostjo $\sigma(f, g) < \infty$) in namesto izreka 3.11 uporabimo zaporedoma izreke 3.12, 3.14 in 3.16. □

Naslednja primera nas bosta prepričala, da v izreku 3.18 ne smemo izpustiti niti pogojev (i), (ii) in (iii) niti predpostavke, da ima operator T lastnost (p).

Primer 3.19 Kot v primeru 3.13 naj bo $e = (1, 1, 1, \ldots)$ in T pozitiven operator na l^∞, definiran s predpisom $Tf = \phi(f)\, e$, kjer je ϕ Banachova limita na l^∞. Na Banachovi mreži $l^\infty \times l^\infty$ (opremljeni npr. z normo $\|(u, v)\| = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$) definirajmo pozitivna operatorja T_1 in T_2 z matrikama

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix}\ ,$$

kjer je I identični operator na l^∞. Če je $f = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$, potem je (f, f) lastni vektor operatorjev T_1 in T_2, ki ustreza lastni vrednosti $r(T_1) = r(T_2) = 1$. S kratkim računom se prepričamo, da je $((1 + \sqrt{5})e, 2e)$ lastni vektor operatorja T_1T_2 pri lastni vrednosti $(3 + \sqrt{5})/2$. Torej je $r(T_1T_2) \geq (3 + \sqrt{5})/2 > 1$ in neenakost iz izreka 3.18 ne velja, čeprav operator T_1T_2 ima lastnost (p).

Primer 3.20 Kot v primeru 3.15 naj bo $f = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots) \in l^2$ in S zvezen operator na l^2, podan s predpisom $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Nadalje naj bosta operatorja T_1 in T_2 definirana na Banachovi mreži $l^2 \oplus_2 l^2$ (L^2-vsota dveh kopij Banachove mreže l^2) z matrikama

$$T_1 = \begin{bmatrix} S & S \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S & S \end{bmatrix} ,$$

kjer je I identični operator na l^2. Potem je (f, f) lastni vektor obeh operatorjev, ki pripada lastni vrednosti $r(T_1) = r(T_2) = 1$. Če sedaj postavimo $g = (1, 0.9, 0.9^2, 0.9^3, \ldots) \in l^2$, se hitro prepričamo, da je vektor $(3g, 2g)$ lastni vektor operatorja T_1T_2 pri lastni vrednosti $9/4$. Potemtakem velja $r(T_1T_2) \geq 9/4$ in neenakost iz izreka 3.18 ne velja.

V nadaljevanju tega razdelka podajmo nekaj posledic izrekov 3.17 in 3.18.

Posledica 3.21 *Pri izpolnjenih pogojih izreka* 3.17 *naj velja še*

$$\delta(f_n, f_{n-1})\, \delta(f_{n-1}, f_{n-2}) \cdots \delta(f_2, f_1)\, \delta(f_1, f_n) > 0 \ .$$

Potem je $r(T_1T_2 \cdots T_n) > 0$.

Če je $n > 2$, potem sta neenakosti iz izrekov 3.17 in 3.18 odvisni od vrstnega reda operatorjev $T_1, T_2, \ldots, T_n$. V naslednji posledici izrekov 3.17 in 3.18 zabeležimo (šibkejšo) neenakost, v kateri vrstni red operatorjev ni pomemben.

Posledica 3.22 *Pri izpolnjenih pogojih izreka* 3.18 *naj bo* $f = \inf\{f_1, \dots, f_n\}$ *in* $M = \sigma(f_1, f)\,\sigma(f_2, f) \dots \sigma(f_n, f) \in (0, \infty]$. *Potem za vsako permutacijo* π *množice števil* $\{1, 2, \dots, n\}$ *velja*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{r(T_{\pi(1)} T_{\pi(2)} \cdots T_{\pi(n)})}{r(T_1)\, r(T_2) \cdots r(T_n)} \leq M \ ,$$

kjer velja dogovor $1/\infty = 0$.

Dokaz. Ker je $B_f = B_{f_1} \cap \dots \cap B_{f_n} = L$, je f tudi šibka enota prostora L. Neenakost potem sledi iz izrekov 3.17 in 3.18, ker veljajo ocene $\sigma(f_k, f) \geq \sigma(f_k, f_{k-1})$ in $\delta(f_k, f_{k-1}) \geq \delta(f, f_{k-1}) = 1/\sigma(f_{k-1}, f)$, $k = 1, 2, \dots, n$, kjer je $f_0 := f_n$. □

V splošnem spodnja in zgornja ocena iz izrekov 3.17 in 3.18 nista recipročni števili. Pri $n = 2$ pa je to res, ker za poljubna neničelna vektorja $f, g \in L^+$ velja $\delta(f, g) = 1/\sigma(g, f)$.

Trditev 3.23 *Pri izpolnjenih predpostavkah izreka* 3.18 *naj bo* $n = 2$. *Potem velja neenakost*

$$\frac{1}{\sigma(f_2, f_1)\, \sigma(f_1, f_2)} \leq \frac{r(T_1 T_2)}{r(T_1)\, r(T_2)} \leq \sigma(f_2, f_1)\, \sigma(f_1, f_2) \ .$$

V tem primeru vrstni red operatorjev in vektorjev ni pomemben. Če namreč v trditvi 3.23 zamenjamo vlogi operatorjev T_1 in T_2 ali vektorjev f_1 in f_2, vsi trije izrazi v neenakosti ostanejo nespremenjeni.

Naj bo L Banachov funkcijski prostor $L^2(E, \mu)$. Potem je $L_n^* = L^* = L$. Naj bo T pozitiven kompakten operator na $L^2(E, \mu)$. Tedaj je T^*T tudi pozitiven kompakten operator na $L^2(E, \mu)$. Če postavimo $s(T) = r(\sqrt{T^*T})$, tj. $s(T)$ je največja singularna vrednost operatorja T, iz trditve 3.23 dobimo naslednjo posledico.

Posledica 3.24 *Naj bo T pozitiven kompakten operator na $L^2(E,\mu)$ s spektralnim radijem $r(T) > 0$. Denimo, da obstajata taki skoraj povsod pozitivni funkciji f, $g \in L^2(E,\mu)$, da je $T\,f = r(T)\,f$ in $T^*g = r(T)g$. Potem je*

$$1 \leq \frac{s(T)}{r(T)} \leq \sqrt{\sigma(f,g)\,\sigma(g,f)}\ .$$

Dokaz. Leva neenakost sledi iz ocene

$$r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2 \geq (r(T))^2\ .$$

Prvi enačaj velja zato, ker je T^*T sebiadjungiran operator. □

Posebni primer zadnje posledice je naslednja

Posledica 3.25 *Naj bo T pozitiven kompakten operator na $L^2(E,\mu)$ s spektralnim radijem $r(T) > 0$. Če obstaja taka skoraj povsod pozitivna funkcija $f \in L^2(E,\mu)$, da je $T\,f = T^*f = r(T)\,f$, potem je $s(T) = r(T)$.*

3.5 Še o Collatz-Wielandtovih ocenah

Videli smo, da desna neenakost (3.1) ne velja za vse pozitivne operatorje T z lastnostjo (p) in za vse šibke enote $f \in L$. Naslednji izrek pove, da za σ-Dedekindovo polno Banachovo mrežo L neenakost (3.1) velja za vse pozitivne operatorje T z lastnostjo (p) in za vse šibke enote $f \in L^+$ natanko tedaj, ko ima L urejenostno zvezno normo. Dokaz tega dejstva temelji na naslednji trditvi, ki je le nekoliko dopolnjen izrek 117.3 iz [58].

Trditev 3.26 *Naj bo L σ-Dedekindovo polna Banachova mreža. Potem obstaja Banachova podmreža K mreže L in izomorfizem Banachovih mrež γ iz l^∞ v K natanko tedaj, ko norma prostora L ni urejenostno zvezna. Če L vsebuje šibke enote, izomorfizem γ lahko izberemo tako, da vsako šibko enoto prostora l^∞ preslika v šibko enoto prostora L.*

Dokaz. Potrebnost dokažemo tako kot v [58, izrek 117.3]. Denimo torej, da norma prostora L ni urejenostno zvezna. Po [58, izrek 104.2] obstaja v L tako urejenostno omejeno zaporedje $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktnih vektorjev, ki ne konvergira proti 0. Smemo privzeti, da je $\|u_n\| = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $0 \le u_n \le u$ pri nekem $u \in L$. Zaradi disjunktnosti zaporedja $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je po trditvi 1.1 (b)

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sup\{u_i : 1 \le i \le n\} \le u$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je L σ-Dedekindovo polna mreža, obstaja vektor

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} u_i := \sup\{\sum_{i=1}^{n} u_i : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Naj bo P_w pasovni projektor na glavni pas B_w. Tak projektor obstaja, ker ima vsak σ-Dedekindovo poln Rieszov prostor glavno projekcijsko lastnost (glej npr. [33, izrek 6.7]). Če je $v = u - P_w u$ neničeln vektor, potem definiramo $u_0 = (1/\|v\|)\, v$ in zaporedje $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ zamenjamo z zaporedjem $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ker je $\sum_{i=1}^{n} u_i \le u$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in je L σ-Dedekindovo polna Banachova mreža, za vsak $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^{\infty}$ delne vsote $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ urejenostno konvergirajo proti nekemu elementu iz L, ki ga označimo z $\sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i$. S predpisom $\gamma(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i$ je definiran injektiven Rieszov homomorfizem iz l^{∞} v L. Ker je $|\sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| u_i$ in ker za vsako končno vsoto $\sum_{i=1}^{n} |x_i| u_i$ velja

$$\max\{|x_i| : 1 \le i \le n\} \le \left\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| u_i \right\| \le \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| u_i \right\| \ ,$$

dobimo neenakost

$$\sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} \le \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i \right\|$$

oziroma $\|x\|_{\infty} \le \|\gamma(x)\|$ za vsak $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^{\infty}$. Po drugi strani za vsak $x \in l^{\infty}$ velja

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| u_i \le \|x\|_{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_i \le \|x\|_{\infty}\, u \ ,$$

zato je

$$\|\gamma(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i \right\| \le \|x\|_{\infty}\, \|u\| \ .$$

Torej je $K = \mathrm{Im}\,\gamma$ Banachova podmreža mreže L in γ izomorfizem Banachovih mrež l^∞ in K.

Predpostavimo sedaj, da L vsebuje šibke enote. Potem smemo na začetku dokaza privzeti, da je u šibka enota prostora L. Če to namreč ne velja, vektorju u prištejemo neko šibko enoto prostora L. Vektor w, ki ga dobimo po zamenjavi zaporedja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ z zaporedjem $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ (če je ta sploh potrebna), je tedaj tudi šibka enota prostora L. S pomočjo slednjega dejstva je lahko videti, da operator γ slika šibke enote prostora l^∞ v šibke enote prostora L. $\square$

Izrek 3.27 *Naj bo L σ-Dedekindovo polna Banachova mreža z neprazno množico W vseh njenih šibkih enot. Če ima L urejenostno zvezno normo, potem je*

$$r(T) \leq \sigma(Tf, f) \tag{3.3}$$

za vsak pozitiven operator T na L z lastnostjo (p) in za vsak vektor $f \in W$. Obratno: če neenakost (3.3) *velja za vsak pozitiven operator T na L z enorazsežno zalogo vrednosti in za vsak vektor $f \in W$, potem je norma prostora L urejenostno zvezna.*

Dokaz. Prva trditev je neposredna posledica izreka 3.14, saj je v tem primeru vsaka šibka enota tudi kvazinotranja točka (glej [50, trditev II.6.5]). Za dokaz druge trditve predpostavimo nasprotno, da norma prostora L ni urejenostno zvezna. Tedaj po trditvi 3.26 mreža L vsebuje Banachovo podmrežo K, ki jo lahko identificiramo z Banachovo mrežo l^∞, in velja: vsaka šibka enota prostora l^∞ je tudi šibka enota prostora L.

Naj bo ϕ Banachova limita na l^∞. Po [50, trditev II.5.6] obstaja pozitiven linearen funkcional φ na L, ki ima enako normo kot ϕ in je njegova razširitev. Če postavimo $e = (1, 1, 1, \ldots) \in l^\infty \subseteq L$, potem predpis $Tf = \varphi(f)\, e$ definira pozitiven operator T na L, ki ima enorazsežno zalogo vrednosti in spektralni radij $r(T) = \phi(e) = 1$. Če je $f = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots) \in l^\infty \subseteq L$, potem je $f \in W$,

$Tf = 0$ in zato $0 = \sigma(Tf, f) < r(T) = 1$. Torej neenakost (3.3) za operator T in vektor f ne velja. S tem protislovjem je dokaz končan. $\square$

Z uporabo izreka 3.4 dobimo naslednjo posledico izrekov 3.11 in 3.16.

Izrek 3.28 *Naj bo L Banachova mreža in W množica vseh njenih šibkih enot. Naj bo T σ-urejenostno zvezen potenčno kompakten operator na L, ki je pasovno ireducibilen. Potem je*

$$r(T) = \max\{\delta(Tf, f) : f \in W\} = \min\{\sigma(Tf, f) : f \in W\} \ .$$

Če je pri $f \in W$ dosežen katerikoli ekstrem, potem je f lastni vektor operatorja T, ki pripada lastni vrednosti $r(T)$.

Izrek 3.28 je v posebnem primeru nenegativnih matrik znan kot "minimax" izrek, ki ga je dokazal Wielandt [54]. Ta izrek je motiviral nekaj matematikov za študij njegovih posplošitev na neskončnorazsežne prostore (glej [51], [21] in [37]).

V dokazu naslednjega izreka bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 3.29 *Če za zaporedje pozitivnih števil $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $x_{m+n} \le x_m x_n$ za vse $m, n \in \mathbb{N}$, potem zaporedje $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x_n} \ .$$

Dokaz. Označimo $x = \inf_n \sqrt[n]{x_n}$, $x_0 = 1$ in izberimo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tako naravno število m, da velja $\sqrt[m]{x_m} < x + \epsilon$. Naj bo $c = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$. Vsako naravno število n ima enoličen razcep $n = k_n m + o_n$, kjer sta k_n in o_n celi števili, za kateri velja $k_n \ge 0$ in $0 \le o_n \le m-1$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$x_n \le x_{mk_n} x_{o_n} \le x_m^{k_n} x_{o_n} \le c\, x_m^{k_n} \ .$$

Od tod sledi

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} c^{1/n}\, x_m^{k_n/n} \leq x + \epsilon \ ,$$

kjer smo upoštevali, da je $\lim_n (k_n/n) = 1/m$. Torej za vsak $\epsilon > 0$ velja ocena

$$x \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq x + \epsilon \ .$$

Od tod takoj sledi vse, kar trdi lema. □

Izrek 3.30 *Naj bo T pozitiven operator na Banachovi mreži L in naj bo $f \in L^+$ tak vektor, da je $\delta(Tf, f) > 0$. Potem je*

$$\sup_n \sqrt[n]{\delta(T^n f, f)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\delta(T^n f, f)} \leq r(T) \ . \tag{3.4}$$

Predpostavimo še, da je T potenčno kompakten operator in f šibka enota z lastnostjo $\sigma(Tf, f) < \infty$. Če je T σ-urejenostno zvezen ali če je f kvazinotranja točka stožca L^+, potem velja

$$r(T) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma(T^n f, f)} = \inf_n \sqrt[n]{\sigma(T^n f, f)} \ . \tag{3.5}$$

Dokaz. Označimo $a_n = \delta(T^n f, f)$. Izrek 3.11 in izrek o preslikavi spektra implicirata $a_n \leq r(T^n) = r(T)^n$ in zato je $\sqrt[n]{a_n} \leq r(T)$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Prav tako imamo $T^{m+n} f \geq T^n(T^m f) \geq a_n T^m f \geq a_m a_n f$, torej je $a_{m+n} \geq a_m a_n$ za vse $m, n \in \mathbb{N}$. Posebej velja $a_n > 0$ za vsa naravna števila n, saj je po predpostavki $a_1 > 0$. Če definiramo $p_n = 1/a_n$, potem imamo $p_{m+n} \leq p_m p_n$ za vse $m, n \in \mathbb{N}$. Ker po lemi 3.29 zaporedje $\{\sqrt[n]{p_n}\}$ konvergira proti $\inf_n \sqrt[n]{p_n}$, je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup_n \sqrt[n]{a_n}$. S tem smo dokazali (3.4). Dokaz neenakosti (3.5) je podoben; namesto izreka 3.11 uporabimo izreka 3.16 in 3.14. □

4. Polgrupe pozitivnih operatorjev

4.1 Motivacija

Leta 1973 je Lomonosov dokazal, da za vsak kompakten operator na Banachovem prostoru (razsežnosti vsaj 2) obstaja netrivialen zaprt podprostor, ki je invarianten za vse operatorje, ki komutirajo z danim operatorjem. Njegov dokaz temelji na uporabi Schauderjevega izreka o negibni točki. Kmalu zatem je Hilden [41] skrajšal dokaz, ki sedaj zahteva le poznavanje najosnovnejših pojmov iz funkcionalne analize. Vprašamo se lahko, ali ima pozitiven kompakten operator na Banachovi mreži (razsežnosti vsaj 2) netrivialen invarianten zaprt ideal. V splošnem je odgovor negativen, v primeru, ko je operator kvazinilpotenten, pa je pozitiven. To je vsebina enega izmed najpomembnejših rezultatov teorije operatorjev na Banachovih mrežah, ki ga je leta 1986 s Hildenovo metodo dokazal de Pagter [44].

V zadnjih dveh desetletjih je bilo dokazanih precej rezultatov, ki zagotavljajo obstoj netrivialnega podprostora, ki je invarianten za vse operatorje iz dane polgrupe operatorjev na Hilbertovem prostoru (glej npr. [42], [47], [46], [35], [36] in [11]). V zvezi s temi rezultati se torej (podobno kot prej) ponuja vprašanje, v kolikšni meri se lahko omenjeni rezultati izboljšajo, če imamo polgrupo pozitivnih operatorjev na Banachovi mreži. Naš prispevek v tej smeri je skromen. V tem poglavju posplošimo in nadgradimo nekatere rezultate iz [11], ostali rezultati pa bodo predmet nadaljnega raziskovanja.

4.2 Osnovne definicije in rezultati

Naj bo L arhimedski Rieszov prostor. Neničeln vektor $f \in L^+$ imenujemo **diskreten element**, kadar iz $0 \leq g \leq f$ sledi $g = \lambda f$ za neko število $\lambda \in [0, 1]$.

Vektor $f \in L^+$ je torej diskreten element tedaj in le tedaj, ko je glavni pas B_f enorazsežen. Ni težko videti, da je tedaj pas B_f projekcijski (glej na primer [34, izrek 26.4] ali [33, izrek 6.14]). V [34] spoznamo tudi pojem atoma Rieszovega prostora, ki se v primeru arhimedskega Rieszovega prostora ujema s pojmom diskretnega elementa.

Podmnožica D prostora L je **poln disjunktni sistem**, kadar jo sestavljajo paroma disjunktni neničelni pozitivni elementi in velja $D^d = \{0\}$. Arhimedski Rieszov prostor L je **diskreten**, kadar obstaja množica diskretnih vektorjev $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq L^+$, ki je poln disjunktni sistem, torej velja:

(a) $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; f_\alpha \wedge f_\beta = 0$;

(b) $f \wedge f_\alpha = 0 \;\forall \alpha \in A \;\Rightarrow\; f = 0$.

Ni težko videti, da je arhimedski Rieszov prostor L diskreten tedaj in le tedaj, kadar je množica njegovih diskretnih elementov **urejenostno gosta** v njem, torej takrat, kadar za vsak neničeln vektor $f \in L^+$ obstaja tak diskreten element $g \in L^+$, da velja $g \leq f$.

O diskretnih prostorih velja naslednji reprezentacijski izrek (glej npr. [33, izrek 6.16]).

Izrek 4.1 *Vsak diskreten arhimedski Rieszov prostor je izomorfen urejenostno gostemu Rieszovemu podprostoru funkcijskega Rieszovega prostora* $\mathbb{R}^A$.

Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na normiranem prostoru X. Podprostor prostora X je **$\mathcal{D}$-invarianten**, kadar je invarianten za vse operatorje iz $\mathcal{D}$.

Naslednji pojem spada v lokalno spektralno teorijo operatorjev (glej npr. [24]). Operator T na normiranem prostoru X je **kvazinilpotenten pri vektorju** $x \in X$, kadar velja

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0 \; .$$

Razdelek končajmo z rezultatom, ki nam pove, da je zaprtih idealov v normirani mreži presenetljivo veliko.

Trditev 4.2 *Naj bosta I in J taka zaprta ideala v normirani mreži E, da je $I \subset J$ in da je kvocientni prostor $G = J/I$ vsaj dvorazsežen. Potem obstaja tak zaprt ideal K, da je $I \subset K \subset J$.*

Dokaz. Naj bo q kanonična (kvocientna) preslikava $J \to G$. Dovolj je pokazati, da obstaja netrivialen zaprt ideal $\tilde{K}$ prostora G, saj je potem $K = q^{-1}(\tilde{K})$ zaprt ideal, ki ustreza pogoju leme. Predpostavimo nasprotno, da sta $\{0\}$ in G edina zaprta ideala prostora G. Če $g \in G$, potem je $g^+ = 0$ ali $g^- = 0$. Če bi namreč veljalo $g^+ \neq 0$ in $g^- \neq 0$, potem bi bil zaprt ideal $I_+ \neq \{0\}$, generiran z g^+, pravi ideal, saj velja $I_+ \subseteq \{g^-\}^d \neq E$. Torej je $g \geq 0$ ali $g \leq 0$ za vsak $g \in G$, od koder sledi, da je G linearno urejen. Zato je po [50, trditev II.3.4] prostor G Rieszovo izomorfen $\mathbb{R}$ in potemtakem enorazsežen. S tem protislovjem je dokaz končan. $\square$

4.3 Skupen invarianten zaprt ideal

V tem razdelku naj bo L normirana mreža, katere razsežnost je vsaj 2. Naj bo $u \in L^+$ diskreten element z normo 1. Ker je glavni pas B_u projekcijski, velja $L = B_u \oplus B_u^d$. Torej za vsak $f \in L$ obstajata natanko določeno število $\lambda \in \mathbb{R}$ in natanko en vektor $g \in B_u^d$, da velja $f = \lambda u + g$. Naj bo ϕ_u pozitiven linearen funkcional na L, definiran s predpisom $\phi_u(f) = \lambda$. Ker sta vektorja λu in g disjunktna, je $|f| = |\lambda| u + |g|$ (glej npr. [33, str.43]). Torej je $|\lambda| \leq \|f\|$ oziroma $\|\phi_u\| \leq 1$. Ker je $\phi_u(u) = 1$, je $\|\phi_u\| = 1$.

Izrek 4.3 *Naj bo $u \in L^+$ diskreten element in naj bo $\mathcal{S}$ multiplikativna polgrupa pozitivnih omejenih operatorjev na L z lastnostjo: $\phi_u(Su) = 0$ za vsak $S \in \mathcal{S}$. Potem obstaja netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten zaprt ideal. Če je poleg tega vsak operator iz $\mathcal{S}$ urejenostno zvezen, potem obstaja netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten pas.*

Dokaz. Če je $Su = 0$ za vse operatorje $S \in \mathcal{S}$, potem je B_u netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten pas. Zato lahko predpostavimo, da množica $D = \{Su : S \in \mathcal{S}\}$ ni enaka $\{0\}$. Naj bo I najmanjši zaprt ideal, ki vsebuje množico D. Torej je I zaprtje ideala

$$I(D) = \{f \in L : \exists \lambda \geq 0 \ \ \exists S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S} : |f| \leq \lambda \, (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)u\} \ .$$

S pomočjo neenakosti $|Tf| \leq T|f|$, ki velja za vsak pozitiven operator T na L in za vsak $f \in L$, brž vidimo, da je I invarianten za vse operatorje iz polgrupe $\mathcal{S}$. Ker je $\phi_u(Su) = 0$ za vsak $S \in \mathcal{S}$, velja $Su \in B_u^d$. Zato je $\{0\} \neq I \subseteq B_u^d \neq L$, s čimer je dokaz prve trditve končan.

Predpostavimo zdaj, da je vsak operator iz polgrupe $\mathcal{S}$ urejenostno zvezen. Pas $B(I)$, generiran z I, je netrivialen, saj velja $B(I) \subseteq B_u^d \neq L$. Ker je po trditvi 1.10 tudi invarianten za vsak operator $S \in \mathcal{S}$, je dokaz končan. □

Posledica 4.4 *Naj bo $u \in L^+$ diskreten element in naj bo $\mathcal{S}$ multiplikativna polgrupa pozitivnih omejenih operatorjev na L, ki so vsi kvazinilpotentni pri vektorju u. Potem obstaja netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten zaprt ideal. Če je vsak operator iz $\mathcal{S}$ urejenostno zvezen, potem obstaja celo netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten pas.*

Dokaz. Pri danem $S \in \mathcal{S}$ označimo $\lambda = \phi_u(Su)$. Iz neenakosti $Su \geq \lambda u$ sledi $S^n u \geq \lambda^n u$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Zato imamo $\lambda \, \|u\|^{1/n} \leq \|S^n u\|^{1/n}$. Ker je S kvazinilpotenten pri vektorju u, je $\lambda = 0$. Torej so vse predpostavke izreka 4.3 izpolnjene. □

Ali lahko v izreku 4.3 in v posledici 4.4 izpustimo predpostavko o urejenostni zveznosti operatorjev iz polgrupe $\mathcal{S}$? Odgovor je negativen. V naslednjem primeru bomo namreč videli, da obstaja polgrupa $\mathcal{S} = \{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ kvazinilpotentnih kompaktnih pozitivnih operatorjev na Banachovi mreži l^∞, ki nima netrivialnih $\mathcal{S}$-invariantih pasov.

Primer 4.5 Naj bo ϕ tak pozitiven linearen funkcional na l^∞ (npr. Banachova limita), da je $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ za vsak $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ iz Banachove podmreže c vseh konvergentnih zaporedij. Naj bo $a = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots) \in l^\infty$. S predpisoma $Kx = \phi(x)\, a$ in $Tx = (0, x_1/2, x_2/4, x_3/8, \ldots)$ sta definirana kompaktna pozitivna operatorja K in T na l^∞, ki sta kvazinilpotentna, saj je $K^2 = 0$ in

$$\|T^n\| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)/2} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N} \, .$$

Očitno je operator $S = T + K$ kompakten pozitiven operator na l^∞. Ker je $K^2 = 0$ in $KT = 0$, je $S^n = T^{n-1}S$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, od koder sledi, da je operator S tudi kvazinilpotenten.

Dokažimo, da je operator S pasovno ireducibilen. Vzemimo poljuben pas $B \neq \{0\}$, ki je invarianten za S. Če z $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ označimo zaporedje standardnih enotskih vektorjev v l^∞, potem obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $e_n \in B$. Ker velja $Se_{n+k} = Te_{n+k} = (1/2^{n+k})\, e_{n+k+1}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, je $e_{n+k} \in B$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Od tod sledi, da vektor $b = \sup\{\sum_{k=0}^{m} e_{n+k} : m \in \mathbb{N}\}$ pripada B. Iz $Sb \geq Kb = a$ potem sledi $a \in B$ in zato je $B = l^\infty$, saj je a šibka enota prostora l^∞.

V članku [1] (avtorjev Abramovich, Aliprantis in Burkinshaw) so predstavljene različne posplošitve de Pagterjevega in Ando-Kriegerjevega izreka. Med drugim je konstruiran primer kvazinilpotentnega kompaktnega pozitivnega operatorja, ki je pasovno ireducibilen. Ta operator je definiran na manj znanem Marcinkiewiczevem funkcijskem prostoru. Operator S iz primera 4.5 je potemtakem še en primer takih operatorjev, ki je poleg tega definiran na "lepi" diskretni Banachovi mreži l^∞. Vendar moramo pripomniti, da ima operator iz članka [1] enorazsežno zalogo vrednosti in je zato že njegov kvadrat enak 0.

V nadaljevanju bomo pokazali, da posledica 4.4 velja tudi za aditivne polgrupe. V dokazu tega rezultata bomo potrebovali naslednjo trditev.

Trditev 4.6 *Naj bo $\mathcal{S}$ aditivna polgrupa pozitivnih omejenih operatorjev na L, ki so vsi kvazinilpotentni pri diskretnem elementu $u \in L^+$. Potem je vsak operator iz algebre, generirane s $\mathcal{S}$, kvazinilpotenten pri vektorju u.*

Dokaz. Naj bo A poljuben operator iz algebre, generirane s $\mathcal{S}$. Potem obstajata taki naravni števili m in p in obstajajo taki operatorji $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{S}$, da velja $A = \sum_{i=1}^m a_i A_i$, kjer je $a_i \in \mathbb{R}$ in je vsak operator A_i produkt kvečjemu p (ne nujno različnih) elementov množice $\{S_1, \ldots, S_k\}$. Naj bo $S = S_1 + \ldots + S_k$ in $T = \sum_{j=0}^{p-1} S^j$. Iz neenakosti $\|(ST)^n u\| \leq \|T\|^n \, \|S^n u\|$ sledi, da je operator ST kvazinilpotenten pri u, ker je tak operator S. Če označimo $a = \max_{1 \leq i \leq m}\{|a_i|\}$, je $\sum_{i=1}^m |a_i| A_i \ \leq \ a \sum_{j=1}^p S^j \ = \ a\, ST$ in zato je operator $\tilde{A} = \sum_{i=1}^m |a_i| A_i$ tudi kvazinilpotenten pri u. Ker je $|A_i f| \leq A_i |f|$, je $|Af| \leq \tilde{A}|f|$ za vsak $f \in L$. Zato za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|A^n u| \leq \tilde{A}^n u$, od koder sledi, da je operator A tudi kvazinilpotenten pri u. □

Izrek 4.7 *Naj bo $u \in L^+$ diskreten element in naj bo $\mathcal{S}$ aditivna polgrupa pozitivnih omejenih operatorjev na L, ki so vsi kvazinilpotentni pri u. Potem obstaja netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten zaprt ideal. Če je vsak operator iz $\mathcal{S}$ urejenostno zvezen, potem obstaja celo netrivialen $\mathcal{S}$-invarianten pas.*

Dokaz. Po trditvi 4.6 so vsi operatorji iz multiplikativne polgrupe $\mathcal{T}$, generirane s $\mathcal{S}$, kvazinilpotentni pri u. Prva trditev potem sledi iz posledice 4.4.

Če je vsak operator iz $\mathcal{S}$ urejenostno zvezen, potem je tak tudi vsak operator iz $\mathcal{T}$. Produkt urejenostno zveznih operatorjev je namreč urejenostno zvezen. Potem po drugi trditvi iz posledice 4.4 obstaja netrivialen $\mathcal{T}$-invarianten pas, ki je očitno tudi $\mathcal{S}$-invarianten. □

4.4 Pozitivni ortomorfizmi na diskretni normirani mreži

Operator D na normirani mreži L imenujemo **ortomorfizem**, kadar je vsak pas prostora L invarianten za D. Zabeležimo uporabno karakterizacijo pozitivnih omejenih ortomorfizmov (glej dokaz leme 144.1 v [58]).

Trditev 4.8 *Pozitiven operator D na normirani mreži L je omejen ortomorfizem natanko tedaj, kadar obstaja tak $\lambda > 0$, da je $D \le \lambda I$.*

Iz trditve 4.8 sledi, da je vsak ideal prostora L invarianten za poljuben omejen pozitiven ortomorfizem.

Naj bo sedaj L diskretna normirana mreža in $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq L^+$ pripadajoči poln disjunktni sistem diskretnih elementov. Privzeti smemo, da je $\|f_\alpha\| = 1$ za vsak $\alpha \in A$. V tem razdelku bomo podrobneje opisali pozitivne omejene ortomorfizme na L.

Naj bo $\mathcal{A}$ kolekcija vseh končnih podmnožic množice A in naj bo $\{\lambda_\alpha : \alpha \in A\}$ poljubna množica realnih števil. Če je vektor $f \in L$ urejenostna limita množice $\{\sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha f_\alpha : B \in \mathcal{A}\}$, potem to krajše pišemo

$$f = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha f_\alpha \ .$$

Trditev 4.9 *Za vsak vektor $f \in L$ obstajajo natanko določena realna števila $\{\lambda_\alpha : \alpha \in A\}$, da velja*

$$f = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha f_\alpha \ .$$

Dokaz. Dokažimo najprej obstoj reprezentacije. Ker je $f = f^+ - f^-$ in ker je urejenostna limita linearna, zadostuje obravnavati primer, ko je $f > 0$. Za vsak $\alpha \in A$ definirajmo $\lambda_\alpha = \sup\{\lambda \ge 0 : \lambda f_\alpha \le f\}$. Ker je L arhimedski prostor, supremum obstaja in velja $\lambda_\alpha f_\alpha \le f$. Če upoštevamo, da so $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ disjunktni sistem, po trditvi 1.1 (b) za vsak $B \in \mathcal{A}$ velja neenakost

$$g_B := \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha f_\alpha = \sup\{\lambda_\alpha f_\alpha : \alpha \in B\} \le f \ ,$$

torej je f zgornja meja navzgor usmerjene množice $\{g_B\}_{B\in\mathcal{A}}$. Dokažimo, da je najmanjša zgornja meja. Vzemimo vektor $g \in L^+$, za katerega velja $g_B \le g$ za vsak $B \in \mathcal{A}$. Denimo, da je $(g-f)^- > 0$. Potem obstaja tak $\alpha \in A$, da je $(g-f)^- \wedge f_\alpha > 0$. Ker je f_α diskreten element, obstaja tak $\lambda > 0$, da je $(g-f)^- \wedge f_\alpha = \lambda f_\alpha$. Zaradi $\lambda_\alpha f_\alpha \le g$ imamo $f - g \le f - \lambda_\alpha f_\alpha$, od koder sledi $(g-f)^- = (f-g) \wedge 0 \le f - \lambda_\alpha f_\alpha$. Torej velja neenakost

$$(\lambda_\alpha + \lambda) f_\alpha \le \lambda_\alpha f_\alpha + (g-f)^- \le f \ ,$$

kar je v protislovju z definicijo števila λ_α. Dokazali smo torej, da je f urejenostna limita množice $\{g_B\}_{B\in\mathcal{A}}$.

Za enoličnost reprezentacije je dovolj dokazati, da iz $\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha f_\alpha = 0$ sledi $\lambda_\alpha = 0$ za vsak α. Ker je $\{f_\alpha\}^d$ pas in je $f_\beta \in \{f_\alpha\}^d$ za vsak $\beta \ne \alpha$, je $-\lambda_\alpha f_\alpha = \sum_{\beta\ne\alpha} \lambda_\beta f_\beta \in \{f_\alpha\}^d$, od koder sledi $\lambda_\alpha = 0$. □

Za vsak $\alpha \in A$ je s predpisom $\phi_\alpha(f) = \lambda_\alpha$ definiran pozitiven linearen funkcional ϕ_α na L, ki ima normo enako 1.

Trditev 4.10 *Naj bo L Dedekindovo poln in naj bo T pozitiven omejen operator na L. Potem za vsak $f \in L$ obstaja vsota*

$$Df := \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(Tf_\alpha)\, \phi_\alpha(f)\, f_\alpha \ , \tag{4.1}$$

operator D, definiran s (4.1), *pa je pozitiven omejen ortomorfizem na L. Če je tudi T ortomorfizem, potem je $D = T$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost smemo vzeti, da je $f \in L^+$. Ker je

$$\phi_\alpha(Tf_\alpha) \le \|Tf_\alpha\| \le \|T\|$$

za vsak $\alpha \in A$, je vsaka končna delna vsota izraza Df manjša oziroma kvečjemu enaka $\|T\|\, f$. Ker je L Dedekindovo poln, od tod sledi, da Df obstaja v L in da je $Df \le \|T\|\, f$ oziroma $D \le \|T\| I$. Po trditvi 4.8 je zato D pozitiven omejen ortomorfizem.

Denimo, da je T ortomorfizem. Ker obstaja tako pozitivno število λ, da je $0 \le Tf_\alpha \le \lambda f_\alpha$ za vsak $\alpha \in A$, je $Tf_\alpha = \phi_\alpha(Tf_\alpha) f_\alpha$. Torej je $Tf_\alpha = Df_\alpha$ za vse $\alpha \in A$. Po [58, posledica 140.6.(ii)] je potem $D = T$. $\square$

Če bi upoštevali reprezentacijski izrek 4.1, bi bila dokaza trditev 4.9 in 4.10 krajša. Če je namreč L podprostor funkcijskega prostora $\mathbb{R}^A$, potem je f_α funkcija, ki je povsod razen v točki α enaka 0, operator iz (4.1) pa je operator množenja z neko omejeno realno funkcijo na A.

Trditev 4.11 *Naj bo L Dedekindovo poln prostor in naj bo T pozitiven omejen operator na L. Potem ima T natanko eno dekompozicijo $T = D_T + N_T$, kjer je D_T pozitiven omejen ortomorfizem na L in N_T pozitiven omejen operator na L, za katerega velja $\phi_\alpha(N_T f_\alpha) = 0$ za vsak $\alpha \in A$. Za vsak vektor $f \in L$ veljata formuli*

$$D_T f = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(Tf_\alpha)\, \phi_\alpha(f)\, f_\alpha \quad \textit{in} \qquad N_T f = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(T(f - \phi_\alpha(f) f_\alpha))\, f_\alpha\ . \tag{4.2}$$

Dokaz. Operator D_T, definiran s predpisom (4.2), je po trditvi 4.10 pozitiven omejen ortomorfizem na L. Naj bo $N_T = T - D_T$. Potem z uporabo enakosti $Tf = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(Tf)\, f_\alpha$ dobimo drugo enakost v (4.2). Operator N_T je pozitiven, saj za vsak $f \in L^+$ in vsak $\alpha \in A$ velja $f \ge \phi_\alpha(f) f_\alpha$, operator T in funkcional ϕ_α pa sta pozitivni preslikavi. Ker za vsak $\alpha \in A$ velja tudi $\phi_\alpha(N_T f_\alpha) = 0$, operator T ima željeno dekompozicijo. Za dokaz njene enoličnosti predpostavimo, da je $T = D + N$ še ena taka dekompozicija. Ker za vsak $\alpha \in A$ velja $\phi_\alpha(Df_\alpha) = \phi_\alpha(Tf_\alpha)$, je $D_T f = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(Df_\alpha)\, \phi_\alpha(f)\, f_\alpha$. Če uporabimo trditev 4.10 za operatorja $D := D_T$ in $T := D$, dobimo $D = D_T$, s čimer je dokaz končan. $\square$

Če je T pozitiven operator na L, ki za vsak $\alpha \in A$ izpolnjuje pogoj $\phi_\alpha(Tf_\alpha) = 0$, je očitno $D_T = 0$ in $N_T = T$. V tem primeru ni potrebno predpostavljati, da je prostor L Dedekindovo poln.

Primer 4.12 Naj bo $L = l^p$, $1 \le p \le \infty$. Potem je zaporedje standardnih enotskih vektorjev $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ poln disjunktni sistem diskretnih elementov. Vsak operator na T na l^p lahko predstavimo z matriko $[t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, kjer so števila t_{ij} določena z enačbami

$$Te_j = \sum_{i=1}^{\infty} t_{ij}\, e_i \ , \quad j \in \mathbb{N} \ .$$

Tukaj je vsota seveda definirana kot urejenostna limita (končnih) delnih vsot. Brž vidimo, da je operator D_T predstavljen z diagonalno matriko, ki ima po diagonali števila t_{ii}, $i \in \mathbb{N}$, operator N_T pa z matriko, ki ima po glavni diagonali ničle, izven diagonale pa se ujema z matriko operatorja T.

4.5 Maksimalna veriga skupnih invariantnih pasov

V tem razdelku je L diskretna normirana mreža, katere razsežnost je vsaj 2. Naj bo $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq L^+$ pripadajoči poln disjunktni sistem diskretnih elementov.

Izrek 4.13 *Naj bo L Dedekindovo poln prostor in naj bo $\mathcal{S}$ kolekcija pozitivnih omejenih operatorjev na L, ki izpolnjuje naslednji pogoj: brž ko za par $S, T \in \mathcal{S}$ velja $\phi_\beta(N_S f_\alpha) > 0$ in $\phi_\gamma(N_T f_\beta) > 0$, potem obstaja tak $U \in \mathcal{S}$, da je $\phi_\gamma(N_U f_\alpha) > 0$. Tedaj lahko indeksno množico A linearno uredimo tako, da je $\phi_\beta(N_S f_\alpha) = 0$ za vsak $S \in \mathcal{S}$ in za vsak par $\alpha, \beta \in A$, ki ustreza pogoju $\alpha \le \beta$.*

Dokaz. Na indeksni množici A vpeljemo urejenost s predpisom: $\alpha \geq \beta$, če je $\alpha = \beta$ ali če obstaja tak operator $S \in \mathcal{S}$, da je $\phi_\beta(N_S f_\alpha) > 0$. Pokažimo, da je $\geq$ relacija delne urejenosti. Relacija $\geq$ je refleksivna po definiciji, tranzitivna pa zaradi predpostavke o polgrupi $\mathcal{S}$. Denimo torej, da je $\alpha \geq \beta$, $\beta \geq \alpha$ in $\alpha \neq \beta$. Potem obstajata taka operatorja $S, T \in \mathcal{S}$, da je $\phi_\beta(N_S f_\alpha) > 0$ in $\phi_\alpha(N_T f_\beta) > 0$. Po predpostavki obstaja tak $U \in \mathcal{S}$, da je $\phi_\alpha(N_U f_\alpha) > 0$, kar je protislovje z lastnostjo operatorja N_U. Torej je relacija $\geq$ tudi antisimetrična.

Vsako relacijo delne urejenosti lahko razširimo do linearne urejenosti. Res! Naj bo $\mathcal{R}$ družina vseh delnih ureditev množice A, ki so razširitev dane delne urejenosti $\geq$. V $\mathcal{R}$, ki je na naraven način delno urejena, ima vsaka veriga zgornjo mejo. Po Zornovi lemi zato v $\mathcal{R}$ obstaja maksimalna delna ureditev, v kateri so vsi elementi primerljivi. Dobljeno relacijo linearne urejenosti prav tako označimo z $\geq$. Če sedaj velja $\beta \geq \alpha$ in $\phi_\beta(N_S f_\alpha) > 0$, potem je $\alpha > \beta$ in zato $\alpha > \alpha$, kar je protislovje. $\square$

Naj bo $\mathcal{L}$ mreža vseh zaprtih podprostorov prostora L. Dokazali bomo, da je v primeru, ko ima L urejenostno zvezno normo, kolekcija $\mathcal{S}$ iz izreka 4.13 **pasovno triangularizabilna**, to pomeni, da obstaja veriga $\mathcal{S}$-invariantnih pasov prostora L, ki je maksimalna v mreži $\mathcal{L}$.

Naj veljajo predpostavke in zaključek izreka 4.13. Naj bo $\mathcal{D}(A)$ Dedekindova oziroma MacNeillova napolnitev množice A (glej npr. [8] ali [33]). Kadar napolnitev $\mathcal{D}(A)$ ni navzgor ali navzdol omejena, ji pridružimo največji oziroma najmanjši element. Tako je na primer napolnitev $\mathcal{D}(\mathbb{Q})$ racionalnih števil množica razširjenih realnih števil $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Naj bo $\mathcal{H}$ kolekcija vseh podmnožic množice A, ki imajo obliko $\{\alpha \in A : \alpha < \delta\}$ ali $\{\alpha \in A : \alpha \leq \delta\}$ pri nekem $\delta \in \mathcal{D}(A)$. Očitno je kolekcija $\mathcal{H}$ zaprta za poljubne unije in preseke. Velja tudi $\emptyset \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{H}$. Za vsak $H \in \mathcal{H}$ naj bo B_H pas, generiran z množico $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$.

(Tukaj je $B_\emptyset = \{0\}$.) Lahko je videti, da je

$$B_H = \cap(\mathrm{Ker}\,(\phi_\alpha) : \alpha \notin H) = \cap(\{f_\alpha\}^d : \alpha \notin H)\ .$$

Naj bo $\mathcal{C} = \{B_H : H \in \mathcal{H}\}$. Očitno je $\mathcal{C}$ veriga pasov prostora L.

Izrek 4.14 *Naj veljajo predpostavke izreka* 4.13 *in naj bodo vsi operatorji iz kolekcije $\mathcal{S}$ urejenostno zvezni. Potem je veriga $\mathcal{C}$ sestavljena iz $\mathcal{S}$-invariantnih pasov in je maksimalna v mreži vseh pasov prostora L. Če ima L urejenostno zvezno normo, potem je veriga $\mathcal{C}$ maksimalna tudi v $\mathcal{L}$, torej je kolekcija $\mathcal{S}$ pasovno triangularizabilna.*

Dokaz. Naj bo $H \in \mathcal{H}$ in $S \in \mathcal{S}$. Potem je $N_S f_\alpha \in B_H$ za vsak $\alpha \in H$, ker je $\phi_\beta(N_S f_\alpha) = 0$ za vsak $\beta \geq \alpha$. Torej je $S f_\alpha \in B_H$ za vsak $\alpha \in H$. Od tod sledi, da je ideal, generiran z množico $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$, invarianten za operator S. Ker je S urejenostno zvezen operator, je po trditvi 1.10 B_H invarianten za S. Lahko je videti, da je veriga $\mathcal{C}$ maksimalna v mreži vseh pasov prostora L.

Predpostavimo, da ima L urejenostno zvezno normo. Potem je vsak zaprt ideal pas (glej npr. [58, izrek 105.2]). Torej je veriga $\mathcal{C}$ maksimalna v mreži vseh zaprtih idealov prostora L. Dokažimo, da je maksimalna tudi v $\mathcal{L}$. Po [48, lema 4.3.1] je dovolj videti, da je veriga $\mathcal{C}$ enostavna, to pomeni, da izpolnjuje naslednje pogoje:

(i) $\{0\} \in \mathcal{C}$, $L \in \mathcal{C}$;

(ii) če je $\mathcal{C}_0$ poddružina verige $\mathcal{C}$, potem zaprta podprostora

$$\cap(I : I \in \mathcal{C}_0) \quad \text{in} \quad cl(\cup(I : I \in \mathcal{C}_0))$$

pripadata verigi $\mathcal{C}$. Tukaj smo s cl zaznamovali zaprtje v topologiji, porojeni z normo prostora L;

(iii) za vsak $I \in \mathcal{C}$ je kvocientni prostor I/I^- največ enorazsežen, kjer je

$$I^- = cl(\cup(J : J \in \mathcal{C}, J \subset I))\ .$$

(Moramo pripomniti, da so v knjigi [48] obravnavani samo Banachovi prostori. Vendar je iz dokaza leme 4.3.1 v [48] jasno, da lema velja za vse normirane prostore.)

Pogoj (i) je očitno izpolnjen. Podprostora iz pogoja (ii) sta zaprta ideala. Ker je $\mathcal{C}$ maksimalna v mreži vseh zaprtih idealov prostora L, pripadata verigi $\mathcal{C}$. Za dokaz pogoja (iii) predpostavimo, da je prostor I/I^- vsaj dvorazsežen. Potem po trditvi 4.2 obstaja tak zaprt ideal K, da je $I^- \subset K \subset I$. Ker je veriga $\mathcal{C}$ maksimalna v mreži vseh zaprtih idealov prostora L, je $K \in \mathcal{C}$, od koder sledi $K \subseteq I^-$, kar je protislovje. Torej je izpolnjen tudi pogoj (iii). S tem je dokaz izreka končan. □

Posledica 4.15 *Naj bo L Dedekindovo poln in $\mathcal{S}$ multiplikativna polgrupa urejenostno zveznih pozitivnih omejenih operatorjev na L. Če za vsak $\alpha \in A$ in za vse pare $S, T \in \mathcal{S}$ velja $\phi_\alpha(N_S N_T f_\alpha) = 0$, potem za $\mathcal{S}$ veljajo zaključki izrekov* 4.13 *in* 4.14.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je $D_{TS} = D_T D_S$ in $N_{TS} = D_T N_S + N_T D_S + N_T N_S$. Ker sta D_T in D_S omejena pozitivna ortomorfizma, po trditvi 4.8 obstajata taki pozitivni realni števili λ in μ, da je $D_T \leq \lambda I$ in $D_S \leq \mu I$. Zato je $D := D_T D_S \leq \lambda\mu I$ in tako je D omejen pozitiven ortomorfizem. Za pozitiven omejen operator $N := D_T N_S + N_T D_S + N_T N_S$ pa velja neenakost

$$0 \leq \phi_\alpha(N f_\alpha) \leq \lambda \phi_\alpha(N_S f_\alpha) + \mu \phi_\alpha(N_T f_\alpha) + \phi_\alpha(N_S N_T f_\alpha) = 0 \ ,$$

torej je $\phi_\alpha(N f_\alpha) = 0$. Ker je $TS = D + N$, res velja $D_{TS} = D$ in $N_{TS} = N$, kar smo želeli videti.

Pokazati moramo, da za polgrupo $\mathcal{S}$ veljajo predpostavke izreka 4.13. Naj bo $a = \phi_\beta(N_S f_\alpha) > 0$ in $b = \phi_\gamma(N_T f_\beta) > 0$, torej je $N_S f_\alpha \geq a\, f_\beta$ in $N_T f_\beta \geq b\, f_\gamma$. Ker je $N_{TS} \geq N_T N_S$, imamo

$$N_{TS} f_\alpha \geq N_T N_S f_\alpha \geq a N_T f_\beta \geq ab\, f_\gamma$$

in zato je $\phi_\gamma(N_{TS}f_\alpha) \geq ab > 0$. □

Predpostavka o Dedekindovi polnosti prostora L, ki nastopa v izrekih 4.13, 4.14 in posledici 4.15, je očitno potrebna samo za obstoj dekompozicije iz trditve 4.11. Če torej na primer vemo, da za vsak operator iz polgrupe $\mathcal{S}$ velja $D_S = 0$ in $N_S = S$, ne potrebujemo predpostavke o Dedekindovi polnosti prostora L. Zato naslednja posledica sledi iz posledice 4.15.

Posledica 4.16 *Naj bo $\mathcal{S}$ multiplikativna polgrupa urejenostno zveznih pozitivnih omejenih operatorjev na L. Če za vsak $\alpha \in A$ in za vsak $S \in \mathcal{S}$ velja $\phi_\alpha(Sf_\alpha) = 0$, potem za $\mathcal{S}$ veljajo zaključki izrekov* 4.13 *in* 4.14.

Posledica 4.17 *Naj bo $\mathcal{S}$ multiplikativna ali aditivna polgrupa urejenostno zveznih pozitivnih omejenih operatorjev na diskretni normirani mreži L. Naj bo za vsak $\alpha \in A$ vsak operator iz $\mathcal{S}$ kvazinilpotenten pri vektorju f_α. Potem za $\mathcal{S}$ veljajo trditve iz izrekov* 4.13 *in* 4.14.

Dokaz. Naj bo polgrupa $\mathcal{S}$ multiplikativna. Kot v dokazu posledice 4.4 pokažemo, da je $\phi_\alpha(Sf_\alpha) = 0$ za vsak $S \in \mathcal{S}$ in za vsak $\alpha \in A$. Rezultat sedaj sledi iz posledice 4.16.

Če je $\mathcal{S}$ aditivna polgrupa, potem je po trditvi 4.6 vsak operator iz multiplikativne polgrupe $\mathcal{T}$, generirane s $\mathcal{S}$, kvazinilpotenten pri f_α za vsak $\alpha \in A$. Ker za $\mathcal{T}$ po že dokazanem veljajo trditve iz izrekov 4.13 in 4.14, veljajo tudi za $\mathcal{S}$. □

Primer 4.5 nas prepriča, da v predhodnih rezultatih ne moremo izpustiti predpostavke o urejenostni zveznosti operatorjev. Prav tako veriga $\mathcal{C}$ ni nujno maksimalna v mreži $\mathcal{L}$, kadar norma prostora L ni urejenostno zvezna, pa čeprav so vsi operatorji iz $\mathcal{S}$ urejenostno zvezni. To pokažemo z naslednjim primerom.

Primer 4.18 Naj bo S operator na l^∞, definiran s predpisom

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3/2, x_4/4, x_5/8, \ldots) .$$

Lahko se je prepričati, da je pozitiven operator S kvazinilpotenten, kompakten in urejenostno zvezen. Naj bo $\mathcal{S}$ polgrupa, generirana s S. Potem velja $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(A) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in $\mathcal{H} = \{\emptyset\} \cup \{H_n : n \in \mathbb{N}\}$, kjer je $H_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ker zaprt ideal $cl(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_{H_n}) = c_0$ ne pripada verigi $\mathcal{C}$, le ta ni maksimalna v mreži vseh zaprtih idealov prostora l^∞ in zato tudi v mreži vseh zaprtih podprostorov prostora l^∞ ne.

Za konec razdelka povejmo, da vsi rezultati v tem poglavju veljajo tudi, če v definiciji lokalne kvazinilpotentnosti zamenjamo pogoj

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0 \quad \text{s pogojem} \quad \liminf_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0 \ .$$

Literatura

[1] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *On the spectral radius of positive operators*, Math. Z. **211** (1992), 593-607.

[2] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Invariant subspaces for positive operators acting on a Banach space with basis*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1773-1777.

[3] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Invariant subspaces of operators on l^p-spaces*, J. Funct. Anal. **115** (1993), 418-424.

[4] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Invariant subspace theorems for positive operators*, J. Funct. Anal. **124** (1994), 95-111.

[5] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive operators*, Academic Press, Orlando 1985.

[6] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive compact operators on Banach lattices*, Math. Z. **174** (1980), 289-298.

[7] J. Barria, *The invariant subspaces of a Volterra operator*, J. Oper. Th. **6** (1981), 341-349.

[8] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, Providence, Rhode Island 1967.

[9] G. Birkhoff, R.S. Varga, *Reactor criticality and non-negative matrices*, J. Soc. Ind. Appl. Math. **6** (1958), 354-377.

[10] V. Caselles, *On irreducible operators on Banach lattices*, Indag. Math. **48** (1986), 11-16.

[11] M.D. Choi, E.A. Nordgren, H. Radjavi, P. Rosenthal, Y. Zhong, *Triangularizing semigroups of quasinilpotent operators with non-negative entries*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 15-25.

[12] L. Collatz, *Einschließungssätze für charakteristische Zahlen von Matrizen*, Math. Z. **48** (1942), 221-226.

[13] P.G. Dodds, D.H. Fremlin, *Compact operators on Banach lattices*, Israel J. Math. **34** (1979), 287-320.

[14] W. F. Donoghue, Jr., *The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasinilpotent transformation*, Pac. J. Math. **7** (1957), 1031-1035.

[15] R. Doss, *An elementary proof of Titchmarsh's Convolution Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 181-184.

[16] R. Drnovšek, *On invariant subspaces of Volterra-type operators*, Integ. Equat. Oper. Th., sprejeto v objavo.

[17] R. Drnovšek, *On quasispectral maximal subspaces of a class of Volterra-type operators*, Proc. Amer. Math. Soc., sprejeto v objavo.

[18] R. Drnovšek, *On the spectral radius of positive operators*, poslano v objavo.

[19] R. Drnovšek, *Triangularizing semigroups of positive operators on an atomic normed Riesz space*, poslano v objavo.

[20] R. Drnovšek, *Volterra kernel operators on Banach function spaces*, Math. Slovaca, sprejeto v objavo.

[21] K.H. Förster, B. Nagy, *On the Collatz-Wielandt numbers and the local spectral radius of a nonnegative operator*, Lin. Alg. Appl. **120** (1989), 193-205.

[22] K.H. Förster, B. Nagy, *On the local spectral thoery of positive operators*, Operator Theory: Advances and Applications **28** (1988), 71-81.

[23] S. Friedland, *Characterizations of the spectral radius of positive operators*, Lin. Alg. Appl. **134** (1990), 93-105.

[24] J.D. Gray, *Local analytic extensions of the resolvent*, Pac. J. Math. **27** (1968), 15-25.

[25] J.J. Grobler, *A note on the theorems of Jentzsch-Perron and Frobenius*, Indag. Math. **49** (1987), 381-391.

[26] J.J. Grobler, *Band irreducible operators*, Indag. Math. **48** (1986), 405-409.

[27] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, New York Inc., 1974.

[28] E. Hille, J.D. Tamarkin, *On the thoery of linear integral equations II*, Annals of Math. **35** (1934), 445-455.

[29] C.B. Huijsmans, B. de Pagter, *Positive compact quasinilpotent operators*, Arch. Math. **47** (1986), 537-544.

[30] C.R. Johnson, R. Bru, *The spectral radius of a product of nonnegative matrices*, Lin. Alg. Appl. **141** (1990), 227-240.

[31] G. K. Kalisch, *A functional analysis proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, J. Math. Anal. Appl. **5** (1962), 176-183.

[32] M.G. Krein, M.A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space (in Russian)*, Usp. Mat. Nauk **3** (1948), 3-95; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. Ser. I **10** (1962), 199-325.

[33] B. Lavrič, *Delno urejeni vektorski prostori*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995.

[34] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz spaces I*, North Holland, Amsterdam 1971.

[35] M. Lambrou, W.E. Longstaff, H. Radjavi, *Spectral conditions and reducibility of operator semigroups*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 449-464.

[36] W.E. Longstaff, H. Radjavi, *On permutability and submultiplicativity of spectral radius*, Can. J. Math. **47** (1995), 1007-1022.

[37] I. Marek, *Collatz-Wielandt numbers in general partially ordered spaces*, Lin. Alg. Appl. **173** (1992), 165-180.

[38] I. Marek, *Frobenius theory of positive operators: Comparison theorems and applications*, SIAM J. Appl. Math. **19** (1970), 607-628.

[39] P. Malliavin, *Integration and probability*, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 157), New York 1995.

[40] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1991.

[41] A. J. Michaels, *Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem*, Adv. in Math. **25** (1977), 56-58.

[42] E. Nordgren, H. Radjavi and P. Rosenthal, *Triangularizing semigroups of compact operators*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 271-275.

[43] M. Omladič, *Quasispectral subspaces of quasinilpotent operators*, Proc. Roy. Soc. Edin. **98A** (1984), 349-354.

[44] B. de Pagter, *Irreducible compact operators*, Math. Z. **192** (1986), 149-153.

[45] G. Polya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin 1964. Translation: *Problems and theorems in analysis*, Springer, Berlin 1972, 1976.

[46] H. Radjavi, *On reducibility of semigroups of compact operators*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 499-515.

[47] H. Radjavi, *On the reduction and triangularization of semigroups of operators*, J. Oper. Th. **13** (1985), 63-71.

[48] J.R. Ringrose, *Compact non-self-adjoint operators*, Van Nostrand Reinhold Math. Studies, London 1971.

[49] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York 1987.

[50] H.H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators.* (Grundlehren Math. Wiss. Bd. 215) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1974.

[51] H.H. Schaefer, *A minimax theorem for irreducible compact operators in L^p-spaces*, Israel J. Math. **48** (1984), 196-204.

[52] A.R. Schep, *Compactness properties of Carleman and Hille-Tamarkin operators*, Can. J. Math. **37** (1985), 921-933.

[53] A.R. Schep, *Positive diagonal and triangular operators*, J. Oper. Theory **3** (1980), 165-178.

[54] H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht-negative Matrizen*, Math. Z. **52** (1950), 642-648.

[55] A.C. Zaanen, *Examples of orthomorphisms*, J. Approx. Theory **13** (1975), 192-204.

[56] A.C. Zaanen, *Integration*, North Holland, Amsterdam 1967.

[57] A.C. Zaanen, *Linear analysis*, North Holland, Amsterdam 1956

[58] A.C. Zaanen, *Riesz spaces II*, North Holland, Amsterdam 1983.