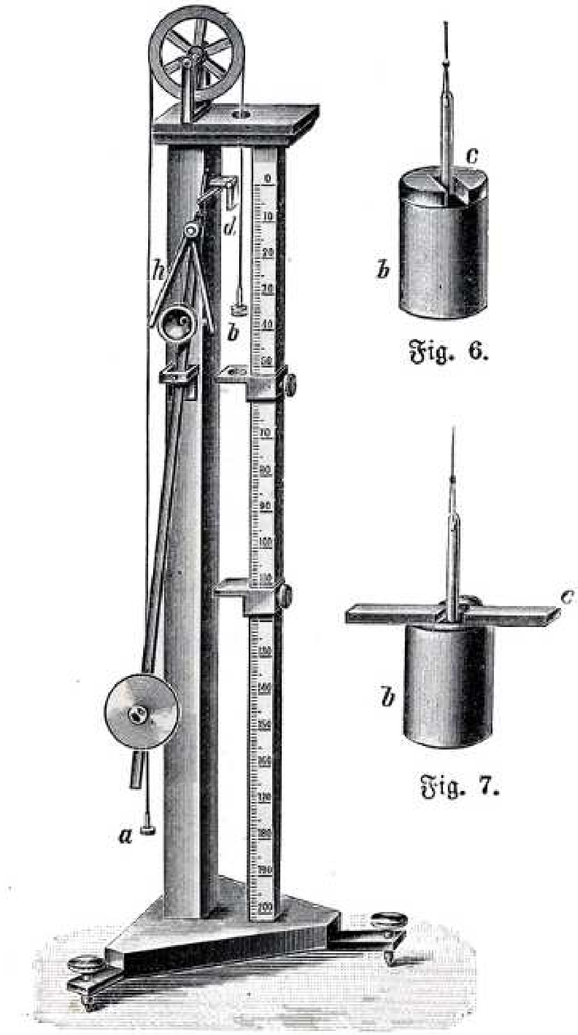
Atwoodov stroj z nihajočo utežjo

Andrej Likar

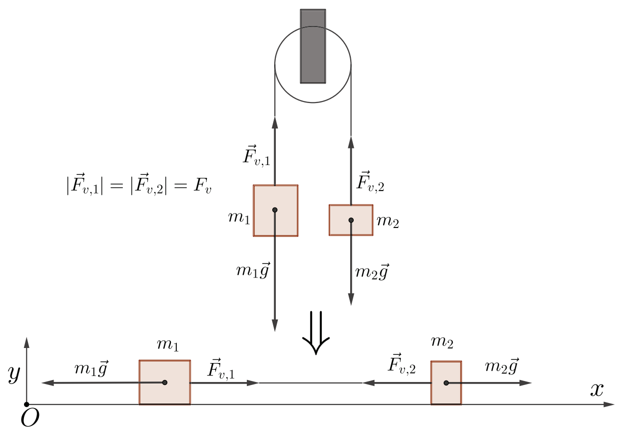
→ Atwoodov stroj je načeloma preprosta naprava, s katero je George Atwood (1745–1807), profesor fizike, širokemu krogu radovednih poslušalcev njegovih poljudnoznanstvenih predavanj prikazal lastnosti enakomerno pospešenega gibanja. Preko škripca je napeljana vrvica, na njenih konceh pa visita dve uteži, glej Sliko 1. Ni težko uganiti, da se uteži umirita, če sta enakih mas. Trenje v škripcu je sicer lahko majhno, a kljub temu prav trenje umiri uteži, če seveda prej ne trčita z mizo. Če pa ima ena utež večjo maso kot druga, se začne težja spuščati, lažja pa dvigovati. Ker je vsota sil na katerokoli utež konstantna, je gibanje uteži enakomerno pospešeno. Galileo Galilei je enakomerno pospešeno gibanje telesa opazoval na klancu, vendar se je Atwood s svojim strojem lahko bolj izognil trenju kot Galilei.



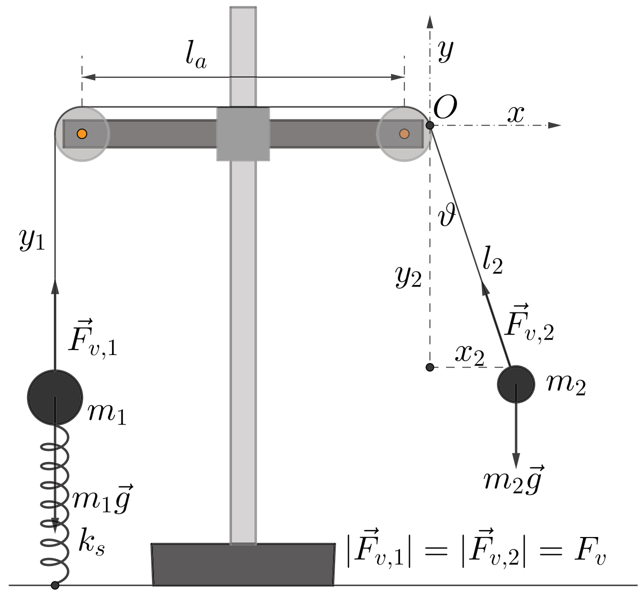
SLIKA 1.
Originalni Atwoodov stroj

Na izbrano utež delujeta dve sili, teža navzdol in povezovalna vrvica navzgor. Vrvica povezuje obe uteži in je neraztegljiva. Napeta vrvica z navpično usmerjeno silo z velikostjo F_v deluje na obe uteži. Ker je neraztegljiva, sta po velikosti pospeška obeh uteži enaka, a nasprotno usmerjena. Pri reševanju te naloge smo kot dijaki v mislih prestavili uteži iz škripca na ravno mizo brez trenja in s tem preusmerili levi in desni del vrvice in sili teže za 90° (glej Sliko 2). S tem smo se izognili škripcu, pospešek pa je bil v tem primeru po velikosti enak kot prej. Sedaj ni bilo težko napisati Newtonova zakona za pospešek uteži. Z upoštevanjem privzetega koordinatnega sistema sta ustrezni enačbi:

$$m_1 a = F_v - m_1 g\,, \qquad (1)$$



SLIKA 2.
Prirejena skica sil pri Atwoodovem stroju.



SLIKA 3.
Atwoodov stroj z nihajočo utežjo na desni strani. Če sta masi uteži na obeh straneh enaki, stabiliziramo stroj z vzmetjo na levi strani.

$$m_2 a = m_2 g - F_v\,. \tag{2}$$

Iz enačb (1) in (2) dobimo:

$$\frac{F_v}{m_1} - g = g - \frac{F_v}{m_2}\,, \tag{3}$$

S preureditvijo enačbe (3) sledi:

$$F_v\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = 2g\,.$$

Torej je sila vrvice:

$$F_v = 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Pospešek pa je:

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\,.$$

Pospešek je v našem primeru, ko je $m_1 > m_2$ pač negativen, to pa pomeni, da se težja utež na levi strani giblje navzdol, lažja na desni pa navzgor.

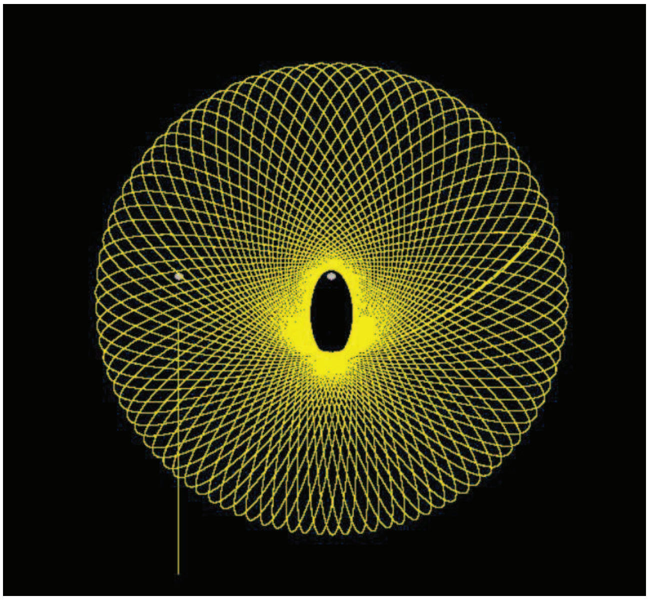
Atwood je svoj stroj izpopolnil tako, da je dodal metronom, s katerim je s štetjem klikov meril čas, in kaveljček, ki je hkrati sprožil gibanje uteži in bitje metronoma. Posebno pozornost je posvetil zgradbi škripca. Z več kolesi je zmanjšal njegovo trenje.

Različica Atwoodovega stroja je na Sliki 3, kjer vrvico napeljemo preko dveh škripcev. To sicer ni nikakršna izboljšava, saj smo z drugim škripcem le povečali trenje v napravi. A taka zgradba omogoča, da eno od uteži zanihamo. Ker sta uteži povezani z neraztegljivo vrvico, s tem poženemo tudi drugo utež. S Slike 3 razberemo sile, ki delujejo na uteži. Na naši sliki se leva utež lahko giblje le gor in dol, medtem ko se desna poleg tega giblje tudi vodoravno. Pa napišimo Newtonov zakon za obe uteži! Na levo deluje le vrvica, teža in mehka vzmet s koeficientom k_s, ki uteži drži v stabilni ravnovesni legi. Vse sile so le v navpični smeri, torej :

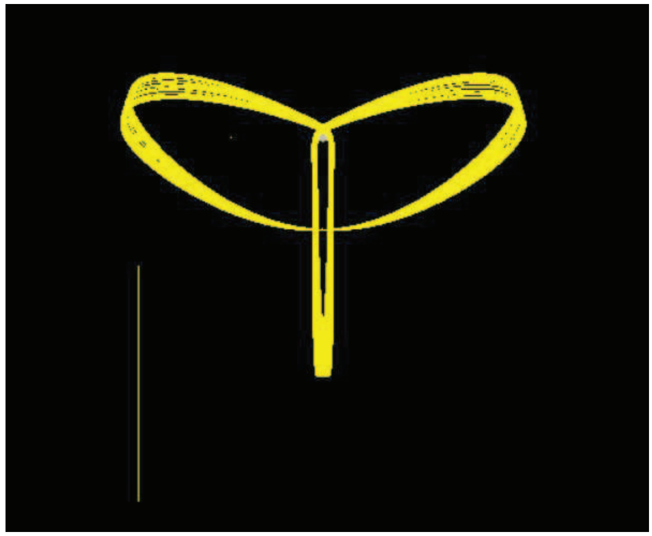
$$m_1 a_{y,1} = -m_1 g + F_v - k_s(y_1 + l_s)\,. \tag{4}$$

Leva utež se v ravnovesni legi ustavi pri $y_1 = -l_s$. V smeri x leva utež ves čas miruje, zato sta pri njej pospešek in hitrost enaki nič, lega x_1 pa je konstantna.

Na desno utež delujeta prav tako teža in vrvica, vendar vrvica ni vseskozi navpična. Za pospešek v



SLIKA 4.
Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež z veliko hitrostjo poženemo v vodoravni smeri. Navpična črta predstavlja tir uteži na levi strani, ki se premika le gor in dol.



SLIKA 5.
Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež sunemo v vodoravni smeri.

vodoravni smeri velja:

$$m_2 a_{x,2} = -F_v \sin\vartheta\,, \tag{5}$$

saj sila teže deluje le v navpični smeri. Za pospešek v navpični smeri pa velja:

$$m_2 a_{y,2} = -m_2 g + F_v \cos\vartheta\,. \tag{6}$$

Za kotni funkciji nismo v zadregi, napišemo ju brez težave:

$$\sin\vartheta = \frac{x_2}{l_2}\,.$$

$$\cos\vartheta = -\frac{y_2}{l_2}\,,$$

pri čemer je

$$l_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Glede na orientacijo koordinatnega sistema na Sliki 3 sta v mirovni legi tako y_1 kot y_2 negativna.

Pri sili v vrvici pa se zatakne. Le kako naj jo določimo, da bomo sledili gibanju z računalnikom? Spomnimo se, da nobena vrvica ni zares povsem toga. Privzeli bomo, da je vrvica elastična in zanjo privzeli Hookov zakon za njeno raztezanje:

$$F_v = k\Delta s\,,$$

kjer je Δs njen raztezek, k pa Hookov koeficient vzmeti. Da pa bomo vseeno imeli vrvico s kolikor toliko konstantno dolžino, bomo v računih postavili koeficient k na zelo veliko vrednost. Raztezek vrvice je

$$\Delta s = |y_1| + l_a + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - l\,, \tag{7}$$

kjer le l dolžina neraztegnjene vrvice, l_a pa razdalja med škripcema, ki se ne spreminja. Torej bomo za silo vrvice, ki deluje na uteži, privzeli:

$$F_v = k\left(|y_1| + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + l_a - l\right)\,. \tag{8}$$

Velik koeficient k bo poskrbel, da bo izraz v oklepaju blizu nič, kar pomeni, da bo dolžina vrvice ves čas skoraj enako dolga.

SLIKA 6.
Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež narahlo sunemo v vodoravni smeri

Ko programiramo, bomo premike, nihajni kot ϑ in hitrosti računali v zaporednih trenutkih $t = n\Delta t$. Ustrezno označimo spremenljivke, ki nastopajo v Newtonovih enačbah (4), (5) in (6), na primer:

- $x(t) = x(n\Delta t) = x_n$

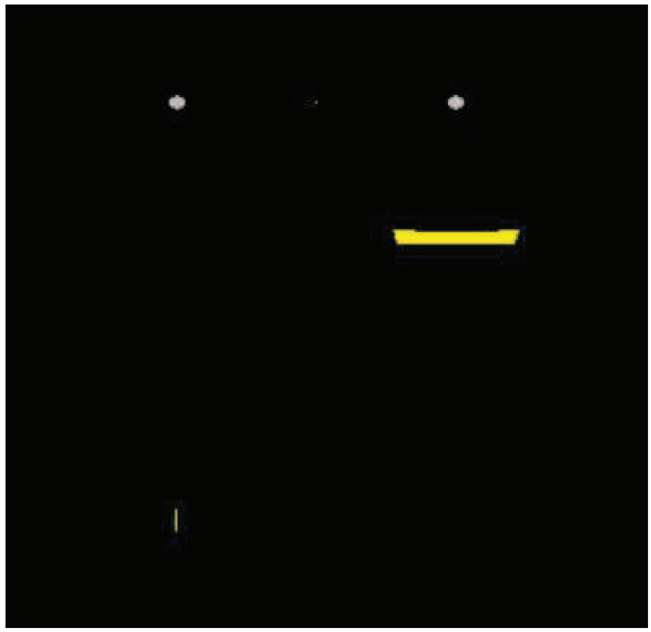
Iz pospeškov določimo hitrosti:

- $v_{y_1,n+1} = v_{y_1,n} + a_{y_1}\Delta t$

in analogno za preostali dve hitrosti v_{x_2} in v_{y_2}. Do premikov pa pridemi iz izračunanih hitrosti:

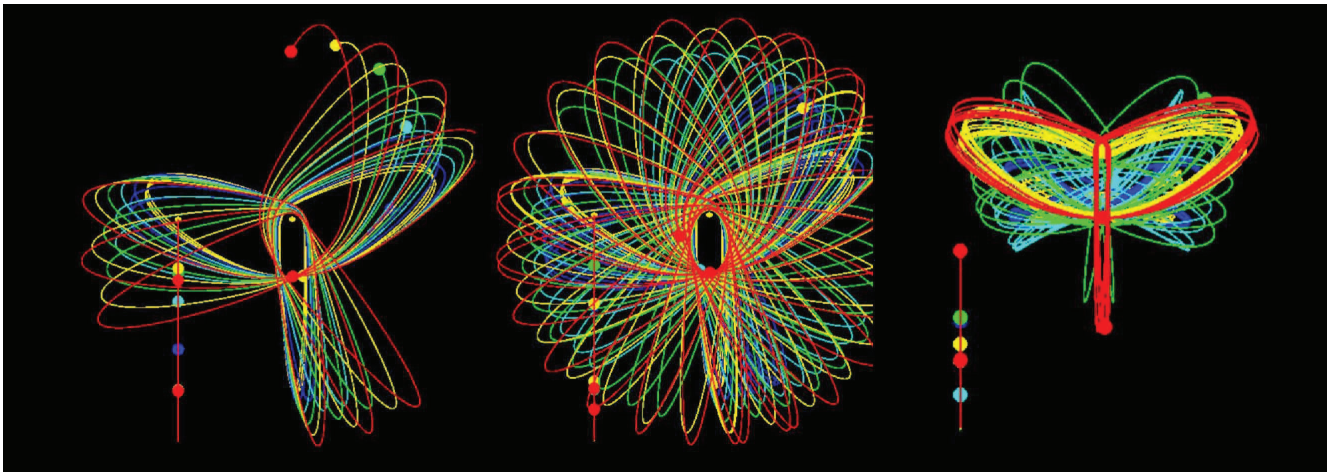
- $x_{2,n+1} = x_{2,n} + v_{x_2,n+1}\Delta t\,.$

Oglejmo si nekaj tirov pri različnih začetnih hitrostih. Na Sliki 4 je tir, ko smo desno utež pognali z veliko hitrostjo iz ravnovesne lege, Slika 5 do Slike 7 pa pri postopoma manjših začetnih hitrostih. Ker gre v našem primeru za neke vrste računalniške igre, se ne smemo čuditi, da lahko utež na desni strani tudi zaokroži okrog škripca. Pri resničnem Atwoodovem stroju na Sliki 3 to seveda ni mogoče, saj bi se vrvica snela. Mislimo si, da je izvedba stroja pač takšna, da vrvica ves čas leži na desnem škripcu. Tu si ne bomo belili glave kako bi tak stroj zgradili. Konec koncev pri resničnem stroju ne bi mogli dobiti vseh teh slik, saj se ne moremo izogniti trenju in uporu v zraku, česar pa z računalnikom ni težko doseči. Na sliki Sliki 8 je še nekaj za oko prijetnih slik tirov nihajoče desne uteži. Na slikah leva utež pušča sled v obliki navpične daljice, saj se premika le gor-dol.

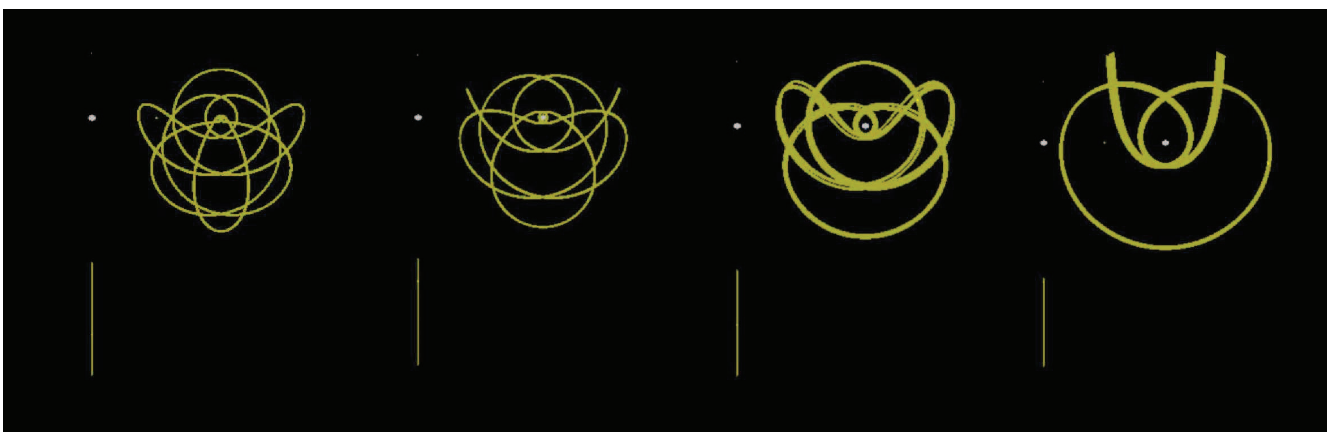


SLIKA 7.
Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež niha z zelo majhno amplitudo.

Ko ima utež na levi večjo maso kot tista na desni, ravnovesno vzmet lahko odstranimo. Nekaj tirov desne uteži pri njenih izbranih začetnih hitrostih in razmerjem mas $\frac{m_1}{m_2} = 4$ je prikazano na Sliki 9. Ker imamo na izbiro precej parametrov, se lahko igramo z njimi in iščemo zanimive vzorce teh tirov.



SLIKA 8.
Tiri nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju. Z barvami so označeni tiri pri različnih začetnih pogojih



SLIKA 9.
Tiri nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju pri razmerju mas $\frac{m_1}{m_2} = 4$.

× × ×