Število 2025

Marko Razpet

→ Vsako naravno število je po svoje zanimivo, eno bolj, drugo manj. Pred prehodom v novo koledarsko leto nas pogosto zanima, kakšno je število, ki označuje to leto. Zato se bomo v prispevku posvetili številu 2025. Navedli bomo nekaj njegovih lastnosti.

1. Očitno je 2025 sestavljeno število, natančneje $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Iz tega zapisa najdemo lepo število njegovih deliteljev, kar petnajst, in sicer: 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675 in 2025.

2. Število 2025 je kvadratno, ker je $2025 = 45^2$. Ker je kvadrat lihega števila 45, ima še dodatno lastnost, ki jo bomo obravnavali v nadaljevanju.

3. Znano je, da velja enakost

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Dokažemo jo z metodo popolne indukcije. Ker je

$$45 = \frac{90}{2} = \frac{9 \cdot 10}{2},$$

dobimo iz (1) za $n = 9$

$$45^2 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3.$$

To se pravi, da je število 2025 vsota prvih devetih kubov naravnih števil:

$$2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3.$$

4. Spomnimo se, da je n-to trikotniško število definirano z vsoto prvih n zaporednih naravnih števil takole:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

Tudi to formulo dokažemo z metodo popolne indukcije. Običajno označimo n-to trikotniško število s T_n. Velja torej

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

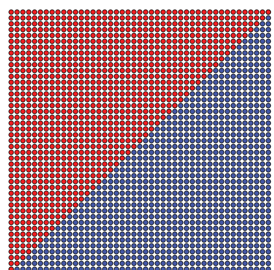
Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadratno število, kar je enostavno dokazati:

$$\begin{aligned} T_{n-1} + T_n &= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n((n-1)+(n+1))}{2} \\ &= \frac{n(2n)}{2} = n^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Za $n = 45$ dobimo

$$T_{44} + T_{45} = 45^2 = 2025.$$

Torej je število 2025 vsota dveh zaporednih trikotniških števil. Rezultat lahko grafično predstavimo z 2025 enakimi krožci, razporejenimi v kvadratno figuro. Razdelimo jo na dve trikotni figuri, ki imata za osnovnico 44 in 45 krožcev (slika 1).



SLIKA 1.
Število 2025 je vsota dveh zaporednih trikotniških števil.

5. Če pomnožimo obe strani enakosti $5^2 = 3^2 + 4^2$ z 9^2, dobimo

$$9^2 \cdot 5^2 = 9^2 \cdot 3^2 + 9^2 \cdot 4^2$$

oziroma

$$45^2 = 27^2 + 36^2.$$

Potemtakem je število 2025 vsota dveh kvadratov:

$$2025 = 27^2 + 36^2.$$

Izkaže se, da je ta zapis en sam, če se ne oziramo na vrstni red sumandov. Številska trojica $(27, 36, 45)$ je pitagorejska. Trikotnik s stranicami 27, 36 in 45 je pravokoten.

6. Število 2025 je 14-krat uglajeno, kar pomeni, da se ga da zapisati kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil na 14 načinov. Eno rešitev takoj uganemo: $2025 = 1012 + 1013$. Kako pridemo do preostalih rešitev? Denimo, da je prvo število v vsoti x, zadnje pa y. Če je število sumandov n, kjer je $n \geqslant 2$, potem je $y = x + n - 1$ Zapišimo:

$$\begin{aligned} 2025 &= x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+n-1) \\ &= nx + (1 + 2 + \ldots + (n-1)). \end{aligned} \tag{4}$$

Z uporabo formule (3) dobimo:

$$2025 = nx + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(2x+n-1)}{2}.$$

Reševati je treba enačbo

$$n(2x+n-1) = 4050. \tag{5}$$

Število n je deli število 4050, ki pa ima kar 29 deliteljev, ki so večji od 1. Naštejmo jih nekaj po velikostnem redu: 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 27, 30, 45, 50, 54, 75. Iz enačbe (4) dobimo

$$2x = \frac{4050 + n - n^2}{n} \geqslant 2.$$

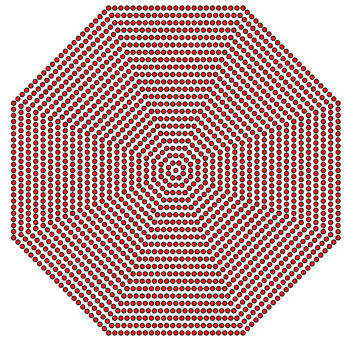
Rešitev neenačbe nam da pogoj $n < 63$.

Za primer vzemimo $n = 5$. Tedaj iz enačbe (5) dobimo $2x + n - 1 = 2x + 4 = 4050/5 = 810$ in nazadnje $x = 403$ ter $y = 407$. Zato velja:

$$2025 = 403 + 404 + 405 + 406 + 407.$$

Če zberemo rezultate v trojico (n, x, y), dobimo res 14 rešitev: (2,1012,1013), (3,674,676), (5,403,407), (6,335,340), (9,221,229), (10,198,207), (15,128,142), (18,104,121), (25,69,93), (27,62,88), (30,53,82), (45,23,67), (50, 16,65), (54,11,64).

7. Število 2025 je 23. središčno osemkotniško število. To pomeni, da lahko 2024 enakih krožcev razporedimo na stranice 22 koncentričnih pravilnih osemkotnikov, enega pa v njihovo skupno središče. Stranice osemkotnikov naraščajo v aritmetičnem zaporedju. Krožci so v vseh ogliščih osemkotnikov. Oglišča zaporednih osemkotnikov ležijo na poltrakih s krajiščem iz skupnega središča (slika 2). Na stranicah prvega osemkotnika ni nobenega drugega krožca. Na vsaki stranici drugega osemkotnika je dodan po en krožec, na vsaki stranici tretjega osemkotnika sta dodana po dva krožca, na vsaki stranici tretjega osemkotnika so dodani po trije krožci itd.



SLIKA 2.
Triindvajseto središčno osemkotniško število je 2025.

Število krožcev na $n-1$ osemkotnikih skupaj s središčnim krožcem je n-to središčno osemkotniško število, ki ga označimo z O_n^c. Izračunajmo:

$$\begin{aligned} O_n^c &= 1 + 8 + (8 + 8 \cdot 1) + (8 + 8 \cdot 2) + (8 + 8 \cdot 3) + \\ &+ \ldots + (8 + 8(n-2)) \\ &= 1 + 8(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) \\ &= 1 + 8 \cdot \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Po poenostavitvi dobimo

$$O_n^c = (2n-1)^2 = 1 + 8T_{n-1}.$$

Središčna osemkotniška števila so kvadrati lihih števil. Za $n = 23$ res dobimo $O_{23}^c = 45^2 = 2025$.

Literatura

[1] E. Deza, M. M. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific, New Jersey in drugje, 2012.

[2] A. Dujella, *Number Theory*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

× × ×