

# TRANSFORMACIJA KOORDINATNIH SISTEMOV Z NEVRONSKIMI SISTEMI

Igor Belič \*

## **Izvleček:**

UDK: 519.6:681.3.

Članek prikazuje možnost uporabe nevronskega sistema pri transformacijah različnih koordinatnih sistemov. Uporaba nevronskega sistema na tem področju ni običajna, ponuja pa številne možnosti. Kot primer je prikazana uporaba nevronskega sistema za transformacijo kartezičnega koordinatnega sistema v drug - rotiran kartezični koordinatni sistem. Prikazan je matematičen postopek rotacije in način, kako se rotacija koordinatnih sistemov predstavi nevronskega sistema.

Rezultati testiranja kažejo, da so nevronskega sistema sposobni izvajati transformacijo - rotacijo kartezičnih koordinatnih sistemov. Praktična uporaba nevronskega sistema za izvajanje transformacij zahteva natančno analizo obnašanja preslikave, ki jo naučen nevronskega sistema izvaja.

**Ključne besede:** nevronskega sistema, učenje, GPS, transformacije, rotacija, koordinatni sistemi,

## **NEURAL NETWORKS FOR COORDINATE SYSTEMS TRANSFORMATION**

### **Abstract:**

The article proposes the use of neural networks for different coordinate systems transformation. It is not a typical application for neural networks but it opens several new aspects. As an example the neural network is used to perform the transformation from one cartesian coordinate system to another, which is rotated with the respect to original. The rotation is first introduced in classical way by matrix equation. The calculated transformation is used as the training set for the neural network.

Experimental work shows that neural networks are able to learn and perform the rotation of coordinate systems although the practical use of neural networks in the field has to be thoroughly analysed.

**Keywords:** neural networks, machine learning, GPS, transformations, rotation, coordinate systems.

---

\* Višji predavatelj, magister elektrotehnike, Visoka policijsko-varnostna šola, Kotnikova 8, Ljubljana

## 1. UVOD

Preračunavanja med različnimi koordinatnimi sistemi (geocentrični koordinatni sistem WGS 84, kartezični koordinatni sistem, geodetske koordinate, državni koordinatni sistem, ...) je računsko zelo intenzivna in zahtevna naloga. Vsi sistemi preračunavanja so matematično dobro znani, povsod pa naletimo na napake, ki jih povzročajo različni vplivni faktorji - med najpomembnejšimi je zamenjava oblike zemlje z matematično idealnim telesom.

Že nekaj časa se zelo pospešeno razvija področje nevronskih sistemov, ki poskuša prodreti na področja, ki so modelsko znatno slabše opremljena kot geodezija. Namen članka je pokazati, da se numerično dobro poznane transformacije, lahko zamenja z nevronskimi sistemi, ki se prrtvarjanja enega koordinatnega sistema v drugega naučijo in so ga sposobni v poljubnih točkah znotraj poznanege področja, s primerno točnostjo tudi reproducirati.

Če torej velja, da nevronski sistemi lahko z zadovoljlivo točnostjo izvedejo transformacije koordinatnih sistemov, potem sledi naslednji korak, kjer lahko v takšne transformacije mnogo lažje vpeljemo nelinearna lokalna odstopanja, ki sicer kvarijo meritve (lokalne deformacije).

Primer uporabe nevronskega sistema je prikazan na rotaciji dveh kartezičnih koordinatnih sistemov.

## 2. TRANSFORMACIJA KOORDINATNIH SISTEMOV

Pogosto uporabljana transformacija, ki se uporabljajo pri preračunavanju med GPS (ITRS - International Terrestrial Reference System) in državnim koordinatnim sistemom (KSDM - koordinatni sistem državne mreže) je podobnostna transformacija (Leick, 1995), ki vsebuje rotacijo in translacijo.

Transformacija med dvema koordinatnima sistemoma  $X_1$  in  $X_2$  je podobnostna in obenem tudi konformna (ohranja merilo). Zapisana je z naslednjo matrično enačbo:

$$X_2 = (1 + dm)RX_1 + T$$

kjer je:

- $X_1$       koordinate točke v prvem koordinatnem sistemu
- $X_2$       koordinate točke v premaknjenem (rotacija in translacija) koordinatnem sistemu
- $R$         ortogonalna rotacijska matrika
- $1 + dm$    faktor merila
- $T$         vektor premika (translacije) izhodišča koordinatnih sistemov

Rotacijska matrika  $R$  je sestavljena in je produkt posameznih rotacijskih matrik osi koordinatnega sistema. Kot rotacije je označen pozitivno, kadar je v nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev. Matriko  $R$  imenujemo tudi kardanska matrika. Sestavljena je iz produkta treh matrik:

$$R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

Kjer so posamezne matrike:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Produkt rotacij je torej:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Rotacija in translacija koordinatnega sistema imata dve, za uporabo nevronskih sistemov, zelo ugodni lastnosti. Transformacija je zvezna in enolična.

### 3. PRIPRAVA POSKUSA Z NEVRONSKIM SISTEMOM

Testiranje uporabe nevronskega sistema je namenjeno prikazu ustreznosti uporabe nevronskega sistema za izvajanje zahtevane transformacije.

Pri tem je osnovna enačba premika koordinatnih sistemov nekoliko poenostavljena, saj za sam prikaz delovanja nekateri parametri enačbe niso pomembni. Poskus se omejuje na rotacijo koordinatnih sistemov in zato upošteva enačbo

$$X_2 = RX_1$$

in je narejen za različne kote rotacij koordinatnih osi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Ti so glede na kote, ki se praktično uporabljajo, nerealno veliki.

Nevronski sistem se mora transformacije naučiti na znanem področju, kjer je natančno poznana (izračunana). Glede na natančnost poznavanja transformacije, preračun ni zahteven. Izbira učne množice za prikaz sposobnosti nevronskega sistema, da se nauči pravil transformacije ni pretirano zahtevna naloga. Tabela 1 prikazuje učno množico osnovnih točk in pripadajočih transformacij.

V tabeli so zapisane točke v kocki velikosti  $10 \times 10 \times 10$  in njim pripadajoče transformirane točke. Tabela 2 prikazuje točke, v katerih je bilo preverjeno delovanje nevronskega sistema. Vse poskusne točke se nahajajo v notranjosti kocke z velikostjo stranice 10. Testna množica je manjša od učne in tesne točke ne sovpadajo z učnimi..

Poskus je bil izveden za štiri različne rotacije, pri čemer so bili koti  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  naslednji:

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
test1	5°	5°	5°
test2	10°	10°	10°
test3	20°	20°	20°
test4	15°	45°	15°

**Tabela 1: Učna množica za učenje transformacije**

x	y	z	x1	y1	z1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	2	-1,1855	0,853553	1,366025
0	0	4	-2,37101	1,707107	2,732051
0	0	6	-2,70296	4,331951	3,732051
0	0	8	-3,88847	5,185505	5,098076
0	0	2	-5,07397	6,039058	6,464102
0	0	4	0,521602	4,396136	0,633975
0	0	6	0,6639	5,249689	2
0	0	8	-1,84941	6,103242	3,366025
0	0	2	-3,03491	6,956796	4,732051
0	0	4	-4,22042	7,810349	6,098076
0	0	6	1,375156	6,167427	0,267949
0	0	8	0,189651	7,02098	1,633975
0	0	2	-0,99585	7,874533	3
0	0	4	-2,18136	8,728087	4,366025
0	0	6	-3,36686	9,58164	5,732051
0	0	8	2,228709	7,938718	-0,09808
0	0	2	1,043204	8,792271	1,267949
0	0	4	0,521602	4,396136	0,633975
0	0	6	-1,3278	10,49938	4
0	0	8	-2,51331	11,35293	5,366025
0	0	2	3,082262	9,710009	-0,4641
0	0	4	1,896758	10,56356	0,901924
0	0	6	0,711253	11,41712	2,267949
0	0	8	-0,47425	12,27067	3,633975
0	0	2	-1,65976	13,12422	5
0	0	4	1,366025	-0,36603	1,414214
0	0	6	0,180521	0,487528	2,780239
0	0	8	-1,00498	1,341081	4,146264
0	0	2	-2,19049	2,194635	5,51229
0	0	4	-3,37599	3,048188	6,878315
0	0	6	-4,5615	3,901742	8,244341
0	0	8	1,034074	2,58819	2,414214
0	0	2	-0,15143	3,112372	3,780239
0	0	4	-1,33694	3,965926	5,146264
0	0	6	-2,52244	4,819479	6,51229
0	0	8	-3,70794	5,673033	7,878315
0	0	2	1,887628	4,03011	2,048188
0	0	4	0,702123	4,883663	3,414214
0	0	6	-0,48338	5,737271	4,780239
0	0	8	-1,66889	6,59077	6,146264
0	0	2	-2,85439	7,444324	7,51229
0	0	4	2,741181	5,801401	1,682163
0	0	6	1,555676	6,654955	3,048188

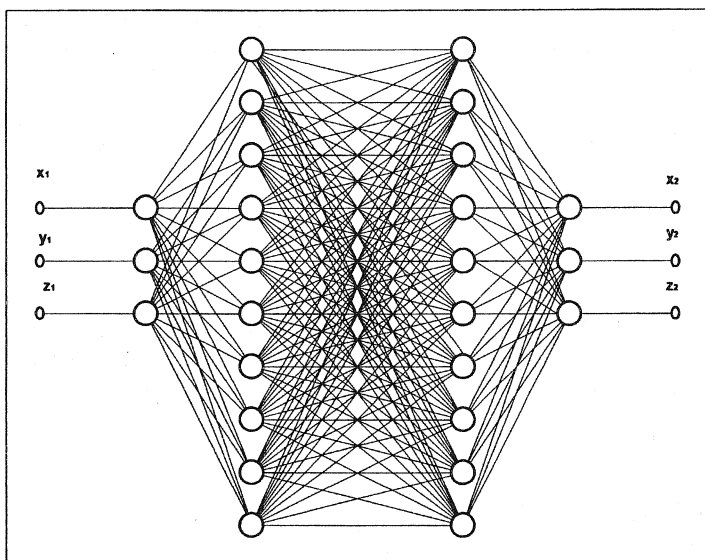
4	10	10	10	1,072295	12,39217	7,828427
6	0	4,098076	-1,098080	4,242641	5,608666	4,242641
6	0	2,912572	-0,24452	5,608666	4,242641	5,608666
6	0	1,727067	0,609031	6,974691	8,306717	6,974691
6	0	0,541562	1,462584	9,3706742	11,2096	9,3706742
6	0	-0,64394	2,316137	8,306717	6,974691	9,3706742
6	0	-1,82945	3,169691	11,07277	12,39217	11,07277
6	2	3,766125	1,526768	5,242641	6,974691	5,242641
6	2	2,58062	2,380322	6,974691	8,306717	6,974691
6	2	1,395116	3,233878	9,74691	11,07277	9,74691
6	2	0,209611	4,087428	9,340717	10,70674	9,340717
6	2	-0,97589	4,940982	10,70674	12,39217	10,70674
6	4	2,4619678	3,298059	4,876615	6,974691	4,876615
6	4	3,434174	4,151613	6,242641	8,306717	6,242641
6	4	2,48669	5,005166	7,608666	9,74691	7,608666
6	4	1,063165	5,858719	8,974691	10,70674	8,974691
6	4	-0,12234	6,712273	10,34072	11,07277	10,34072
6	6	5,473232	5,06935	4,51059	6,974691	4,51059
6	6	4,287727	5,922904	5,876615	7,608666	5,876615
6	6	3,102223	6,776457	7,242641	8,306717	7,242641
6	6	1,916718	7,630011	8,608666	9,74691	8,608666
6	6	0,731213	8,483564	9,974691	10,70674	9,974691
6	8	6,326785	6,840641	4,144564	6,974691	4,144564
6	8	5,141281	7,694195	5,51059	7,608666	5,51059
6	8	3,955776	8,547748	6,876615	8,306717	6,876615
6	8	2,70271	9,401302	8,242641	9,74691	8,242641
6	10	1,584767	10,25485	9,608666	10,70674	9,608666
6	10	7,180339	8,611932	3,78539	4,51059	3,78539
6	10	4,5994834	9,465486	5,144564	6,974691	5,144564
6	10	4,809329	10,31904	6,51059	7,608666	6,51059
6	10	3,623825	11,17259	7,876615	8,306717	7,876615
6	10	2,43832	12,02615	9,242641	9,74691	9,242641
8	0	5,464102	-1,4641	5,65854	6,974691	5,65854
8	0	4,278597	-0,61055	7,02288	8,306717	7,02288
8	0	3,093092	0,243005	8,38890	9,74691	8,38890
8	0	1,907588	1,096559	9,75493	11,07277	9,75493
8	0	0,722083	1,950112	11,12096	12,39217	11,12096
8	2	-0,46342	2,803665	12,48698	13,79698	12,48698
8	2	5,13215	1,160743	6,656854	7,608666	6,656854
8	2	3,946646	2,014295	8,02288	9,74691	8,02288
8	2	2,761141	2,86785	9,38890	10,70674	9,38890
8	2	1,575637	3,721403	10,75493	11,07277	10,75493
8	2	0,390132	4,574956	12,12096	13,79698	12,12096
8	4	2,985704	2,932034	6,290829	7,608666	7,608666
8	4	4,800199	3,785587	7,656854	8,306717	8,306717
8	4	6,314695	4,639141	9,02288	9,74691	9,02288
8	4	2,42919	5,492694	10,38891	11,07277	10,38891
8	4	1,243685	6,346247	11,75493	12,39217	11,75493
8	6	6,839257	4,703325	5,924803	6,974691	6,974691
8	6	5,653753	5,56878	7,90829	8,306717	8,306717
8	6	4,468248	6,410432	8,656854	9,74691	9,74691
8	6	3,282743	7,263985	10,02288	11,07277	10,02288
8	6	2,097239	8,117539	11,38891	12,39217	11,38891
8	8	7,692811	6,474616	5,58778	6,974691	6,974691
8	8	6,507306	7,328169	6,924803	8,306717	8,306717
8	8	5,321801	8,181723	8,290829	9,74691	9,74691
8	8	4,136297	9,035276	9,656854	10,70674	10,70674
8	10	2,950792	9,88883	11,02288	11,07277	11,02288
8	10	8,546364	8,245907	5,192753	6,974691	6,974691
8	10	7,360859	9,09946	6,53778	8,306717	8,306717
8	10	6,175355	9,953014	7,924803	9,74691	9,74691
8	10	4,98985	10,80657	9,290829	10,70674	10,70674
8	10	3,804345	11,66012	10,65685	11,07277	11,07277
10	0	6,830127	-1,83013	7,071068	8,306717	8,306717
10	0	5,644622	-0,97657	8,437093	9,74691	9,74691
10	0	4,459118	-0,12302	9,803119	10,70674	10,70674
10	0	3,273613	0,730533	11,16914	11,07277	11,16914
10	0	2,088109	1,584087	12,53517	12,39217	12,53517
10	0	0,902604	2,43764	13,90119	14,70674	13,90119
10	2	6,498176	0,794717	8,071068	9,74691	8,071068
10	2	5,312671	1,648271	9,437093	10,70674	9,437093
10	2	4,127167	2,501824	10,80312	11,07277	10,80312
10	2	2,941662	3,355378	12,16914	12,39217	12,16914
10	2	1,756157	4,208931	13,53517	14,70674	13,53517
10	4	7,351729	2,566008	7,705042	8,306717	7,705042
10	4	6,166225	3,419562	9,071068	9,74691	9,071068
10	4	4,98072	4,273115	10,43709	10,70674	10,43709
10	4	3,795211	5,126669	11,80312	11,07277	11,80312
10	4	2,609711	5,980222	13,16914	12,39217	13,16914
10	6	8,205283	4,3373	7,339017	8,306717	7,339017
10	6	7,019778	5,190853	8,705042	9,74691	8,705042
10	6	5,834273	6,044406	10,07107	10,70674	10,07107
10	6	4,648769	6,89796	11,43709	11,07277	11,43709
10	6	3,463264	7,751513	12,80312	12,39217	12,80312
10	8	2,9058836	6,108591	6,972992	7,608666	7,608666
10	8	7,873331	6,962144	8,339017	8,306717	8,339017
10	8	6,687827	7,815697	9,705042	9,74691	9,705042
10	8	5,502322	8,669251	11,07107	10,70674	11,07107
10	8	4,316817	9,522804	12,43709	11,07277	12,43709
10	10	9,912389	7,879882	6,606966	7,608666	7,606966
10	10	8,726885	8,733435	7,972992	8,306717	8,733435
10	10	7,54138	9,586988	9,339017	9,74691	9,586988
10	10	6,335875	10,44054	10,70504	10,70674	10,70504
10	10	5,170371	11,2941	12,07107	11,07277	12,07107

Tabela 2: Testna množica za preizkus delovanja nevrowskega sistema

x	y	z	x1	y1	z1
1	1	1	0,517037	1,12941	1,207107
1	1	1	-1,85397	2,836516	3,939158
1	1	9	-4,22498	4,543623	6,671208
1	5	1	2,224144	4,671992	0,475056
1	5	5	-0,14687	6,379098	3,207107
1	5	9	-2,51787	8,086205	5,939158
1	9	1	3,931251	8,214574	-0,25699
1	9	5	1,560241	9,921681	2,475056
1	9	9	-0,81077	11,62879	5,207107
5	1	1	3,249088	0,397359	4,035534
5	1	5	0,878079	2,104465	6,767585
5	1	9	-1,49293	3,811572	9,499636
5	5	1	4,956195	9,399941	3,303483
5	5	5	2,585185	5,647048	6,035534
5	5	9	0,214176	7,354154	8,767585
5	9	1	6,663301	7,482523	2,571432
5	9	5	4,292292	9,18963	5,303483
5	9	9	1,921283	10,89674	8,035534
9	1	1	5,981139	-0,33469	6,963961
9	1	5	3,610129	1,372415	9,596012
9	1	9	1,23912	3,079521	12,32806
9	5	1	7,688245	3,20789	6,13191
9	5	5	5,317236	4,914997	8,863961
9	5	9	2,946227	6,622104	11,59601
9	9	1	9,395352	6,750472	5,99859
9	9	5	7,024343	8,457579	8,13191
9	9	9	4,653334	10,16469	10,86396

#### 4. UPORABLJEN NEVRONSKI SISTEM

Pri testiranju je bil uporabljen nevronski sistem, prikazan na sliki 1. Konfiguracija nevronskega sistema nima povratnih povezav (Feed Forward) in je učena s principom povratnega razširjanja napak (Error Backpropagation) (Cherkassky, 1998), (Golden, 1996). Sistem ima vhodno plast s tremi nevroni. Na vsak vhodni nevron pride po ena koordinata točke. Sledita dve skriti plasti s po desetimi nevroni. Na koncu je še izhodna plast, ki spet predstavlja koordinate točke, tokrat v premaknjenem koordinatnem sistemu.



Slika 1: Za testiranje je bil uporabljen nevronski sistem s tremi vhodnimi nevroni, dvema skritima plastema po deset nevronov in izhodno plastjo s tremi nevroni.

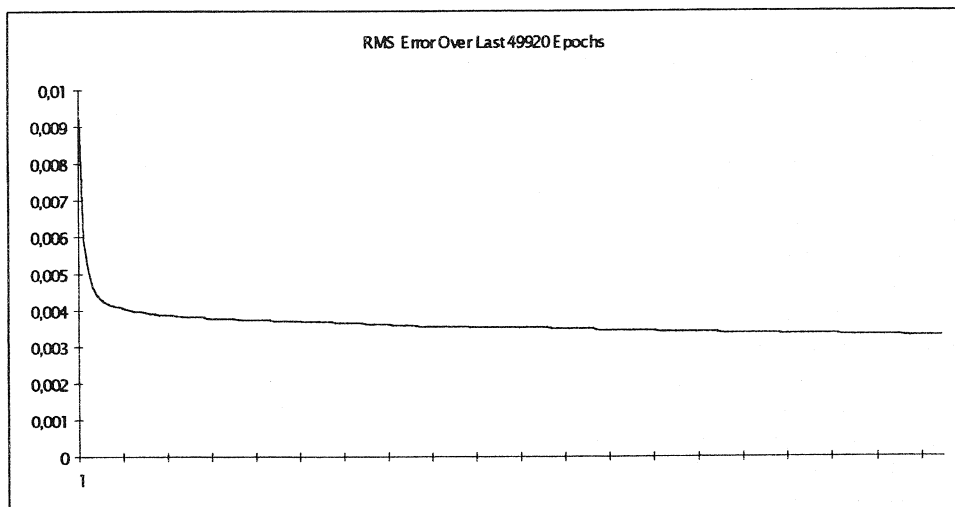
Parametri nevronskega sistema so bili:

Hitrost učenja	0,5
Vztrajnostni koeficient	0,3
Vhodni šum	0
Učna toleranca	0,01
Testna toleranca	0,02

Uporabljen je bil programski paket Neuralyst 1.4 proizvajalca Cheshire.

#### 5. REZULTAT TESTIRANJ

Rezultati testiranja kažejo, da je začetna hipoteza po kateri naj bi bili nevronski sistemi sposobni izvajati transformacijo koordinatnih sistemov upravičena. Testni nevronski sistem se je v vseh štirih testnih primerih naučil reprodukcije prevajalne funkcije - transformacije - z naprej postavljeno toleranco dovoljenega odstopanja 1%. V vseh štirih primerih je potek učenja sistema in temu primerno upadanje velikosti srednje kvadratne napake, monotono padajoče. Razmere ponazarja slika 2.



Slika 2: Potek srednje kvadratne napake, ki jo pri učenju na izhodu naredi nevronski sistem. Na abscisni osi je število učnih ciklov (epochs). Zadnja delitev predstavlja 49920- to ponovitev. Na ordinatni osi je velikost srednje kvadratne napake.

## 6. SKLEP

Namen dela je bil ugotoviti, ali nevronski sistem lahko nadomesti računanje rotacij in s tem poveča hitrost in robustnost delovanja.

Ugotovitve prikazanega dela so:

- \* Prikazano učenje nevronskega sistema izpolnjuje pričakovanja in dokazuje, da se je nevronski sistem sposoben naučiti transformacije - rotacije kartezičnega koordinatnega sistema.
- \* Za praktično uporabo nevronskega sistema pri opisanih transformacijah je nujna optimizacija nevronskega sistema ter prilagoditev v praktično uporabno področje.
- \* Nujna je analiza uporabnega področja ter napak, ki jih zaradi svoje nelinearnosti v izračun vnaša nevronski sistem.
- \* Naučen nevronski sistem je v svojem delovanju zelo hiter in je zato primeren za uporabo tam, kjer je hitrost izvedbe transformacije pomembnejša od dosežene točnosti.
- \* Nevronski sistemi zaradi postopkov učenja lahko v izvajanje transformacije vpeljejo tudi lokalne anomalije, ki jih je sicer težko upoštevati.

## LITERATURA

1. Cherkassky V., Muiler F., 1998: Learning from Data, John Wiley & Sons, New York.
2. Golden R.M., 1996: Mathematical Methods for Neural Network Analysis and Design, MIT Press, New York.
3. Leick A., 1995: GPS Satellite Surveying, John Wiley & Sons, New York

### POVZETEK

Preračunavanja med različnimi koordinatnimi sistemi je v geodeziji pogosto uporabljena in računsko intenzivna naloga. Postopki preračunavanja so matematično dobro znani in definirani.

Namen članka je pokazati, da se izračunavanje transformacije lahko zamenja z nevronskimi sistemi, ki se pretvarjanja enega koordinatnega sistema v drugega naučijo. Primer uporabe nevronskega sistema je prikazan na rotaciji dveh kartezičnih koordinatnih sistemov in preizkušen na štirih različnih rotacijah.

Nevronski sistem se nauči transformacije na znanem področju, kjer je natančno poznana. Priloženi sta tabeli učne in testne množice, ki dajeta bralcu možnost praktične ponovitve poskusa. Testna množica je manjša kot učna in tesne točke ne sovpadajo z učnimi.

Rezultati testiranja kažejo, da so se nevronski sistemi sposobni naučiti transformacije dveh koordinatnih sistemov. Testni nevronski sistem se je naučil reprodukcije transformacije z naprej postavljeno toleranco dovoljenega odstopanja 1%. Potek učenja sistema in upadanje velikosti srednje kvadratne napake je za izbran sistem monotono padajoče.

Praktična uporaba sistema zahteva natančno analizo delovanja.

### SUMMARY

Calculation of various transformations between coordinate systems are very common in geodesy. They are often numerically intensive. The transformation algorithms are very well known.

The main focus of the article is to show that neural networks can be used for coordinate system transformations. The rotation of two Cartesian coordinate systems was used as an example. Four different rotations were tested.

Neural network is trained to perform the transformation on the known subspace. Two tables are attached to the paper to enable reader to repeat the experiment. Training set is much larger than the testing one, and the testing points differ from training points.

Experimental results show, that neural networks are able to learn the transformation of two coordinate systems. Training and test tolerance were set on 1%, meaning that all reproduced points are within the given tolerance. Training root mean square error decreases in time.

Practical use of neural networks for coordinate systems transformation, requires concise analysis of the network behaviour.