

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 2

Strani 68-71

Boris Lavrič:

## VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1

Ključne besede: matematika, teorija števil, ulomek, vsota.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/17/974-Lavric.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1

Najbrž se je marsikak vesten bralec Preseka že ob naslovu prispevka spomnil članka profesorja Ivana Vidava, ki je bil objavljen pred tremi leti v našem listu (PXIV/1). V njem je avtor dokazal, da imajo ulomki s števcem 1 naslednjo prenetljivo in lepo lastnost.

**IZREK A.** Vsako pozitivno racionalno število se da zapisati kot vsota ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci. Še več, za imenovalce smemo zahtevati, da so različni in večji od naprej danega števila.

Prvi del izreka lahko povemo tudi takole: Za vsako racionalno število  $r > 0$  obstaja tak  $n \in \mathbb{N}$ , da ima enačba

$$E_n(r): \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = r$$

z neznankami  $a_1, \dots, a_n$  vsaj eno rešitev, ki ustreza pogoju

$$P: \quad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n; \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

V tem prispevku nas bodo zanimala predvsem naslednja vprašanja:

- (A) Ali ima enačba  $E_n(r)$  pri danem racionalnem  $r > 0$  za vsak naraven  $n > 1$  rešitev, ki ustreza pogoju  $P$ ?
- (B) Je vseh takšnih rešitev pri danih  $r > 0$  in  $n > 1$  končno mnogo?
- (C) Kako je število rešitev pri danem  $r > 0$  odvisno od  $n$ ?

Da ne bomo po nepotrebnem izgubljali besed, zaznamujmo z  $R_n(r)$  število vseh rešitev enačbe  $E_n(r)$ , ki izpolnjujejo pogoj  $P$ . Dogovorimo se še, da bomo rešitvi, ki zadošča pogoju  $P$ , rekli *dobra rešitev*.

Pozabavajmo se zdaj z nalogo (A).

Vzemimo najprej  $r = 1$ . Brž lahko ugotovimo, da je  $R_2(1) = 0$ , saj velja ocena

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$$

Odgovor na vprašanje (A) je torej že pri  $r = 1$  negativen, naloga pa je tako rešena za  $r = 1$ . Vendar bomo ostali še naprej zvedavi: je morda  $R_3(1) > 0$ ? Za razvedrilo naj bralec sam poišče vse rešitve enačb  $E_3(1)$  in  $E_4(1)$ , ki zadoščajo pogoju  $P$ . Najde jih tudi na strani 118.

Prav hitro vidimo, da velja  $R_n(1) > 0$  celo za vsak  $n > 2$ . Kasneje bomo do-

kazali, da je podobno tudi pri ostalih racionalnih številih  $r > 0$ . Pri  $r < 1$  se lahko zgodi, da je že  $R_2(r) > 0$ , pri velikem  $r$  pa enačba  $E_n(r)$  za naravna števila  $n \leq 2r$  nima nobene rešitve. Slednje nam potrди ocena

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \leq r$$

Izrek A nam zagotavlja, da je  $R_n(r) > 0$  za neskončno mnogo naravnih števil  $n$ . Pred podrobnejšo obravnavo odvisnosti števila rešitev  $R_n(r)$  od  $n$  pa se lotimo še vprašanja (B). Odgovor nanj je pozitiven.

Dokazali bomo, da velja naslednji

**IZREK B.** Naj bo  $r$  pozitivno racionalno število in  $n \in \mathbb{N}$ . Potem ima enačba  $E_n(r)$  ali končno mnogo dobrih rešitev ali pa nobene.

Pri dokazu uporabimo matematično indukcijo glede na število neznank v enačbah.

Za  $n = 1$  izrek očitno velja pri vsakem  $r > 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . Tedaj je namreč  $R_1(r) = 0$  ali  $R_1(r) = 1$ .

Predpostavimo zdaj, da izrek velja za  $n = k \in \mathbb{N}$  in vsak racionalen  $r > 0$ . Razmislimo o številu rešitev enačbe  $E_{k+1}(r)$ , kjer je  $r > 0$  dano racionalno število. Za vsako dobro rešitev  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  enačbe  $E_{k+1}(r)$  velja ocena

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k+1}} < \frac{k+1}{a_1}$$

Torej je  $a_1 < (k+1)/r$ , poleg tega pa števila  $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$  rešijo enačbo  $E_k(r-1/a_1)$ . Po predpostavki ima ta le končno mnogo dobrih rešitev (ali nobene), zato je število dobrih rešitev enačbe  $E_{k+1}(r)$  pri izbranem naravnem številu  $a_1 > 1$  končno. Za  $a_1$  imamo po oceni  $a_1 < (k+1)/r$  na voljo le končno mnogo števil, torej je tudi število vseh rešitev enačbe  $E_{k+1}(r)$ , ki izpolnjujejo pogoj  $P$ , končno.

Indukcijski korak smo dokazali, s tem pa potrdili veljavnost izreka.

Na vrsti je problem (C).

Naj bo  $r$  dano pozitivno racionalno število. Splošna formula  $R_n(r)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je pretežak zalogaj, zato nas bodo zanimale bolj grobe (a vendar lepe) lastnosti zaporedja

$$R_1(r), R_2(r), R_3(r), \dots$$

Po izreku A ne morejo biti vsi členi tega zaporedja enaki nič. Označimo z  $m$  najmanjše naravno število, pri katerem je  $R_m(r) > 0$ .

Tako na primer za  $r = 1$  dobimo  $m = 3$ , za  $r = 5/4$  pa  $m = 4$ .

Kaj hitro lahko doženemo, da tudi pri vseh  $n > m$  velja ocena  $R_n(r) > 0$ . Če je namreč  $R_k(r) > 0$ ,  $k > 1$ ,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} = r, \quad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

potem z razdružitvijo ulomka  $\frac{1}{a_k}$  dobimo

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k + 1} + \frac{1}{a_k(a_k + 1)} = r$$

in  $a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k + 1 < a_k(a_k + 1)$ , torej velja ocena  $R_{k+1}(r) > 0$ . Odtod takoj sledi, da je res  $R_n(r) > 0$  za vsak  $n \geq m$ .

Videli smo, da ima vsaka enačba  $E_n(r)$  pri  $n \geq m$  vsaj eno dobro rešitev. To ugotovitev pa lahko še precej izboljšamo. Dokazali bomo, da velja takle

**IZREK C.** Za vsako pozitivno racionalno število  $r$  velja  $R_{n+1}(r) > R_n(r)$  za vsak  $n > m$ .

Dokažimo navedeni izrek. Naj bo  $0 < r \in \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  in  $R_n(r) > 0$ . Vzemimo katerokoli dobro rešitev  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  enačbe  $E_n(r)$  in iz nje tvorimo rešitev

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + 1, a_n(a_n + 1)$$

enačbe  $E_{n+1}(r)$ . Različnima rešitvama enačbe  $E_n(r)$  smo tako priredili različni rešitvi enačbe  $E_{n+1}(r)$  (Preveri!), torej vedno velja ocena

$$R_{n+1}(r) \geq R_n(r)$$

Vzemimo zdaj poljuben  $n > m$  in dokažimo, da tedaj obstaja taka rešitev  $a_1, \dots, a_n$  enačbe  $E_n(r)$ , ki ustreza pogoju  $P$  in ima za  $a_n$  sodo število.

Res, enačba  $E_{n-1}(r)$  ima zaradi  $n - 1 \geq m$  vsaj eno dobro rešitev, iz nje pa na enak način kot prej pridemo rešitev enačbe  $E_n(r)$ , katere zadnji člen je sodo število  $a_{n-1}(a_{n-1} + 1)$ .

Po prejšnjem smemo pri  $n > m$  privzeti, da je v eni od rešitev  $a_1, \dots, a_n$  enačbe  $E_n(r)$  število  $a_n = 2p$  sodo. Očitno velja še  $p > 1$ , kar nam zagotavlja,

da sta desni strani enakosti

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{3p} + \frac{1}{6p}$$

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p(2p+1)}$$

različni. Torej lahko prej dobljenim  $R_n(r)$  rešitvam enačbe  $E_{n+1}(r)$ , ki zadoščajo pogoju  $P$ , pridružimo še rešitev

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 3p, 6p$$

ki se očitno razlikuje od vseh ostalih. Potemtakem za  $n > m$  res velja

$R_{n+1}(r) > R_n(r)$ , prav to pa smo želeli dokazati.

Izrek C nam da naslednjo oceno za število dobrih rešitev enačbe  $E_n(r)$ :

$$R_{m+k}(r) \geq k \quad \text{za vsak } k \in \mathbb{N}$$

To oceno se da še izboljšati, a naj kljub temu sklenemo prispevek – seveda z nalogami.

1. Dokaži, da je pri  $r = 5/6$   $R_2(r) = R_3(r) = 1$  in poišči vsaj deset dobrih rešitev enačbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \quad x < y < z < t$$

2. Določi  $R_2(1/k)$  za  $k = 2, 3, 4, 5$  in  $6$ .
3. Naj bo  $1 < k \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da je  $R_2(1/k) \geq 1$ , enakost  $R_2(1/k) = 1$  pa velja natanko takrat, kadar je  $k$  praštevilo.
4. Za vsako naravno število  $k > 4$  ima enačba

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2k}, \quad x < y$$

vsaj štiri dobre rešitve. Katere?

5. Dokaži, da za vsako liho število  $k > 1$  velja  $R_2(2/k) > 0$ .  
Rešitve nalog najdete na strani 118.

## VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1 – Rešitve s strani 68

Najprej odgovorimo na vprašanje v tekstu članka (str. 68).

Enačba  $E_3(1)$  ima le rešitev  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$ , ki zadošča pogoju  $P$ .

Enačba  $E_4(1)$  ima naslednje dobre rešitve:

$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 7,$	$a_4 = 42$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 8,$	$a_4 = 24$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 9,$	$a_4 = 18$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 10,$	$a_4 = 15$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 4,$	$a_3 = 5,$	$a_4 = 20$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 4,$	$a_3 = 6,$	$a_4 = 12$

1. Enačba  $E_2(5/6)$  ima le rešitev  $a_1 = 2, a_2 = 3$ , ki ustreza pogoju  $P$ , enačbo  $E_3(5/6)$  pa lahko obravnavamo takole: Zaradi ocene

$$\frac{3}{a_1} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6}$$

velja  $a_1 \leq 3$ , torej  $a_1 \in \{2, 3\}$ . Če je  $a_1 = 2$ , dobimo

$$\frac{2}{a_2} > \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{3}$$

odkoder sledi  $a_2 \in \{3, 4, 5\}$ . Od vseh treh možnosti za  $a_2$  je v tem primeru dobra le  $a_2 = 4$ . Če pa je  $a_1 = 3$ , na podoben način kot prej vidimo, da velja  $a_2 < 4$ , kar pa za dobro rešitev ni mogoče. Torej je  $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12$  edina dobra rešitev enačbe  $E_3(5/6)$ . Z njeno pomočjo lahko konstruiramo rešitve enačbe  $E_4(5/6)$ . Nekaj jih zabeležimo v naslednjo preglednico

$x$	$y$	$z$	$t$	$x$	$y$	$z$	$t$	$x$	$y$	$z$	$t$
-----				-----				-----			
2	4	13	156	2	4	20	30	2	5	12	20
2	4	14	84	2	4	21	28	2	6	7	42
2	4	15	60	2	5	8	120	2	6	8	24
2	4	16	48	2	5	9	45	2	6	9	18
2	4	18	36	2	5	10	30	2	6	10	15

2. Odgovor:  $R_2(1/2) = R_2(1/3) = R_2(1/5) = 1, R_2(1/4) = 2, R_4(1/6) = 4$ .
3. Enačbo  $E_2(1/k), 1 < k \in \mathbb{N}$ , vedno reši par

$$a_1 = k + 1, \quad a_2 = k(k + 1)$$

torej je  $R_2(1/k) \geq 1$ . Če je število  $k$  sestavljeno, ga lahko zapišemo v obliki  $k = pq$ , kjer je  $1 < p \in \mathbb{N}$  in  $1 < q \in \mathbb{N}$ . Enačba  $E_2(1/k)$  ima tedaj vsaj dve dobri rešitvi

$$a_1 = pq + 1, \quad a_2 = pq(pq + 1)$$

$$a_1 = p(q + 1), \quad a_2 = pq(q + 1)$$

torej velja  $R_2(1/k) = 1$  kvečjemu, če je  $k$  praštevilo.

Naj bo zdaj  $k$  praštevilo in naj velja

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}; \quad 1 < x < y, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Potem je  $k(x + y) = xy$ , zato velja enakost

$$(x - k)(y - k) = k^2$$

Ker je poleg tega  $k < x < 2k$  in tedaj  $0 < x - k < k$ , mora biti  $x - k = 1$ . Torej je dobra le rešitev  $x = k + 1, y = k(k + 1)$ .

4. Vedno so dobre (na primer) naslednje rešitve

$$x = 2k + 1, \quad y = 2k(2k + 1)$$

$$x = 2k + 2, \quad y = 2k(k + 1)$$

$$x = 2k + 4, \quad y = k(k + 2)$$

$$x = 3k, \quad y = 6k$$

5. Število  $k$  zapišemo v obliki  $k = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$ . Potem enakost

$$\frac{1}{p + 1} + \frac{1}{(p + 1)(2p + 1)} = \frac{2}{2p + 1}$$

da dobro rešitev enačbe  $E_2(2/k)$ .

*Boris Lavrič*