MOČNIKS

ANFANGSGRÜNDE DER GEOMETRIE

FÜR DIE I. BIS III. KLASSE
DER MITTELSCHULEN.

BEARBEITET VON

JOHANN SPIELMANN
K. K. REGIERUNGSRAT.

MIT 160 FIGUREN.

DREISZIGSTE AUFLAGE.

UNVERÄNDERTER ABDRUCK DER MIT MINISTERIALERLASZ VOM 14. MAI 1915, Z. 12.671, ALLGEMEIN ZULÄSSIG ERKLÄRTEN NEUNUNDZWANZIGSTEN AUFLAGE

PREIS, GEBUNDEN, 2 K 50 h.

WIEN 1918.
VERLAG VON F. TEMPSKY.

Buchdruckerei G. Freytag, Gesellschaft m. b. H., Wien. (2218)

Erster Abschnitt.

Der Würfel und der Quader.

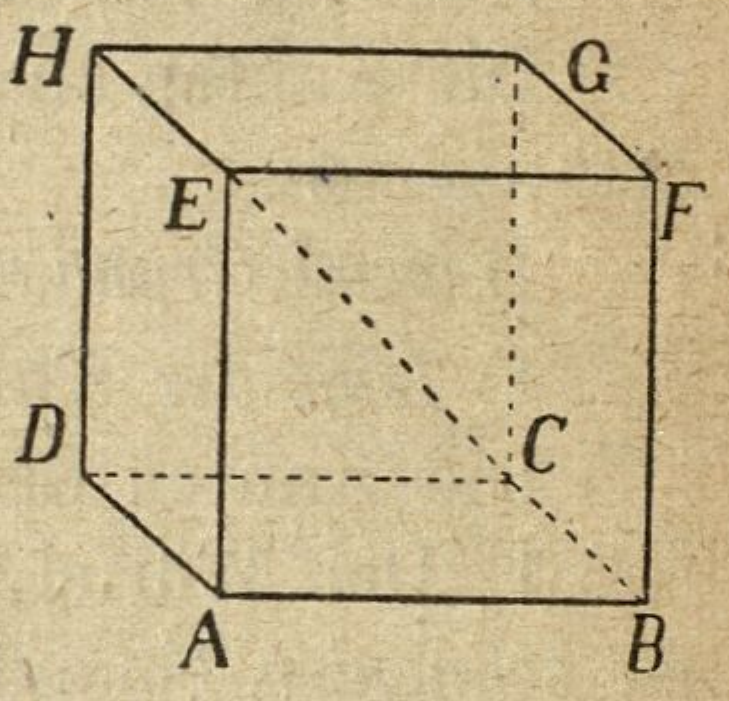
Ein Würfel wird so auf einen Tisch gestellt, daß eine seiner Begrenzungsflächen in die Tischfläche fällt; ein Drahtmodell des Würfels.

Die Würfel (von Wurf) des bekannten Spieles, die Pflastersteine haben Würfelgestalt. Vollkommener stellt den Körper das Modell dar.

Die Hauptausdehnungen des Würfels. § 1.

Der *Würfel* (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein *Körper*. Der Würfel ist ein Körper.

Fig. 1.



Die Geometrie betrachtet an den Körpern nur die Eigenschaften des Raumes, den sie einnehmen, und sieht von dem Stoffe, der den Raum erfüllt, ab.

Der Würfel ist nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt: nach der Länge, der Breite und der Höhe.

Der Schüler zeige diese drei Ausdehnungen (Dimensionen[1]) *a*) an dem Modell, *b*) an der Figur!

Die Grenzen des Würfels. § 2.

Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen. Wieviel Flächen hat der Würfel? Alle Flächen des Würfels sind *ebene* Flächen.

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Hauptrichtungen ausgedehnt: nach der Länge und nach der Breite (Höhe).

Der Schüler zeige an dem Würfel und an der Figur an verschiedenen Flächen diese beiden Ausdehnungen!

Die untere Fläche, auf welcher der Würfel steht, und die obere Fläche heißen *Grundflächen*; die obere wird auch *Deckfläche* genannt. Die übrigen vier Flächen werden als *Seitenflächen* bezeichnet. Die Seitenflächen bilden den *Mantel*, alle Grenzflächen die Oberfläche.

Durch Erweiterung einer Begrenzungsfläche des Würfels nach allen Seiten erhält man die *Ebene*. Sie ist unbegrenzt.

Die gegenseitige Lage der Flächen eines Würfels. § 3.

1. Die beiden Grundflächen treffen nie zusammen, soweit man sie auch erweitert; sie heißen *parallel*[2]).

Gibt es am Würfel auch parallele Seitenflächen? Wieviel Paare paralleler Flächen kommen am Würfel vor?

---

[1]) Lat. *dimensio*, Abmessung.

[2]) Griech. parallelos (παράλληλος), nebeneinanderlaufend.

2. Jede Seitenfläche trifft mit jeder der Grundflächen zusammen, sie *schneiden* einander. Dasselbe ist bei zwei benachbarten Seitenflächen der Fall. Am Würfel stehen je zwei einander schneidende Flächen *senkrecht* (normal[1]) aufeinander.

§ 4. Die Kanten des Würfels.

Wo zwei Flächen eines Würfels einander schneiden, entsteht eine Linie, welche eine *Kante* des Würfels genannt wird. Wieviel Kanten hat ein Würfel?

Wenn der Würfel aus einem undurchsichtigen Stoffe besteht, so sind nicht alle Kanten sichtbar. Ist das Auge des Beobachters vor dem Würfel etwas links und oberhalb desselben, so sind die in Fig. 1 ausgezogenen Kanten sichtbar, die gestrichelten hingegen unsichtbar.

Alle Kanten des Würfels sind *gerade Linien.*

Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge.

Alle Kanten des Würfels sind gleich lang.

Die Kanten an den Grundflächen heißen *Grundkanten*, die übrigen Kanten *Seitenkanten.*

Wieviel Grundkanten und wieviel Seitenkanten hat der Würfel?

a) Lage der Kanten des Würfels gegeneinander.

Die Kanten des Würfels haben gegeneinander eine dreifache Lage.

1. Der Würfel hat Kanten, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, *sie schneiden* einander in diesem Punkte (Schnittpunkt).

2. Es gibt Kanten, welche dieselbe Richtung besitzen, sie treffen nicht zusammen, so weit man sie auch verlängert. Sie heißen *parallel.*

3. Der Würfel besitzt auch Kanten, die weder parallel sind noch einander schneiden, auch wenn sie beliebig verlängert werden; sie liegen nicht in derselben Fläche. Derartige Kanten heißen einander *kreuzende.*

Der Schüler suche alle drei Arten von Kanten auf!

Zwei parallele oder zwei einander schneidende Kanten liegen in derselben Ebene, zwei einander kreuzende Kanten sind aber nicht in derselben Ebene enthalten.

b) Lage der Kanten des Würfels zu den Flächen.

Die Kanten des Würfels haben gegen die Flächen desselben eine dreifache Lage. Es gibt Kanten, welche z. B. die untere Grundfläche nicht treffen, auch nicht bei beliebiger Erweiterung beider. Es finden sich aber auch Kanten, welche die untere Grundfläche treffen. Von den ersteren sagt man, daß sie mit der betreffenden Fläche parallel sind, von den letzteren, daß sie dieselbe schneiden. (Schnittpunkt?) Drittens gibt es auch Kanten, die in einer Fläche liegen.

Der Schüler suche am Würfel die Kanten auf, welche *a*) mit der unteren oder oberen Grundfläche parallel sind, *b*) sie schneiden, *c*) in ihr liegen!

Ebenso bezüglich einer Seitenfläche.

---

[1]) Lat. normalis, regelrecht.

Alle Kanten des Würfels stehen auf den Flächen, welche sie schneiden, senkrecht.

c) *Die von den Würfelkanten gebildeten Figuren.*

Eine nach allen Seiten begrenzte ebene Fläche heißt eine *ebene Figur*. Die Grenzlinien einer Figur werden ihre *Seiten* genannt. Jede Fläche des Würfels ist eine *vierseitige* Figur. Da die Seiten gerade Linien sind, heißt die Figur *geradlinig;* da alle Seiten gleich sind, heißt sie *gleichseitig.*

Die Gleichheit der Seiten kann mit Hilfe des Zirkels nachgewiesen werden.

Alle Grenzlinien einer Figur zusammen bilden ihren *Umfang.* Der Umfang einer Fläche des Würfels ist eine *gebrochene* Linie.

Die Ecken des Würfels. **§ 5.**

Die Grenzen einer Linie heißen Punkte. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei *Eckpunkten* dieses Körpers begrenzt. Wieviel Eckpunkte hat der Würfel? Wieviel Kanten und wieviel Flächen stoßen an einem Eckpunkte des Würfels zusammen?

Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Eigenschaften der Flächen des Würfels. **§ 6.**

Zwei Kanten, welche einander schneiden, bilden einen *Winkel.* Wieviel Winkel kommen in jeder Fläche des Würfels vor? Wieviel am ganzen Würfel?

Die Kanten, welche einen Winkel bilden, heißen die *Schenkel* und der *Eckpunkt*, in dem sie zusammentreffen, der *Scheitel* des Winkels.

Die Schenkel stehen aufeinander *senkrecht* (*normal*).

Ein Winkel, dessen Schenkel aufeinander senkrecht stehen, heißt ein *rechter.*

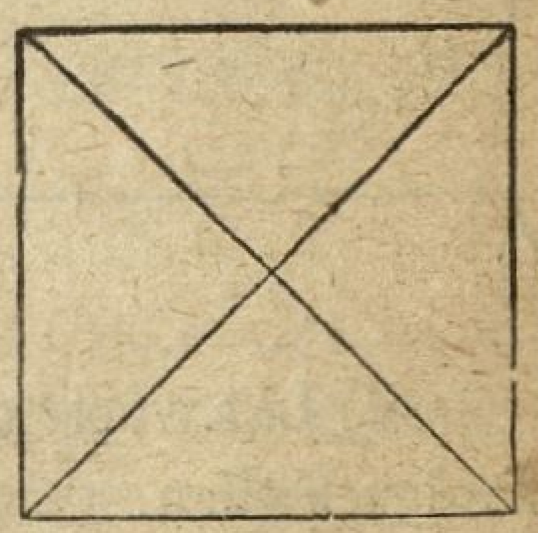
Die Flächen am Würfel sind daher rechtwinklig; da man mit Benutzung zweier Würfel je zwei dieser Winkel zur Deckung bringen kann, so sind sie gleich; jede Fläche am Würfel ist also auch gleichwinklig. Eine Figur, welche gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt *regelmäßig.* Das regelmäßige Viereck heißt *Quadrat*[1]). Am Würfel ist also jede Fläche ein Quadrat.

Die Flächen am Würfel haben gleiche *Größe* und gleiche *Gestalt;* infolgedessen lassen sie sich so aufeinander legen, daß sie einander *decken;* sie sind *kongruent*[2]).

Diagonalen am Würfel; Diagonalschnitte des Würfels. **§ 7.**

Verbindet man zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrates durch eine Gerade, so erhält man eine Diagonale[3]) desselben. Jedes Quadrat hat zwei *Diagonalen*, die untereinander gleich, aber größer als eine Seite sind. Die Diagonalen eines Quadrates sind zu den Seiten desselben *schief.* Die Winkel zwischen den Diagonalen und den Seiten eines Quadrates heißen *spitze.* (Fig. 2.)

Fig. 2.



---

[1]) Von quadratus, lat. viereckig.

[2]) Lat. congruens, übereinstimmend.

[3]) Griech. dia (διά) durch, gonia, (γωνία) der Winkel; eine durch Winkel gezogene Strecke.

vordere rechte Ecke, *f*) die untere hintere linke und benenne sie in Fig. 1! Ebenso am Quader Fig. 3!

2. Ist der Schluß richtig: Ein Würfel (oder Quader) hat 8 Eckpunkte, an jedem stoßen 3 Kanten zusammen, also hat der Würfel (Quader) 24 Kanten? Ebenso: Ein Würfel (oder Quader) hat 6 Flächen, jede hat 4 Seiten, also hat der Würfel 24 Kanten?
3. Zeige *a*) am Würfel, *b*) am Quader parallele Kanten, die in derselben Würfelfläche (Quaderfläche) liegen, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist! Wieviel parallele Kanten lassen sich in eine Gruppe vereinigen? Wieviel solche Gruppen gibt es?
4. Die eine Kante eines Würfels kreuzenden Kanten *a*) am Drahtmodell, *b*) in Fig. 1 aufzusuchen. Wieviel sind es?
5. Am Drahtmodell eines Würfels die Diagonalen des Würfels aufzusuchen. Welche Eckpunkte der Fig. 1 verbinden sie? Ebenso beim Quader.
6. Markierung eines Würfels durch 4 Metallstäbe, die mit Spitzen in ein Brett gesteckt werden. Zeige den Verlauf der Diagonalen der Flächen und der Diagonalen des Würfels! Ebenso für einen Quader.
7. Nenne in Fig. 1 *a*) die Deckfläche, *b*) die vordere, *c*) die hintere, *d*) die rechte, *e*) die linke Seitenfläche des Würfels!
8. Verfahre ebenso bei dem Quader in Fig. 3! Welche Fläche ist die Grundfläche? Wo ist das Auge des Beobachters zu denken?
9. Aus Würfeln *a*) einen Quader, *b*) eine quadratische Säule zusammenzusetzen.
10. Was für ein Körper entsteht, wenn man die Deckfläche eines Würfels mit der Grundfläche eines gleich großen zusammenfallen läßt? In was für Körper wird ein Würfel durch eine zu zwei Seitenflächen parallele Ebene zerschnitten?

Zweiter Abschnitt.

Gerade Linien, Winkel.

Netz des Würfels und des Quaders.

§ 13. Die gerade Linie; Bestimmung ihrer Lage.

Durch *einen* Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Lagen ziehen. Sie haben verschiedene Richtungen. Ist noch ein *zweiter* Punkt gegeben, so geht von allen diesen geraden Linien nur eine einzige durch beide Punkte.

Die Lage einer geraden Linie ist demnach durch zwei Punkte vollkommen bestimmt.

Eine gerade Linie wird mit Hilfe des *Lineales* gezeichnet.

Prüfung des Lineales auf seine Richtigkeit:

Die Kante des Lineales muß vollkommen gerade sein. Dies ist der Fall, wenn sie, in entsprechender Weise vor das Auge gebracht, als Punkt erscheint. Oder man zieht durch zwei Punkte nach der Kante des Lineales eine Linie, klappt es um und zieht durch dieselben zwei Punkte nach derselben Kante wieder eine Linie. Fallen diese beiden Linien zusammen, so ist die benutzte Kante geradlinig.

Aufgaben:

1. Wieviel vertikale gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?
2. Wieviel horizontale gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?

3. Wieviel schräge gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?
4. Nach dem Augenmaße drei Punkte so zu wählen, daß sie in derselben geraden Linie liegen; die Richtigkeit der Wahl mit dem Lineale zu prüfen.

Unbegrenzte und begrenzte gerade Linien. § 14.

1. Ist eine gerade Linie nach beiden Seiten unbegrenzt, so heißt sie ein *Strahl* (BC, Fig. 4) oder kurz *Gerade.* Nimmt man in einer Geraden einen Punkt A an, so wird sie in zwei Teile geteilt, welche von diesem Punkte aus in zwei einander entgegengesetzten Richtungen ausgedehnt sind und *Halbstrahlen* genannt werden. *Ein Halbstrahl ist demnach eine durch einen Punkt* (*Grenzpunkt*) *halb begrenzte gerade Linie.* Er wird durch den Grenzpunkt A und einen zweiten in ihm liegenden Punkt B (C) oder durch einen einzigen Buchstaben a bezeichnet.

2. Nimmt man in einer Geraden zwei Punkte an (Fig. 5), so heißt der durch sie begrenzte Teil der Geraden eine *Strecke.* Die beiden Grenzpunkte nennt

Fig. 4.

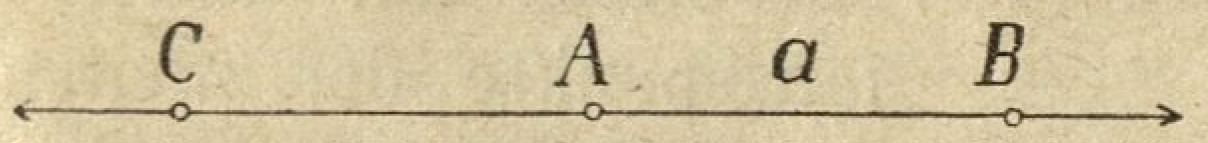
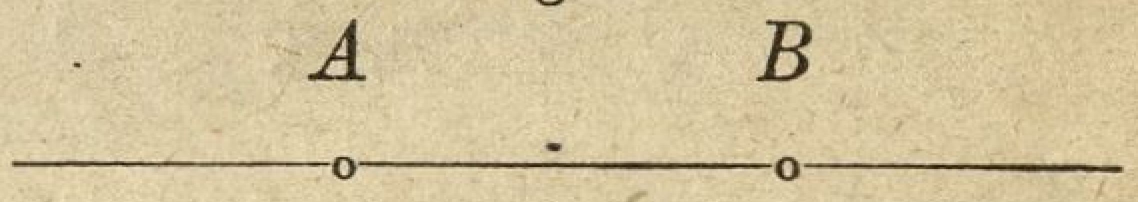


Fig. 5.



man ihre *Endpunkte* oder auch den einen den *Anfangspunkt,* den anderen den *Endpunkt.* Eine Strecke wird durch die an ihre Endpunkte gesetzten Buchstaben benannt. So heißt die Strecke in Fig. 5 AB. Oder man schreibt an die Strecke einen kleinen Buchstaben.

Die zwischen zwei Punkten gezogene Strecke ist die kürzeste Verbindungslinie derselben und wird deshalb die *Entfernung* oder der *Abstand* (Distanz) der beiden Punkte genannt.

Aufgabe:

Nenne *a*) nach Fig. 1, *b*) nach Fig. 3 die Kanten der unteren Grundfläche, der Deckfläche, der rechten Seitenfläche, der linken Seitenfläche des Würfels beziehungsweise des Quaders! Suche die hintere rechte Seitenkante, die vordere linke Seitenkante in beiden Körpern auf! Benenne die eingezeichnete Diagonale des Würfels, des Quaders! Wie liegen die beiden Ecken, welche die Diagonale verbindet? Nenne alle horizontalen, alle vertikalen Kanten der beiden Körper!

Vergleichung zweier Strecken hinsichtlich ihrer Länge. § 15.

Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer *Länge* zu vergleichen, lege man sie so *aufeinander*, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken einander *gleich.* In Zeichen $AB = CD$ (Fig. 6). Wenn aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammenfallen, so sind die Strecken *ungleich*, und zwar ist diejenige die *kleinere*, deren zweiter Endpunkt zwischen die Endpunkte der anderen fällt; diese ist die größere. In Fig. 7 ist EF größer als GH oder GH kleiner als EF. (In Zeichen $EF > GH$ oder $GH < EF$.)

Die Vergleichung zweier Strecken nach ihrer Länge wird, wenn das Aufeinanderlegen selbst nicht möglich ist, mit Hilfe des Zirkels oder mit Hilfe eines Papierstreifens, auf dem man die Länge einer der beiden Strecken durch Marken bezeichnet hat, ausgeführt.

Eine Strecke hat nur *eine* Lage, *eine* Größe, hingegen *zwei* Richtungen, die entgegengesetzt sind: AB (Fig. 6) von A nach B und von B nach A.

Aufgabe:

Zeichne nach dem Augenmaße nebeneinander zwei gleiche Strecken und prüfe ihre Gleichheit mit dem Zirkel oder mit einem Papierstreifen!

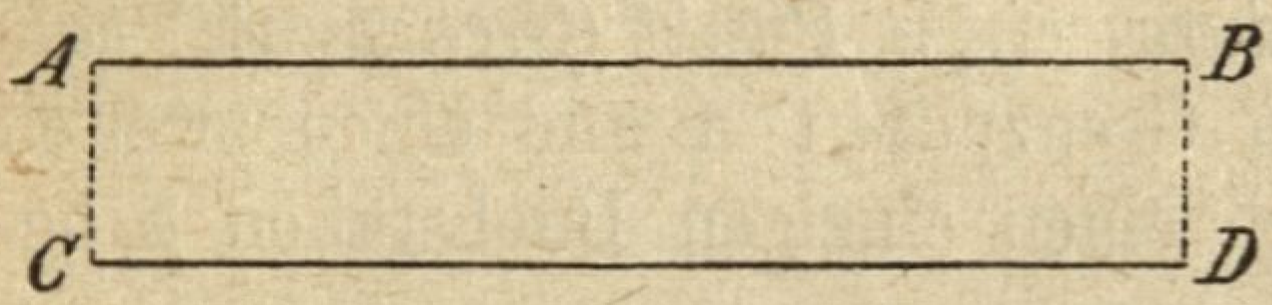


Fig. 6.

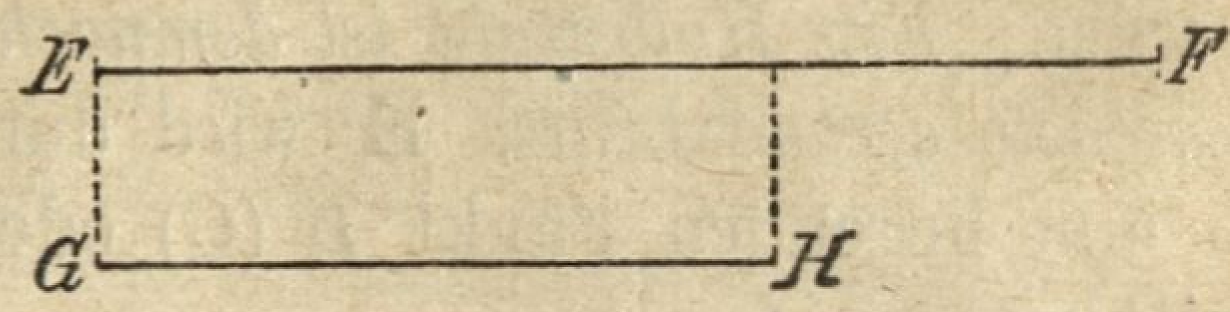


Fig. 7.

§ 16. Zeichnendes Rechnen mit Strecken.

1. *Addition zweier oder mehrerer Strecken.* Um zwei oder mehrere Strecken zu addieren, legt man sie in einer Geraden so *nebeneinander*, daß der Endpunkt der ersten mit dem Anfangspunkte der zweiten, der Endpunkt der zweiten mit dem Anfangspunkte der dritten Strecke usw. zusammenfällt; die Strecke zwischen dem Anfangspunkte der ersten und dem Endpunkte der letzten Strecke ist die gesuchte *Summe.* In Figur 8 ist $AB = a + b + c$.

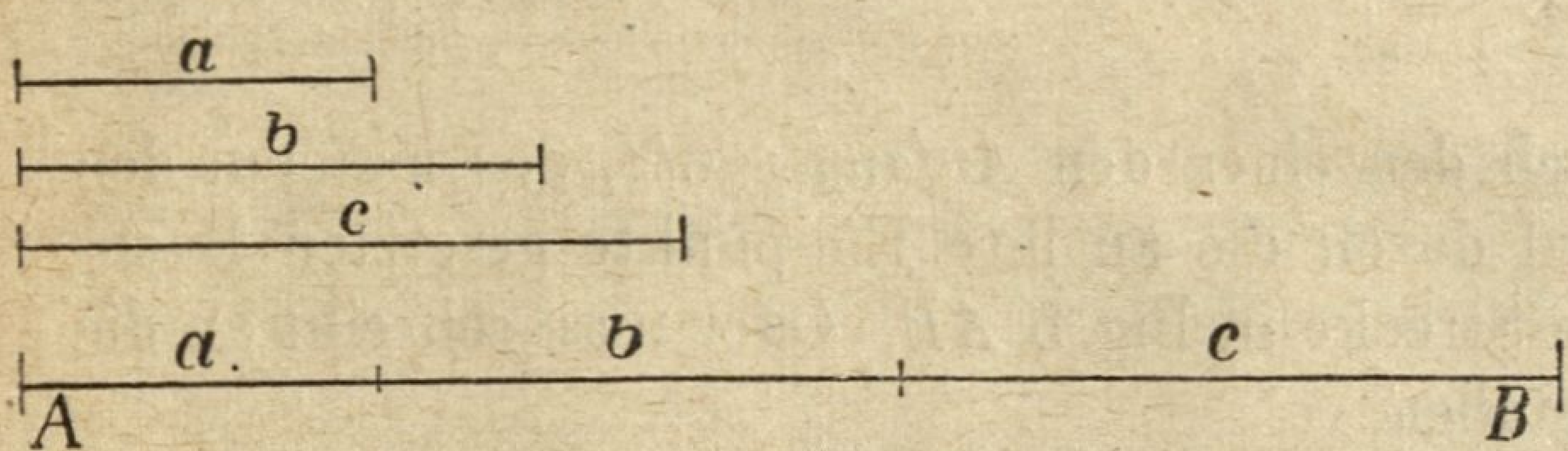


Fig. 8.

2. *Subtraktion zweier Strecken.* Um zwei Strecken zu subtrahieren, legt man die kleinere so *auf* die größere, daß zwei Endpunkte derselben zusammenfallen; die Strecke zwischen den anderen Endpunkten ist die gesuchte Differenz (Unterschied). In Fig. 9 ist $AB = b - a$.

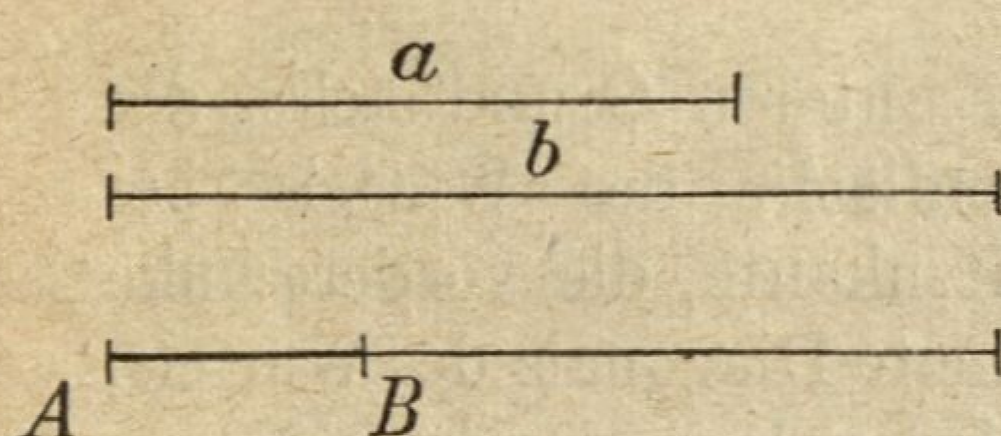


Fig. 9.

3. *Multiplikation einer Strecke mit einer ganzen Zahl.* (Vervielfachen einer Strecke.) Eine Strecke wird mit einer ganzen Zahl multipliziert (vervielfacht), indem man sie in der früher angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. Ist z. B. die Strecke AB (Fig. 10) mit 4 zu multiplizieren oder zu vervierfachen, so trägt man sie auf einer Geraden viermal nebeneinander auf; es ist dann $AE = AB \times 4$ oder AE das Vierfache von AB.

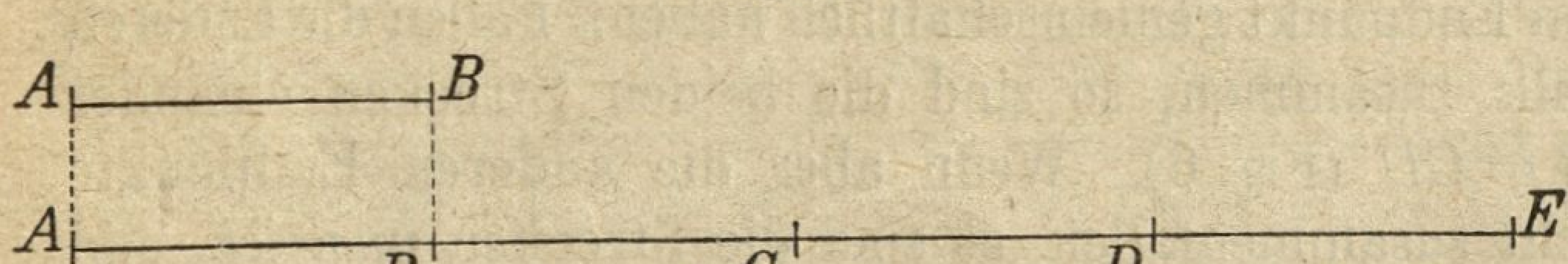


Fig. 10.

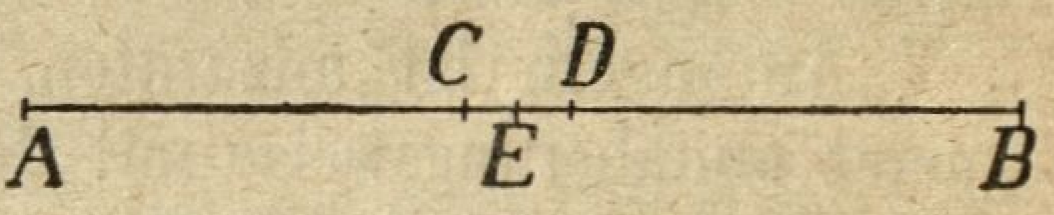
Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Strecken ist mit Hilfe des Zirkels auszuführen.

4. *Division einer Strecke.* *a*) Durch eine ganze Zahl (Teilung). Eine Strecke durch eine ganze Zahl dividieren heißt, sie in so viele gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist eine Strecke. Ist eine Strecke in 2, 4, 8, 16 ... gleiche Teile zu teilen, so teile man sie vorläufig nach dem Augenmaße in zwei, jede Hälfte wieder in zwei, jedes Viertel wieder in zwei gleiche Teile usw. und prüfe jedesmal die Richtigkeit der Teilung mit dem Zirkel. Ist eine Strecke in sechs gleiche Teile zu teilen, so teilt man sie zuerst in zwei gleiche Teile und jede Hälfte in drei gleiche Teile.

b) Durch eine Strecke. Eine Strecke durch eine Strecke dividieren heißt untersuchen, wie oft die letztere in der ersteren enthalten ist. (Messung.) Der Quotient ist eine Zahl. Z. B. (Fig. 10): $AE : AB = 4$.

Die Halbierung einer Strecke nach dem Augenmaße fällt um so genauer aus, je kürzer sie ist. Man kann daher in folgender Weise verfahren. Man trage mit Hilfe des Zirkels die nach dem Augenmaße geschätzte Hälfte der Strecke von den beiden Endpunkten aus auf. Ist diese kleiner als die genaue Hälfte, so erhält man die Fig. 11. Durch Halbierung der Strecke CD nach dem Augenmaße wird die ganze Strecke ausreichend genau halbiert.

Fig. 11.



Wie stellt sich das Verfahren dar, wenn die geschätzte Hälfte zu groß ist?
Der Schüler teile nach diesem Verfahren eine Strecke in 2, 4, 8 gleiche Teile!

Aufgaben (zuerst nach dem Augenmaße zu zeichnen und dann zu prüfen):

1. Es sind drei horizontale Strecken zu zeichnen, bezüglich ihrer Länge zu vergleichen und zu addieren.
2. Es sind drei vertikale Strecken zu zeichnen und zu addieren.
3. Zwei vertikale Strecken zu zeichnen und ihre Differenz zu ermitteln.
4. Es ist eine gegebene Strecke mit 7 zu multiplizieren.
5. Es ist *a*) eine horizontale, *b*) eine vertikale, *c*) eine schräge Strecke in 6, 8, 10 gleiche Teile zu teilen.

Messen der Strecken. § 17.

Auf der Division einer Strecke durch eine Strecke beruht die Bestimmung der Länge einer Strecke, d. i. das Messen derselben.

Eine Strecke *messen* heißt untersuchen, wie oft eine als *Längeneinheit* angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die *Maßzahl* der Strecke.

Die Einheit des Längenmaßes in Österreich und den meisten europäischen Staaten ist das Meter[1]) (*m*); *es wird in* 10 *Dezimeter* (*dm*) *à* 10 *Zentimeter* (*cm*) *à* 10 *Millimeter* (*mm*) eingeteilt. 1000 Meter = 1 *Kilometer* (*km*), 10 Kilometer = 1 *Myriameter* (*μm*).

Zum Ausmessen der Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall, auf welchen eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Unterabteilungen aufgetragen sind; sie heißen *Maßstäbe.*

---

[1]) Griech. metron (μέτρον), Maß.

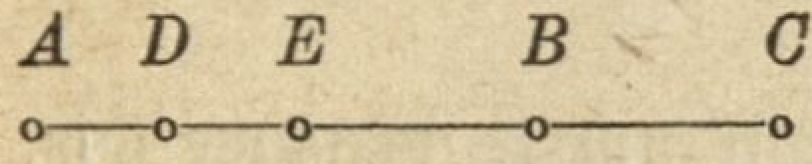
Zur Messung längerer Strecken, z. B. auf dem Felde, dient

a) das Meßband; es ist etwa 10 *m* lang, mit einer Zentimeterteilung versehen und mittels einer Kurbel auf einer Rolle aufwickelbar.

b) Die Meßkette; sie besteht aus einzelnen Gliedern von etwa 2 *dm* Länge, welche durch Ringe verbunden sind. Die einzelnen Meter sind durch Ringe von besonderer Gestalt erkenntlich gemacht.

Soll eine Strecke *AB* (Fig. 12) auf dem Felde gemessen werden, so ist sie zuerst abzustecken. Dies geschieht mit Hilfe der Fluchtstäbe (zirka 2 *m* langer, mit einer eisernen Spitze versehener Stäbe). Die Punkte *A* und *B* werden durch vertikal eingesteckte Fluchtstäbe markiert. Der Beobachter stellt sich so in einem Punkte *C* auf, daß der Stab *A* durch *B* gedeckt wird. Ein Gehilfe steckt dann zwischen *A* und *B* weitere Fluchtstäbe in *D*, *E*, ... so ein, daß sie von *C* aus nicht gesehen werden. Die Punkte *A*, *D*, *E*, *B* liegen dann in einer Geraden.

Fig. 12.



Anfängern ist anzuraten, zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abzuschätzen und dann mit dem Maßstabe genau zu messen; der Schüler ermittle in dieser Weise die Länge und Breite *a*) eines Buches, *b*) eines Tisches, *c*) einer Schulbank; ferner die Länge, Breite und Höhe eines Zimmers!

Der Schüler zeichne nach dem Augenmaße zwei Punkte in dem Abstande von *a*) 5 *cm*, *b*) 12 *cm*, *c*) 20 *cm* und prüfe die Richtigkeit mit dem Maßstabe!

Aufgaben:

1. Die Summe folgender Strecken zu suchen:
   a) 3 *dm* 8 *cm* 5 *mm*, 7 *dm* 9 *cm* 6 *mm*, 8 *dm* 6 *mm*;
   b) 3 *km* 86 *m*, 5 *km* 817 *m*.
2. Die Differenz folgender Strecken zu suchen:
   a) 3 *m* 8 *dm* 5 *cm*, 1 *m* 2 *dm* 3 *cm*;
   b) 13 *m* 4 *dm* 7 *cm*, 8 *m* 9 *dm* 8 *cm*;
   c) 4 *km*, 1 *km* 27 *m*.
3. Die Strecke 3 *m* 8 *dm* 9 *cm* *a*) mit 3 zu multiplizieren, *b*) ihren 5. Teil zu berechnen.
4. Wie oft sind 3 *km* 826 *m* in 15 *km* 304 *m* enthalten?
5. Auf dem Felde eine Strecke abzustecken, ihre Länge zu schätzen und durch Messung die Schätzung zu prüfen; sodann diese Strecke abzuschreiten und die Länge eines Schrittes zu berechnen.
6. Der Schüler markiere auf dem Felde zwei Punkte durch Fluchtstäbe und schätze ihren Abstand! Sodann ist die Strecke zwischen diesen Punkten abzuschreiten und ihre Länge mittels der in Aufgabe 5 ermittelten Schrittlänge zu berechnen.
7. Schätzung der Breite eines Flusses, wenn der Standort unmittelbar an dem einen Ufer liegt.

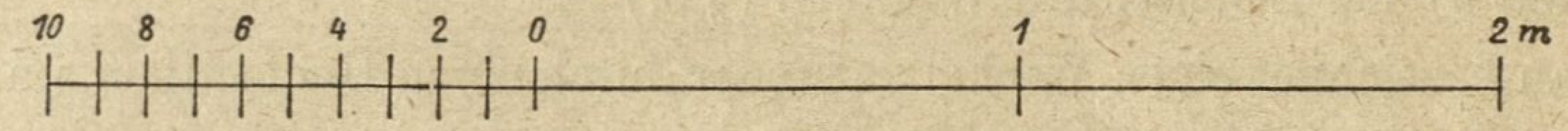
   Prüfung dieser Schätzung. Man rücke den Hut gegen das Gesicht so weit herab, daß die Sehlinie längs des Hutrandes den gegenüberliegenden Punkt des anderen Ufers trifft. Dann drehe man sich so weit, daß diese Sehlinie ein erreichbares Objekt am diesseitigen Ufer, das als eben vorausgesetzt wird, trifft. Die Strecke zu diesem Objekte ist sodann abzuschreiten. Beispiele für die Anwendung desselben Verfahrens im Kriege, wenn der Hut durch die Handfläche ersetzt wird.

§ 18. Der verjüngte Maßstab.

Will man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere zeichnen, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, *verjüngten* Maße. Es wird nämlich angenommen, daß eine bestimmte Länge, z. B. 1 *cm* auf dem Papiere eine bestimmte Länge, z. B. 1 *m* oder 20 *m*, in der Wirklichkeit vorstellen soll.

Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein *verjüngter Maßstab*, im Gegensatze zu einem *natürlichen Maßstabe*, auf welchem die Längeneinheit in ihrer wahren Größe aufgetragen wird.

Fig. 13.



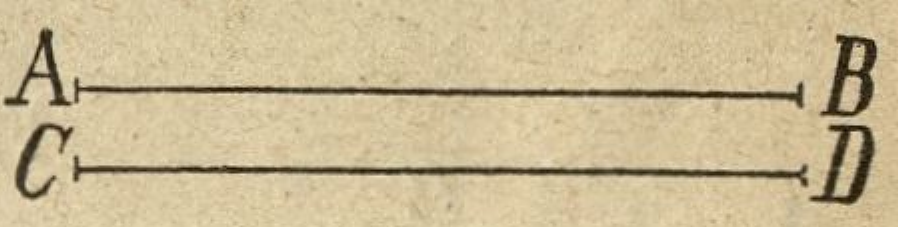
Aufgaben:

1. Einen Maßstab von 3 *m*, dem man auch Dezimeter entnehmen kann, in der Verjüngung 1 *m* = 3 *cm* natürlicher Größe zu zeichnen.
   Zeichne (Fig. 13) eine Gerade, trage auf ihr 3 *cm* natürlicher Größe 3 mal auf und teile dann den ersten Teil links in 10 gleiche Teile!
2. Ziehe drei Gerade und trage mit dem obigen Maßstabe auf die erste 2 *m*, auf die zweite 1 *m* 5 *dm*, auf die dritte 2 *m* 7 *dm* auf!
3. Ziehe drei Strecken und bestimme nach dem obigen Maßstabe, wieviel Meter und Dezimeter die Länge einer jeden angibt!
4. Zeichne einen Maßstab von 5 *m*, auf dem 1 *m* des natürlichen Maßes gleich 2 *cm* ist und auf dem man noch 5 *cm* des natürlichen Maßes ablesen kann! Da 100 *cm* des natürlichen Maßes durch 2 *cm* oder 20 *mm* dargestellt werden, so werden 5 *cm* des natürlichen Maßes durch 1 *mm* dargestellt.
5. Zeichne mit beliebiger Verjüngung einen Maßstab von 40 *m* so, daß man noch Meter abnehmen kann!
   Anwendung des verjüngten Maßstabes bei Zeichnungen von Grundrissen, von Gebäuden, von Maschinen, von Landkarten usw.
   Die Spezialkarte der Österreichisch-Ungarischen Monarchie ist in dem Maßstabe 1 : 75000 hergestellt; was bedeutet das? Wie lang ist auf dieser Karte 1 *km*? Welche Entfernung in der Wirklichkeit stellt 1 *cm* der Karte dar?

Vergleichung zweier Geraden hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage. § 19.

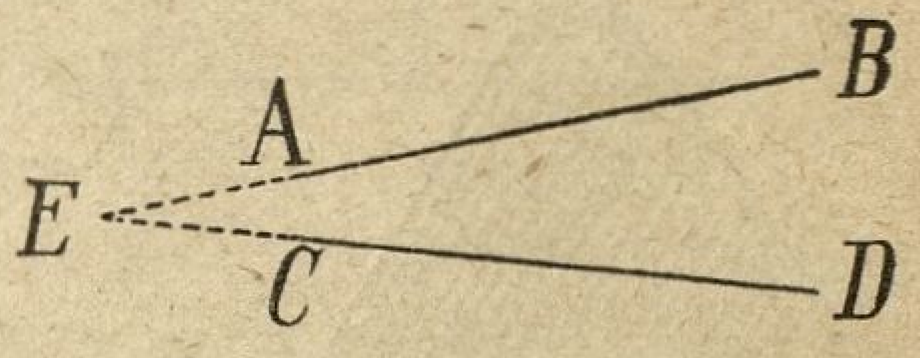
1. Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und, wenn sie noch so weit verlängert werden, nie zusammentreffen, heißen *gleichlaufend* oder *parallel*. In Zeichen: $AB \parallel CD$ (Fig. 14). Der zwischen ihnen liegende Teil der Ebene heißt ein *Parallelstreifen*.

Fig. 14.



2. Zwei gerade Linien, welche, hinreichend verlängert, zusammentreffen, heißen *ungleichlaufend* oder *nicht parallel*, wie AB und CD (Fig. 15). Zwei nicht parallele Gerade sind gegen den Schnittpunkt *konvergierend*[1]), von demselben aus *divergierend*[1]).

Fig. 15.



[1]) Aus dem Lateinischen: konvergierend zusammenneigend, divergierend auseinanderneigend.

Aufgaben:

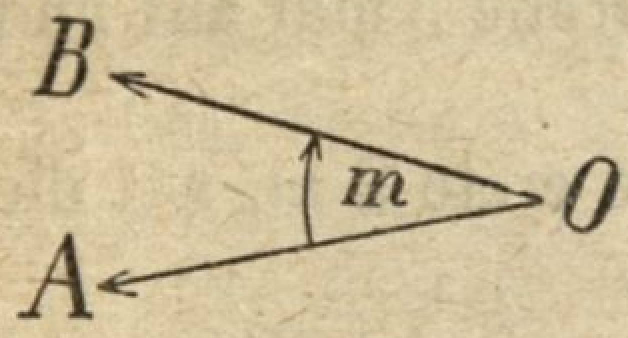
1. Welche Lage gegeneinander haben die Strecken, welche von den Punkten eines frei fallenden Körpers beschrieben werden?
2. Welche Lage gegeneinander haben die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen?

§ 20. Entstehung und Bezeichnung eines Winkels.

Dreht man den Halbstrahl OA um O (Fig. 16) im Sinne des Pfeiles in die Lage OB, so schließt er in dieser Lage mit der ursprünglichen OA einen Winkel ein, dessen Größe durch die Größe der Drehung bestimmt ist. Nenne *a*) die Schenkel, *b*) den Scheitel des Winkels! (§ 6.)

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen Buchstaben am Scheitel oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben. Im letzteren Falle steht ein Buchstabe am Scheitel und die zwei anderen an beliebigen Punkten der beiden Schenkel; diese Buchstaben werden bei der Benennung eines Winkels in einer solchen Ordnung gelesen, daß der am Scheitel stehende die Mitte einnimmt. Der Winkel in Fig. 16 heißt: Winkel O oder Winkel m oder Winkel AOB oder Winkel BOA.

Fig. 16.



Sind die Schenkel eines Winkels Strecken, so ist seine Größe unabhängig von ihrer Länge.

§ 21. Vergleichung zweier Winkel bezüglich ihrer Größe.

Um zwei Winkel bezüglich ihrer Größe miteinander zu vergleichen, legt man sie so *aufeinander*, daß die Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen; fällt das andere Paar Schenkel gleichfalls zusammen, so sind die beiden Winkel *gleich*; im entgegengesetzten Falle *ungleich*, und zwar ist derjenige der *kleinere*, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen fällt.

Fig. 17.

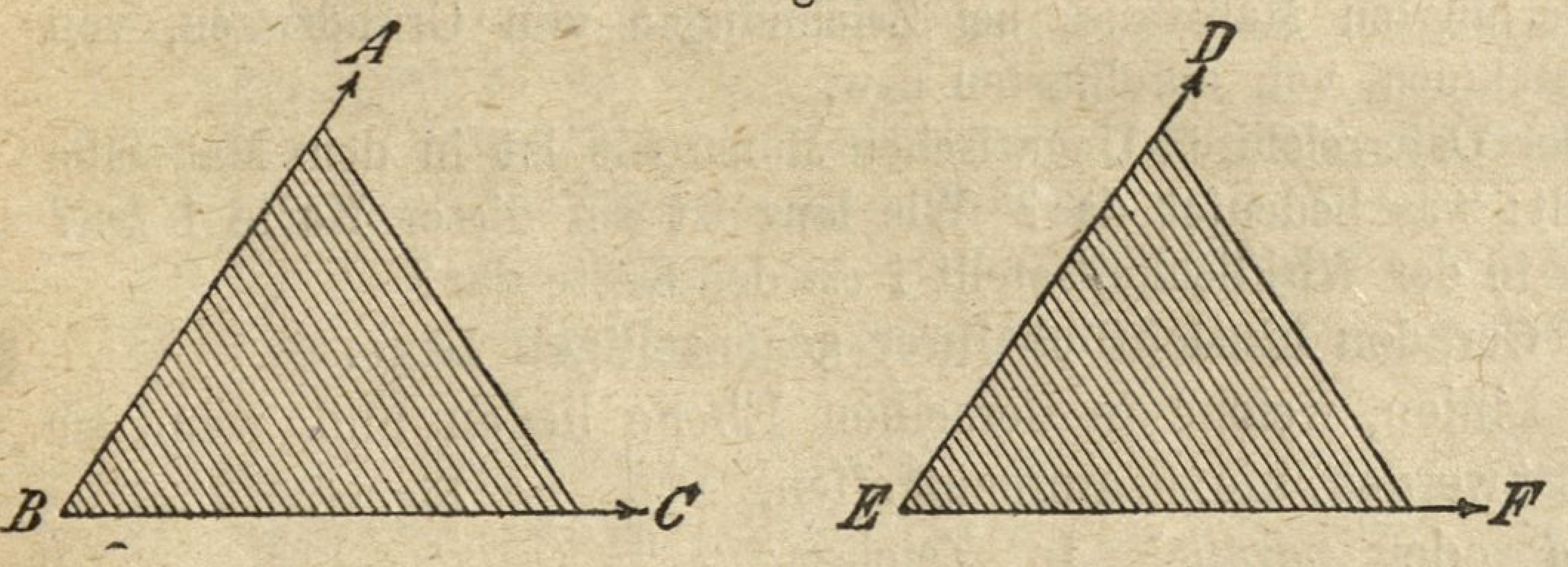
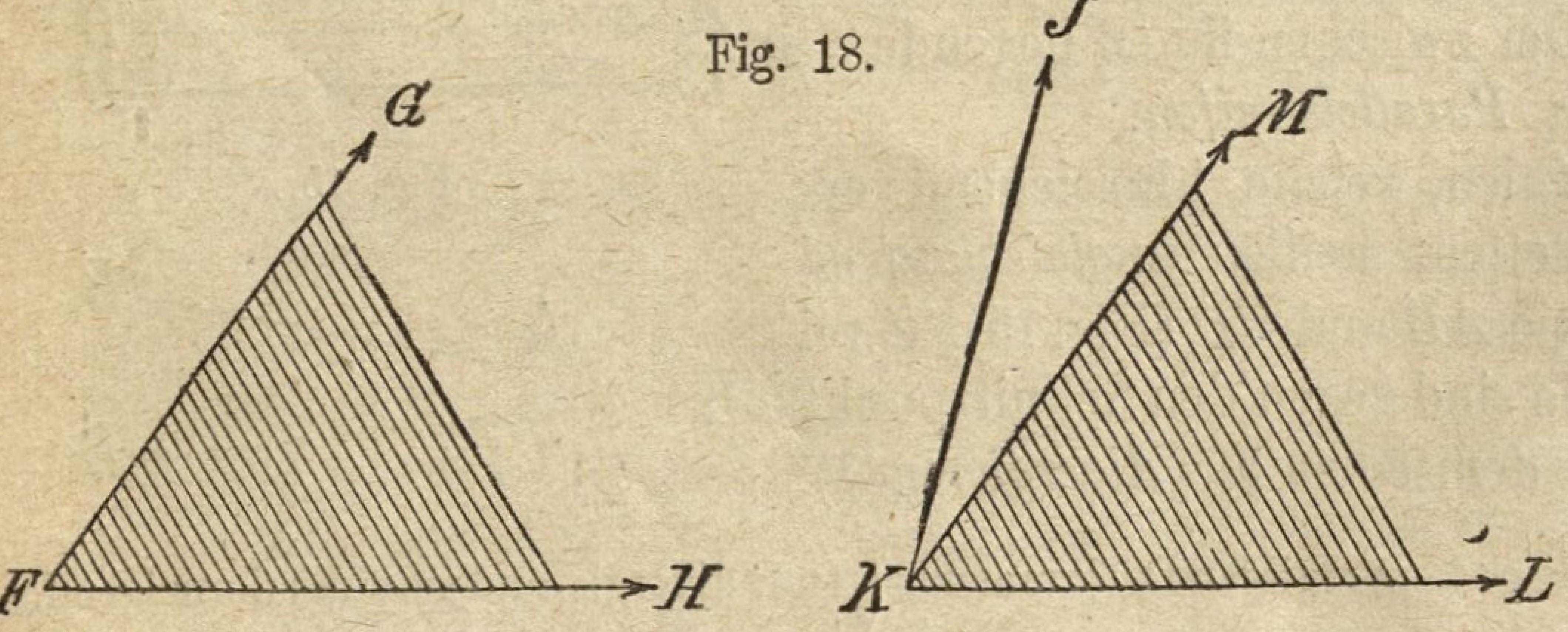


Fig. 18.



In Fig. 17 ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, in Fig. 18 $\sphericalangle GFH < \sphericalangle JKL$.

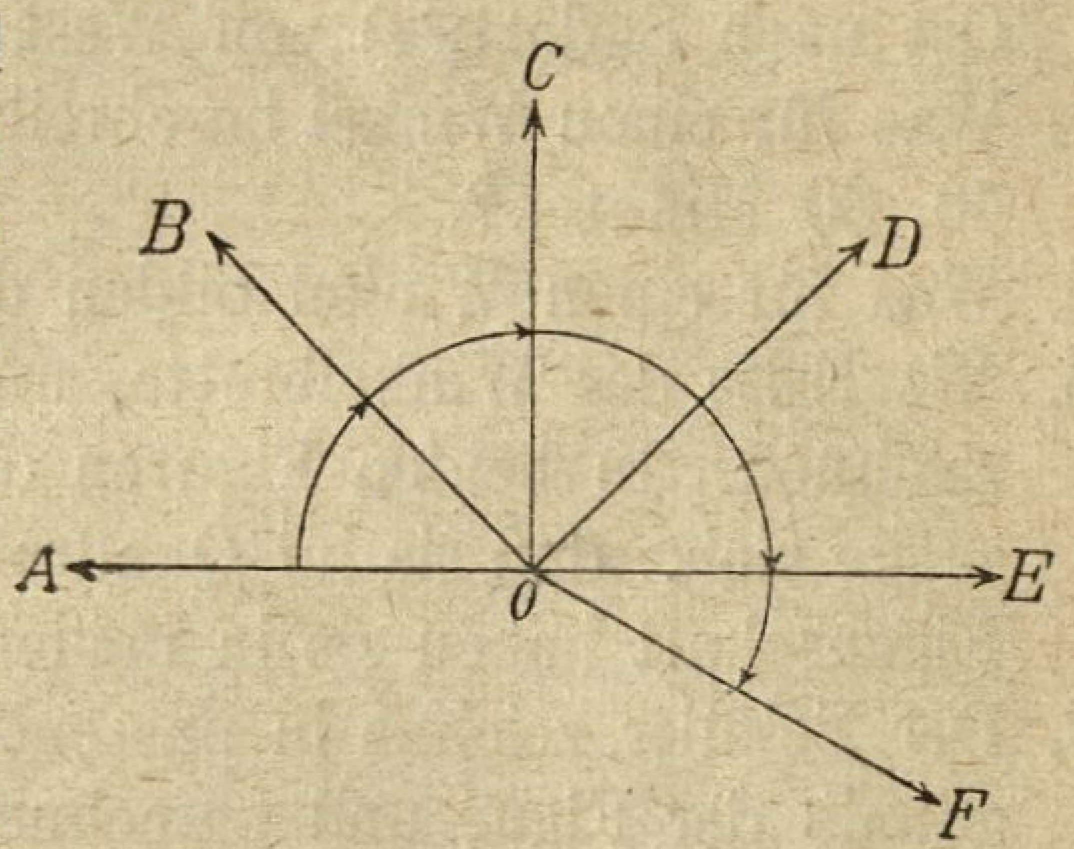
Schneide zwei Winkel aus einem Blatte Papier aus und vergleiche sie nach ihrer Größe!

Einteilung der Winkel hinsichtlich ihrer Größe. **§ 22.**

Dreht sich der Halbstrahl OA (Fig. 19) in einer Ebene um seinen Grenzpunkt O so lange, bis er in die Richtung OC kommt, also eine Vierteldrehung ausführt, so sagt man, er steht auf seiner ursprünglichen Richtung senkrecht oder normal (in Zeichen: $CO \perp AO$) und nennt den dadurch entstandenen Winkel einen *rechten* (Bezeichnung: R.).

Führt man mit dem Halbstrahl OC neuerdings ein Viertel einer Umdrehung aus, so kommt er in die Lage OE, man erhält wieder einen rechten Winkel COE. Die beiden rechten Winkel geben als Summe den Winkel AOE, dessen Schenkel in dieselbe Gerade nach entgegengesetzten Richtungen fallen. Ein solcher Winkel heißt ein *gestreckter*; er entsteht durch eine halbe Umdrehung. Ein rechter Winkel ist also die Hälfte eines gestreckten. Alle rechten, ebenso alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Fig. 19.



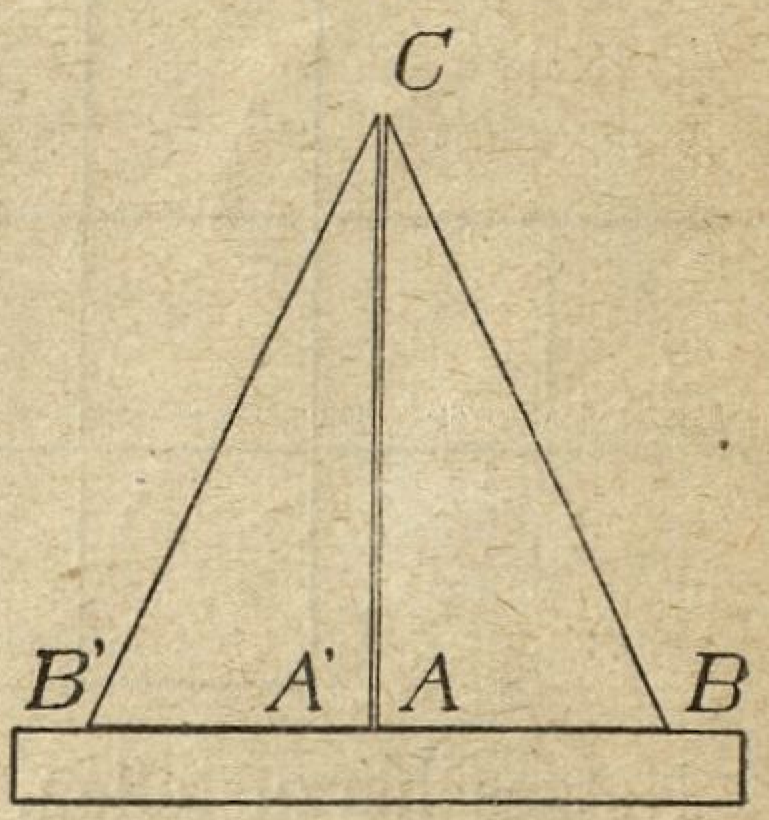
Beträgt die Drehung des Halbstrahles OA weniger als eine halbe Umdrehung, so heißt der entstandene Winkel ein *hohler* oder *konkaver*[1]); jeder hohle Winkel ist also kleiner als ein gestreckter. Ein Winkel AOB, zu dessen Entstehung weniger als eine Viertelumdrehung erforderlich ist, heißt ein *spitzer* und ein Winkel AOD, zu dessen Entstehung mehr als eine Viertel-, jedoch weniger als eine halbe Umdrehung erforderlich ist, ein *stumpfer*. Beide heißen *schiefe Winkel*.

Setzt man die Drehung über eine halbe Umdrehung fort, so erhält man zunächst *erhabene* oder *konvexe*[2]) Winkel (AOF); führt man eine ganze Umdrehung aus, so einen *vollen* Winkel.

Führe diese Drehungen mit einem Schenkel des Zirkels aus und zeige die dadurch gebildeten Winkel!

Einen rechten Winkel zeichnet man mit Hilfe des Winkelbrettes, welches drei Winkel enthält, von welcher einer ein rechter ist. Welche Winkel sind die beiden anderen?

Fig. 20.



Prüfung der Richtigkeit des Winkelbrettes. Man legt es in der Lage ABC (Fig. 20) gegen ein Lineal und zieht nach der Kante AC eine Linie; sodann klappt man das Winkelbrett bei unveränderter Lage des

---

[1]) Lat. concavus, hohl.

[2]) Lat. convexus, gewölbt.

Lineals um und zieht nach derselben Kante wieder eine Linie. Fallen diese beiden Linien zusammen, so ist das Winkelbrett richtig.

Mit Hilfe des Winkelbrettes können die *Aufgaben* gelöst werden:

1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fällen.

2. In einem Punkte einer Geraden auf diese die Senkrechte zu errichten.

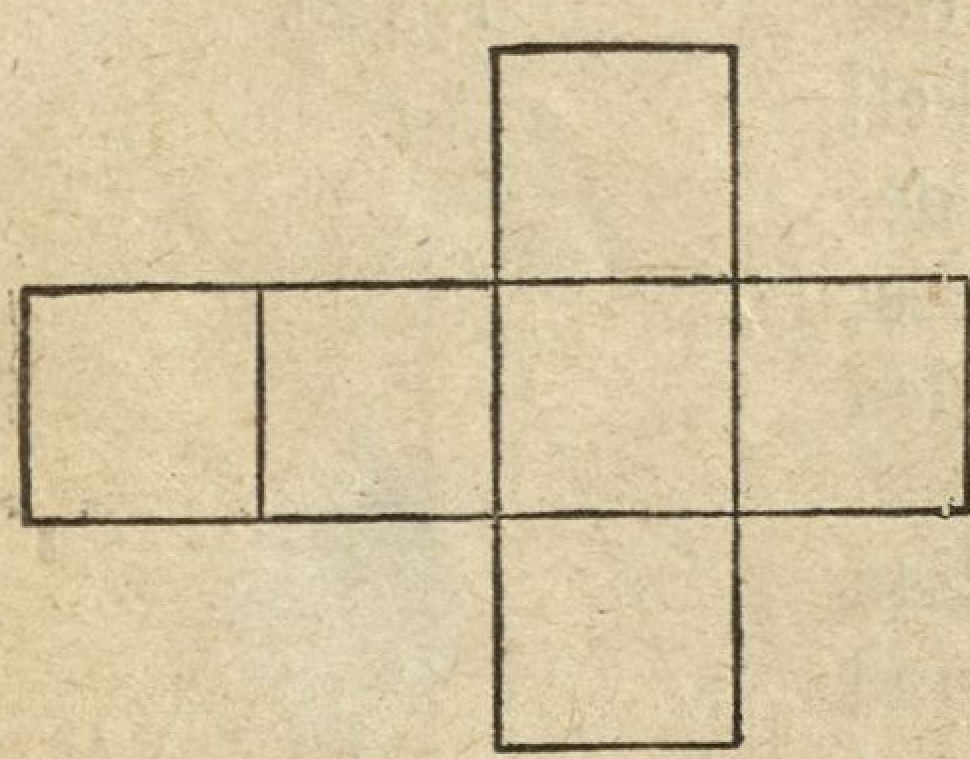
Aufgaben:

1. Zwischen welchen Winkeln liegt ein stumpfer, zwischen welchen ein erhabener Winkel?
2. Nenne Gegenstände im Lehrzimmer und außerhalb desselben, an denen *a*) rechte, *b*) spitze, *c*) stumpfe Winkel vorkommen!
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich *a*) von Nord nach Süd, *b*) von Ost nach Süd, *c*) von Ost über Süd nach Südwest, *d*) von West über Ost nach Südost, *e*) von West über Ost nach Süd dreht?
4. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 5, 10, 15, 25, 30, 40, 60 Minuten?
5. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr um 2, 3, 4, 5, 6 Uhr?
6. Mit Hilfe des Winkelbrettes und des Zirkels *a*) ein Quadrat, *b*) ein Rechteck zu zeichnen. In beiden Figuren die Diagonalen zu konstruieren. Der Schüler überzeuge sich, daß sie im Quadrate gleich lang und normal zueinander sind! Welche Eigenschaft haben sie in beiden Beziehungen im Rechteck?
7. Der Schüler zeichne in passender Verkleinerung eine Tischplatte, messe eine Diagonale der Figur und berechne mittels der Verjüngung des Maßstabes die wahre Länge! Er prüfe dieses Resultat durch direkte Messung der Diagonale!
8. Welcher Unterschied ist zwischen senkrecht (normal) und vertikal? Der Schüler öffne einen Zirkel so weit, daß die Schenkel aufeinander senkrecht stehen; er halte den einen Schenkel in horizontaler Lage fest und bringe den zweiten in *a*) die vertikale, *b*) die horizontale, *c*) eine schräge Lage! Ändert sich dabei die gegenseitige Lage der beiden Schenkel?

§ 23. Netz des Würfels und des Quaders.

Die zusammenhängende Zeichnung der Grenzflächen eines Körpers in einer einzigen Ebene heißt das Netz dieses Körpers.

Fig. 21.



Das Netz des Würfels entsteht, wenn man längs einer geraden Linie vier Quadrate nebeneinander aufträgt und überdies an den entgegengesetzten Seiten dieser Reihe von Quadraten noch zwei Quadrate konstruiert (Fig. 21).

Welche Figur bildet im Netz der Mantel des Würfels? Wie groß ist die Grundlinie, wie groß die Höhe? Den Würfel mit Hilfe seines Netzes herzustellen.

Aufgaben:

1. Das Netz eines Quaders (am besten eines Modelles) zu zeichnen, dessen Grundflächen Rechtecke sind. Welche Figur ergibt sich für den Mantel? Wie groß ist

die Grundlinie, wie groß ihre Höhe? Den Quader mit Hilfe des Netzes zu modellieren.

2. Das Netz einer quadratischen Säule zu zeichnen, bei welcher jede Seitenkante doppelt so groß ist als eine Grundkante. Diese Säule zu modellieren.
3. Der Schüler zeichne einen Würfel und trage den Diagonalschnitt ein, welcher durch die vordere linke und die hintere rechte Seitenkante bestimmt ist; ferner die beiden Diagonalen des Würfels, welche dieser Schnitt enthält! Das Netz dieses Würfels zu zeichnen.

Dritter Abschnitt.

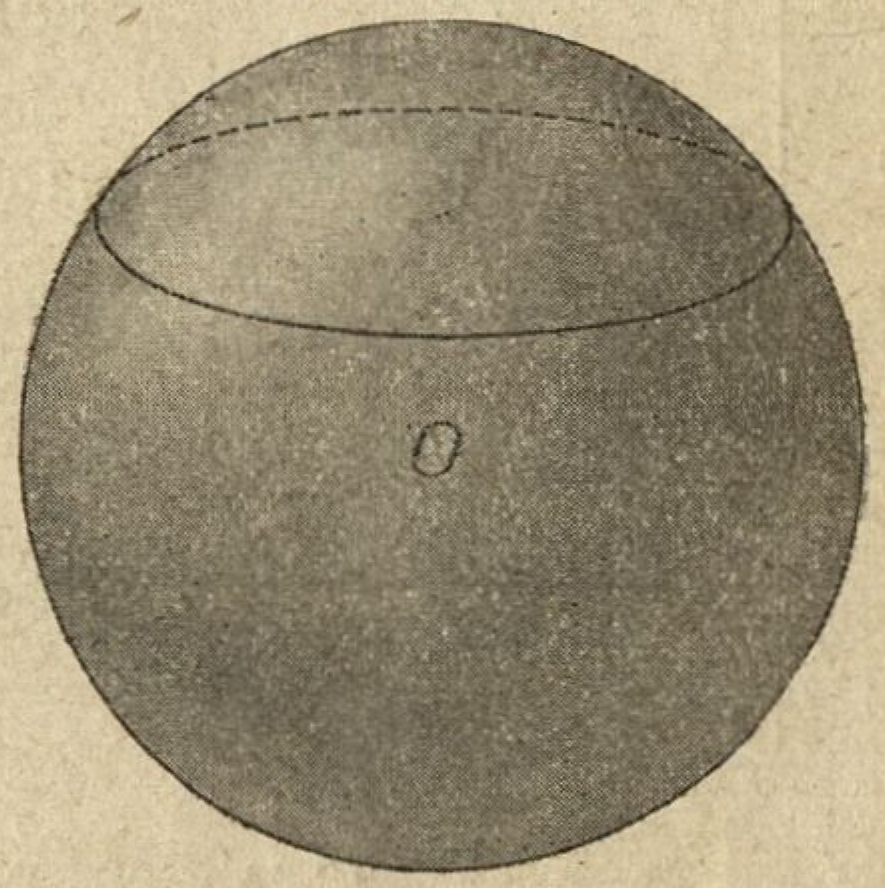
Kugel, Kreis, Anwendung auf die Winkel.

Die Kugel und der Kreis. **§ 24.**

Der in Fig. 22 dargestellte Körper ist eine Kugel. Beispiele sind eine Kegelkugel und annähernd eine Orange.

Die Kugel ist von einer einzigen krummen Fläche begrenzt, deren Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkt, dem *Mittelpunkte* oder *Zentrum*, gleich weit abstehen. Die Strecke zwischen einem Punkte der Oberfläche und dem Zentrum heißt *Halbmesser* oder *Radius*[1]); eine Strecke, welche zwei Punkte der Oberfläche einer Kugel verbindet und durch den Mittelpunkt geht, heißt *Durchmesser* (*Diameter*[2]). Alle Radien und daher auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

Fig. 22.



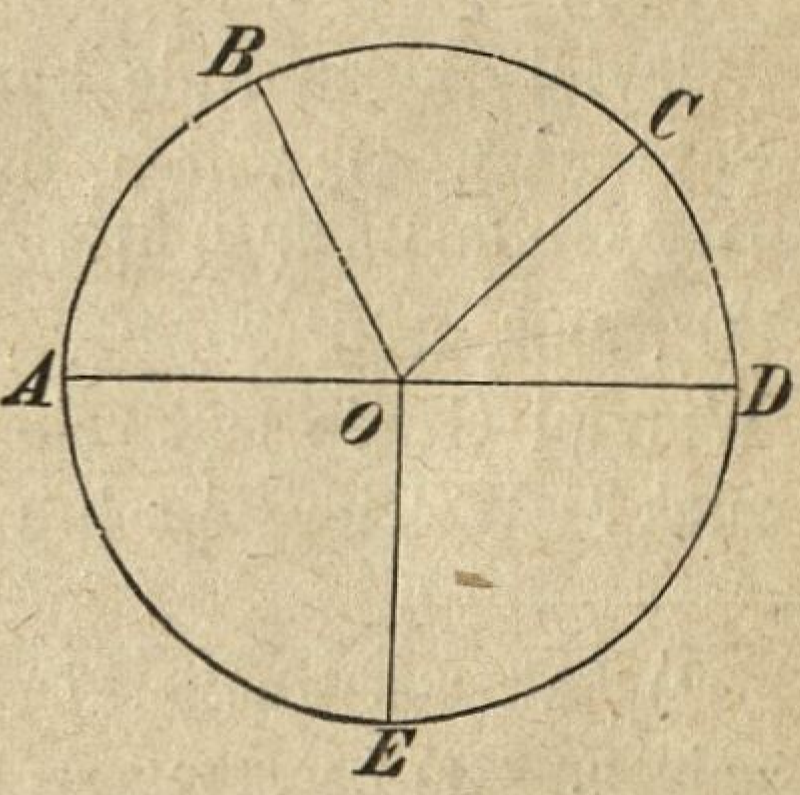
Vergleiche die Länge eines Durchmessers mit der eines Halbmessers!

Unterschied zwischen ebenen und krummen Flächen. Bei einer ebenen Fläche fällt die Verbindungsstrecke zweier beliebiger ihr angehöriger Punkte ganz in die Fläche, bei einer krummen Fläche ist dies nicht der Fall.

Eckige und runde Körper. Ein eckiger Körper ist nur von ebenen Flächen begrenzt, alle übrigen Körper heißen runde. Mithin sind der Würfel und der Quader eckige, die Kugel ist ein runder Körper.

Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so erhält man als Durchschnittsfigur der Kugelfläche mit dieser Ebene eine krumme Linie, welche Kreis genannt wird. (Modell.)

Fig. 23.



Alle Punkte des *Umfanges* (*Peripherie*[3]) eines Kreises haben von einem Punkte seiner Ebene, dem *Mittelpunkte* (*Zentrum*[4]), denselben Abstand.

a) Entstehung der Kreislinie.

Dreht sich eine Strecke *OA* (Fig. 23) um den

---

[1]) Lat. radius, Speiche eines Rades. — [2]) Griech. diametros (διάμετρος). — [3]) Griech. peripherein (περιφέρειν) herumtragen. — [4]) Griech. kentron (κέντρον), Spitze eines Zirkels.

Punkt O in der Ebene so lange, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt A eine Linie, deren Punkte von O gleichen Abstand haben, (welchen?) also einen Kreis. O ist der Mittelpunkt, AO ein Radius, AD ein Durchmesser. Die von der Kreislinie eingeschlossene Figur heißt Kreisfläche.

Konstruktion[1]) eines Kreises mit Hilfe des Zirkels[2]). Zwei Kreise mit gleichen Radien sind kongruent (§ 6).

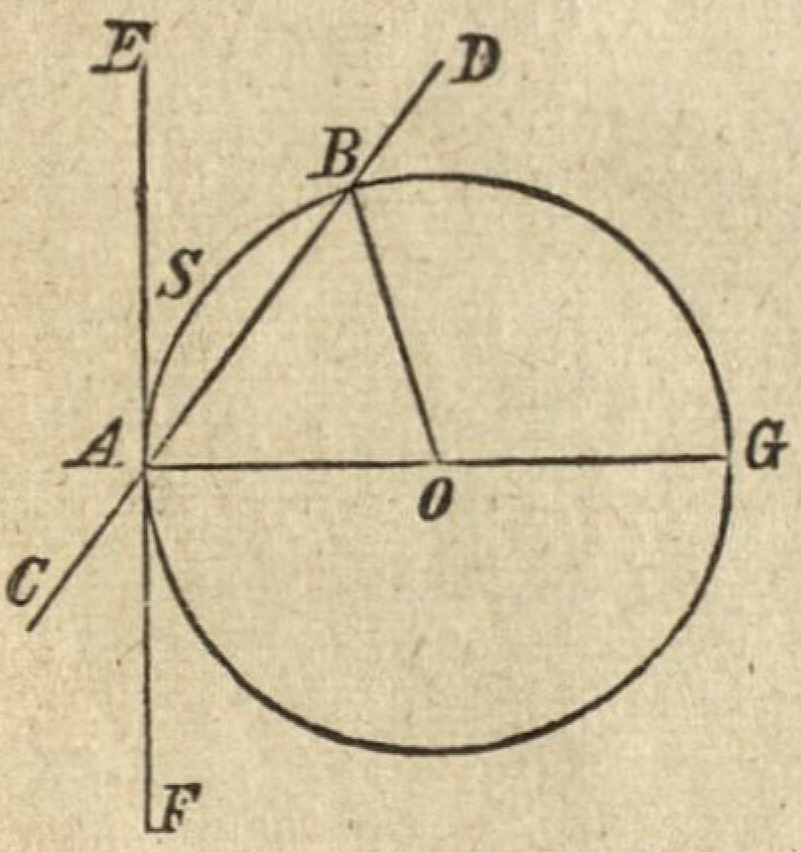
b) Punkt und Kreis.

Ein Punkt liegt auf, außerhalb oder innerhalb einer Kreislinie, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte (*Zentralabstand*) gleich dem Radius, größer oder kleiner als dieser ist.

c) Die Gerade und der Kreis.

Eine Gerade kann mit einer Kreislinie *zwei* Punkte oder nur *einen* Punkt oder gar *keinen* Punkt gemeinschaftlich haben.

Fig. 24.



Eine Strecke AB (Fig. 24), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine *Sehne*. Geht eine Sehne durch den Mittelpunkt, so ist sie ein Durchmesser.

Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinaus entsteht, heißt eine *Sekante*[3]). Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur *einen* Punkt A gemeinschaftlich hat und in allen andern Punkten ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine *Tangente*[4]) des Kreises.

d) Teile der Kreislinie.

Jeder Teil des Umfanges, wie z. B. AB (Fig. 24), wird ein *Kreisbogen* genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein *Halbkreis*, der vierte Teil ein *Quadrant*[5]), der sechste ein *Sextant*[6]), der achte ein *Oktant*[7]). Um die Größe eines Kreisbogens im Vergleiche zum ganzen Kreisumfange angeben zu können, teilt man diesen in 360 gleiche Teile und nennt einen solchen Teil einen *Bogengrad*[8]). Ein Bogengrad (°) wird in 60 Bogenminuten[9]) (′) und eine Bogenminute in 60 Bogensekunden[10]) (″) eingeteilt.

Aufgaben:

1. Wieviel Bogengrade kommen auf einen Halbkreis, wieviel auf den Quadranten, Sextanten, Oktanten, den dritten, fünften, zehnten Teil des Kreisumfanges?
2. Der wievielte Teil des Kreisumfanges ist ein Bogen von 10°, 20°, 30°, 36°, 40°, 60°, 90°, 120° ?
3. Wieviel Grade legt scheinbar die Sonne *a*) in 24 Stunden, *b*) in einer Stunde zurück? Welche Zeit braucht sie zu 1° ?

---

[1]) Lat. constructio, Zusammenfügung. — [2]) Lat. circulus, Kreis. — [3]) Lat. secare, schneiden. — [4]) Lat. tangere, berühren. — [5]) Lat. quadrans, der vierte Teil. — [6]) Lat. sextans, der sechste Teil. — [7]) Lat. octans, der achte Teil. — [8]) Lat. gradus, Schritt, Stufe. — [9]) Lat. minutus, verkleinert. — [10]) Lat. secundus, der folgende.

e) Teile der Kreisfläche.

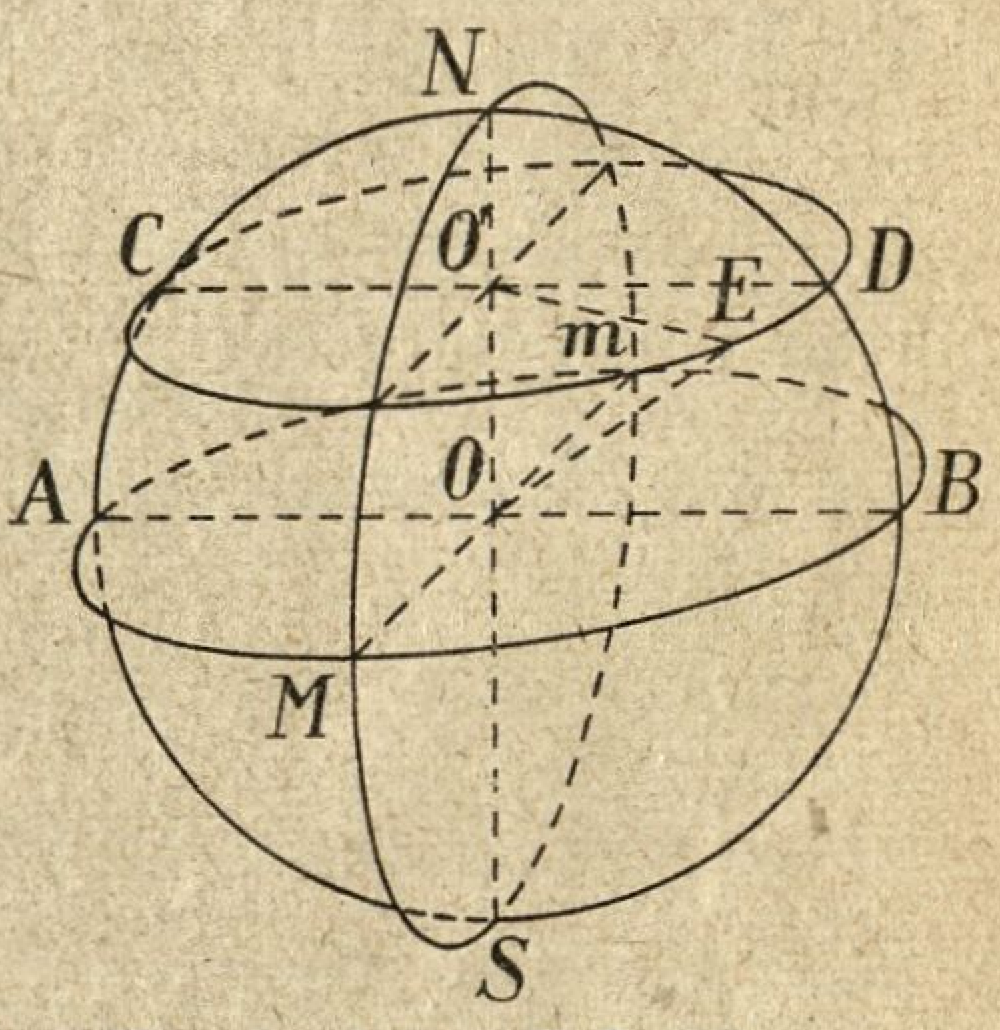
1. Der *Kreisabschnitt* oder das *Kreissegment*[1]) ist ein Teil der *Kreisfläche*, welcher von einer Sehne *AB* (Fig. 24) und dem durch diese abgeschnittenen Bogen begrenzt wird.

2. Der *Kreisausschnitt* oder *Kreissektor*[2]) (*AOB*, Fig. 24) ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem zwischen diesen liegenden Bogen begrenzt wird. Der Winkel am Mittelpunkte heißt *Zentriwinkel.* Schneiden die Halbmesser *AO* und *BO* (Fig. 24) nur *einen* Sektor heraus? Wieviel Bogen, Zentriwinkel, Kreisabschnitte und Kreisausschnitte gehören zu einer Sehne? Sind sie gleich? Können sie gleich sein? Wenn man von dem zu einer Sehne gehörigen Kreisbogen, Zentriwinkel, Kreisabschnitte oder Kreisausschnitte spricht, meint man immer den kleineren.

f) Entstehung der Kugel.

Man kann sich eine Kugel durch eine halbe Umdrehung eines Kreises *NASB* um den Durchmesser *NS* (Fig. 25) entstanden denken; der Durchmesser *NS* heißt die *Achse*, seine Endpunkte werden die *Pole* der Kugel genannt. In den einzelnen Lagen bildet die sich drehende Kreislinie die *Meridiane*[3]); die Kreislinien, z. B. *CD*, welche die Punkte der sich drehenden Kreislinie beschreiben, heißen *Parallelkreise.* Die Meridiane sind alle einander gleich, die Parallelkreise haben verschiedene Größe. Der größte Parallelkreis ist der *Äquator*[4]) *AB*, d. i. derjenige Kreis, welcher von dem Halbierungspunkte *A* des Halbkreises *NAS* beschrieben wird.

Fig. 25.



Der Äquator und jeder Meridian teilen die Kugel in zwei gleiche Teile, welche *Halbkugeln* oder *Hemisphären*[5]) heißen.

Diese Bezeichnungen werden namentlich von der Erde gebraucht, wenn sie als Kugel gedacht wird.

Der zwischen zwei Parallelkreisen liegende Teil der Oberfläche einer Kugel heißt eine *Kugelzone*[6]), der durch eine Ebene abgeschnittene Teil eine *Kugelmütze.* (In der Geographie ebenfalls eine Zone.)

Der Schüler vergleiche die Länge des Äquators der Erde mit der eines Meridianes unter Voraussetzung der Kugelgestalt!

Die geographische Meile ist $\frac{1}{15}$ der Länge eines Grades am Äquator, die Seemeile ist $\frac{1}{4}$ der geographischen Meile, also die Länge einer Bogenminute des Äquators. Die geographische Meile beträgt 7420 *m*, die Seemeile 1855 *m*.

Aufgabe:

Wie lange braucht ein Schiff bei einer Geschwindigkeit von 20 Seemeilen in der Stunde um den Atlantischen Ozean am Äquator zu durchfahren?

---

[1]) Lat. segmentum, Streifen. — [2]) Lat. sector, Zerschneider. — [3]) Lat. meridianus, mittägig. — [4]) Lat. aequare, gleichmachen. — [5]) Aus dem Griech. = Halbkugel. — [6]) Griech. zone (ζώνη), Gürtel.

§ 25. **Konstruktionsaufgaben.**

1. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand hat.

Beschreibt man aus dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstand als Halbmesser einen Kreis, so genügen alle Punkte dieser Kreislinie den Bedingungen der Aufgabe.

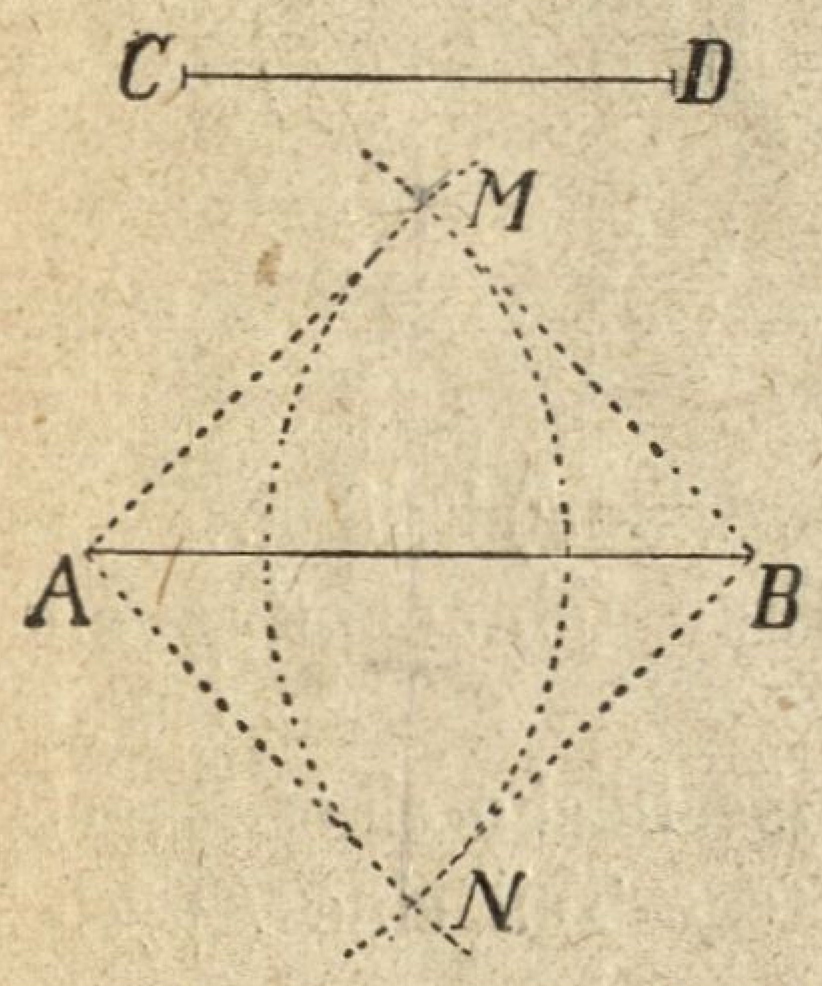
Eine Aufgabe, welche unendlich viele verschiedene Auflösungen zuläßt, heißt *unbestimmt* im Gegensatze zu einer *bestimmten*, welche entweder nur eine einzige Auflösung oder eine beschränkte, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen besitzt; nach der Anzahl der Auflösungen ist sie ein-, zwei- oder mehrdeutig. Die vorliegende Aufgabe ist demnach unbestimmt.

Eine Aufgabe heißt *überbestimmt*, wenn mehr Bedingungen gegeben sind, als zur Auflösung erforderlich sind.

Z. B. Von einem gegebenen Punkte A mit einem gegebenen Radius r einen Kreis zu beschreiben, der durch einen bestimmten Punkt B geht; die Aufgabe ist nur möglich, wenn $r = AB$ ist. Sonst ist sie unmöglich. Im allgemeinen sind überbestimmte Aufgaben unlösbar, weil die gegebenen Stücke die zur Auflösung erforderlichen Bedingungen meist nicht erfüllen.

2. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten einen vorgeschriebenen Abstand hat.

Fig. 26.



Es seien (Fig. 26) A und B die gegebenen Punkte, CD der gegebene Abstand. Die gesuchten Punkte müssen in den Durchschnittspunkten zweier Kreise liegen, welche von den Mittelpunkten A und B mit CD als Radius beschrieben werden. Da im allgemeinen die beiden Kreislinien einander in zwei Punkten M und N schneiden, so gibt es zwei verschiedene Punkte, welche der Aufgabe genügen.

Bei welcher Größe von CD erhält man *a*) einen, *b*) keinen Punkt? (Zeichnungen.)

Die Aufgabe kann also eindeutig oder zweideutig bestimmt, aber auch unmöglich sein.

3. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten verschiedene gegebene Abstände hat. Die Auflösung ist der in Aufgabe 2 analog.[1])

§ 26. **Messen der Winkel.**

1. Zur Messung der Winkel nimmt man einen bestimmten Winkel als *Einheit* an und untersucht, wie oft er in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes ist der 90. Teil eines rechten Winkels. Dieser wird ein Winkelgrad genannt. Der 60. Teil eines Winkelgrades heißt eine Winkelminute, der 60. Teil einer Winkelminute eine Winkelsekunde.

---

[1]) Griech. analogos (ἀνάλογος) entsprechend, übereinstimmend.

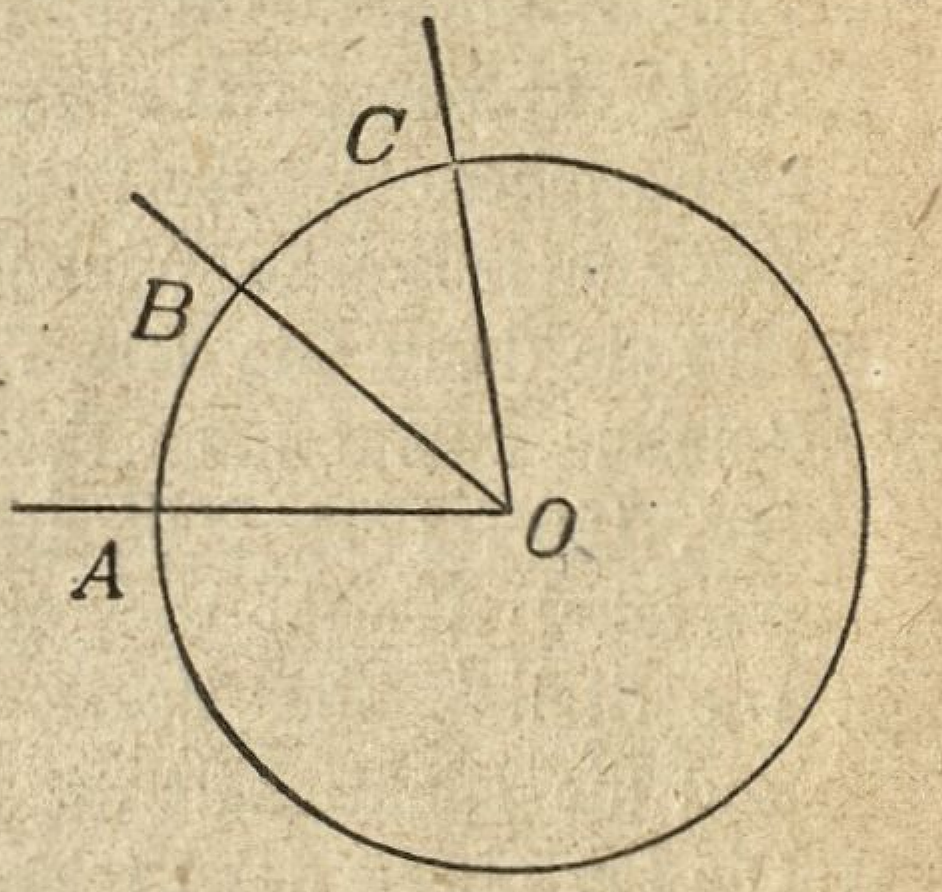
Die Grade, Minuten und Sekunden werden wie bei den Bogen durch °, ′, ″ bezeichnet.

Wieviel Grade hat *a*) ein gestreckter, *b*) ein voller Winkel?

Zwischen welchen Grenzen liegt ein hohler, ein spitzer, ein stumpfer, ein erhabener Winkel?

2. Bei der Drehung des Halbstrahles (Fig. 27) OA um O bis OB entsteht der Winkel AOB und zugleich beschreibt der Punkt A des Halbstrahles den Bogen AB; setzt man die Drehung so weit fort, daß Winkel BOC = Winkel AOB wird[1]), so ist auch, wie man sich, wenn die Zeichnung auf durchscheinendem Papier gemacht wird, durch Zusammenfalten desselben um OB überzeugen kann, Bogen $AB \doteq$ Bogen BC. Zu gleichen Winkeln bei O (Zentriwinkeln) gehören daher auch gleiche Bogen; zu jedem Winkelgrade, jeder Winkelminute und Winkelsekunde gehört je ein Bogengrad, eine Bogenminute, eine Bogensekunde.

Fig. 27.



Wegen dieser Übereinstimmung ist es möglich, einen Winkel durch den Bogen zu messen, zu welchem er als Zentriwinkel gehört, obwohl Bogen und Winkel ungleichartig sind.

Zum Messen und Auftragen der Winkel bedient man sich des *Winkelmessers* oder *Transporteurs*[2]) (Fig. 28). Dieser ist ein in 180 Grade eingeteilter Halbkreis aus Papier, Holz oder Metall, bei welchem die Kante 0...180 den Durchmesser und der Punkt M den Mittelpunkt vorstellt.

Fig. 28.

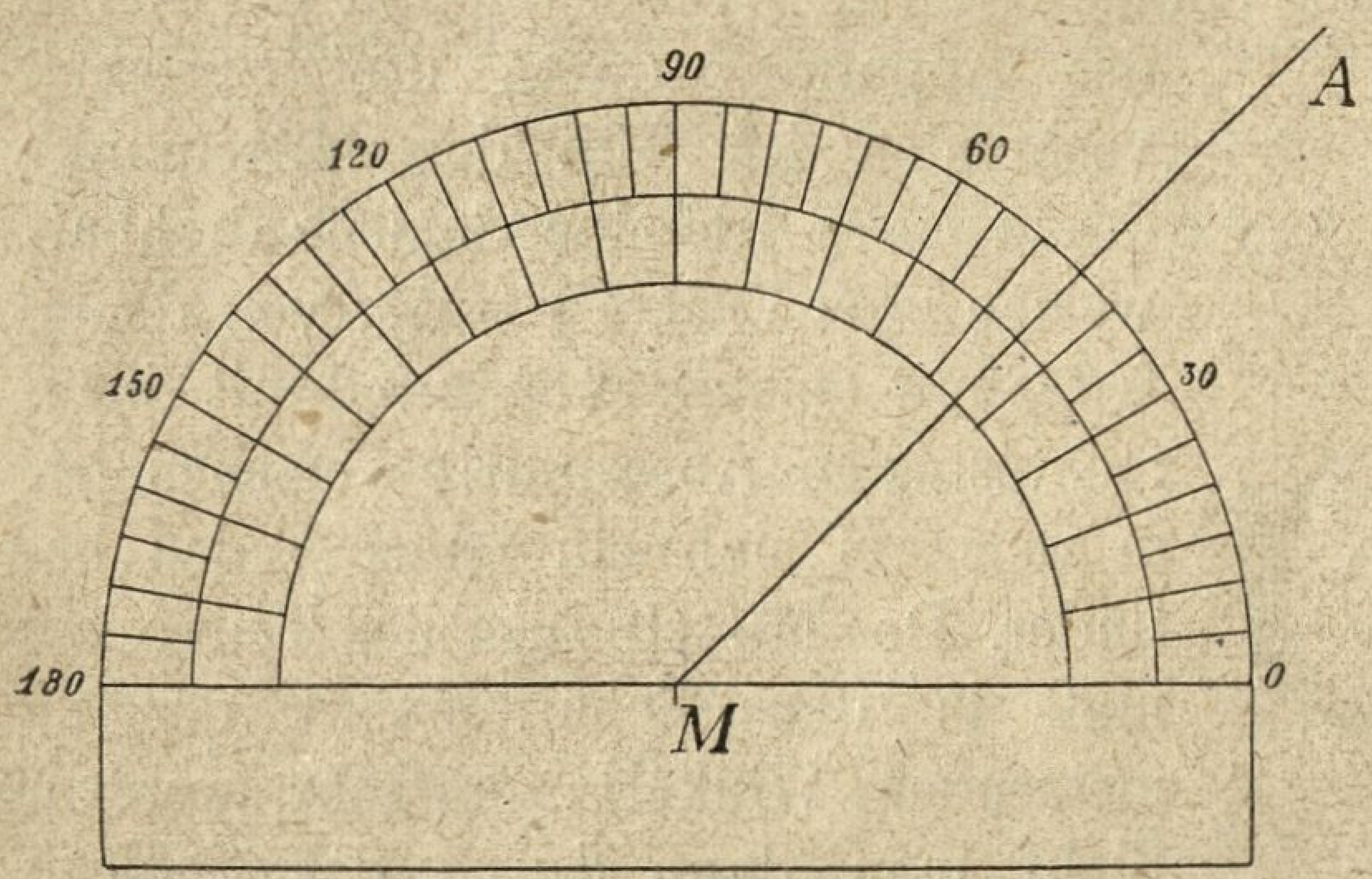
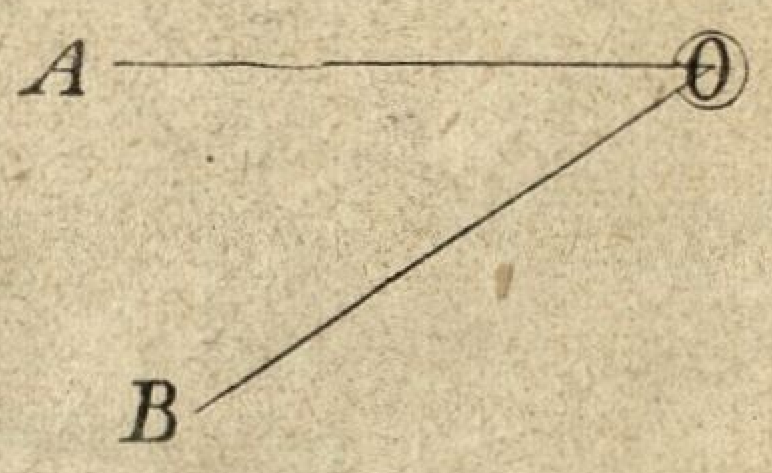


Fig. 29.



Wie groß sind die beiden Winkel, die in Fig. 28 durch MA und den Durchmesser des Transporteurs 0...180 gebildet werden?

Wieviel Winkel bilden in Fig. 29 die beiden Halbstrahlen OA und OB? Bestimme die Größe beider! Merke dir: *Unter dem Winkel zweier Halbstrahlen versteht man den kleineren, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist.*

---

[1]) Die gleichen Winkel AOB und BOC in Fig. 27 kann man dadurch erhalten, daß man einen Winkel aus Papier ausschneidet und mit Hilfe desselben die Winkel AOB und BOC so zeichnet, wie es die Figur verlangt. — [2]) Franz. transporteur, Übertrager.

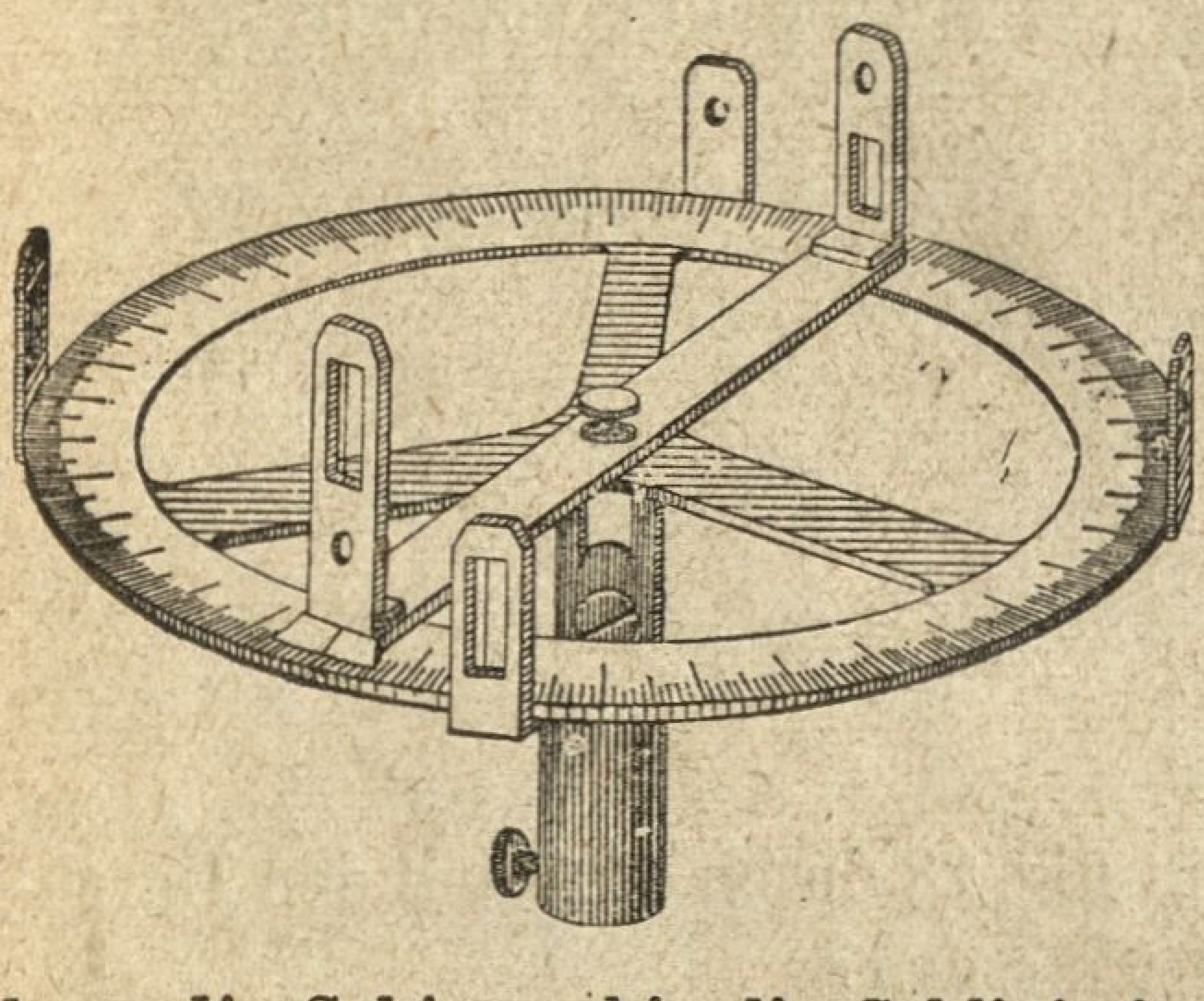
Aufgaben:

1. Wieviel Grade hat der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 3, 5, 6, 8, 10 Stunden beschreibt?
2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1, 4, 15, 34, 48 Zeitminuten beschreibt?
3. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 4, 7, 9, 11 Uhr bilden?
4. In welcher Zeit beschreibt *a*) der Stundenzeiger, *b*) der Minutenzeiger einen Winkel von 45°, 60°?
5. Eine Windfahne dreht sich im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers *a*) von N nach NNO, *b*) von ONO nach SSO, *c*) von SSW nach NW; wie groß ist der von ihr beschriebene Winkel?
6. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße und miß sie dann mit dem Transporteur!
7. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße einen Winkel von 90°, 45°, 60°, 30°, 80°, 50°, 120°, 175°, 200°, 270°, 285°, 300° und prüfe die Zeichnung mit dem Transporteur! Welche von diesen Winkeln sind *a*) spitz, *b*) stumpf, *c*) erhaben?
8. Die Stellung der Zeiger einer Uhr um 5 Uhr nach dem Augenmaße zu zeichnen und die Richtigkeit der Zeichnung mit dem Transporteur zu prüfen.
9. Die Peripherie des Kreises des Schiffskompasses ist in 32 gleiche Teile geteilt, welche Striche genannt werden. (Kompaßrose). Wieviel Grade kommen auf einen Strich? Um wieviel Striche ändert sich der Kurs des Schiffes, wenn die Fahrtrichtung von N nach NNO geändert wird?

Messung der Winkel im Freien.

Zur Messung der Winkel im Freien kann der in Fig. 30 abgebildete Apparat[1]) verwendet werden. Er besteht aus einem geteilten Kreise, der mit der Achse des Apparates durch drei Speichen verbunden ist. Um den Mittelpunkt des Kreises ist eine Schiene drehbar, welche zwei Visiere[2]) trägt, von denen jedes mit einem Sehloch und mit einem rechteckigen Ausschnitte versehen ist, in welchem sich ein feiner Faden befindet. Der Mittelpunkt des Teilkreises muß in den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels gebracht werden. Sieht man dann durch das Sehloch gegen den Faden in der Richtung des einen Schenkels des Winkels, dreht dann die Schiene, bis die Sehlinie in die Lage des zweiten Schenkels kommt, so kann man den Winkel mit Hilfe einer Marke, die an der drehbaren Schiene angebracht ist, an dem Teilkreise ablesen.

Fig. 30.



Je nachdem der Teilkreis in eine horizontale oder vertikale Ebene gebracht wird, kann man Horizontal- oder Vertikalwinkel mit dem Apparate messen.

---

[1]) Von Ohmann. D.-R.-P. — [2]) Lat. videre, sehen.

Aufgaben:

1. Stelle dich gegenüber einem Hause auf, schätze den Horizontalwinkel, welchen die Sehlinien gegen die Kanten des Hauses einschließen, und prüfe die Schätzung mit dem Winkelapparat! Ändere den Abstand von dem Hause mehrmals und verfahre jedesmal in gleicher Weise! Wie ändert sich der Winkel bei Annäherung an das Haus? Suche einen Standpunkt auf, für welchen der genannte Winkel 90° beträgt!
2. Verfahre in ähnlicher Weise mit dem Vertikalwinkel, den die Visierlinien nach der untersten und obersten horizontalen Kante eines Hauses miteinander bilden!
3. Schätze in verschiedenen Abständen die Größe des Winkels, den die Sehlinien nach den Rändern einer Bogenlampe miteinander bilden! (Als Anhaltspunkt diene die Angabe, daß uns der Mond und die Sonne im Mittel unter einem Winkel von 30′ erscheinen.)

Komplementäre[1]) und supplementäre[1]) Winkel. **§ 28.**

Beträgt die Summe zweier Winkel 90°, so heißen sie komplementäre Winkel; jeder der beiden Winkel wird das Komplement des anderen genannt.

Beträgt die Summe zweier Winkel 180°, so heißen sie supplementäre Winkel; jeder wird das Supplement des anderen genannt.

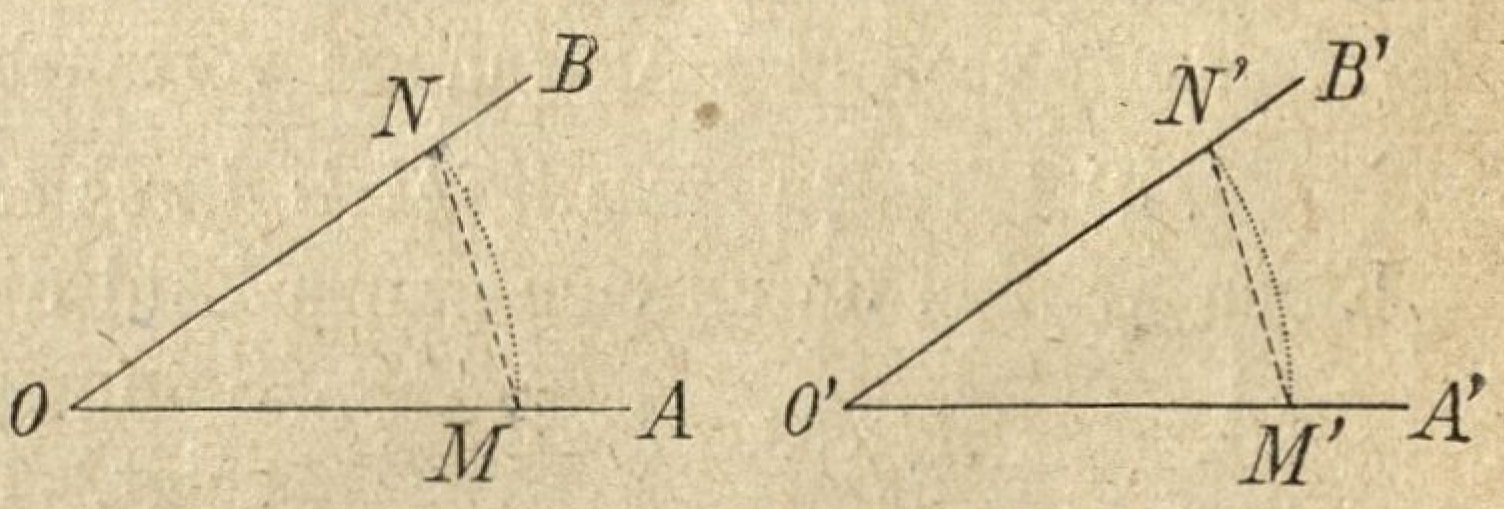
Aufgaben:

1. Wie groß ist das Komplement eines Winkels von *a*) 35°, *b*) 48° 12′, *c*) 75° 8′ 42″?
2. Wie groß ist das Supplement eines Winkels von *a*) 55°, *b*) 96° 20′, *c*) 137° 21′ 28″?
3. Wenn zwei Winkel gleich sind, welche Eigenschaften haben *a*) die komplementären, *b*) die supplementären Winkel?

Übertragen eines Winkels und eines Kreisbogens. **§ 29.**

Macht man die Fig. 27 mit den Sehnen AB und BC auf durchscheinendem Papier und faltet es nach der Linie BO zusammen, so sieht man, daß die Sehnen AB und BC einander decken. Mithin gehören in demselben Kreise zu gleichen Zentriwinkeln und gleichen Bogen auch gleiche Sehnen. Umgekehrt gehören auch zu gleichen Sehnen in demselben Kreise gleiche Zentriwinkel und gleiche Bogen. Dasselbe gilt auch von den Sehnen und Zentriwinkeln in gleichen Kreisen. Diesen letzteren Satz benutzt man zum Übertragen eines Winkels und eines Kreisbogens.

Fig. 31.



Es sei der Winkel AOB (Fig. 31) an den Schenkel $O'A'$ zu übertragen. Man beschreibe aus O und O' mit dem Radius OM Kreisbogen, mache Sehne $M'N'$ = = Sehne MN und ziehe durch N' den Halbstrahl $O'B'$. Weshalb ist Winkel $A'O'B'$ = Winkel AOB?

---

[1]) Lat. complementum und supplementum: Ergänzung.

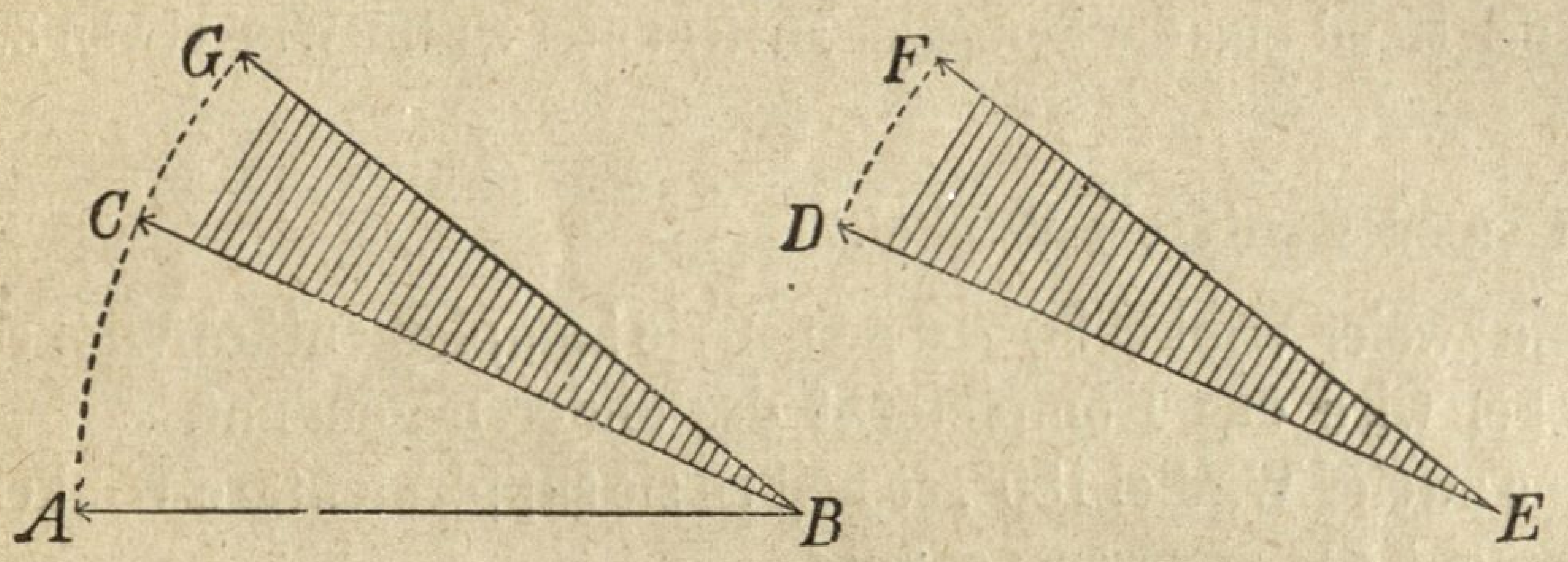
Durch Übertragen der zu einem Kreisbogen gehörigen Sehne kann auch ein diesem Bogen gleicher in demselben oder in einem gleichen Kreise ermittelt werden.

Nach dem Augenmaße auszuführen und sodann mit dem Zirkel zu prüfen.

§ 30. Zeichnendes Rechnen mit Winkeln und Kreisbogen.

1. *Addition der Winkel.* Zwei Winkel ABC und DEF (Fig. 32) werden addiert, indem man sie so *nebeneinander* legt, daß sie den Scheitel und ein Paar Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf die entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen fällt. In Fig. 32 ist $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF$.

Fig. 32.



Die Addition ist auch nach dem Augenmaße auszuführen und dann mit dem Zirkel zu prüfen.

2. *Subtraktion der Winkel.* Zwei Winkel ABG und DEF (Fig. 32) werden subtrahiert, indem man den kleineren so *auf* den größeren legt, daß sie den Scheitel und ein Paar Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf dieselbe Seite des gemeinschaftlichen fällt. In Fig. 32 ist $\sphericalangle ABC = ?$

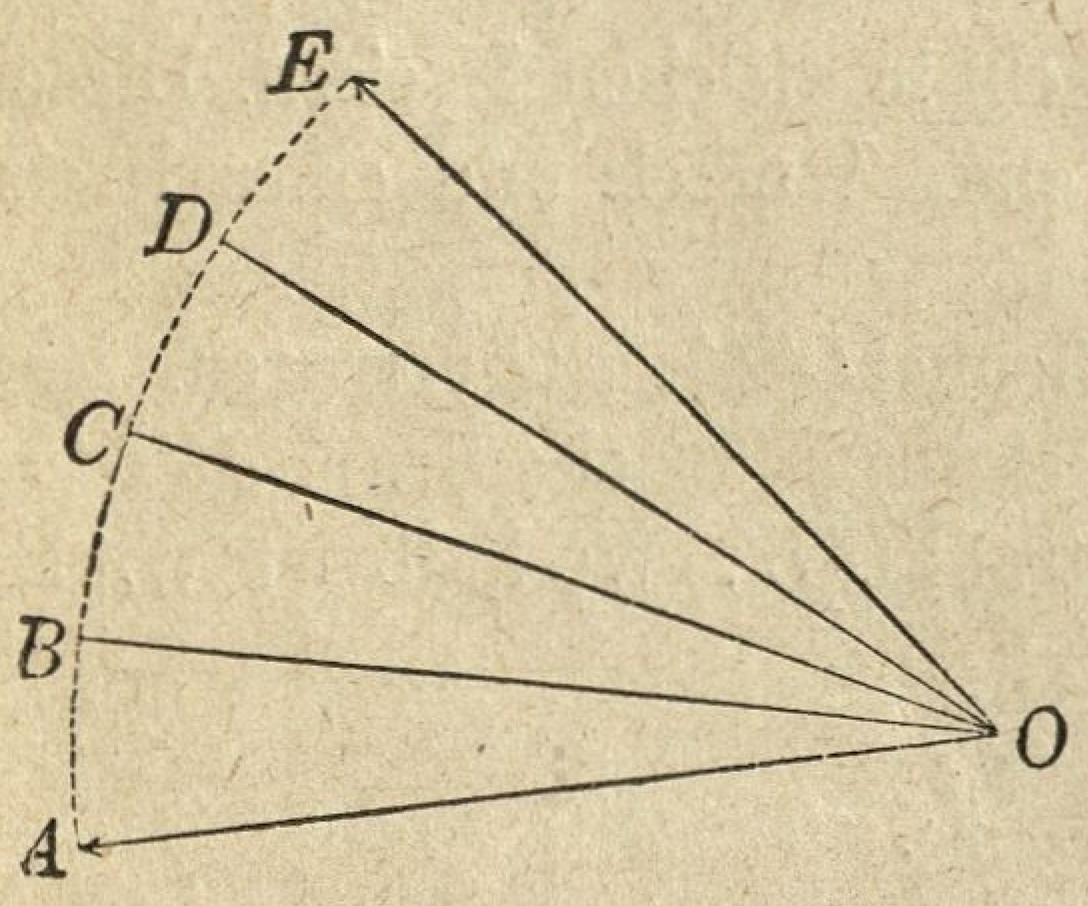
Ebenfalls auch nach dem Augenmaße auszuführen.

3. *Multiplikation eines Winkels mit einer ganzen Zahl.* (Vervielfachen eines Winkels.) Ein Winkel AOB (Fig. 33) wird mit einer ganzen Zahl multipliziert (vervielfacht), indem man ihn in der oben angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 33 ist $\sphericalangle AOE = \sphericalangle AOB \times 4$.

Auch nach dem Augenmaße vorzunehmen.

4. *a) Division eines Winkels durch eine ganze Zahl.* (Teilung eines Winkels.) Einen Winkel durch eine ganze Zahl dividieren heißt, ihn in so viele gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist also ein Winkel. Zu diesem Zwecke beschreibe man aus dem Scheitel des zu teilenden Winkels mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher beide Schenkel durchschneidet, und teile den zwischen den Schenkeln liegenden Teil des Kreisbogens zunächst nach dem Augenmaße in so viele gleiche Teile, als die ganze Zahl anzeigt. (Prüfen mit dem Zirkel!) Verbindet man jeden Teilungspunkt mit dem

Fig. 33.



Scheitel des Winkels, so erscheint dieser als Summe so vieler gleicher Winkel, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 33 ist $\frac{\sphericalangle AOE}{4} = ?$

Der Schüler nehme auch mit Hilfe des Transporteurs die Teilung eines Winkels vor!

b) Division eines Winkels durch einen Winkel. (Messung.) Dadurch wird untersucht, wie oft ein Winkel in einem anderen enthalten ist. Der Quotient ist also eine Zahl. Z. B. (Fig. 33) $\sphericalangle AOE : \sphericalangle AOB = ?$

Das zeichnende Rechnen mit Kreisbogen mit gleichen Radien wird in gleicher Weise wie das mit Winkeln ausgeführt. Es ist Fig. 32: $Bog.\ AG = Bog.\ AC + Bog.\ DF$, ferner $Bog.\ AC = Bog.\ AG - Bog.\ DF$, Fig. 33: $Bog.\ AE = Bog.\ AB \times 4$, ferner $Bog.\ AB = \frac{Bog.\ AE}{4}$.

Aufgaben: **§ 31.**

1. Was für ein Winkel ist die Summe *a*) eines rechten und eines spitzen, *b*) eines rechten und eines stumpfen, *c*) eines gestreckten und eines hohlen Winkels?
2. Wie groß ist die Summe aller Winkel, die in einer Ebene um einen gemeinschaftlichen Scheitel liegen?
3. Wie groß ist die Differenz *a*) eines gestreckten und eines rechten, *b*) eines vollen und eines gestreckten, *c*) eines vollen und eines rechten Winkels?
4. Was für ein Winkel ist die Differenz *a*) eines rechten und eines spitzen, *b*) eines stumpfen und eines rechten, *c*) eines gestreckten und eines stumpfen, *d*) eines vollen und eines erhabenen, *e*) eines vollen und eines stumpfen, *f*) eines vollen und eines spitzen Winkels?
5. Was für ein Winkel ist das Doppelte *a*) eines rechten, *b*) eines stumpfen, *c*) eines gestreckten Winkels?
6. Was für ein Winkel ist die Hälfte *a*) eines rechten, *b*) eines stumpfen, *c*) eines gestreckten, *d*) eines erhabenen, *e*) eines vollen Winkels?
7. Die Summe folgender Winkel zu suchen:
   a) 52°, 39°, 124° und 76°;
   b) 28° 24′ 30″, 33° 45′ 56″, 74° 28′ 53″, 22° 16′ 37″.
8. Die Differenz folgender Winkel zu suchen:
   a) 128°, 73°;
   b) 216° 34′ 28″, 78° 24′ 17″;
   c) 73° 16′ 47″, 58° 23′ 56″;
   d) 23°, 14° 25′ 38″.
9. Den Winkel 43° 38′ 35″ *a*) mit 3 zu multiplizieren, *b*) in 5 gleiche Teile zu teilen.
10. Untersuche, wie oft ein Winkel von *a*) 8°, *b*) 15° 28′, *c*) 12° 35′ 49″ bezüglich in einem Winkel von *a*) 96°, *b*) 108° 16′, *c*) 100° 46′ 32″ enthalten ist!
11. Einen Winkel von *a*) 60°, *b*) 120° zu zeichnen, ihn nach dem Augenmaße in 2, in 3 gleiche Teile zu teilen und das Resultat mit dem Transporteur zu prüfen.
12. Zwei gegebene Kreisbogen desselben Kreises oder gleicher Kreise *a*) zu addieren, *b*) zu subtrahieren.
13. Einen Kreisbogen zu verdreifachen.
14. Einen Kreis in 6 gleiche Teile zu teilen. Man trage den zu einem Teile gehörigen

Zentriwinkel mit Hilfe des Transporteurs auf und bestimme die anderen Teile durch Übertragen der zum ersten gehörigen Sehne!

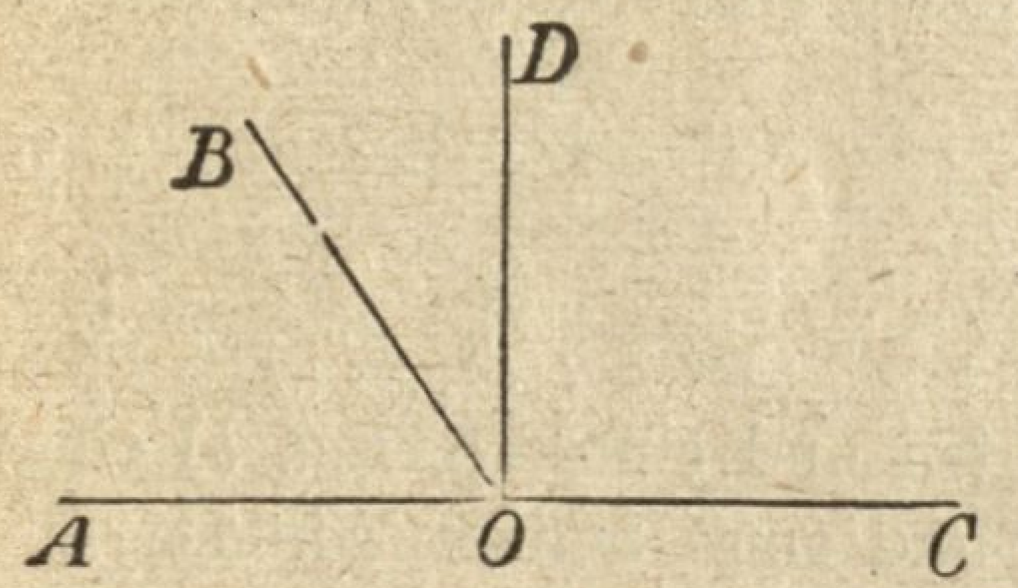
Der Schüler vergleiche die zu einem Sechstel der Kreisperipherie gehörige Sehne mit dem Radius!

15. Wie kann man die Peripherie eines Kreises in drei gleiche Teile teilen?
16. Die Peripherie eines Kreises in 10 gleiche Teile zu teilen. (Aufgabe 14.)

§ 32. Neben- und Scheitelwinkel.

a) *Nebenwinkel* (Fig. 34). Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein *Nebenwinkel.* Welcher Winkel ist zu AOB der Nebenwinkel? Welcher zu BOC? Welcher zu AOD? Nebenwinkel sind also zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren zwei andere Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen in einer Geraden liegen.

Fig. 34.



Suche in Fig. 34 einen Winkel, welcher der Summe zweier Nebenwinkel gleich ist, und prüfe die Richtigkeit des Satzes:

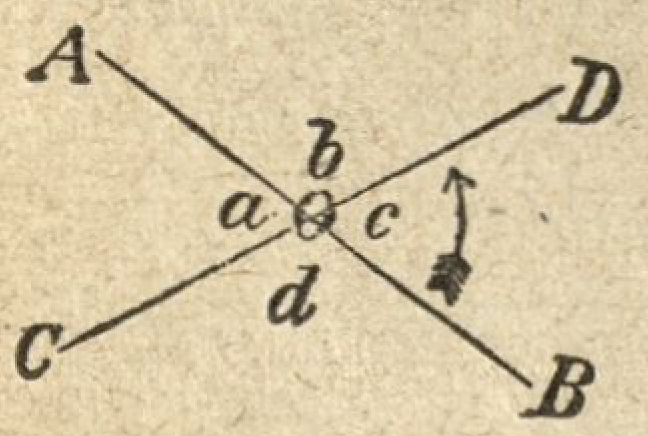
Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten oder 180°.

Zwei Nebenwinkel sind daher so voneinander abhängig, daß durch die Größe des einen die des anderen bestimmt ist. Wenn der erste ein spitzer, rechter, stumpfer ist, was gilt von dem zweiten? Wie groß ist jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln? Wenn der eine von zwei Nebenwinkeln zu- oder abnimmt, was geschieht mit dem anderen?

Kann zu jedem Winkel ein Nebenwinkel konstruiert werden?

b) *Scheitelwinkel* (Fig. 35). Verlängert man beide Schenkel des Winkels BOD über den Scheitel hinaus, so entsteht sein *Scheitelwinkel.* Nenne zu jedem der Winkel in Fig. 35 den Scheitelwinkel! Wieviel Nebenwinkel hat a und wieviel Scheitelwinkel? Scheitelwinkel entstehen durch dieselbe Drehung; denn dreht man (Fig. 35) AB um O im Sinne des Pfeiles bis in die Lage CD, so beschreibt AO den Winkel a, BO den Winkel c; daher ist $a = c$. (Modell!)

Fig. 35.



Zwei Scheitelwinkel sind daher einander gleich.

Kann zu jedem Winkel ein Scheitelwinkel konstruiert werden?

Aufgaben:

1. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von *a*) 65°, *b*) 28° 40′, *c*) 115° 48′, *d*) 73° 19′ 52″?
2. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so groß als der andere. Wie groß ist jeder?
3. Wie groß ist der Winkel, der von den Halbierungslinien zweier Nebenwinkel gebildet wird?

4. Wenn in Fig. 35 der Winkel a 69° 17′ 26″ beträgt, wie groß ist jeder der Winkel b, c, d?
5. *Die Winkel der Fig. 35 sind der Größe nach voneinander abhängig. Wieviel müssen gegeben sein, damit die Größe der übrigen schon bestimmt ist?*

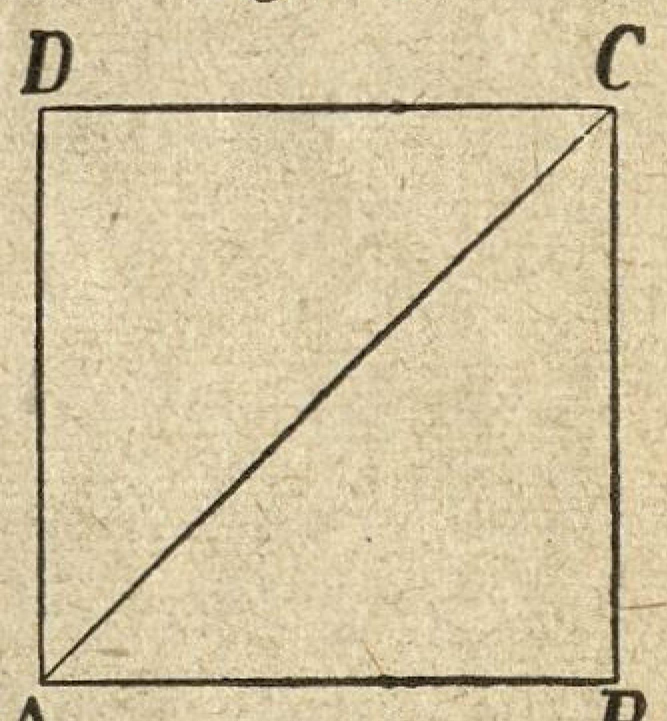
Vierter Abschnitt.

Das rechtwinklige, gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

Erklärungen. § 33.

1. Zieht man in dem Quadrate $ABCD$ (Fig. 36) die Diagonale AC, so zerfällt es in zwei geradlinig begrenzte Figuren, von welchen jede drei Eckpunkte hat. Nenne diese Figuren! Eine solche Figur heißt ein *Dreieck*. Die von den Eckpunkten begrenzten Strecken heißen die *Seiten*, ihre Summe wird der *Umfang* des Dreieckes genannt.

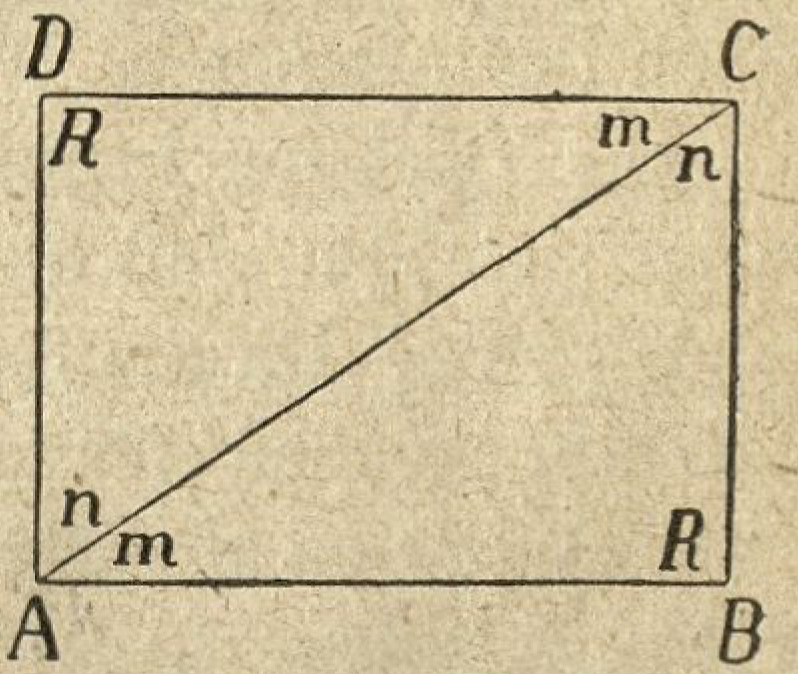
Fig. 36.



Das Dreieck ABC (Fig. 36) hat zwei gleiche Seiten, AB und BC; ein solches Dreieck heißt ein *gleichschenkliges*; die gleichen Seiten heißen die *Schenkel*, die dritte Seite wird die *Grundlinie* (*Basis*[1]), der gegenüberliegende Eckpunkt der *Scheitel* des Dreieckes genannt. Es hat ferner bei B einen rechten Winkel, es heißt daher ein *rechtwinkliges* Dreieck. Mit Rücksicht auf Seiten und Winkel ist es ein *rechtwinklig gleichschenkliges* Dreieck.

Zieht man in dem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 37) die Diagonale AC, so zerfällt es in zwei rechtwinklige Dreiecke; in jedem sind alle Seiten ungleich, daher sind sie *rechtwinklig ungleichseitige* Dreiecke.

Fig. 37.



2. Gegeben ist die Strecke $AB = 3$ *cm*; einen Punkt zu bestimmen, welcher von A und B den Abstand 4 *cm* hat.

Auflösung nach § 25, 2. Man findet zwei Punkte C und C' (Fig. 38). Verbindet man C mit A und B, so erhält man ein Dreieck ABC, welches zwei gleiche Seiten AC und BC hat. Es hat nur schiefe Winkel, es ist daher ein *schiefwinklig gleichschenkliges* Dreieck.

3. Gegeben ist die Strecke $AB = 3$ *cm*; einen Punkt zu suchen, welcher von jedem Eckpunkte dieser Strecke den Abstand 3 *cm* hat.

Auch diese Aufgabe wird nach § 25, 2 aufgelöst. Man findet zwei Punkte C und C' (Fig. 39). Verbindet man C mit A und B, so erhält man ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind. Es heißt ein *gleichseitiges* Dreieck.

Jedes Dreieck hat drei Winkel. Wieviel anliegende und gegenüberliegende

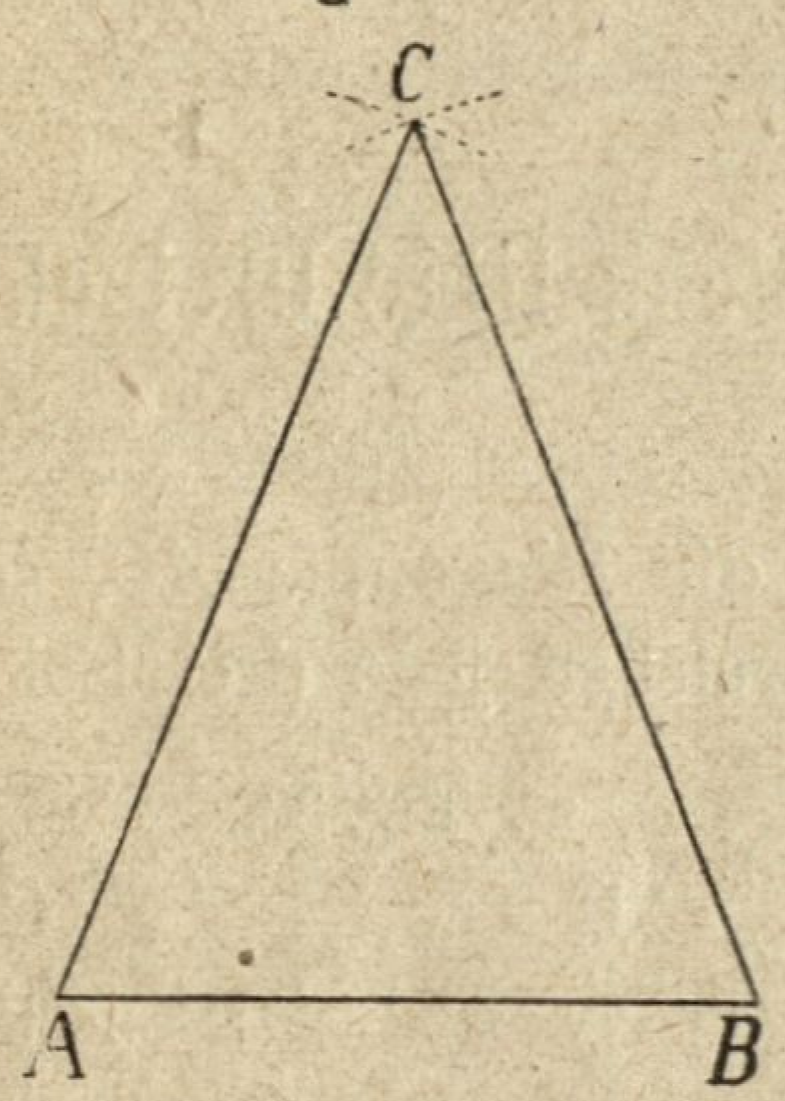
---

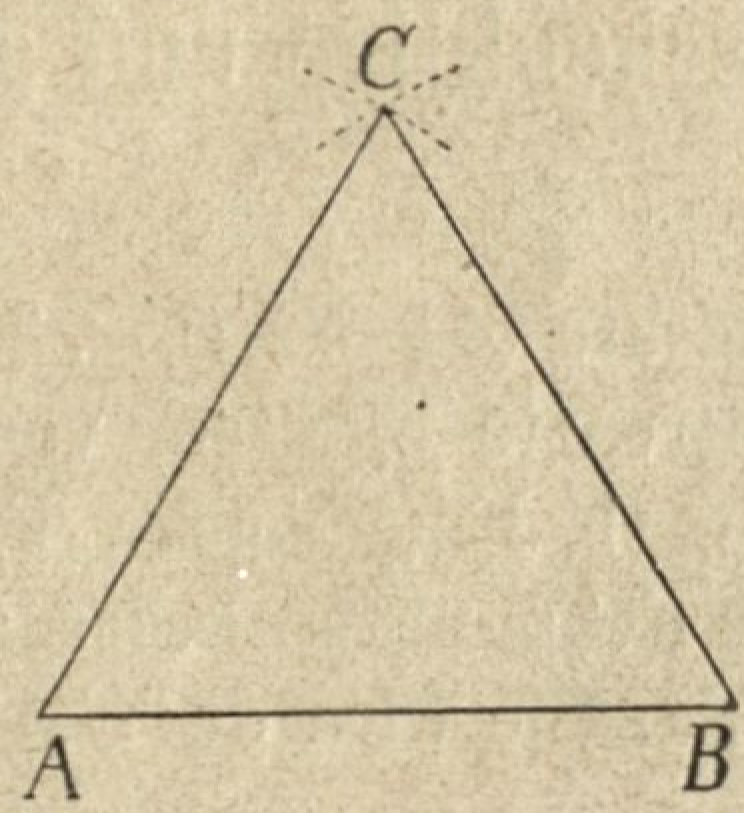
[1]) Griech. basis (βάσις).

Winkel hat jede Seite? Von wieviel Seiten wird jeder Winkel eingeschlossen und wie liegt die dritte Seite?

Nenne die drei Seiten und die drei Winkel des Dreieckes ABC (Fig. 37)!

Fig. 38.





Nenne zu jeder Seite die anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel! Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von welchen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt!

In jedem rechtwinkligen Dreiecke werden die den **rechten Winkel einschließenden** Seiten *Katheten*[1]), die diesem Winkel gegenüberliegende Seite wird *Hypotenuse*[2]) genannt. Nenne die beiden Katheten und die Hypotenuse des Dreieckes ABC (Fig. 36 und Fig. 37)!

Unter einer *Höhe* eines Dreieckes versteht man die Senkrechte von einem Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite. Diese wird die *Grundlinie* des Dreieckes genannt.

§ 34. Die Winkel des rechtwinkligen, gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes.

Schneidet man das Rechteck $ABCD$ (Fig. 37) aus und zerschneidet es nach der Diagonale AC, so läßt sich das Dreieck ABC mit dem Dreiecke CDA so zur Deckung bringen, daß BC mit DA, AB mit CD zusammenfällt. Es zeigt sich also, daß die mit m, ebenso die mit n bezeichneten Winkel einander gleich sind. Da die Summe dieser vier Winkel 180° ist, so ist die Summe der AC anliegenden Winkel $m + n = 90°$.

a) *Die an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes liegenden Winkel betragen zusammen 90°. Daher ist die Summe aller Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes 180°.*

Zieht man in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 40) und in dem gleichseitigen Dreiecke ABC (Fig. 41) die Höhe auf AB, so zerfällt jedes in zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD. Die Summe der Winkel dieser zwei Dreiecke beträgt 360°; von ihren 6 Winkeln gehören aber die beiden bei D liegenden rechten Winkel den ursprünglichen Dreiecken ABC nicht an; die Winkelsumme eines jeden beträgt daher 180°.

---

[1]) Griech. kathetos (κάθετος) hinabgelassen (senkrechte Linie).

[2]) Griech. hypoteino (ὑποτείνω) darunter spannen, nämlich unter den rechten Winkel.

b) Die Summe der Winkel eines gleichschenkligen und eines gleichseitigen Dreieckes ist 180°.

Schneidet man das Dreieck Fig. 40 aus und faltet es nach der Höhe CD, so deckt das Dreieck BCD das Dreieck ACD, der Winkel B ist daher dem Winkel A gleich. Es ergibt sich der Satz:

c) Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

Fig. 40.

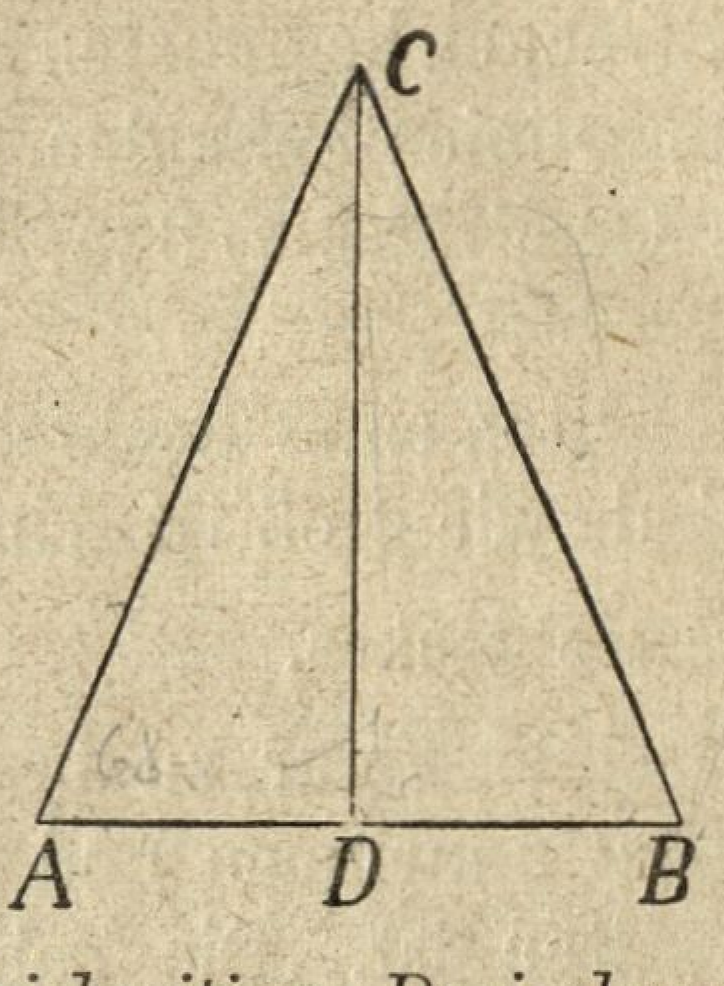
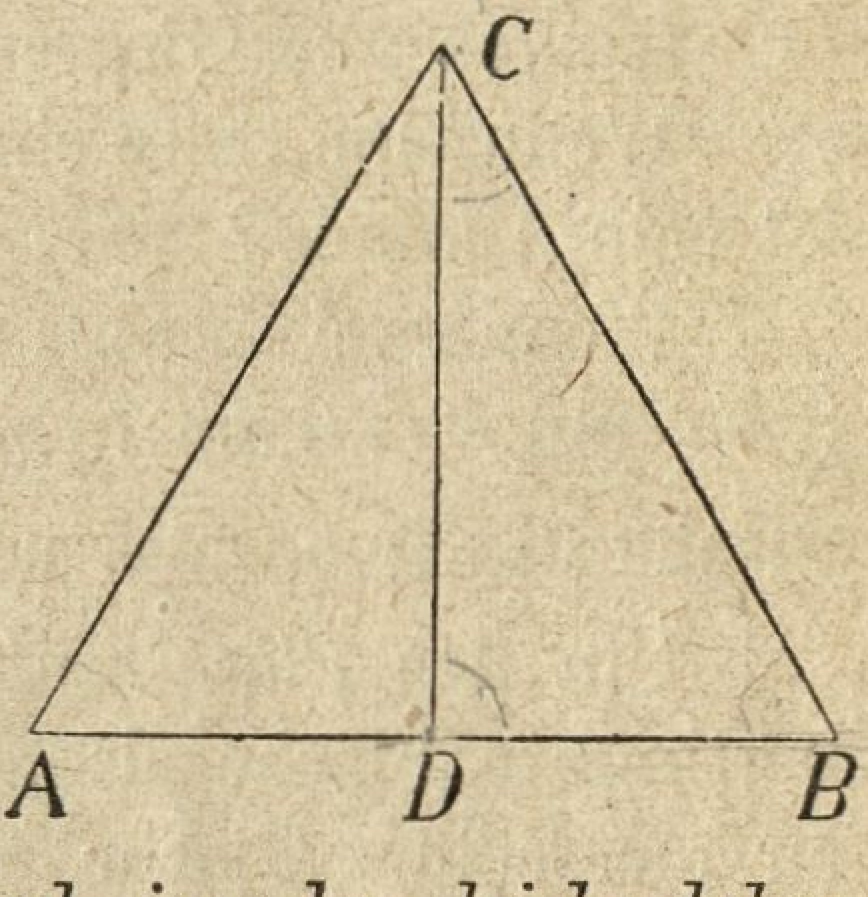


Fig. 41.



Da ein gleichseitiges Dreieck in bezug auf jede Seite als Grundlinie gleichschenklig ist, so gilt der Satz:

d) Die drei Winkel eines gleichseitigen Dreieckes sind einander gleich; daher ist jeder 60°.

Aufgaben: § 35.

1. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes ist 4 *m* 9 *dm* 8 *cm*, die Grundlinie 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*; den Schenkel zu berechnen.
2. Der Umfang eines gleichseitigen Dreieckes ist 13 *m* 8 *dm*; wie groß ist eine Seite?
3. Ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist 68° 40′; wie groß sind die beiden anderen Winkel?
4. Ein Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist *a*) 70° 30′, *b*) 114° 40′; die Winkel an der Grundlinie zu berechnen.
5. Welche Winkel der Größe nach können die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes nur sein? Was für Winkel können am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes vorkommen?
6. Wie groß ist jeder der Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieckes?
7. Ein Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist 58° 36′; wie groß ist der andere Winkel an dieser Seite?
8. Wenn ein Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes um 15° *a*) zunimmt, *b*) abnimmt, wie ändert sich der andere der Hypotenuse anliegende Winkel?
9. Wenn der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes um 10° *a*) zunimmt, *b*) abnimmt, wie ändern sich die Winkel an der Grundlinie?
10. Einen Winkel von *a*) 60°, *b*) 120° zu konstruieren:
    a) durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes,
    b) durch Konstruktion eines Nebenwinkels von 60°.
11. Die drei Höhen *a*) eines rechtwinkligen, *b*) eines gleichschenkligen, *c*) eines gleichseitigen Dreieckes zu zeichnen.

Fünfter Abschnitt.

Ausmessung des Quadrates und Rechteckes, des Würfels und des Quaders.

§ 36. Der Umfang einer von Strecken begrenzten Figur.

Der *Umfang* einer von Strecken begrenzten Figur wird durch die Summierung der Längen aller Begrenzungslinien gefunden.

Wenn eine Seite eines Quadrates *a*) 3 *m*, *b*) 4 *dm* 7 *cm* 9 *mm* ist, wie groß ist sein Umfang?

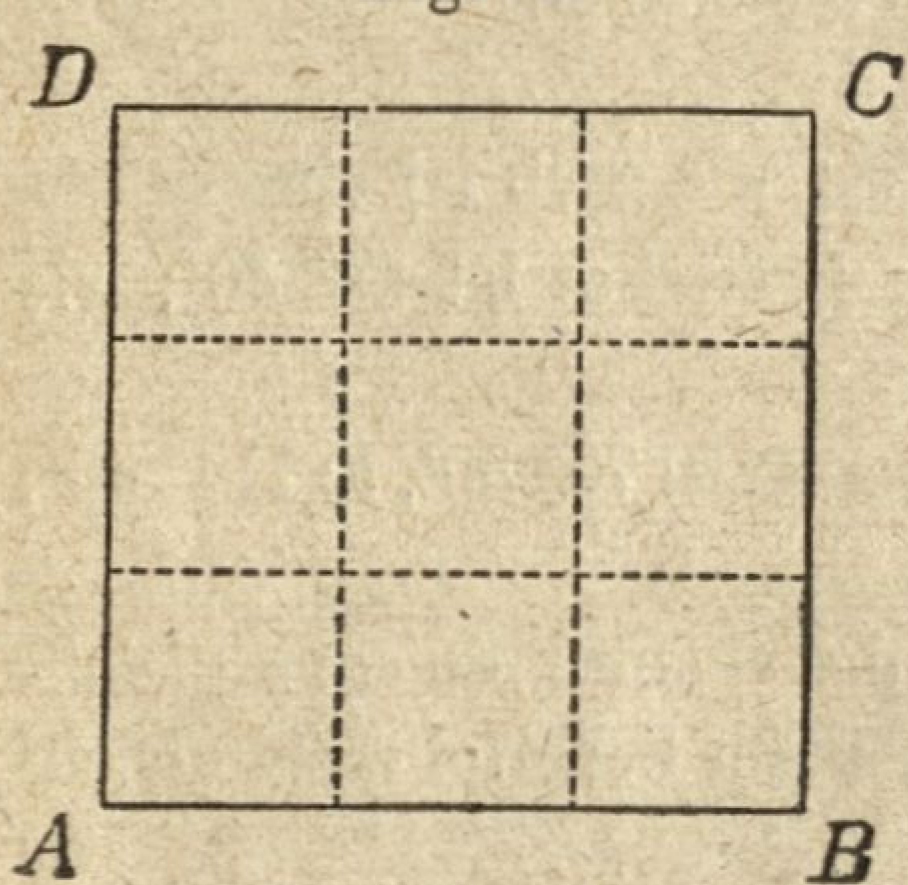
Wenn zwei anstoßende Seiten eines Rechteckes *a*) 4 *m* und 6 *m*, *b*) 3 *m* 5 *dm* 8 *cm* und 4 *m* 6 *dm* 7 *cm* sind, wie groß ist sein Umfang?

§ 37. Fläche des Quadrates und Rechteckes.

Um den *Flächeninhalt* einer Figur zu bestimmen, muß man irgend eine bestimmte Fläche als *Einheit* annehmen und untersuchen, wie oft sie in der zu messenden Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die *Maßzahl* der Fläche.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein *Quadrat* an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein *Quadratmeter* (m^2), ein *Quadratdezimeter* (dm^2) ..., je nachdem die Seite einem Meter, Dezimeter, ... gleich ist.

Fig. 42.



Wenn eine Fläche 12 m^2 mißt, wie heißt ihre Maßzahl?

a) *Fläche des Quadrates.* Beträgt eine Seite des Quadrates *ABCD* (Fig. 42) 3 *cm*, so kann man jede Seite in drei gleiche Teile teilen, deren jeder 1 *cm* ist. In welche Figuren zerfällt das ganze Quadrat durch die Verbindung der gegenüberliegenden Teilungspunkte? Wieviel sind in einer Reihe, wieviel Reihen sind vorhanden? Leite den Satz ab:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert.

Ein Quadrat, dessen Seite 10 *dm* beträgt, hat $10\ dm^2 \times 10 = 100\ dm^2$ Inhalt. Ein solches Quadrat ist nun 1 m^2, also ist

$$1\ m^2 = 100\ dm^2.$$

Ebenso folgt:

$$1\ dm^2 = 100\ cm^2. \qquad 1\ km^2 = 1000000\ m^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2. \qquad 1\ \mu m^2 = 100\ km^2.$$

Der Schüler zeichne ein Quadratdezimeter und teile es in Quadratzentimeter!

Beim *Bodenflächenmaße* heißt eine Fläche von 100 m^2 ein *Ar* (*a*), eine Fläche von 100 Ar ein *Hektar* (*ha*).

Ist eine Seite eines Quadrates 3·4 *m*, so beträgt sie 34 *dm*; die Fläche des Quadrates enthält also 1156 dm^2 oder 11·56 m^2. Die gleiche Maßzahl für Quadratmeter als Einheit ergibt auch die Multiplikation 3·4 × 3·4. Die oben für die Berechnung der Fläche eines Quadrates ausgesprochene Regel gilt daher auch in welchem Falle?

Bei allen Berechnungen wähle der Schüler selbst öfter Beispiele aus seiner Umgebung, schätze zunächst die für die Berechnung erforderlichen Größen und mache einen Überschlag über das zu erwartende Resultat, wenn notwendig mit Abrundung der Maßzahlen. Dieses ist sodann durch genaue Messung und Berechnung zu prüfen.

Aufgaben:

1. Die Seite eines Quadrates ist *a*) 21 *m*, *b*) 5 *m* 4 *dm*, *c*) 359 *mm*, *d*) 0·715 *m*. Wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist 3 *m* 2 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wieviel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 *m* Seitenlänge, wenn man das Quadratmeter mit 11 *K* 20 *h* bezahlt?
4. Ein quadratisches Zimmer mit der Seite 5 *m* 6 *dm* soll mit einem Parkettboden belegt werden. Wie groß sind die Kosten, wenn 1 m^2 mit 7 *K* berechnet wird?
5. *Wenn jede Seite eines Quadrates verdoppelt, verdreifacht ..., auf die Hälfte, ein Drittel ... verkleinert wird, so ändert sich sowohl der Umfang als auch die Fläche. Der Schüler zeige durch eine Zeichnung, daß dadurch der Umfang sich in demselben Maße ändert wie die Seite, die Fläche hingegen viermal, neunmal ... so groß beziehungsweise auf* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ ... *der früheren Größe verkleinert wird.*
6. *Wenn der Zaun um einen quadratischen Garten 1000 K kostet, was kostet er, wenn jede Seite des Quadrates a) doppelt so groß, b) halb so groß gemacht wird?*
7. *Wenn die Vergoldung einer quadratischen Platte 4 K kostet, was kostet die einer Platte a) von doppelter, b) von halber Seitenlänge?*

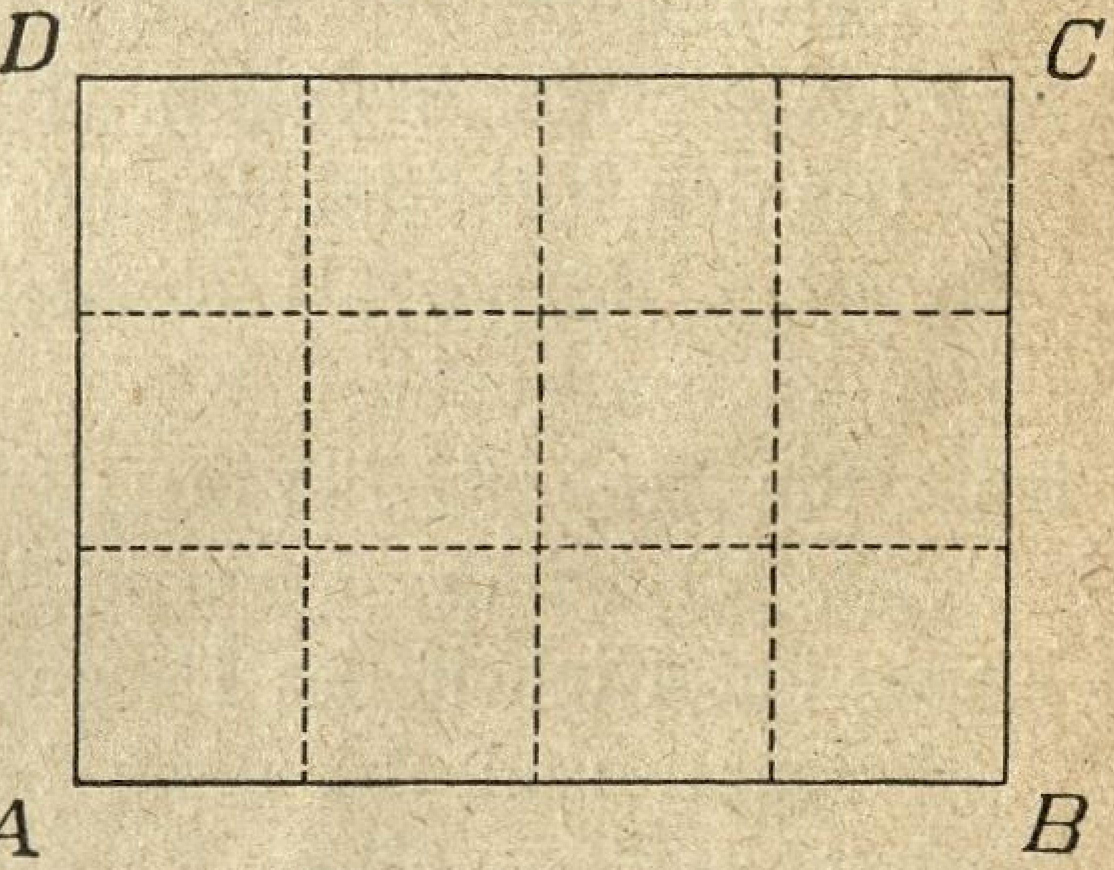
b) Fläche des Rechteckes. Die Seiten des Rechteckes in Fig. 43 betragen 4 *cm* und 3 *cm*. Zähle die Anzahl der Flächeneinheiten nach Reihen und prüfe den Satz:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Kürzer pflegt man diesen Satz auch so auszusprechen:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Fig. 43.



Könnte man auch in ähnlicher Weise den Satz für die Flächenberechnung eines Quadrates aussprechen? Weshalb sind aber die beiden letzten Sätze nicht strenge richtig?

Der Schüler prüfe in gleicher Weise, wie es beim Quadrate (§ 37, *a*) geschehen ist, ob die oben zunächst für ganze Maßzahlen der Seiten angegebene Regel für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes auch dann gilt, wenn die Maßzahlen Dezimalbrüche sind; z. B. für die Seiten 3·4 *dm* und 4·2 *dm*.

Aufgaben:

1. Bestimme 1. den Umfang, 2. den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
   a) Grundlinie 9·2 *m*, Höhe 5·8 *m*;
   b) „ 12 *m* 3 *dm* 3 *cm*, „ 5·2 *dm*!
2. Eine Tischplatte ist 1·4 *m* lang und 1·2 *m* breit. Wie groß ist ihre Fläche?
3. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, 34 *m* 4 *dm* lang und 19 *m* 2 *dm* breit, und bezahlt das Quadratmeter mit 10 *K*. Wieviel kostet der Bauplatz?
4. Wieviel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?
5. Ein Acker ist 116 *m* lang und 18 *m* 5 *dm* breit. Wieviel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf 1 *a* $2\frac{1}{2}$ *l* Weizen rechnet?
6. Ein Hof von 18 *m* Länge und 12 *m* Breite soll mit Steinplatten belegt werden, welche 3 *dm* lang und ebenso breit sind. *a*) Wieviel Platten sind erforderlich? *b*) Wie hoch kommt die Pflasterung, das Quadratmeter zu $16\frac{2}{5}$ *K* gerechnet?
7. *Wie ändert sich die Fläche eines Rechteckes, a) wenn bei ungeänderter Höhe die Grundlinie verdoppelt wird, b) bei ungeänderter Grundlinie die Höhe verdoppelt wird, c) Grundlinie und Höhe verdoppelt werden? Wie ändert sich in diesem Falle der Umfang des Rechteckes? Die Resultate sind durch Zeichnungen zu bestätigen.*

Beispiele nach der am Schlusse von § 37, *a* angegebenen Art würden bieten: ein Buchdeckel, eine Fensterscheibe, eine Tischfläche, eine Wand des Schulzimmers, eventuell der Schulhof usw.

§ 38. Ausmessung des Würfels und des Quaders.

Bei der Ausmessung der Körper hat man die *Oberfläche* und den *Kubikinhalt* derselben in Betracht zu ziehen.

Unter der *Oberfläche* eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen. Um daher die Oberfläche eines Körpers zu erhalten, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die *Seitenoberfläche* des Körpers.

Der Raum, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt sein *Kubikinhalt* oder *Volumen.* (Rauminhalt.)

Um den Kubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgendeinen bekannten Körper als *Einheit* des Kubikmaßes an und untersucht, wie oft sie in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die *Maßzahl* für den Kubikinhalt des Körpers.

Als *Einheit des Kubikmaßes* wird ein *Würfel* (Kubus) angenommen, dessen Kante der Einheit des Längenmaßes gleich ist, also ein Meter, ein Dezimeter ... beträgt, und der dann beziehungsweise *Kubikmeter* (m^3), *Kubikdezimeter* (dm^3), ... heißt. Einen Körper messen heißt also untersuchen, wieviel Kubikmeter, Kubikdezimeter usw. in ihm enthalten sind.

a) *Ausmessung des Würfels.*

1. Oberfläche.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Oberfläche eines Würfels ist gleich dem sechsfachen Produkte aus der Maßzahl einer Kante mit sich selbst.

2. Volumen.

Aus Kubikzentimetern soll man einen einzigen Würfel bilden, dessen Kante 3 *cm* beträgt. Wieviel Kubikzentimeter kommen in die unterste Schichte? Wieviel Schichten müssen gemacht werden? — Wieviel Kubikzentimeter enthält also der ganze Würfel? (Modell.)

Der Schüler prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Volumens eines Würfels ist gleich dem Produkte der Maßzahlen der drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Ein Würfel, dessen Kante 10 *dm* beträgt, hat

$$10 . 10 . 10\ dm^3 = 1000\ dm^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Kubikmeter; also ist

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3$$

Ebenso folgt: $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

1 *Kubikdezimeter* heißt als Hohlmaß 1 *Liter*; 100 *Liter* = 1 *Hektoliter*.

Der Schüler prüfe die Gültigkeit des obigen Satzes für die Volumsberechnung eines Würfels für den Fall, daß die Maßzahl einer Seite ein Dezimalbruch ist, in ähnlicher Weise, wie es für die Fläche eines Quadrates untersucht wurde. (§ 37, a.) Die Seite des Würfels sei 3·2 *dm*.

b) Ausmessung des Quaders.

1. Oberfläche.

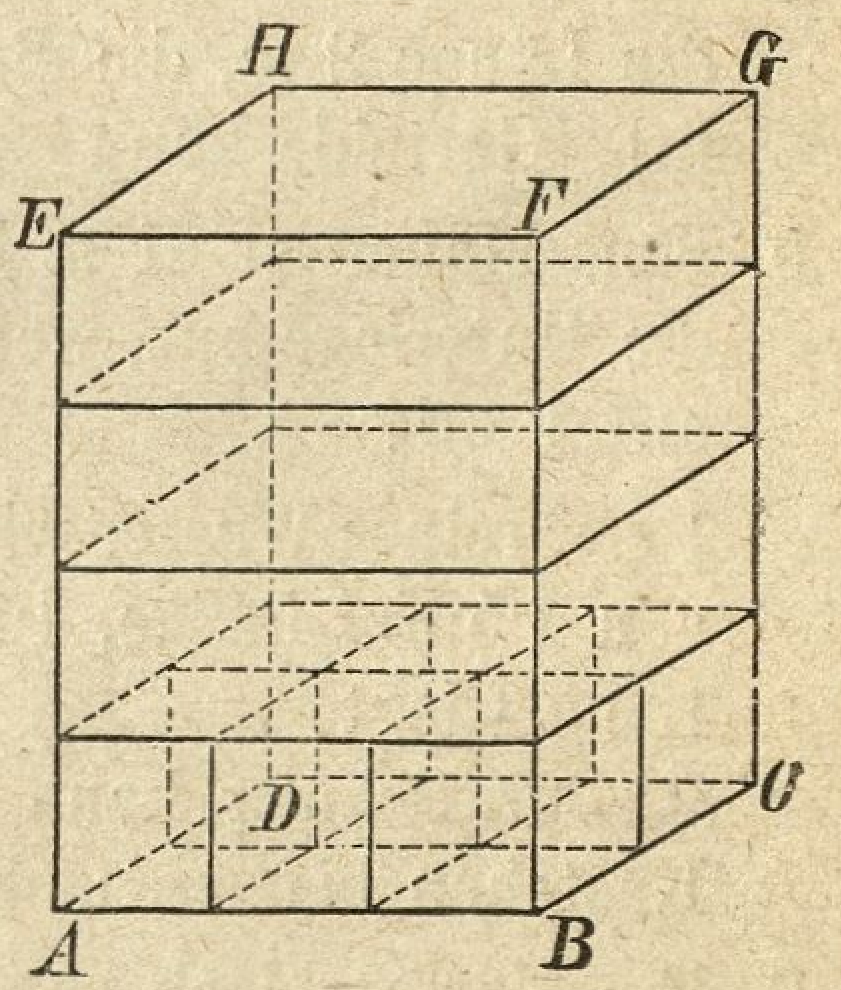
Die Oberfläche setzt sich aus der doppelten Grundfläche und dem Mantel zusammen.

Mit Hilfe des Netzes des Mantels eines Quaders prüfe der Schüler die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Inhaltes des Mantels eines Quaders ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl des Umfanges seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Die Länge, Breite und Höhe *a*) einer Schachtel, *b*) eines Zimmers zu messen und die gesamte Oberfläche zu berechnen.

Fig. 44.



2. Das Volumen.

Bilde aus Würfeln, von denen jeder 1 cm^3 mißt, einen Quader von 3 *cm* Länge, 2 *cm* Breite und 4 *cm* Höhe! Wieviel Kubikzentimeter enthält die unterste Schichte? Wieviel Schichten kommen übereinander? Wieviel Kubikzentimeter enthält mithin der ganze Quader? (Modell.)

Prüfe daran und auch an Fig. 44 die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Volumens eines Quaders ist gleich dem Produkte der Maßzahlen der drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Oder:

Die Maßzahl des Volumens eines Quaders ist gleich der Maßzahl der Grundfläche multipliziert mit der Maßzahl der Höhe.

Kürzer, aber weniger richtig, sagt man auch:

Das Volumen eines Quaders ist gleich dem Produkte dreier an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten. Oder: Das Volumen eines Quaders ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit des obigen Satzes für den Fall, daß die Maßzahlen der Kanten des Quaders Dezimalbrüche sind; z. B. 1·4 *dm*, 2·1 *dm*, 3·7 *dm!*

§ 39. *Aufgaben:*

a) *Würfel.*

1. Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Kante *a*) 12 *dm*, *b*) 2 *m* 3 *dm*, *c*) 0·575 *m* ist?
2. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertigt werden. Wieviel Quadratmeter Kupferblech braucht man?
3. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite. Wieviel Liter faßt es?
4. Wie schwer ist ein Würfel mit der Kante 3 *dm* 7 *cm*, wenn 1 dm^3 des Materiales 0·86 *kg* wiegt?
5. *Wie ändert sich a) die Oberfläche, b) das Volumen eines Würfels, wenn die Kante a) verdoppelt, b) halb so groß gemacht wird? (Vorzeigen von Modellen!)*
6. *Ein Würfel von 2 dm Kantenlänge wiegt 16 kg. Wieviel wiegt ein anderer Würfel aus demselben Material von 6 dm Kantenlänge?*

b) *Quader.*

1. Die Kanten eines Quaders sind *a*) 12 *cm*, 16 *cm* und 48 *cm*, *b*) 1·04 *m*, 1·98 *m* und 2·64 *m*. Zu berechnen: 1. die Oberfläche, 2. den Kubikinhalt.
2. Ein viereckiges Gefäß von Blech ist 0·6 *m* lang, 0·5 *m* breit und 0·4 *m* hoch. Wieviel Quadratmeter Blech ist daran, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?
3. Wie hoch kommt eine Kiste zu stehen, die 2 *m* lang, 1·2 *m* breit und 1·3 *m* hoch ist, wenn 1 m^2 mit 1 *K* 60 *h* bezahlt wird?
4. Wie groß ist der Kubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem, innen gemessen, die Länge 2 *m*, die Breite 1 *m* 3 *dm* und die Höhe 1 *m* 4 *dm* ist? Wieviel Hektoliter Gerteide kann er aufnehmen?
5. Eine Mauer ist 21 *m* lang, 8 *dm* dick und 8 *m* hoch. Welchen Druck übt sie auf die Unterlage aus, wenn 1 m^3 Mauerwerk 1634 *kg* wiegt? Wie groß ist der Druck auf 1 m^2?

   1 cm^3 reines Wasser wiegt 1 *g*. Wieviel wiegt ein mit Wasser gefülltes Blechkästchen von 1·5 *dm* Länge, 1·2 *dm* Breite und 8 *cm* Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 *g* wiegt?

   (Der Schüler kann zu dieser Aufgabe auch ein ihm zur Verfügung stehendes Kästchen benutzen und das Rechnungsresultat durch den Versuch prüfen.)
7. Ein Marmorblock hat die Form einer quadratischen Säule; jede Grundkante mißt 8 *dm* 7 *cm*, jede Seitenkante 1 *m* 3 *dm*; wie groß ist die Oberfläche und das Volumen desselben?
8. Der Rauminhalt des Schulzimmers zu berechnen. (Schlußabsatz von § 37 *a*!)

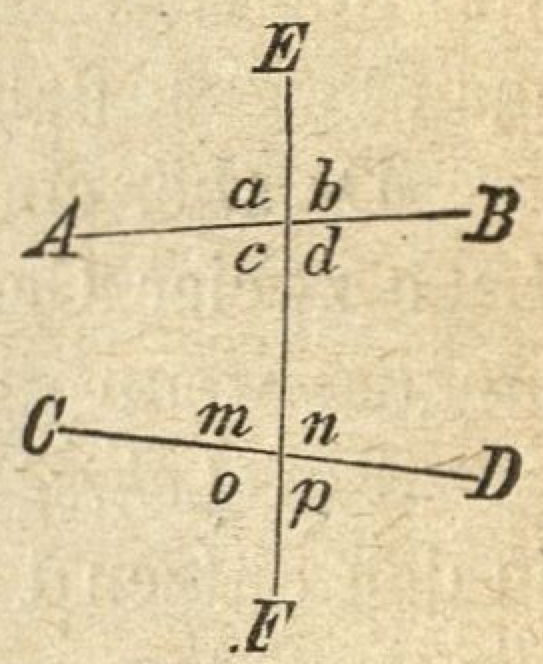
Sechster Abschnitt.

Parallele und normale Gerade.

Gegenwinkel, Wechselwinkel, Anwinkel. § 40.

Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Schnittpunkte acht hohle Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen *innere*, die anderen vier *äußere* Winkel. Nenne in Fig. 45 die beiden geschnittenen und die schneidende Gerade (Transversale[1]); ebenso die äußeren und die inneren Winkel!

Fig. 45.



Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen *Gegenwinkel*. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden *Wechselwinkel* genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen *Anwinkel*.

Gegenwinkel:	Wechselwinkel:	Anwinkel:
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

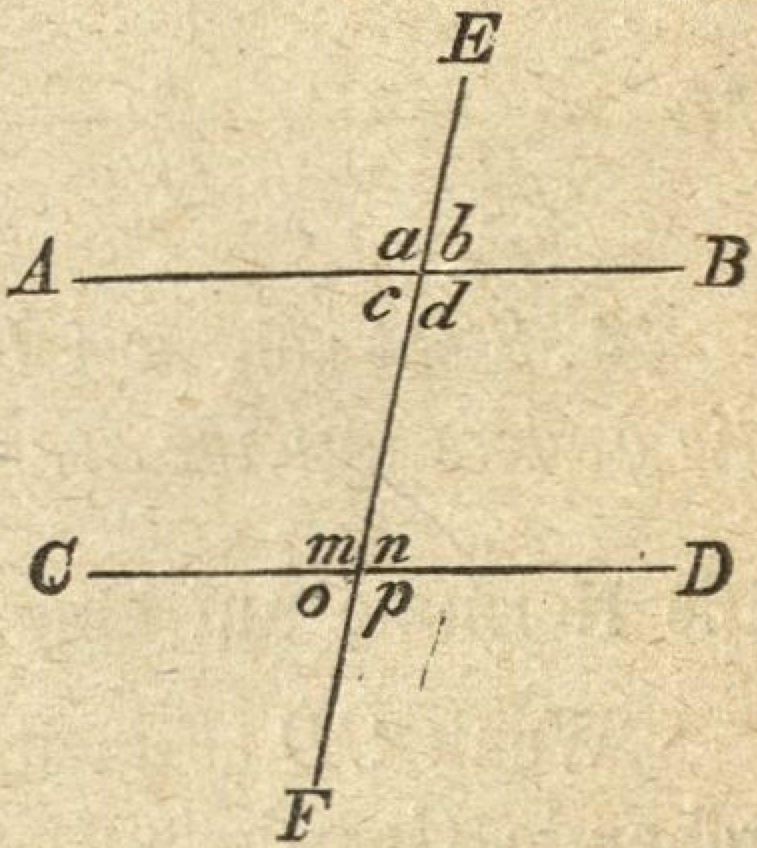
Der Schüler zeichne die Fig. 45 so, daß EF horizontal liegt, und nenne die Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel!

Parallele Gerade. § 41.

Es sei (Fig. 46) $AB \parallel CD$.

Bei Parallelverschiebung der Geraden AB bildet sie, da sich dabei ihre Neigung gegen EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel; es fallen also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel aufeinander, je zwei Wechselwinkel gehen in zwei Scheitelwinkel über und je zwei Anwinkel werden Nebenwinkel; daraus folgt:

Fig. 46.



1. *Wenn zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so sind*
   a) je zwei Gegenwinkel einander gleich;
   b) je zwei Wechselwinkel einander gleich;
   c) je zwei Anwinkel supplementär.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit der Gleichungen:

a) $a = m$	*b)* $a = p$	*c)* $a + o = 180°$
$b = n$	$b = o$	$b + p = 180°$
$c = o$	$c = n$	$c + m = 180°$
$d = p$	$d = m$	$d + n = 180°$.

[1] Lat. transversus, quer.

Der Schüler pause den obeıen Teil der Fig. 46 ab und versuche, ob er sich mit dem unteren zur Deckung bringen läßt!

2. Umgekehrt ist auch der Satz richtig: *Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich oder zwei Anwinkel supplementär sind, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.*

Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel. Um mit Gewißheit behaupten zu können, daß zwei Gerade parallel sind, sollte man zeigen, daß sie, fort und fort verlängert, doch nie zusammentreffen.

Da aber eine solche Verlängerung nicht ausführbar ist, so wird die parallele Lage zweier Geraden ganz einfach durch die Winkel entschieden, welche entstehen, wenn diese Geraden von einer dritten geschnitten werden.

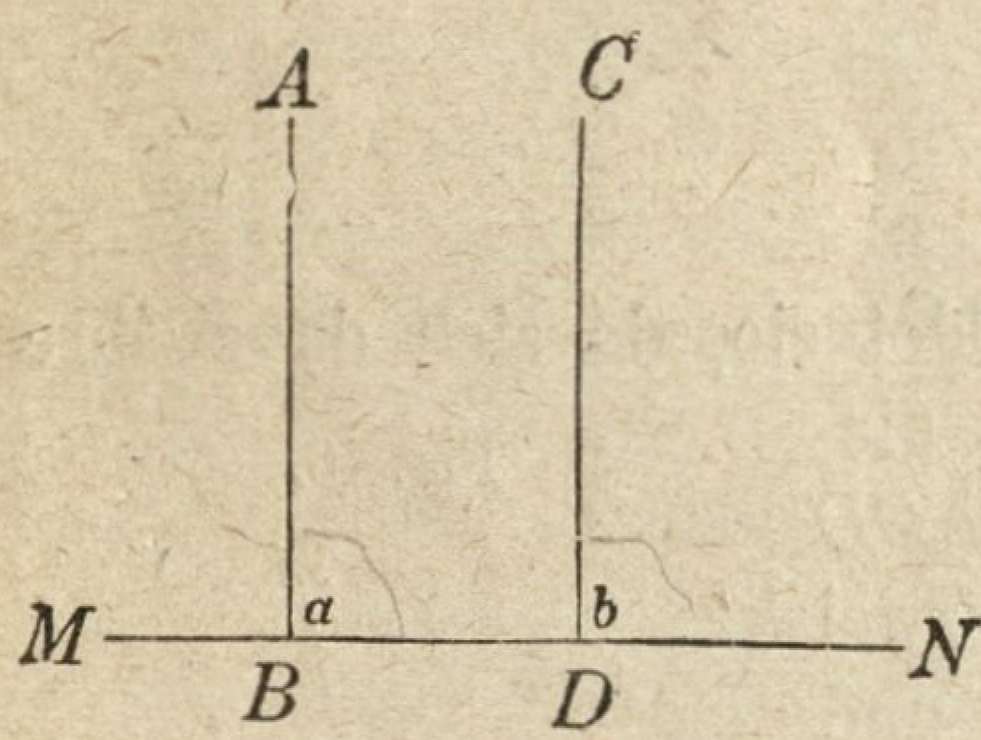
Ein *Lehrsatz* besteht aus Voraussetzung und Behauptung. (Suche beide in den Sätzen 1 a, 1 b, 1 c auf!) Vertauscht man sie miteinander, so erhält man die Umkehrung des Lehrsatzes. (Suche Voraussetzung und Behauptung der Sätze 2 auf!)

Aufgabe:

Es sei in Fig. 46 der Winkel $a = 103° 47' 25''$. Wie groß ist jeder der Winkel b, c, d, m, n, o, p?

Es ist auch hier die Abhängigkeit der acht Winkel bei paralleler Lage der geschnittenen Geraden voneinander zu ersehen. Wieviel von ihnen sind willkürlich?

Fig. 47.



Es sei Fig. 47 $a = R$ und $b = R$. Die Geraden AB und CD bilden daher mit der sie Schneidenden MN gleiche Gegenwinkel, folglich sind sie parallel.

3. *Stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.*

Es sei $AB \parallel CD$ (Fig. 47) und $a = R$. Daraus folgt, daß auch $b = R$ sein muß.

4. *Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht.*

§ 42. Die Normale auf eine Gerade.

Wenn CD (Fig. 48) senkrecht auf AB steht, so kann keine andere durch C gehende Gerade auf AB senkrecht stehen. Wäre z. B. $CE \perp AB$, so wären m und n als rechte Winkel supplementär; da sie aber Anwinkel sind, so müßten CD und CE parallel sein, was nicht möglich ist, da sie den Punkt C gemeinschaftlich haben.

Von einem Punkte aus läßt sich auf eine Gerade nur eine einzige Normale fällen.

Der Punkt D heißt der Fußpunkt der Senkrechten.

Die Länge dieser völlig bestimmten Senkrechten gibt den Abstand des Punktes von der Geraden an.

Auch in einem Punkte einer Geraden läßt sich auf diese nur eine einzige Normale errichten.

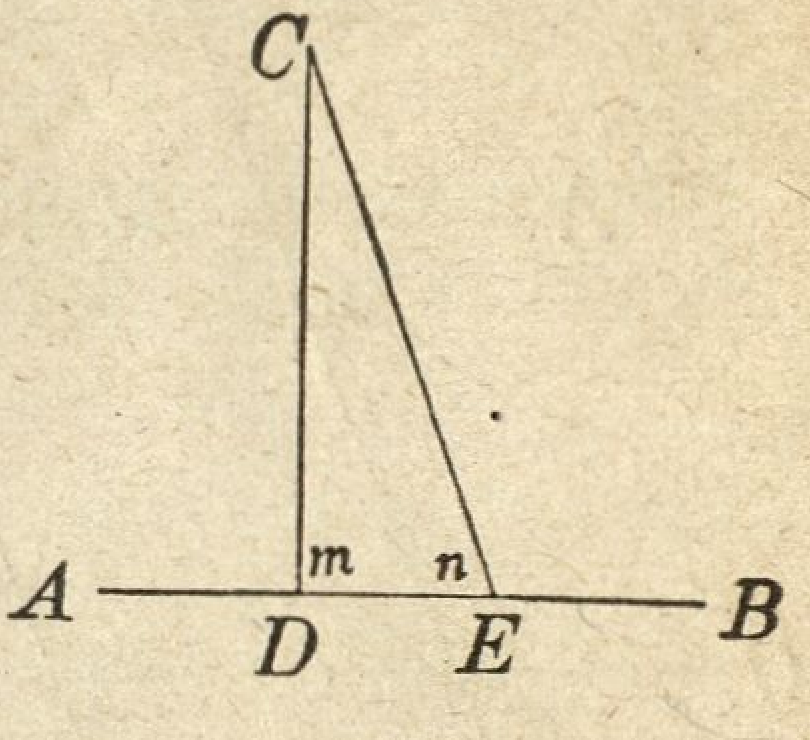
Aufgaben:

1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fällen.
2. In einem Punkte einer Geraden auf diese die Senkrechte zu errichten.

   Die Auflösung beider Aufgaben mit Hilfe des Winkelbrettes wurde schon in § 22 gefordert.

   Zu ihrer Lösung *im Freien* dient der Feldwinkelmeßapparat der Fig. 30. Benutzt werden zwei Visiere, die an den Endpunkten zweier zueinander normaler Durchmesser angebracht und ähnlich hergestellt sind wie die in § 27 bereits beschriebenen.

Fig. 48.



a) Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fällen und den Abstand des Punktes von der Geraden zu bestimmen.

Der Punkt wird durch einen Fluchtstab festgelegt. Der Winkelmeßapparat wird über dem schätzungsweise angenommenen Fußpunkt des Lotes so aufgestellt, daß die eine Visierlinie in die durch die ausgesteckte Gerade gelegte Vertikalebene fällt. Sieht man dann durch das zweite Visier den vertikalen Stab, so ist der Fußpunkt des Lotes richtig. Sieht man ihn nicht, so wird der Apparat ohne Änderung der Richtung des ersten Visieres so lange verschoben, bis man durch das zweite Visier den Stab sieht. Dann wird die Senkrechte abgesteckt, und es kann ihre Länge bestimmt werden.

b) In einem Punkte einer Geraden auf diese die Normale zu ziehen.

Der Winkelmeßapparat wird in dem vorgeschriebenen Punkte wie in *a*) aufgestellt. Man blickt dann durch das zweite Visier und läßt durch einen Gehilfen einen Fluchtstab in der Sehrichtung aufstellen. Dadurch sind zwei Punkte der Senkrechten gefunden.

3. Durch einen gegebenen Punkt A mit einer Geraden l die Parallele zu konstruieren.

   Die Ausführung ergibt sich aus Fig. 49. Benutzt wird ein Lineal L und das Winkelbrett.

Fig. 49.

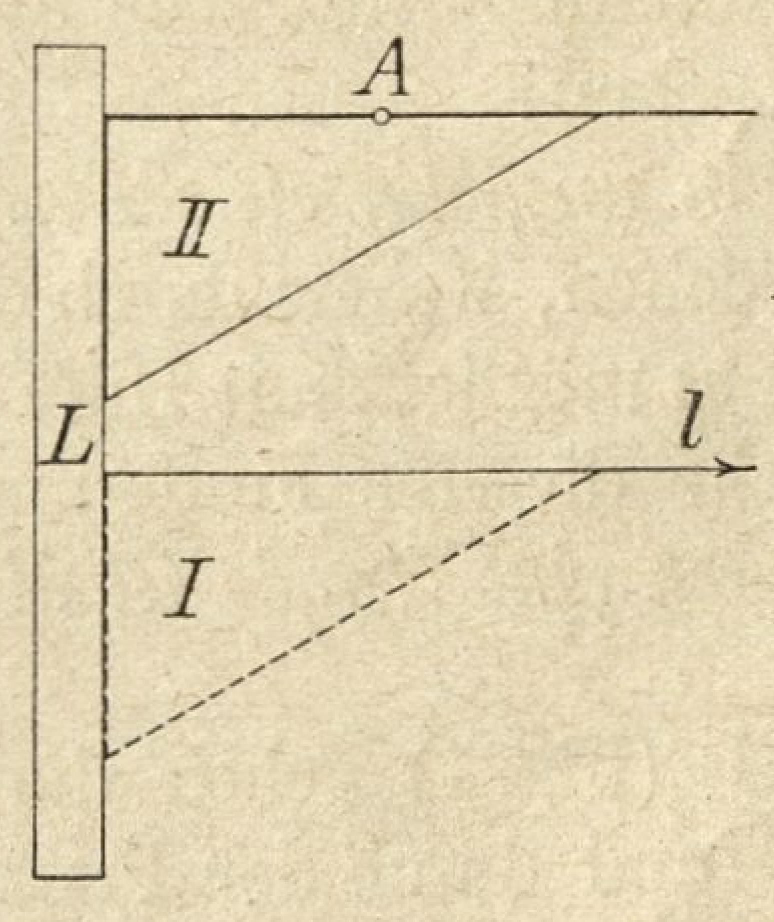
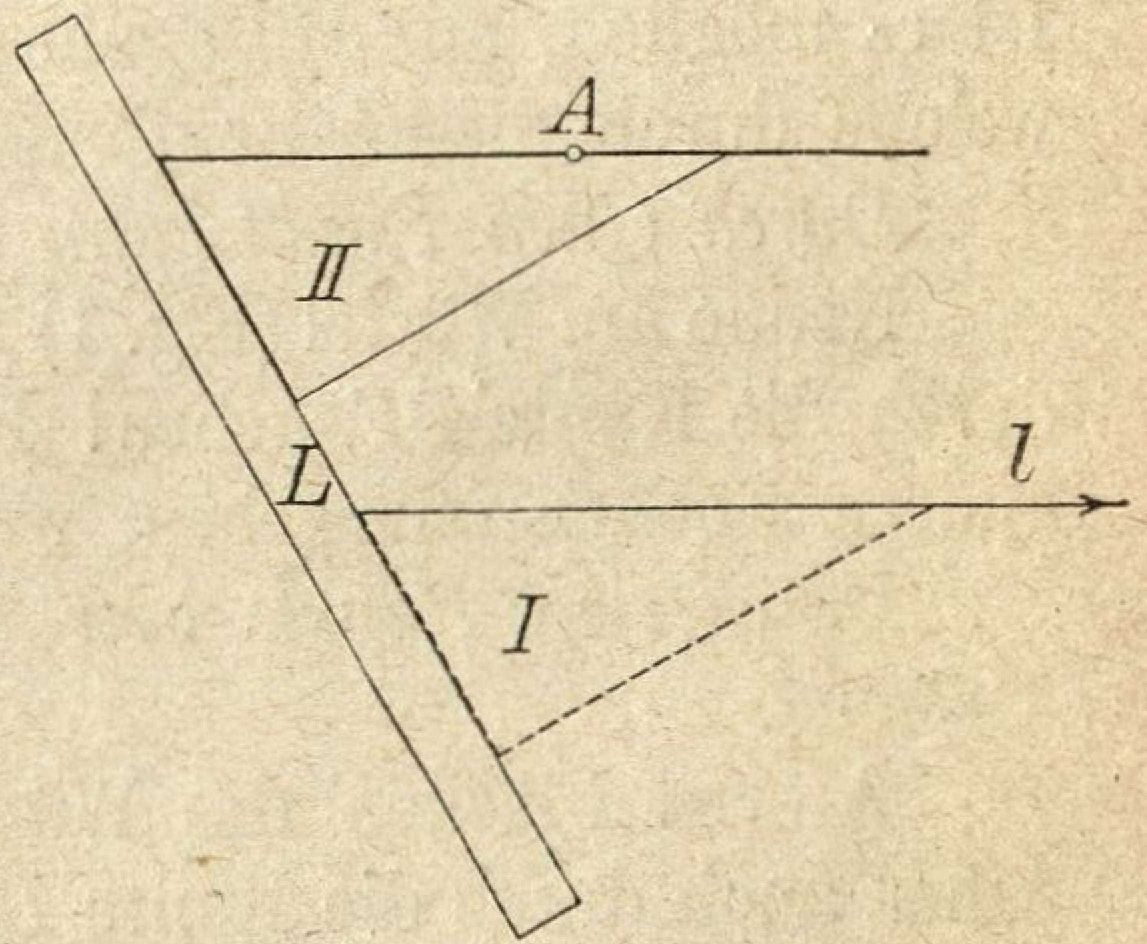


Fig. 50.



(Parallelverschiebung des Winkelbrettes aus der Lage I in die Lage II) Begründung nach § 41, 3.

Verwandt mit dieser Konstruktion ist die in Fig. 50 enthaltene. Begründung nach § 41, 2. (Gegenwinkel.)

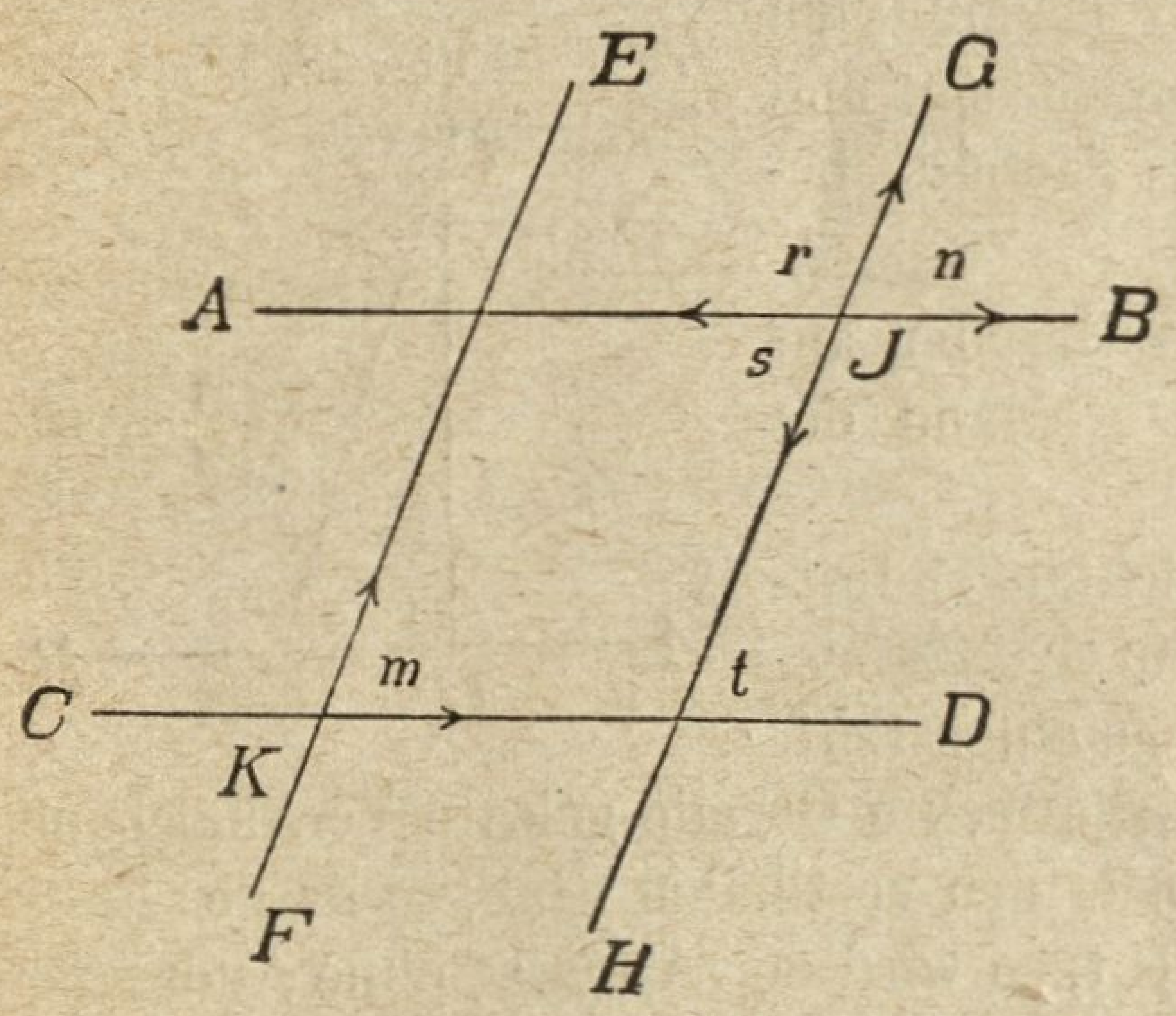
Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur *eine* Parallele möglich.

4. Ziehe zwei parallele Gerade, wähle mehrere Punkte in der einen und bestimme ihren Abstand von der anderen! Es ergibt sich: Parallele Gerade haben in ihrem ganzen Verlaufe denselben Abstand voneinander.
5. Auf dem Felde ein Quadrat, dessen Inhalt 1 Ar ist, abzustecken.
6. Auf dem Felde *a*) ein Quadrat, *b*) ein Rechteck abzustecken und die Fläche zu ermitteln.

§ 43. Winkel mit parallelen Schenkeln.

Der Schüler vergleiche nach den Pfeilen die Richtungen der Schenkel der Winkel m, n, r und s in Fig. 51 von den Scheitelpunkten K und J aus und beweise die Richtigkeit folgender Sätze:

Fig. 51.



1. *Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.* ($m = t$, $t = n$ *usw.*)

2. *Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.* ($n + r = 180°$, $m = n$ *usw.*)

Siebenter Abschnitt.

Bestimmung einer Ebene. Normale Gerade zu einer Ebene. Flächenwinkel.

§ 44. Bestimmung der Ebene.

Nenne am Würfel (Fig. 1) Flächen, welche durch den Punkt F gehen! Ist es möglich, mit Hilfe eines Kartonblattes noch andere Ebenen anzugeben, welche durch diesen Eckpunkt gehen?

Durch einen Punkt kann man unzählig viele Ebenen legen.

Nenne am Würfel (Fig. 1) Flächen, welche durch die Punkte B und F, also durch die Kante BF gehen! Ist es möglich, mit Hilfe eines Kartonblattes noch andere Ebenen anzugeben, welche dieselbe Forderung erfüllen?

Durch zwei Punkte oder durch eine Gerade ist die Lage einer Ebene nicht bestimmt.

Wieviel Flächen des Würfels (Fig. 1) gehen durch die Punkte B, F, C, daher auch durch die Kante BF und durch den Punkt C? Wieviel durch die Kanten FB und FG? Wieviel durch die Kanten BF und CG?

Durch drei Punkte, welche nicht derselben Geraden angehören, durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, durch zwei einander schneidende, durch zwei parallele Gerade ist eine Ebene bestimmt.

Normale Gerade zu einer Ebene. **§ 45.**

Jede Seitenkante eines Würfels steht auf der Grundfläche senkrecht. Stellt man einen Würfel auf ein ebenes Brett und steckt knapp neben einer Seitenkante einen mit einer Spitze versehenen Draht in dieses Brett, so steht auch dieser auf dem Brette senkrecht. Legt man nun den einen Schenkel des rechten Winkels des Winkelbrettes bei der Spitze an den Draht, so fällt bei jeder Drehung des Winkelbrettes um diesen Schenkel der zweite Schenkel des rechten Winkels in die Ebene des Brettes.

Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden, senkrecht; umgekehrt steht die Ebene auf der Geraden senkrecht.

Da eine Ebene schon durch zwei einander schneidende Gerade bestimmt wird, so kann man auch sagen:

Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet und auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht, so steht sie auf der Ebene senkrecht.

Winkel zweier Ebenen. **§ 46.**

Man schneide ein rechteckiges Kartonblatt parallel zu zwei Seiten des Rechteckes in der Mitte nach der geraden Linie AB ein (Fig. 52), errichte auf diese die Normale CD und drehe die beiden Teile des Blattes um die Schnittlinie so weit, bis sie zusammenfallen. Nun halte man den einen Teil fest und drehe den anderen um die Schnittlinie. Bei jeder Lage des letzteren bilden die beiden Teile einen *Flächenwinkel* (Keil). Die ihn einschließenden Flächen heißen die *Schenkelflächen*, ihre Durchschnittslinie wird die *Kante* des Keiles genannt. Die Größe des Flächenwinkels hängt von der Größe der Drehung der bewegten Schenkelfläche ab. Diese wird durch den Winkel CED (Fig. 53) gemessen, den die beiden Normalen CE und DE bilden.

Fig. 52.

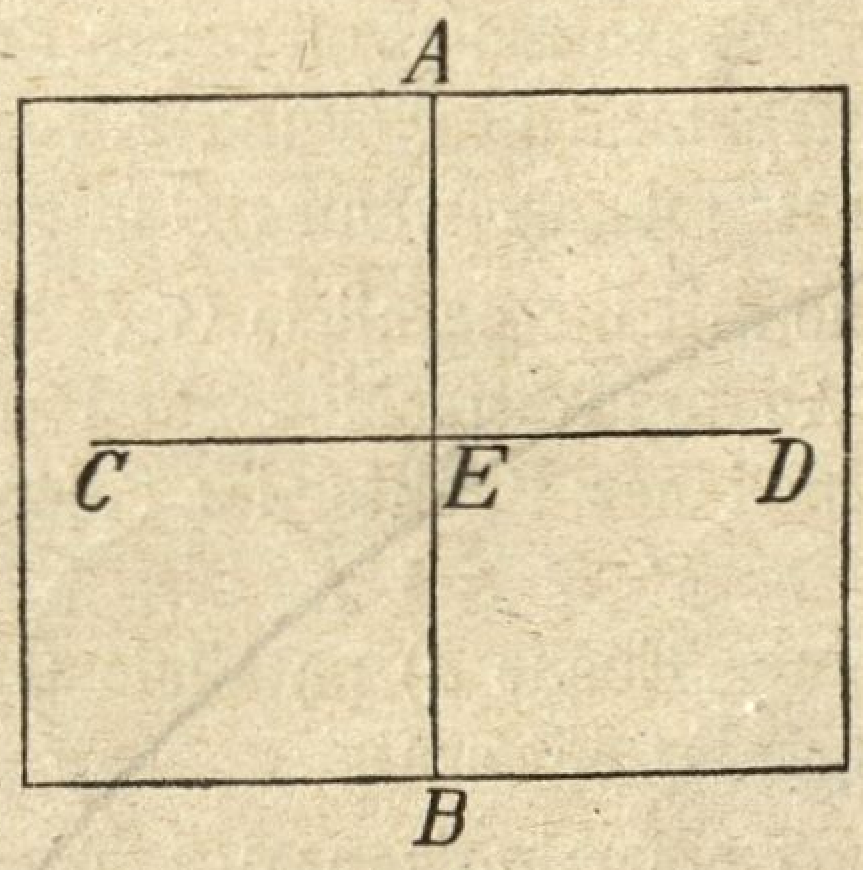
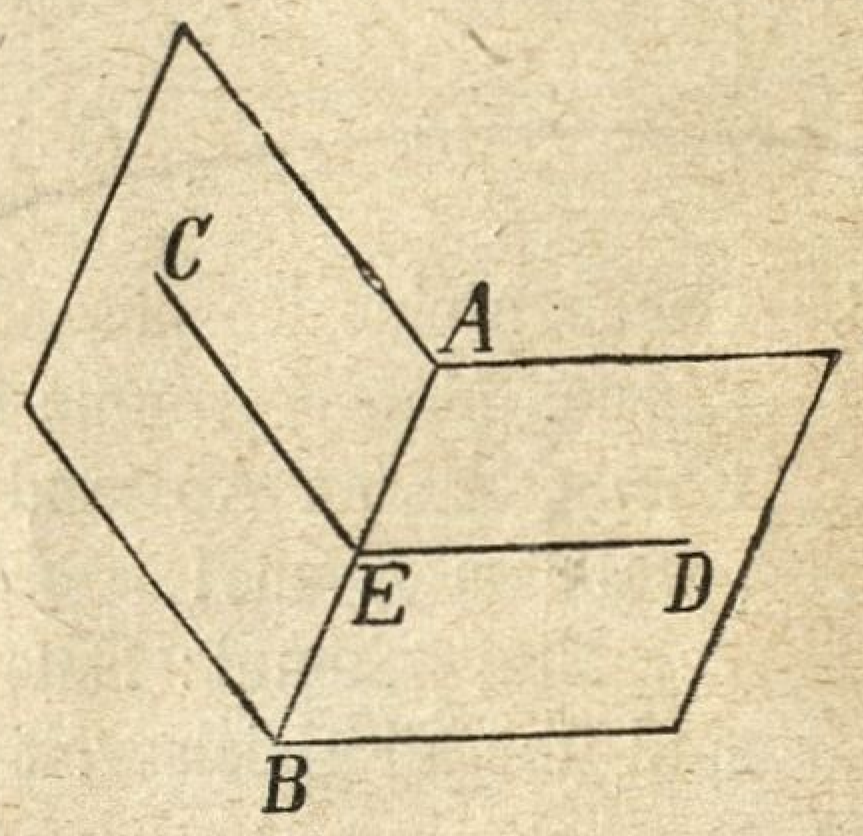


Fig. 53.



Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so bilden sie einen Flächenwinkel oder Keil. (Schenkelflächen, Kante.) Errichtet man in einem Punkte der Kante zwei Normale auf diese (ED und EC in Fig. 53), die eine in der einen, die zweite in der anderen Schenkelfläche, so ist der von diesen Normalen gebildete Winkel ein Maß der Größe des Keiles.

Wieviel Keile enthält Fig. 53? Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht man den kleineren der von ihnen gebildeten Flächenwinkel. (Vgl. § 26.)

Ist der von zwei einander schneidenden Ebenen gebildete Flächenwinkel ein rechter, so sagt man, die beiden Ebenen stehen aufeinander senkrecht.

Merke nach der Anschauung am Würfel:

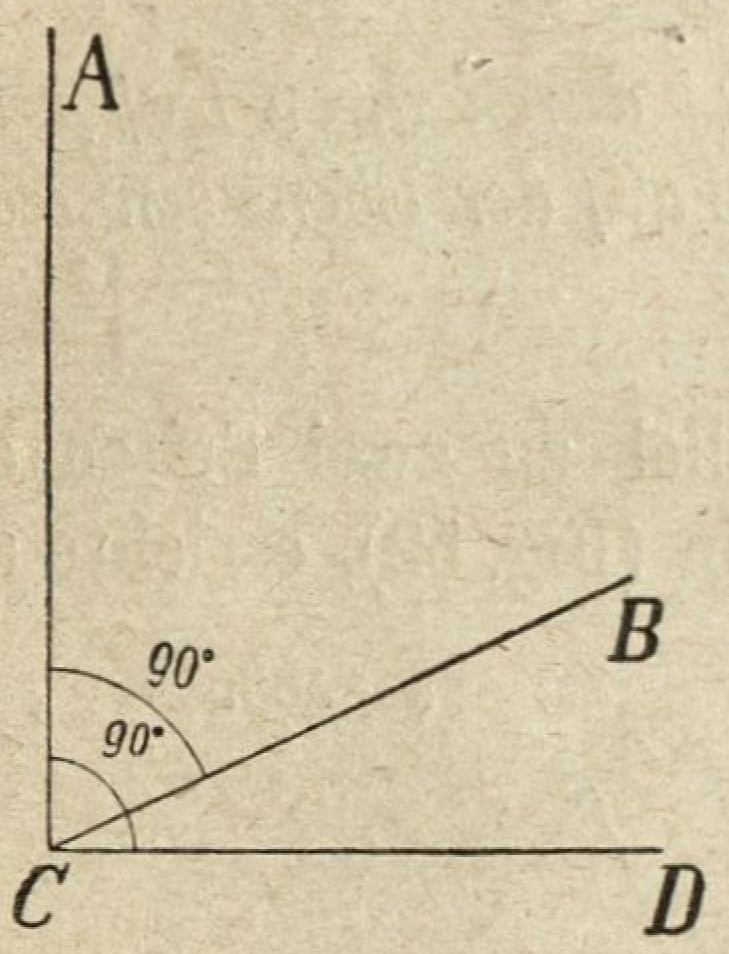
Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht und legt man durch die Gerade eine Ebene, so steht auch diese auf der Ebene senkrecht.

Fig. 1: Es ist $FB \perp ABCD$, daher auch Ebene $ABFE$ und Ebene $BFGC$ senkrecht auf $ABCD$.

§ 47. *Aufgaben:*

1. Wieviel *a*) horizontale, *b*) vertikale Ebenen lassen sich durch einen Punkt legen?
2. Wieviel *a*) horizontale, *b*) vertikale, *c*) schräge Ebenen lassen sich durch eine horizontale Gerade legen?
3. Wieviel Ebenen lassen sich durch eine vertikale Gerade legen? Welche Lage haben sie?

Fig. 54.



4. *Fig. 54* stellt drei Stäbe dar, von welchen zwei CB und CD in C auf AC senkrecht stehen. Bringt man die Stäbe CB und CD dieser Vorrichtung auf eine Ebene, welche Lage hat der Stab AC gegen diese Ebene?
5. Mit Hilfe der Vorrichtung Fig. 54 anzugeben die Lage *a*) der Normalen in einem gegebenen Punkte einer Ebene auf diese, *b*) der Normalen von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf diese. Wieviel Normale sind in beiden Fällen möglich?

   Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene gibt den Abstand dieses Punktes von der Ebene an. Er läßt sich sofort ablesen, wenn AC mit einer Teilung versehen ist.
6. Gegeben eine Ebene und *a*) eine mit ihr parallele Gerade, *b*) eine mit ihr parallele Ebene. Man bestimme 1. den Abstand verschiedener Punkte der Geraden von der Ebene, 2. den Abstand verschiedener Punkte der einen Ebene von der mit ihr parallelen Ebene!

   Man erkennt: Eine mit einer Ebene *a*) parallele Gerade, *b*) parallele Ebene sind überall gleich weit voneinander entfernt.
7. Den Abstand eines Punktes von einer horizontalen Ebene mit Hilfe des Senkels zu bestimmen.
8. Ein rechter Winkel wird um einen seiner Schenkel gedreht; was beschreibt bei einer vollen Umdrehung der zweite Schenkel?
9. Welcher Winkel mißt den Keil der beiden Flächen des Würfels in Fig. 1, die *a*) in der Kante BF, *b*) in der Kante AB einander schneiden?
10. Auf einem auf einem Tische liegenden Papierblatte sind Winkel von 60°, 90°, 120° gezeichnet. Bilde mit dem in § 46 beschriebenen Kartonblatte Keile, welche diese Winkel zum Maße haben!
11. Auf einer Tischfläche steht *a*) ein Würfel, *b*) ein Quader. Lege durch jeden der beiden Körper einen vertikalen Diagonalschnitt und bestimme die Größe der Flächenwinkel, welche er mit den benachbarten Seitenflächen bildet!
12. Die durch die Angel einer Tür gelegte Gerade soll vertikal sein; welche Lage hat die Tür in allen Stellungen?

Achter Abschnitt.

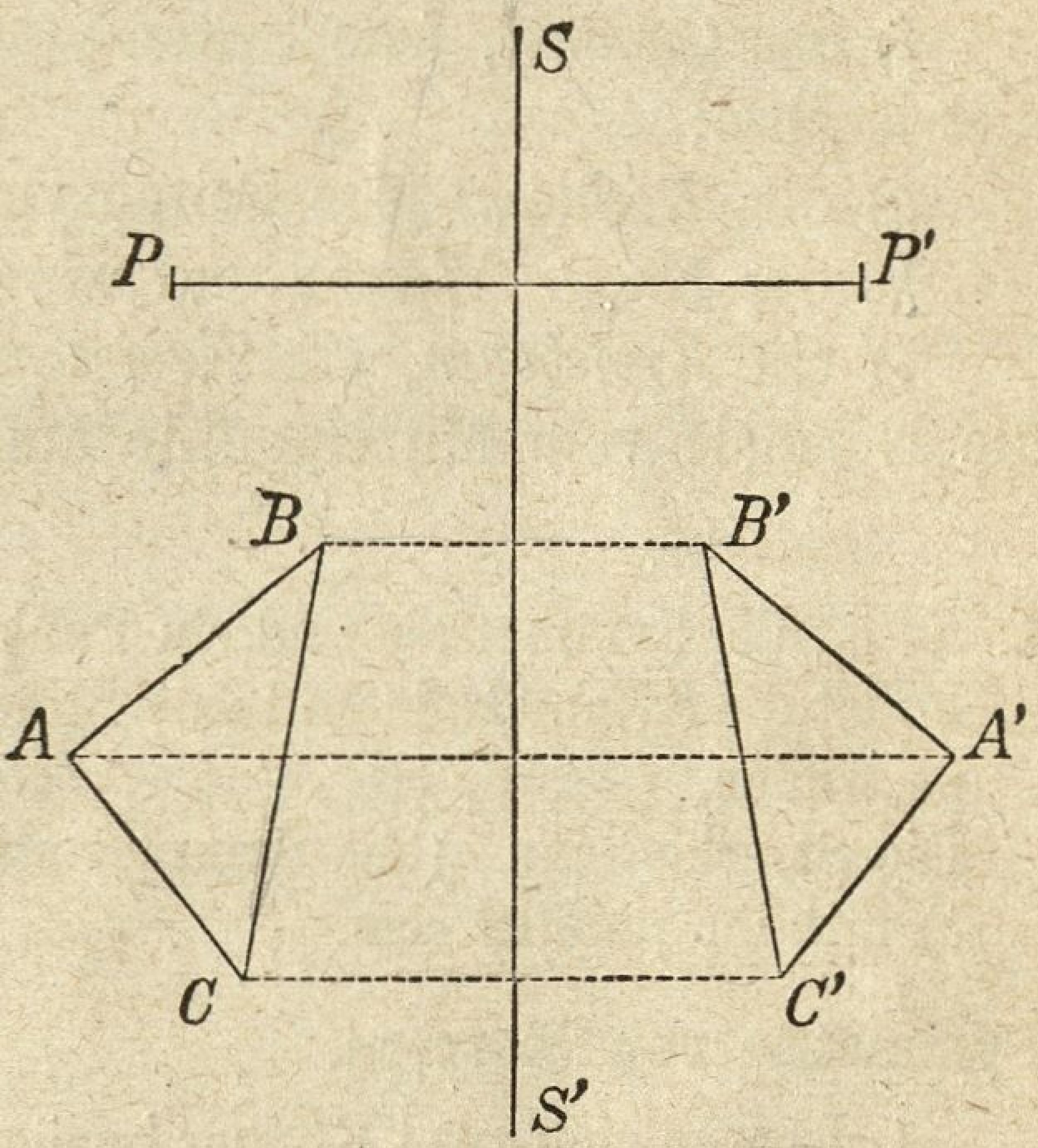
Die Symmetrie[1]) ebener und körperlicher Gebilde.

Achsiale Symmetrie ebener Gebilde. § 48.

1. *Symmetrische Lage zweier Punkte.* Zwei Punkte P und P' (Fig. 55) liegen in bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch, wenn ihre gerade Verbindungslinie PP' auf der Geraden SS' normal steht und von ihr halbiert wird.

2. *Symmetrische Lage zweier Gebilde (Figuren).* Zwei Gebilde (Figuren) ABC und $A'B'C'$ (Fig. 55) sind in bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des anderen entspricht.

Fig. 55.



Die Gerade SS' heißt die *Symmetrieachse* oder *Symmetrale* und die beiden Punkte oder Gebilde, welche in bezug auf SS' symmetrisch liegen, einander *symmetrisch zugeordnet* oder kurz *zugeordnet.*

Zwei Gebilde, welche einander symmetrisch zugeordnet sind, können durch eine Drehung von 180° um die Symmetrale als Achse zur Deckung gebracht werden, sie sind daher kongruent.

Der Schüler überzeuge sich davon durch Falten eines durchscheinenden Papieres mit der Fig. 55 um die Gerade SS' und Zusammenlegen der beiden Teile!

Zwei symmetrisch liegende Gebilde haben dieselbe Lage wie Gegenstand und Bild, wenn die Symmetrieachse spiegelnd gedacht wird. Das eine Gebilde kann als Spiegelbild des anderen bezeichnet werden.

Der Schüler beachte, daß in den beiden symmetrischen Dreiecken (Fig. 55) die gleichen Seiten und die gleichen Winkel entgegengesetzt angeordnet sind, in dem einen (ABC) folgen sie in der Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers, in dem anderen ($A'B'C'$) in entgegengesetzter Richtung. Die Dreiecke können nur durch Umklappen zur Deckung gebracht werden.

3. *Symmetrische Figuren (Gebilde).* Eine Figur (Gebilde) heißt symmetrisch bezüglich einer Geraden, wenn sie sich durch diese Gerade in zwei symmetrisch liegende Hälften teilen läßt. Nach der Anzahl der Geraden (Symmetralen), durch welche eine Figur (Gebilde) in zwei symmetrische Hälften geteilt werden kann, heißt sie *ein-, zwei-, drei-, mehrachsig symmetrisch.*

Von den bisher betrachteten Gebilden sind die folgenden symmetrisch:

---

[1]) Griech. symmetria (συμμετρία), Ebenmaß.

a) die *Gerade;* jede ihrer Normalen kann als ihre Symmetrale angesehen werden;

b) die *Strecke;* die Normale in ihrem Halbierungspunkte ist ihre Symmetrale; man nennt sie kurz *Streckensymmetrale;*

c) der *Winkel;* seine Halbierungslinie ist die Symmetrale; man nennt sie kurz *Winkelsymmetrale;*

d)[1]) das *gleichschenklige Dreieck;* die Höhe auf die Grundlinie ist die Symmetrieachse;

e) das *gleichseitige Dreieck;* jede Höhe ist eine Symmetrieachse;

f) das *Quadrat;* jede Seitensymmetrale und jede Diagonale ist eine Symmetrieachse;

g) das *Rechteck;* jede Seitensymmetrale ist eine Symmetrieachse;

h) der *Kreis.* Welche und wieviel Symmetrieachsen besitzt er?

i) ein *Kreisbogen*, ein *Kreissegment*, ein *Kreissektor;* Symmetrieachse ist die Normale vom Mittelpunkte auf die zugehörige Sehne.

Aufgaben:

1. Es ist die Symmetrale und ein Punkt gegeben. Der zugeordnete Punkt zu finden.
2. Es ist die Symmetrale und eine Strecke gegeben. Die symmetrisch liegende Strecke zu finden.
   Die Strecke kann *a*) die Symmetrale selbst, *b*) erst in der Verlängerung schneiden, *c*) mit ihr parallel sein.

§ 49. Symmetrie von Körpern.

1. Lassen sich zwei Körper bezüglich einer Ebene in eine solche Lage bringen,

Fig. 56.

Fig. 57.

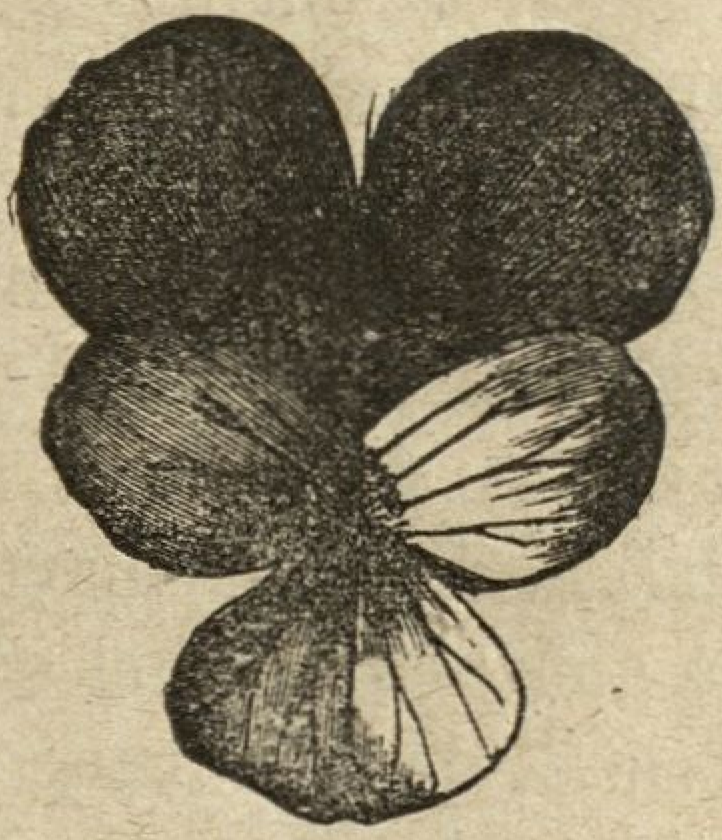


Fig. 58.

daß jedem Punkte des einen Körpers ein symmetrisch liegender des anderen entspricht, so sagt man, die beiden Körper liegen symmetrisch bezüglich dieser Ebene.

Der Schüler veranschauliche das Gesagte mit einem Kartonblatte und zwei kongruenten Würfeln, *a*) für die symmetrische, *b*) für die nicht symmetrische Lage! Jeder der beiden Würfel kann im ersten Falle als Spiegelbild des andern

[1]) Der Schüler zeichne diese und die folgenden Figuren auf durchscheinendem Papier und überzeuge sich *zunächst* durch bloße Drehung um die Symmetralen von der Richtigkeit der ausgesprochenen Sätze!

betrachtet werden. Was ist als Spiegel anzusehen? Derselbe Versuch mit den beiden Händen auszuführen.

2. Läßt sich ein Körper durch eine Ebene so in zwei Teile zerschneiden, daß jedem Punkte des einen ein symmetrisch liegender Punkt des andern Teiles entspricht, so heißt der Körper symmetrisch bezüglich dieser Ebene. Die Ebene selbst heißt eine Symmetrieebene.

Der Schüler ermittle Symmetrieebenen des Würfels, des Quaders und der Kugel; ebenso eine Symmetrieebene eines Hauses, des menschlichen Körpers und zeichne den Schnitt der Symmetrieebene des Blattes, Fig. 56, der Blüte, Fig. 57, und des Insektes, Fig. 58, mit der Bildfläche ein! Ein Beispiel eines symmetrischen Gebildes mit mehreren Symmetrieebenen ist ein Seestern.

Finden sich in den obigen Körpern (Fig. 56—58) Abweichungen von der streng symmetrischen Form?

Eigenschaften der Strecken- und Winkelsymmetrale und Konstruktionen auf Grund derselben. **§ 50.**

a) Es sei CD (Fig. 59) die Symmetrale der Strecke AB, also $AC = BC$ und $CD \perp AB$. Verbindet man irgendeinen Punkt M der Symmetrale mit den Endpunkten der Strecke und dreht die rechte Hälfte der Figur um CD als Achse um 180°, so muß, da die Winkel bei C als rechte gleich sind, CB in die Richtung von CA fallen; weil $BC = AC$, fällt ferner B auf A, somit BM auf AM.

Fig. 59.

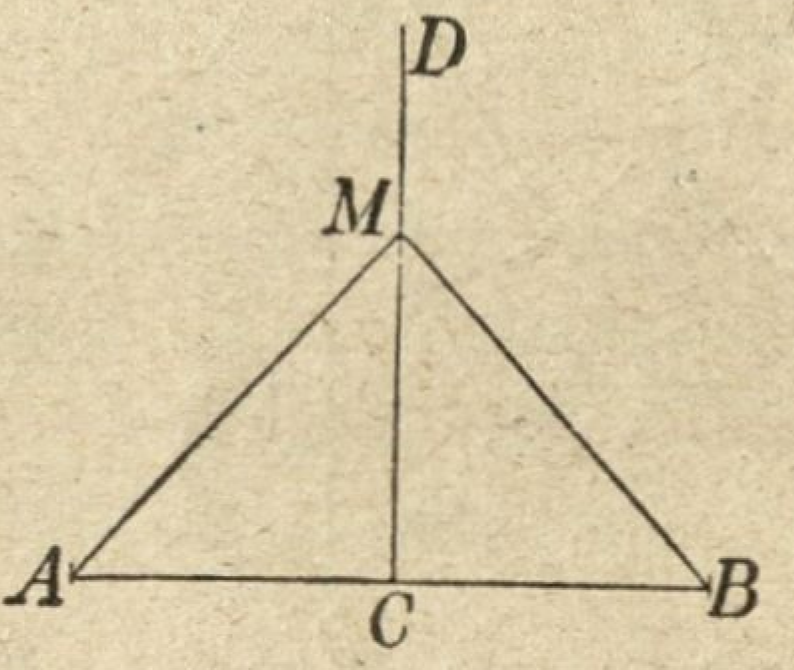
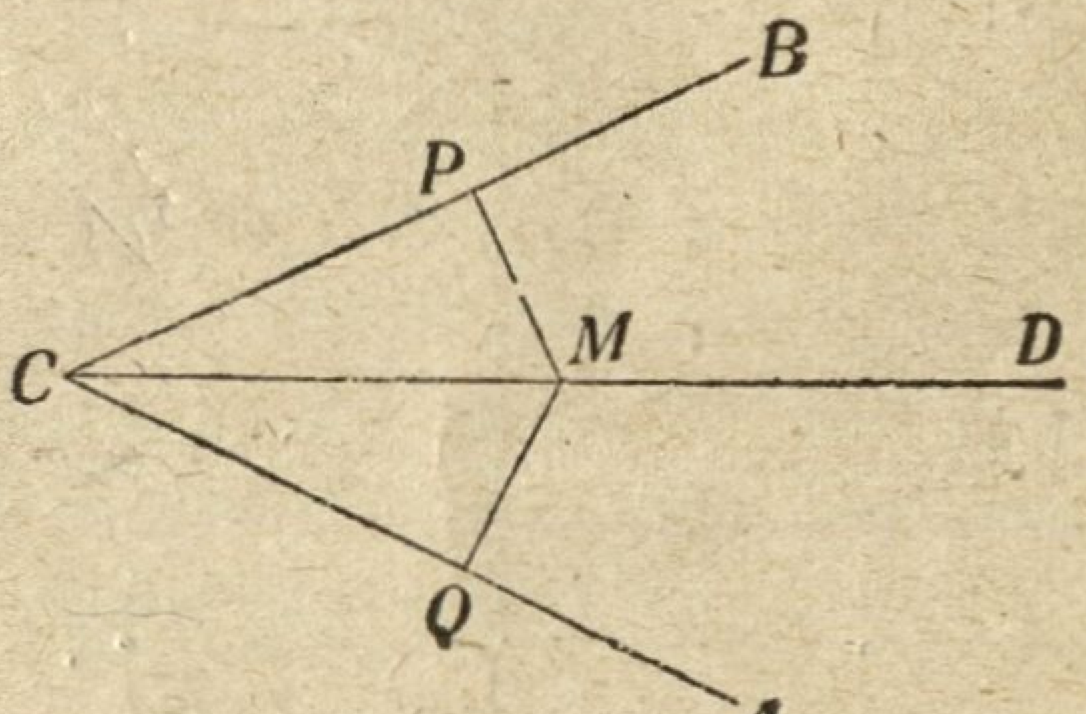


Fig. 60.



Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat also von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände, so liegt er in der Symmetrale der Strecke.

b) Es sei CD (Fig. 60) die Symmetrale des Winkels ACB, also $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Fällt man von irgend einem Punkte M der Symmetrale auf die Schenkel des Winkels die Normalen MP und MQ und dreht die untere Hälfte ACD der Figur um CD als Achse um 180°, so muß CA in die Richtung von CB fallen, weil $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ ist, MQ muß auf MP fallen, weil von einem Punkte (M) auf eine Gerade (CB) nur eine einzige Senkrechte möglich ist.

Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat also von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände, so gehört er der Symmetrale desselben an.

c) Konstruktionen.

1. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke AB (Fig. 61) zu konstruieren. Bestimmt man zwei Punkte C und D so, daß jeder von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke gleiche Abstände hat, so ist durch CD die Lage der Symmetrale der Strecke AB bestimmt.

Fig. 61.

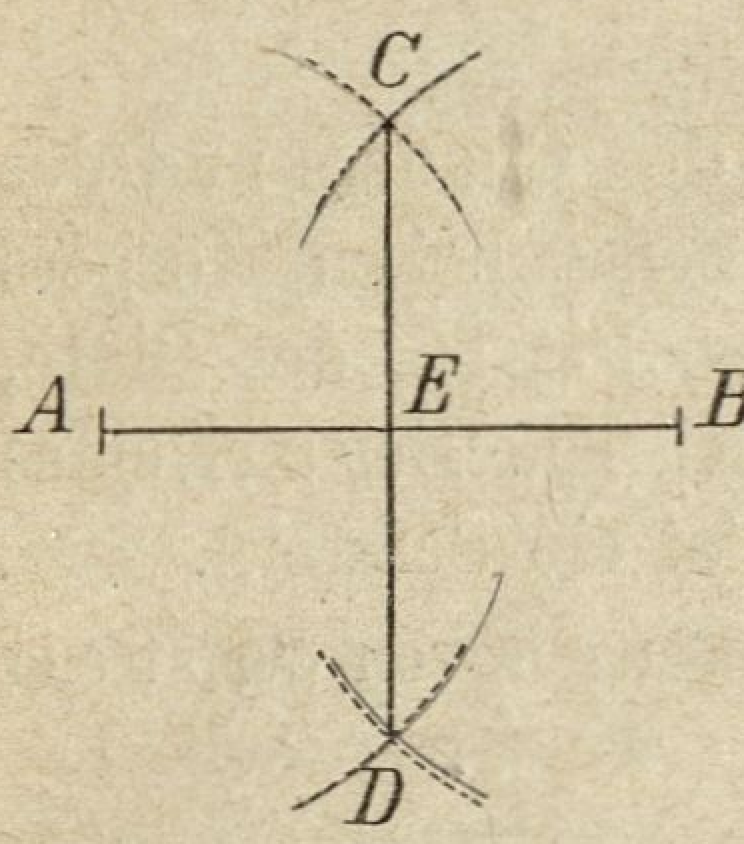
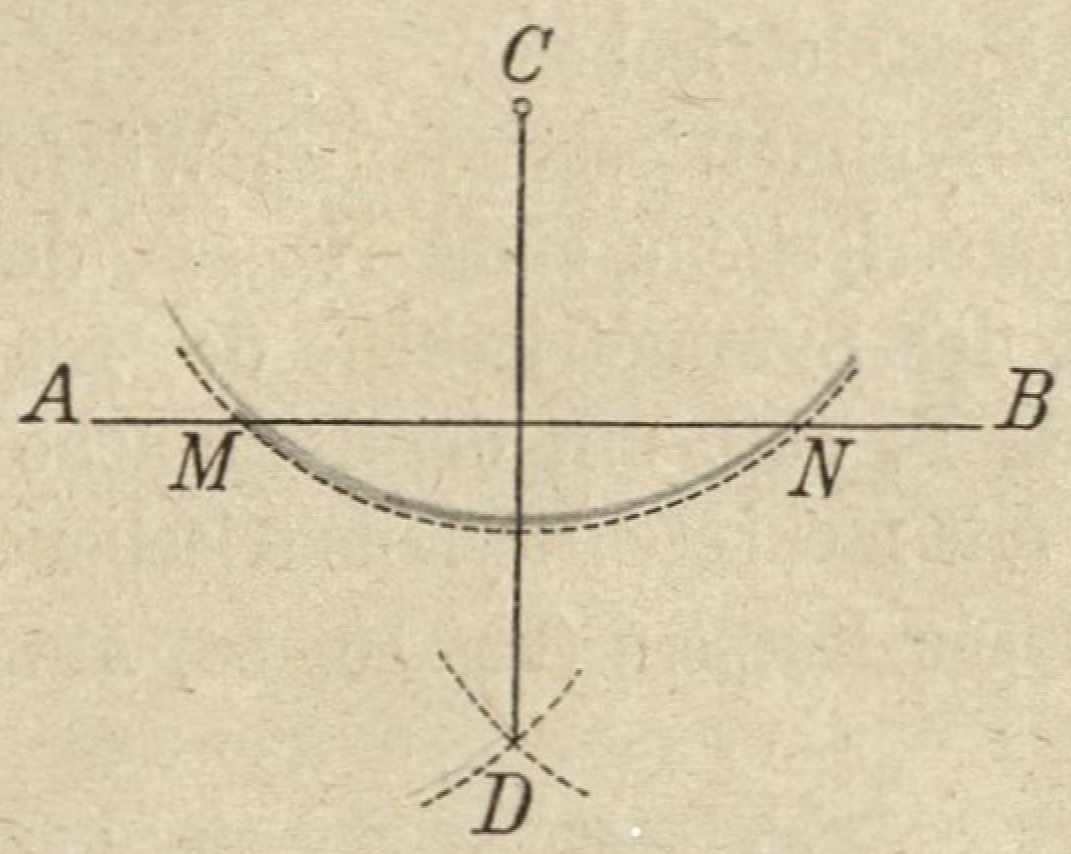


Fig. 62.



2. Eine gegebene Strecke zu halbieren. (Wie Aufgabe 1.)

3. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 62) von einem außer ihr liegenden Punkte C die Normale zu fällen.

Man bestimme auf der Geraden zwei Punkte M und N, welche von C gleich weit abstehen, und konstruiere zu MN die Symmetrale CD; diese ist auf AB normal.

Fig. 63.

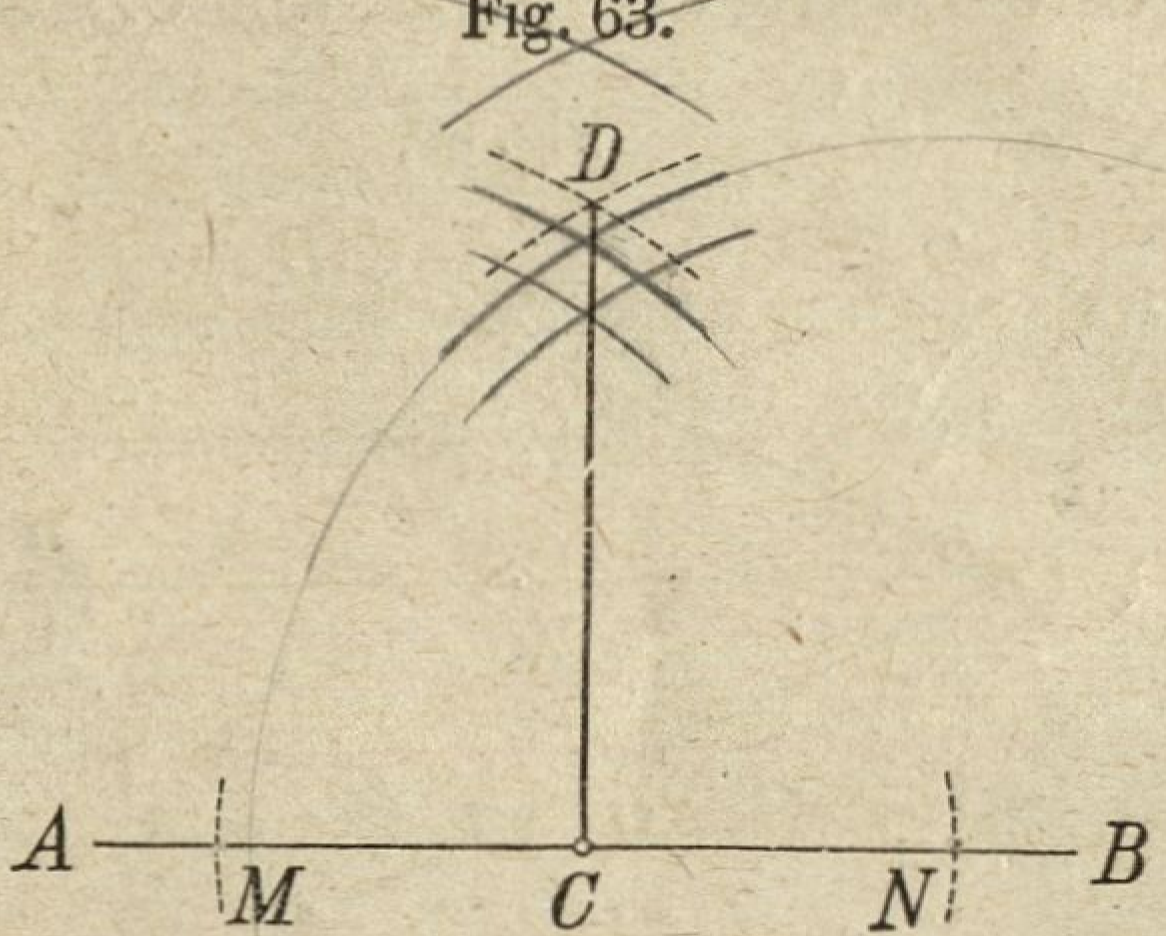
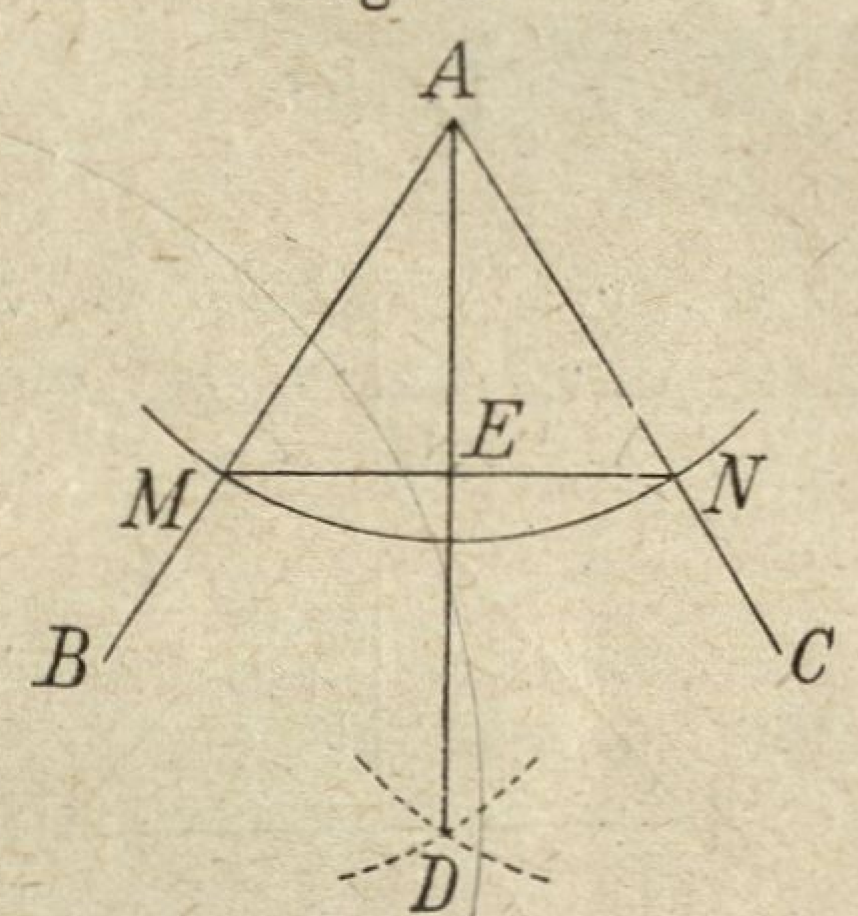


Fig. 64.



4. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 63) in einem in ihr liegenden Punkte C die Normale zu errichten.

Man bestimme in der Geraden zwei Punkte M und N so, daß $CM = CN$ ist, und konstruiere die Symmetrale von MN; zu ihrer Bestimmung ist außer C noch ein zweiter Punkt D erforderlich, für welchen $DM = DN$ ist.

5. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 64) zu konstruieren, d. h. den Winkel zu halbieren.

Bestimmt man auf den Schenkeln zwei Punkte M und N, welche vom Scheitel A gleich weit abstehen, und dann in der Winkelfläche den Punkt D so, daß er von M und N gleichen Abstand hat, so ist AD die Symmetrale der Strecke MN, folglich ist sie auch, wie man sich durch Drehung überzeugen kann, die Symmetrale des Winkels BAC.

Durch diese Konstruktion kann auch folgende Aufgabe gelöst werden:

6. Einen gegebenen Kreisbogen MN (Fig. 64) zu halbieren.

Man halbiere den zugehörigen Zentriwinkel.

Durch wiederholte Anwendung der Konstruktionen 2, 5 und 6 kann man eine Strecke, einen Winkel, einen Bogen in 4, 8, 16, ... gleiche Teile teilen.

Die Konstruktionen 1—6 können auch im Freien ausgeführt werden. Die erforderlichen Kreisbogen erhält man dadurch, daß man im Mittelpunkte einen Pflock mit einer daran befestigten Schnur einschlägt, einen zweiten Pflock an dem anderen Ende der Schnur befestigt und mit seiner Spitze bei straff gespannter Schnur den Bogen einritzt.

Aufgaben:

1. Nenne symmetrische römische Buchstaben und Zahlzeichen!
2. Die Symmetralen zweier Nebenwinkel zu konstruieren und ihre gegenseitige Lage zu ermitteln.
3. Einen Winkel *a*) von 30°, *b*) von 150° zu konstruieren. Auflösung von *a*) mit Hilfe eines gleichseitigen Dreieckes; von *b*) wie §35, Aufgabe 10 b. Auflösung von *a*) auch durch die Differenz 90°—60°.
4. Einen Winkel von *a*) 45°, *b*) 135° zu konstruieren.
5. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist gegeben. Die Winkel an der Grundlinie zu konstruieren.
6. Einen Halbkreis in Grade zu teilen oder einen Transporteur anzufertigen. Damit der Halbkreis von Grad zu Grad geteilt erscheine, muß er 180 gleiche Teile erhalten. Zu diesem Ende teile man den Halbkreis zuerst in 3 gleiche Teile; durch zweimaliges Halbieren derselben ergeben sich 12 gleiche Bogen, jeder von 15°. Wird ferner durch Versuche jeder solche Bogen in 3 und jeder neu erhaltene Bogen in 5 gleiche Teile geteilt, so erhält man 180 gleiche Teile, deren jeder ein Bogengrad ist.

Das allgemeine Dreieck. § 51.

Verbindet man einen Punkt der Symmetrale einer Strecke mit den Endpunkten der Strecke, so erhält man entweder ein gleichschenkliges oder ein gleichseitiges Dreieck; verbindet man aber einen der Symmetrale nicht angehörigen Punkt mit den Endpunkten der Strecke, so ergibt sich im allgemeinen ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten ungleiche Länge haben, welches daher ein *ungleichseitiges* Dreieck genannt wird. Das gleichseitige und das gleichschenklige Dreieck sind besondere Fälle des ungleichseitigen.

Neunter Abschnitt.

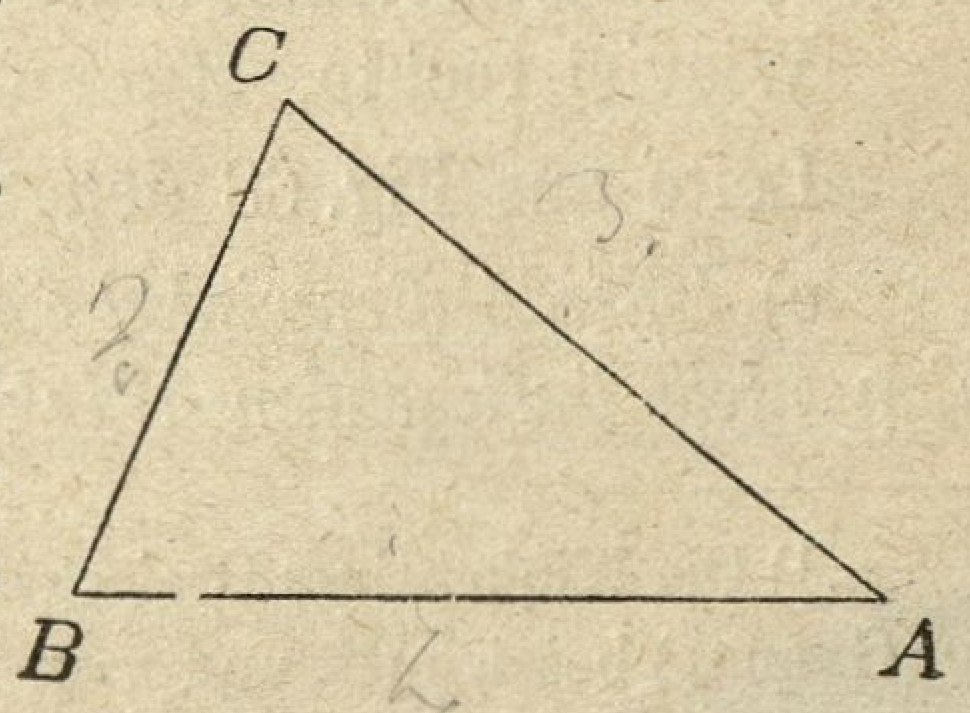
Das Dreieck, Kongruenz der Dreiecke; das Viereck und das Vieleck.

1. Das Dreieck; Kongruenz der Dreiecke.

Die Seiten eines Dreieckes. § 52.

Die Gerade AB (Fig. 65) ist die kürzeste Linie zwischen A und B, also ist die gebrochene Linie ACB, d. i. $AC + CB$ größer als AB.

Fig. 65.

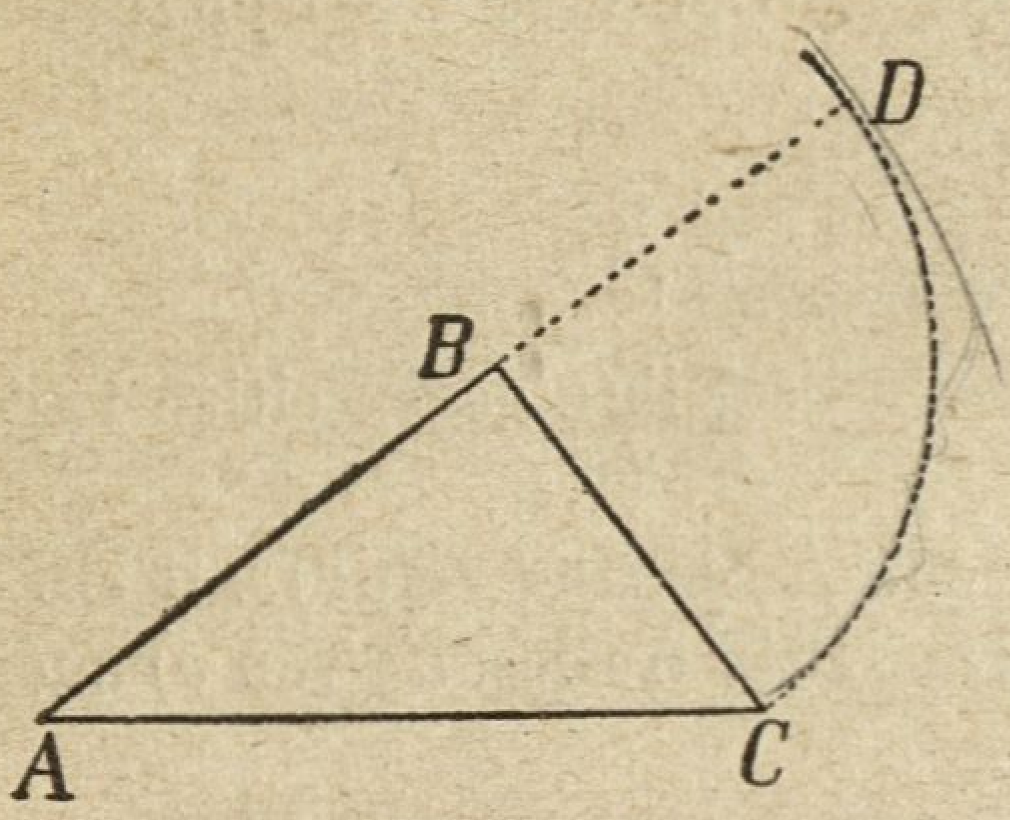


In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Aus drei Strecken, deren Längen 2 *m*, 3 *m* und 4 *m* sind, ist demnach ein Dreieck möglich; vergleicht man jede dieser drei Seiten mit der Differenz der beiden anderen, so ergibt sich:

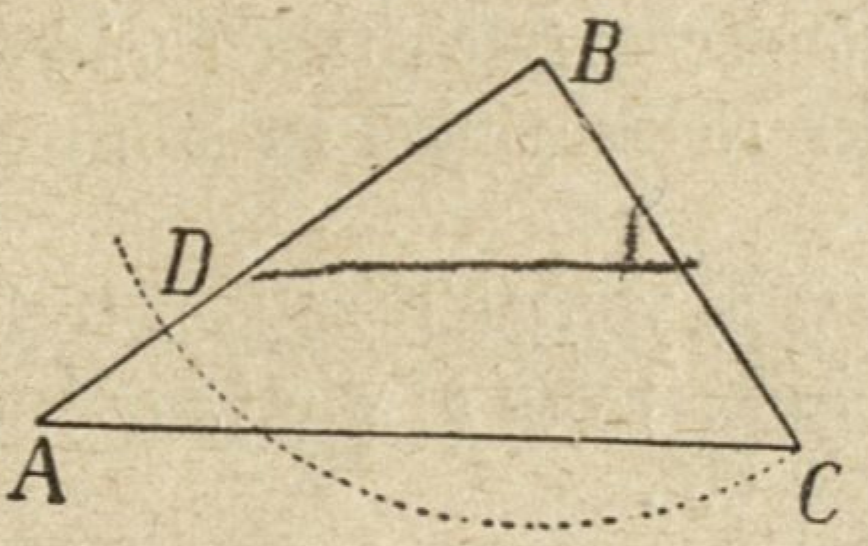
Jede Seite eines Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden anderen.

Fig. 66.



Die Richtigkeit dieser zwei Sätze bezüglich der Seite AC an den Figuren 66 und 67 zu prüfen.

Fig. 67.



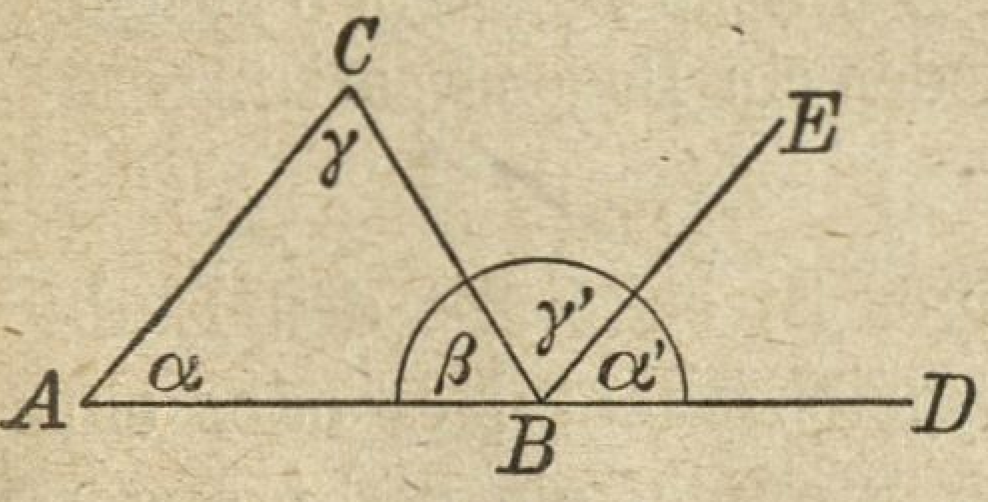
Wenn zwei Seiten eines Dreieckes 24 m und 17 m sind, zwischen welchen Grenzen liegt die dritte Seite?

In welcher Beziehung steht ein Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes zur Grundlinie?

§ 53. Die Winkel eines Dreieckes[1]).

Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Seite einen Winkel, welcher ein *Außenwinkel* des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreieck *innere* Winkel sind. CBD (Fig. 68) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 68.



Zieht man $BE \parallel AC$, so entstehen die zwei Winkel α' und γ', von denen α' dem Winkel α als Gegenwinkel, γ' dem Winkel γ als Wechselwinkel bei Parallelen gleich ist. Die Summe der drei Winkel α, β, γ ist daher so groß wie die Summe der Winkel α', β, γ'.

a) *Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten oder 180°.*

Läßt sich der Beweis dieses Satzes für das ungleichseitige Dreieck auch durch Teilung desselben in zwei rechtwinklige Dreiecke wie in § 34 für das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck erbringen?

Der Schüler überzeuge sich von der Richtigkeit des Satzes in anschaulicher Weise auch dadurch, daß er ein ungleichseitiges Dreieck auf Papier zeichnet, es ausschneidet, die Ecken abreißt und die drei Winkel (wie in Fig. 32) nebeneinander legt; welcher Winkel muß sich als Summe ergeben?

Dieser Satz läßt erkennen, daß die drei Winkel eines Dreieckes nicht beliebig gewählt werden können; durch zwei Winkel ist der dritte bestimmt.

Aus dem Satze *a*) folgt:

b) *Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.*

Wieviel rechte, stumpfe, erhabene Winkel kann ein Dreieck enthalten?

Leite aus Fig. 68 den Satz ab:

c) *Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.*

[1]) Die Winkel eines Dreieckes werden mit den griechischen Buchstaben α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma) bezeichnet, und zwar liegt α der Seite a, β der Seite b und γ der Seite c gegenüber.

Einteilung der Dreiecke. § 54.

1. Nach den Seiten unterscheidet man: *ungleichseitige*, *gleichschenklige* und *gleichseitige* Dreiecke.

2. Nach den Winkeln: *rechtwinklige* und *schiefwinklige* Dreiecke. Das rechtwinklige enthält einen rechten, das schiefwinklige nur schiefe Winkel. Letzteres kann *spitz-* oder *stumpfwinklig* sein. Das spitzwinklige enthält nur spitze, das stumpfwinklige einen stumpfen Winkel.

Aufgaben: § 55.

1. In einem Dreiecke sei der Winkel
   a) $\alpha = 65°$, $\beta = 87°$; *b)* $\alpha = 43° 10'$, $\beta = 102° 27'$; *c)* $\alpha = 25° 46' 21''$, $\beta = 74° 48' 49''$.
   Wie groß ist der dritte Winkel γ? Was geschieht mit γ, wenn α um 15° und β um 10° zunimmt oder abnimmt?
2. Wie groß ist in jedem stumpfwinkligen Dreieck die Summe der beiden spitzen Winkel?
3. Aus zwei Winkeln eines Dreieckes den dritten durch Konstruktion zu bestimmen.
4. In einem Dreiecke sind zwei innere Winkel
   a) $\alpha = 24°$, $\beta = 52°$; *b)* $\alpha = 65° 12'$, $\beta = 79° 54'$; *c)* $\alpha = 12° 47' 43''$, $\beta = 81° \; 9' 56''$.
   Wie groß ist der nicht anliegende Außenwinkel?
5. Ein Außenwinkel eines Dreieckes sei 102° 25′ 39″, ein innerer ihm nicht anliegender Winkel 40° 40′ 52″. Wie groß ist der andere ihm nicht anliegende Winkel?
6. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt der eine Außenwinkel an der Hypotenuse
   a) 96°, *b)* 117° 48′, *c)* 133° 56′ 50″.
   Wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?
7. Wenn ein Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes 130° ist, wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie? Welcher Satz ergibt sich daraus?
8. Wieviel Außenwinkel kann man an einer Ecke eines Dreieckes zeichnen? In welcher Beziehung stehen sie der Lage und Größe nach zueinander?

Die Höhen eines Dreieckes. § 56.

Unter einer Höhe eines Dreieckes versteht man die Senkrechte von einem Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite. Diese wird die Grundlinie des Dreieckes genannt. (§ 33.) Da jede Dreiecksseite als Grundlinie (Basis) angesehen werden kann, hat jedes Dreieck drei Höhen.

Der Schüler zeichne *a)* ein spitzwinkliges, *b)* ein rechtwinkliges, *c)* ein stumpfwinkliges Dreieck und bestimme in jedem die drei Höhen! Im Falle *c)* ist zu beachten, daß der Fußpunkt der Höhe auf die Verlängerung der Grundlinie über den Scheitel des stumpfen Winkels fällt, wenn dieser an der Grundlinie liegt. Es soll sich ergeben, daß in jedem Dreiecke alle drei Höhen einander in demselben Punkte schneiden.

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreieckes. § 57.

1. In § 34 *c* wurde gezeigt:
Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

Da diese Winkel den gleichen Schenkeln gegenüberliegen, kann man auch sagen:

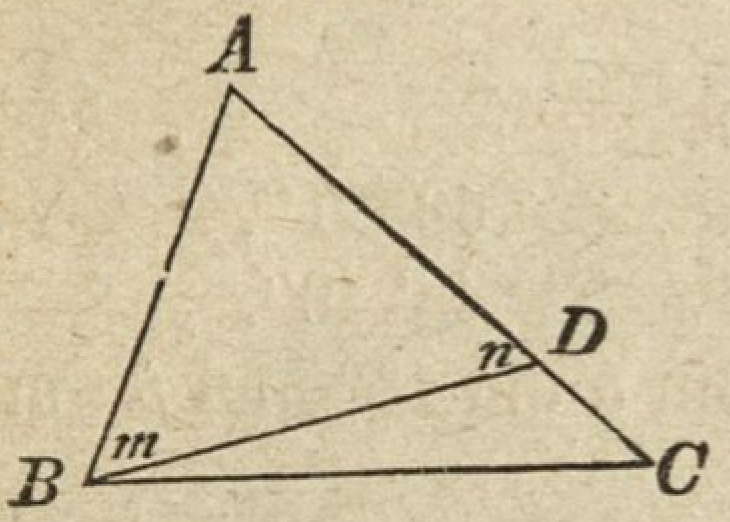
Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

2. *Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.*

Ist (Fig. 69) $AB = AD$, also das Dreieck ABD gleichschenklig, so sind die Winkel m und n an der Grundlinie einander gleich. Dreht man BD um B gegen BC, so bleibt $\sphericalangle A$ ungeändert, $\sphericalangle m$ wird größer, daher muß $\sphericalangle n$ um ebensoviel kleiner werden (§ 55, Aufg. 1); ist BD nach BC gelangt, so ist in dem Dreiecke ABC die Seite $AC > AB$ und zugleich der Winkel $ABC > ACB$.

Fig. 69.



Daraus folgt:

3. *Der größeren Seite eines Dreieckes liegt ein größerer Winkel gegenüber;* und umgekehrt:

4. *Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt eine größere Seite gegenüber.*

Welcher Winkel eines *rechtwinkligen* Dreieckes ist der größte? Daher ist auch welche Seite die größte? Verfahre in gleicher Weise bei einem *stumpfwinkligen* Dreieck!

Aufgaben:

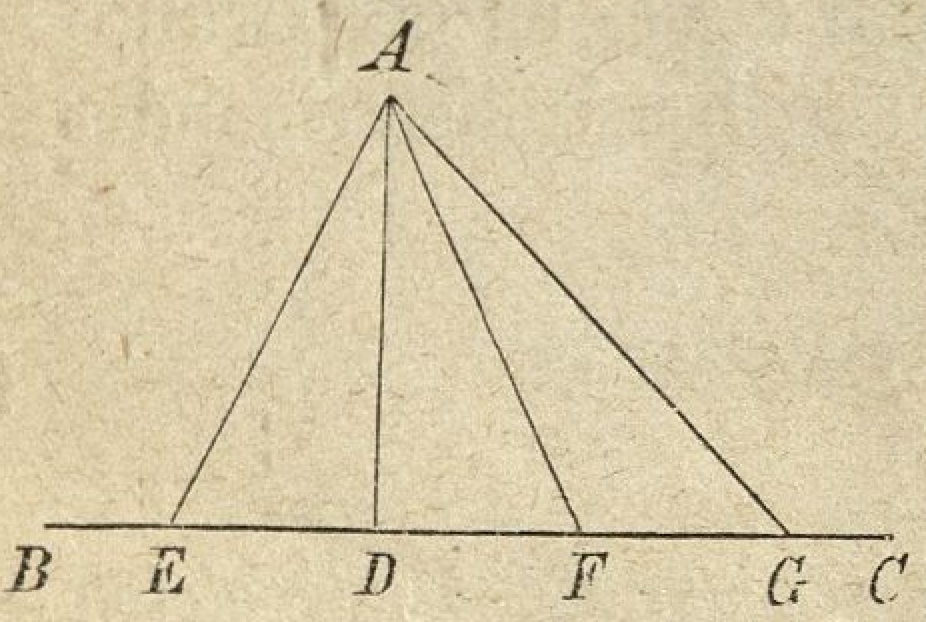
1. Die Höhe eines Gegenstandes (Hauses, Turmes usw.), der auf einer horizontalen Ebene steht, über dem Auge des Beobachters zu bestimmen.
   Man stelle sich vor dem Objekte so auf, daß der Vertikalwinkel, unter welchem die Höhe erscheint, 45° beträgt! Durch welche Strecke ist dann die Höhe des Objektes bestimmt?
   Wie erhält man nun die Höhe des Objektes bezüglich des Horizontes?
2. Wenn in einem Dreiecke $\sphericalangle A = 72°$, $\sphericalangle B = 55°$ ist, welche Seite ist die größte?
3. Wenn in einem Dreiecke die Seiten 75 *cm*, 48 *cm*, 90 *cm* sind, welcher Winkel ist der größte, welcher der kleinste?
4. Ist es möglich, daß in einem Dreiecke mit zwei Seiten von 76 *mm* und 98 *mm* Länge der ersten ein Winkel von 95° gegenüberliegt?

§ 58. Kürzeste Strecke von einem Punkte *a)* zu einer Geraden, *b)* zu einer Ebene.

1. Fällt man von einem Punkte A (Fig. 70) auf eine Gerade LC die Normale AD und zieht zugleich mehrere schiefe Strecken AE, AF, AG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADF, ADG, welche die Kathete AD gemeinschaftlich haben. Vergleiche diese mit den zugehörigen Hypotenusen und prüfe die Richtigkeit des Satzes:

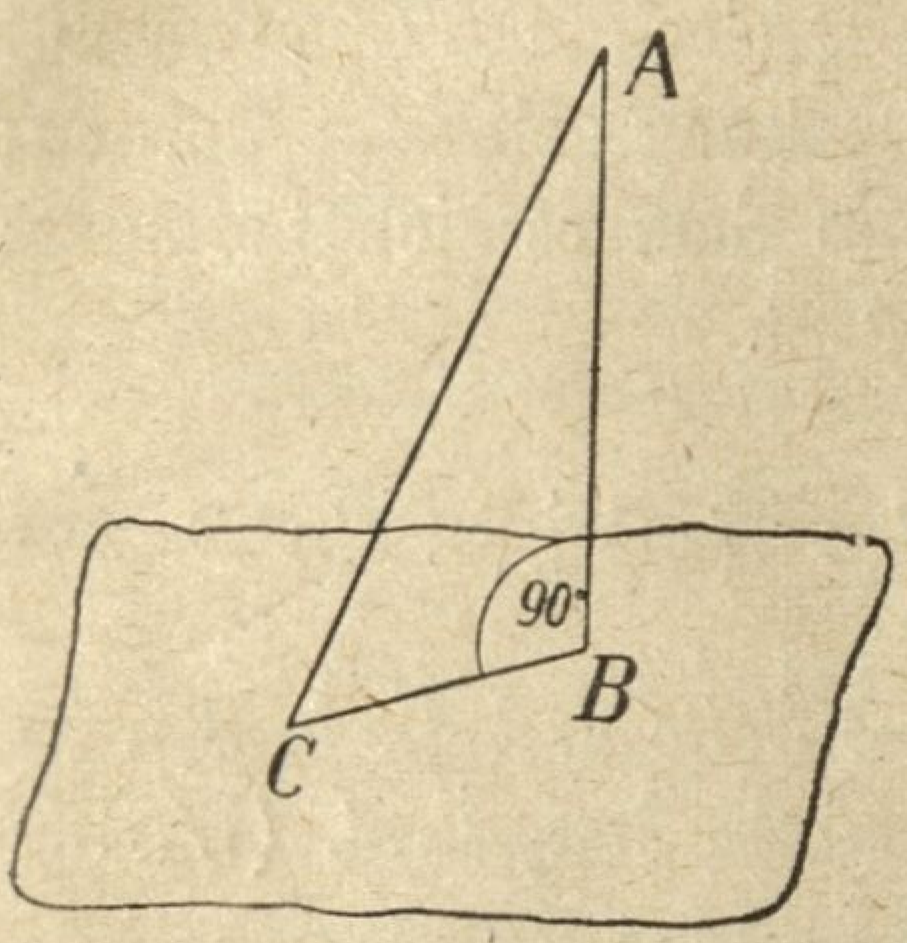
Die Normale ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkt auf eine gerade Linie gefällt werden kann.

Fig. 70.



2. Fällt man von einem Punkte A (Fig. 71) im Raume die Normale AB auf eine Ebene, verbindet B mit irgend einem Punkte C dieser Ebene und zieht AC, so erhält man (§ 45) ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in welchem AC als Hypotenuse größer ist als AB. Man erhält den Satz:

Fig. 71.



Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke, welche von diesem Punkte zu der Ebene gezogen werden kann.

Bestimmungsstücke eines Dreieckes. **§ 59.**

Ein Dreieck enthält sechs Bestandteile: die drei Seiten und die drei Winkel.

1. Ist nur *ein* Bestandstück eines Dreieckes, ein Winkel oder eine Seite gegeben, so lassen sich unzählig viele verschiedene Dreiecke konstruieren, die alle jenes Stück enthalten. (Konstruktion!) Durch *ein* Bestandstück ist also ein Dreieck nicht bestimmt.

2. Auch aus *zwei* Bestandstücken: aus zwei Winkeln, aus einer Seite und einem anliegenden Winkel, aus einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel oder aus zwei Seiten können unzählig viele verschiedene Dreiecke konstruiert werden. (Zeichnung!) Durch *zwei* Bestandstücke ist also ein Dreieck ebenfalls nicht bestimmt.

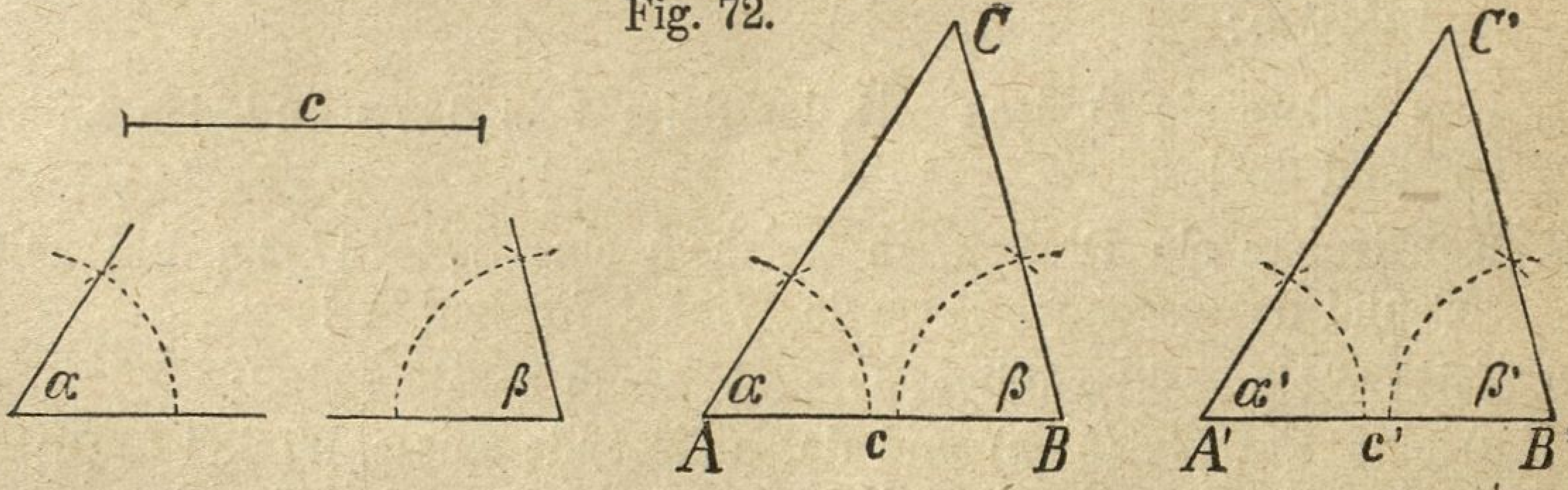
3. Sind *drei* Bestandstücke des Dreieckes gegeben, so können es sein: *a*) alle drei Winkel; *b*) eine Seite und zwei Winkel (die zwei anliegenden oder ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel); *c*) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; *d*) zwei Seiten und der einer derselben gegenüberliegende Winkel; *e*) alle drei Seiten.

Da durch zwei Winkel eines Dreieckes der dritte Winkel bestimmt ist, aus zwei Winkeln sich aber kein bestimmtes Dreieck konstruieren läßt, so wird auch durch drei Winkel ein Dreieck nicht bestimmt. Der erste der angeführten fünf Fälle liefert also keine bestimmte Konstruktion.

Es bleiben demnach nur die letzten vier Fälle zu untersuchen übrig.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind. **§ 60.**
Wann ist die Konstruktion nur möglich?

Fig. 72.



Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden oder ein ihr anliegender und der ihr gegenüberliegende Winkel.

a) Es sei (Fig. 72) c die gegebene Seite und die Winkel α und β die ihr anliegenden Winkel. Der Gang der Konstruktion ist aus Fig. 72 ersichtlich. Man erhält also aus den gegebenen drei Stücken nur das Dreieck ABC. Konstruiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck $A'B'C'$ etwa auf durchscheinendem Papier, so kann es mit ABC zur Deckung gebracht werden; es unterscheidet sich von ihm nur durch den Ort, an dem es sich befindet; es ist nur eine Kopie desselben und mit ihm *kongruent*.

Daraus folgt:

1. *Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel ist ein Dreieck bestimmt.*

2. (*I. Kongruenzsatz.*) *Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent.* (*WSW.*)

Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kann auf die Gleichheit von weiteren drei Paaren der Bestandstücke geschlossen werden nach dem Satze: *In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel und umgekehrt gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber.* Auf die Gleichheit welcher Stücke der beiden Dreiecke in Fig. 72 kann mithin aus ihrer Kongruenz geschlossen werden?

b) Sind von einem Dreieck eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so läßt sich auch der dritte Winkel durch Rechnung oder durch Zeichnung (§ 55, 3) bestimmen; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Dieser Fall läßt sich also auf den früheren *a*) zurückführen und man kann allgemein sagen:

Durch eine Seite und zwei Winkel ist ein Dreieck bestimmt.

Da rechtwinklige Dreiecke immer den rechten Winkel gleich haben, so gilt auch der Satz:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie 1. die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, 2. eine Kathete und einen gleichliegenden spitzen Winkel paarweise gleich haben.

Vergleiche die Aufeinanderfolge der Seiten und Winkel in den kongruenten und symmetrischen Dreiecken der Figuren 72 und 55! Das Dreieck $A'B'C'$ (Fig. 72) läßt sich mit ABC durch Verschieben in der Zeichenebene zur Deckung bringen. Wie in Fig. 55?

Aufgaben:

1. Konstruiere ein Dreieck mit der Seite 4 *cm* 9 *mm* und den anliegenden Winkeln 60° und 45°!

2. Konstruiere ein Dreieck, in welchem eine Seite 47 *mm*, ein anliegender Winkel 45° und der gegenüberliegende Winkel 75° beträgt!

3. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete (5 *cm*) und der anliegende spitze Winkel (30°);
   b) eine Kathete (4 *cm*) und der gegenüberliegende Winkel (75°);
   c) die Hypotenuse (5 *cm* 5 *mm*) und ein anliegender Winkel (55°)!

4. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie (48 *mm*) und ein anliegender Winkel (75°);
   b) die Grundlinie (45 *mm*) und der gegenüberliegende Winkel (110°);
   c) der Schenkel (5 *cm*) und ein Winkel (50°) an der Grundlinie!
5. Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse (6 *cm*) gegeben ist.
6. Die Höhe eines Objektes zu bestimmen.

Fig. 73.

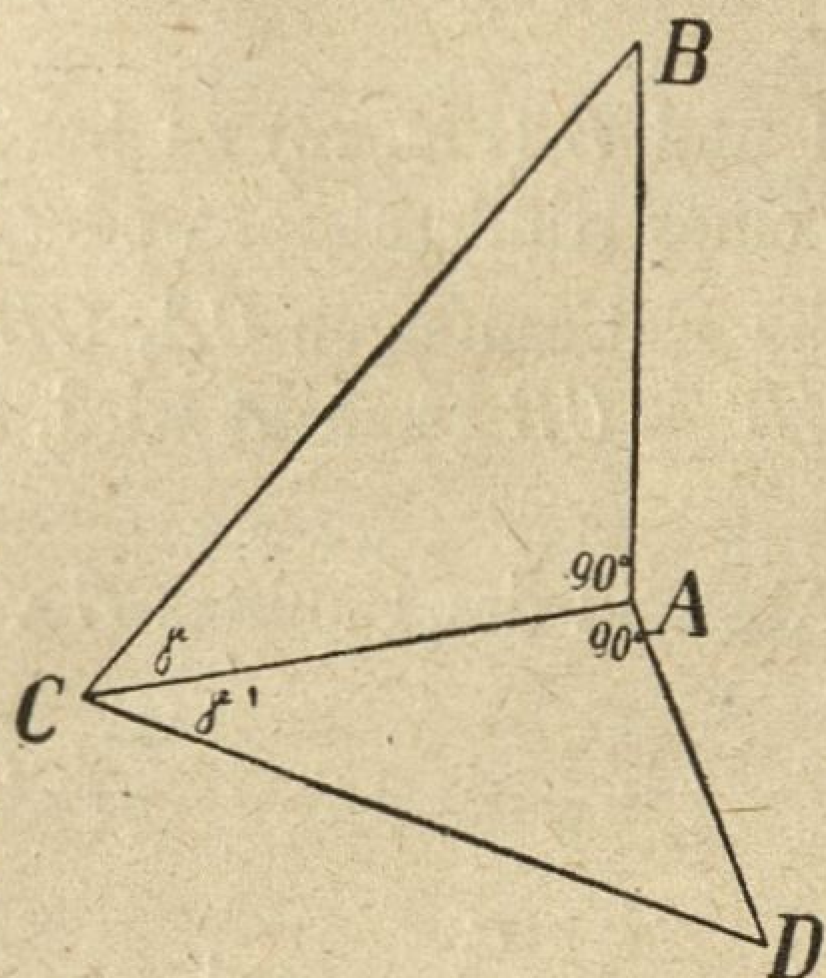
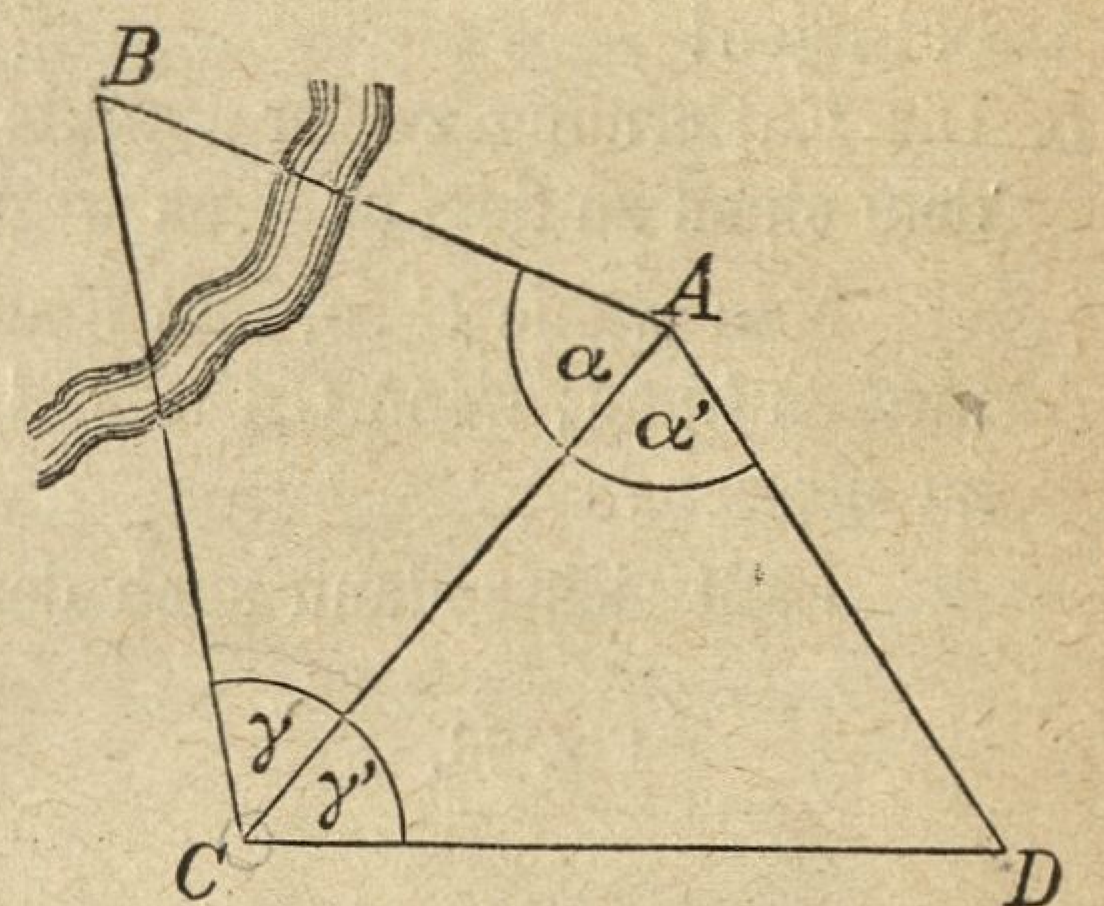


Fig. 74.



a) Man stelle sich vor dem Objekt *AB* (Fig. 73) auf und messe den Vertikalwinkel γ unter welchem die Höhe erscheint.

Überträgt man das Dreieck *ABC* auf den Horizont an *AC* (nach *WSW*), so ist welche Seite die Höhe des Objektes?

b) Man zeichne aus den Stücken *AC*, 90° und γ das Dreieck *ABC* in verjüngtem Maße, messe die Seite *AB* in der Figur und berechne die wahre Länge!

Bei einer genauen Messung wäre die Höhe des Auges über der horizontalen Ebene zu berücksichtigen.

7. Die Entfernung zweier Punkte (*A* und *B*) zu bestimmen, wenn man zu einem von ihnen (*B*) nicht gelangen kann (Fig. 74).

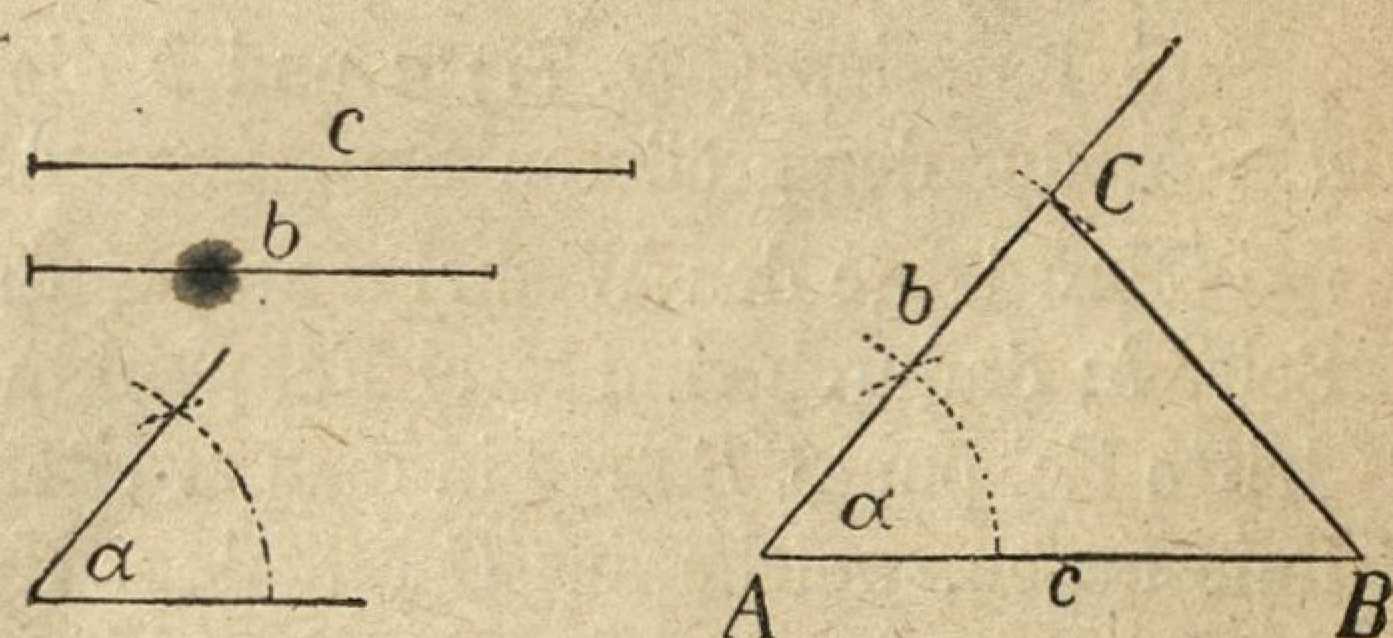
a) Man wähle den Punkt *C*, messe die Winkel *BCA* und *CAB* und konstruiere auf der entgegengesetzten Seite von *AC* das Dreieck $ACD \cong ACB$! Welche Seite des Dreieckes *ACD* muß nun gemessen werden?

b) Ebenso wie in Aufgabe 6 *b*).

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. § 61

Es seien *b* und *c* (Fig. 75) die zwei gegebenen Seiten und α der von ihnen eingeschlossene Winkel. Der Gang der Konstruktion ist aus Fig. 75 ersichtlich.

Fig. 75.



Wann ist die Konstruktion nur möglich?

Da die Konstruktion nur ein Dreieck ergibt, so folgt:

1. *Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck bestimmt.*

2. (*II. Kongruenzsatz.*) *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent.* (*SWS.*) Wie lautet dieser Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke?

Aufgaben:

1. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten 4 *cm* und 5 *cm*, welche einen Winkel von 60° einschließen!
2. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn dessen Schenkel (48 *mm*) und der Winkel am Scheitel (150°) gegeben sind!
3. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 4 *cm* 2 *mm* und 3 *cm* 6 *mm* sind!
4. Konstruiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 4 *cm* betragen!
5. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 76) zu bestimmen, wenn man von dem einen zu dem anderen wegen eines Hindernisses weder sehen noch gehen kann.

   Man wähle C so, daß man die Entfernungen CA, CB und den Winkel ACB messen kann; wenn $CA' = CA$, $CB' = CB$ gemacht wird, welche Strecke ist dann zu messen?

   Läßt sich sodann auch der Abstand des Punktes C von AB ermitteln?

Fig. 76.

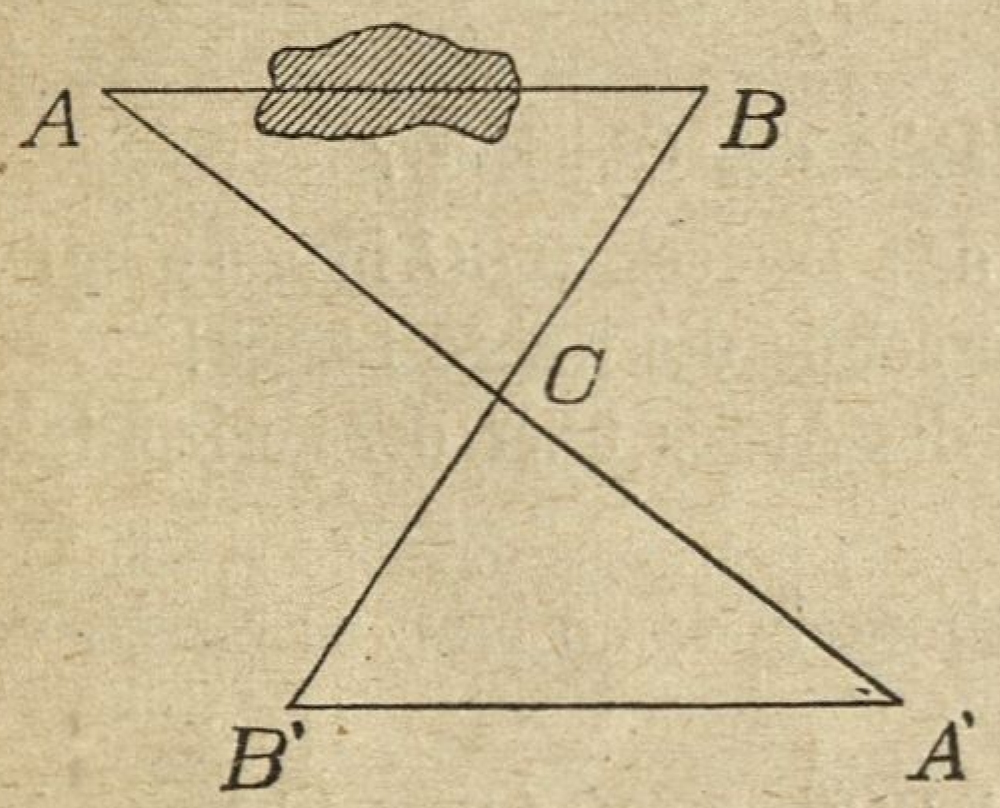
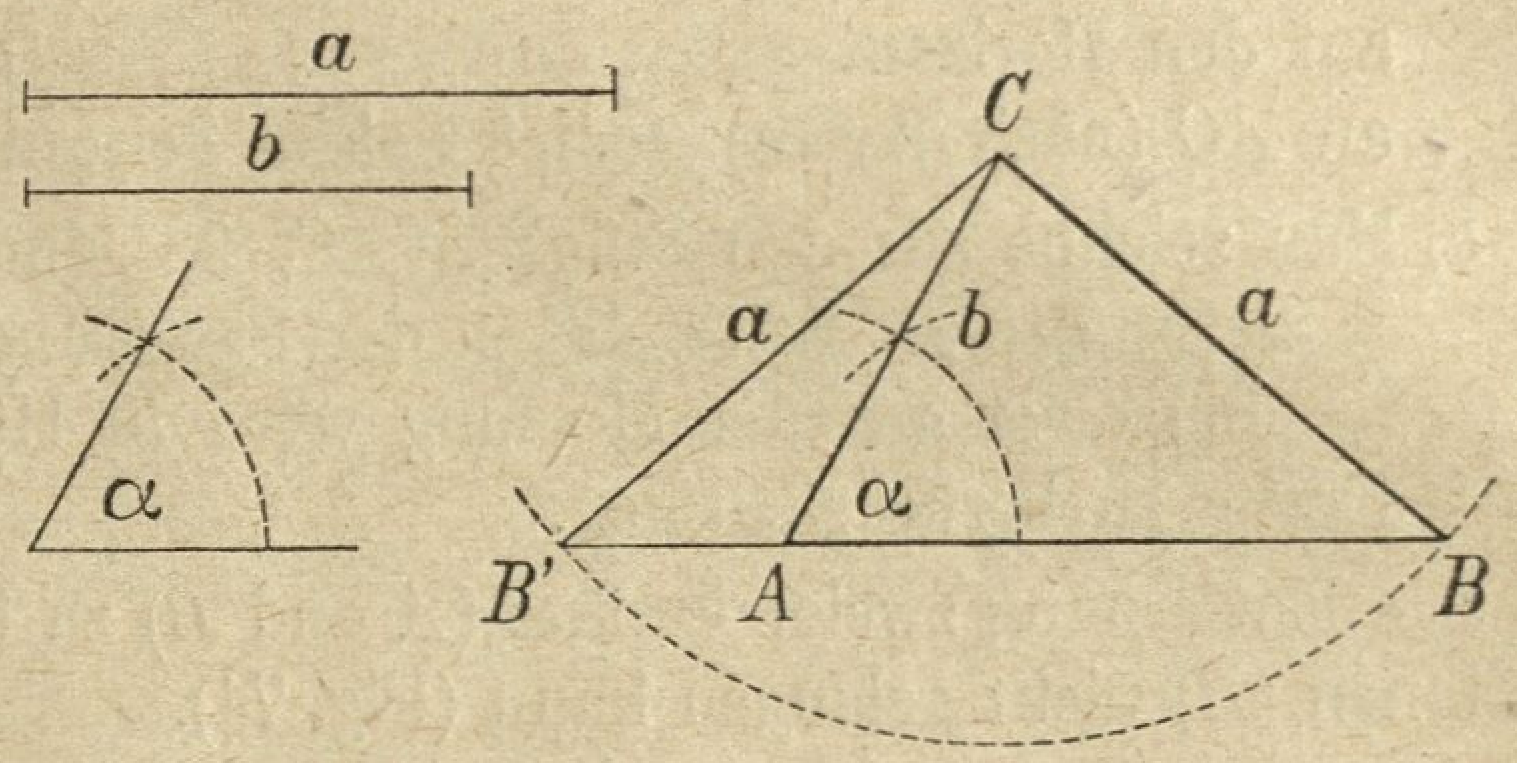


Fig. 77.



Lassen sich beide Entfernungen auch durch Konstruktion des Dreieckes ABC in verjüngtem Maßstabe bestimmen?

§ 62. *Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.*

Der gegebene Winkel kann der größeren oder der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

a) Es seien (Fig. 77) a und b die beiden gegebenen Seiten, und zwar sei $a > b$; der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel sei α.

Man trage den Winkel α auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muß in dem zweiten Schenkel AB und zugleich in der Kreislinie liegen, welche aus C mit dem Halbmesser a beschrieben wird. Der Eckpunkt B muß daher der Durchschnittspunkt dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB sein. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B', und man erhält somit zwei Dreiecke ABC und $AB'C$. Enthalten beide Dreiecke die gegebenen Stücke?

Welche Bedingung muß der Winkel α erfüllen, wenn die Aufgabe möglich sein soll?

Aus dieser Konstruktion folgt:

1. *Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck bestimmt.*

2. (*III. Kongruenzsatz.*) *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich,* **so** *sind die Dreiecke kongruent.* (*SsW.*)

Wie lautet dieser Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke?

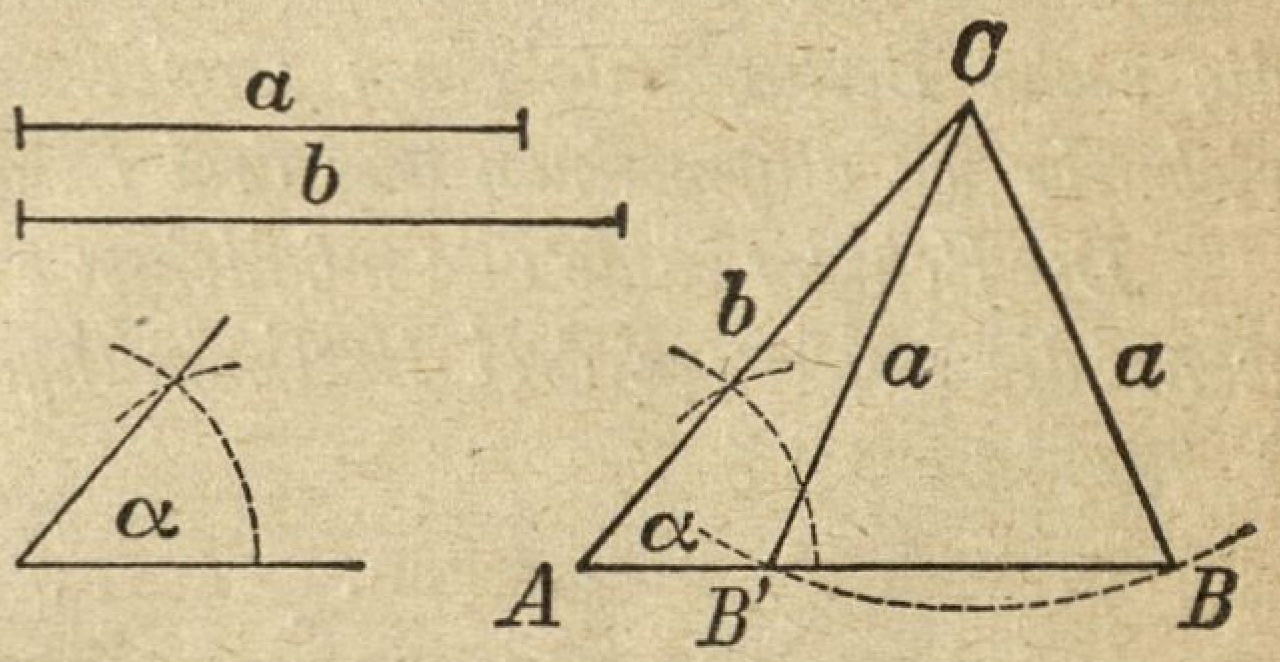
Aufgaben:

1. Konstruiere ein Dreieck in welchem die Seiten 3·5 *cm* und 4·8 *cm* vorkommen und der zweiten Seite ein Winkel von 75° gegenüberliegt!
2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse 45 *mm* und eine Kathete 3 *cm* ist!

b) Es seien (Fig. 78) a und b die zwei gegebenen Seiten, und zwar $a < b$, der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, sei α.

Durch ein ähnliches Verfahren wie oben unter *a*) erhält man zwei Dreiecke ABC und $AB'C$, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also im allgemeinen ein Dreieck nur *zweideutig* bestimmt; es kann aus der Gleichheit dieser Stücke auf die Kongruenz der Dreiecke nicht geschlossen werden.

Fig. 78.



Damit der aus C mit der kleineren Seite a beschriebene Bogen den Schenkel AB schneide, muß a größer sein als die zur dritten Seite gehörige Höhe. Ist die kleinere Seite a gleich dieser Höhe, so fallen die beiden Schnittpunkte B und B' in einen einzigen zusammen, d. i. der Kreisbogen berührt die dritte Seite, und man erhält ein rechtwinkliges Dreieck. Ist endlich a kleiner als die Höhe, so entsteht kein Dreieck. Welche Eigenschaft muß der gegebene Winkel haben?

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn alle drei Seiten gegeben sind. **§ 63.**

Die ersten zwei Seiten können willkürlich gewählt werden; welche Bedingungen muß die dritte Seite erfüllen, damit die Aufgabe möglich ist? (§ 52.)

Es seien (Fig. 79) a, b, c die Längen der drei Seiten. Der Gang der Konstruktion ist aus Fig. 79 zu ersehen. Da die beiden zur Bestimmung des Punktes C dienenden Kreise einander in zwei Punkten C und C' schneiden, so erhält man zwei Dreiecke ABC und ABC', welche die gegebenen drei Seiten haben. Diese zwei Dreiecke können aber durch Umklappen des einen um AB zur Deckung gebracht werden, da AB die Symmetrale von CC' ist. (Weshalb?)

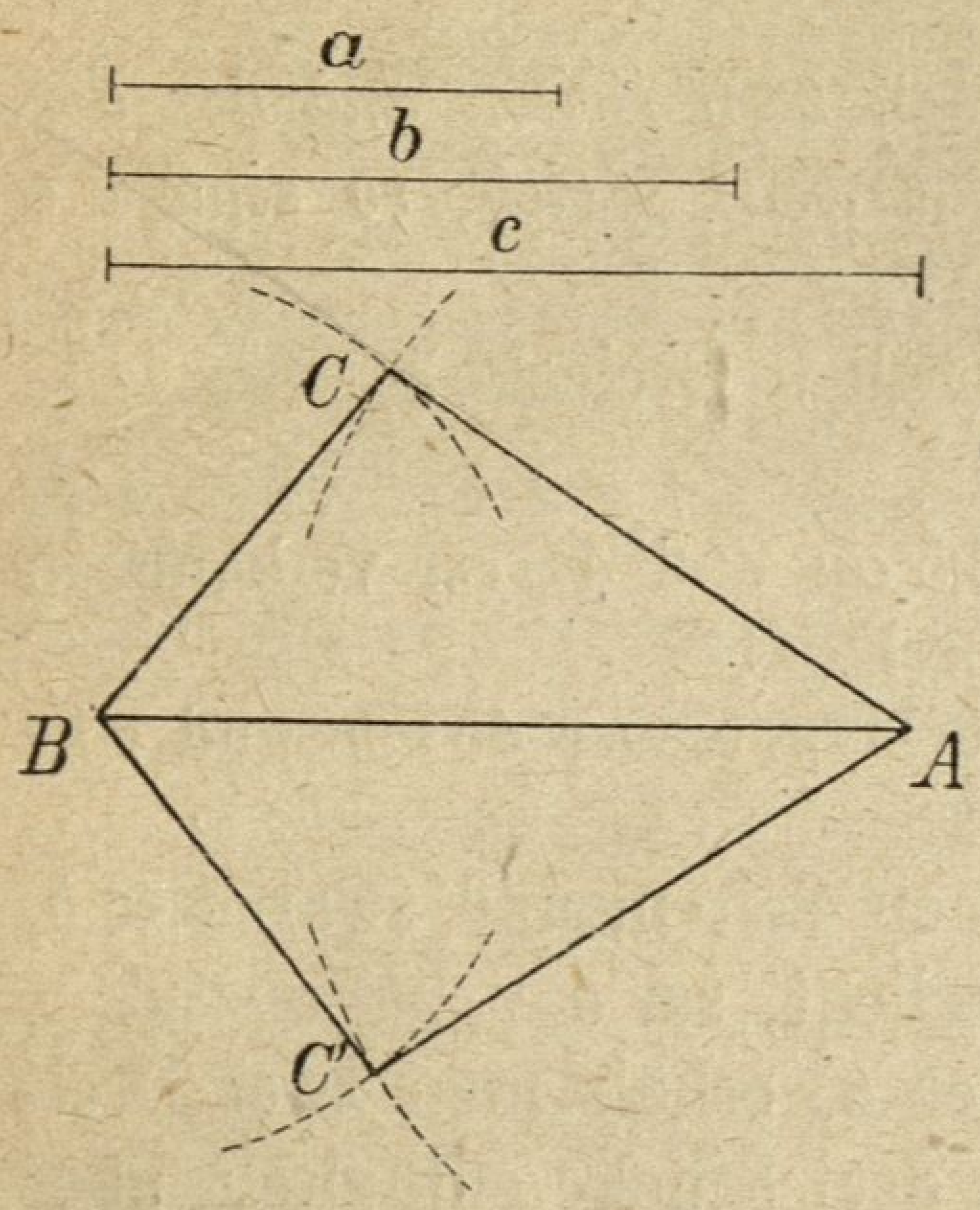
Daraus folgt:

1. *Durch drei Seiten ist ein Dreieck bestimmt.*

2. (*IV. Kongruenzsatz.*) *Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent.* (*SSS.*)

Wie lautet dieser Kongruenzsatz für gleichseitige Dreiecke?

Fig. 79.



Auf die Gleichheit welcher Stücke der Dreiecke ABC und ABC' (Fig. 79) kann aus ihrer Kongruenz geschlossen werden?

Aufgaben:

1. Konstruiere mit den Seiten 48 *mm*, 35 *mm*, 55 *mm* ein Dreieck!
2. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 42 *mm*!
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind! (Wann ist die Aufgabe nur möglich?)
4. Ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Umfange und *a*) der Grundlinie, *b*) einem Schenkel zu konstruieren.

§ 64. Abhängigkeit der sechs Bestandstücke eines Dreieckes voneinander.

Aus den in den §§ 60—63 enthaltenen Konstruktionsaufgaben ergibt sich, daß die sechs Bestandteile eines Dreieckes nicht unabhängig voneinander sind, daß vielmehr im allgemeinen aus drei Stücken die übrigen sich ergeben.

Der Schüler zähle alle möglichen Fälle nach den §§ 60—63 auf! Was geschieht, wenn die gegebenen drei Bestimmungsstücke abgeändert werden, mit den übrigen Bestandstücken?

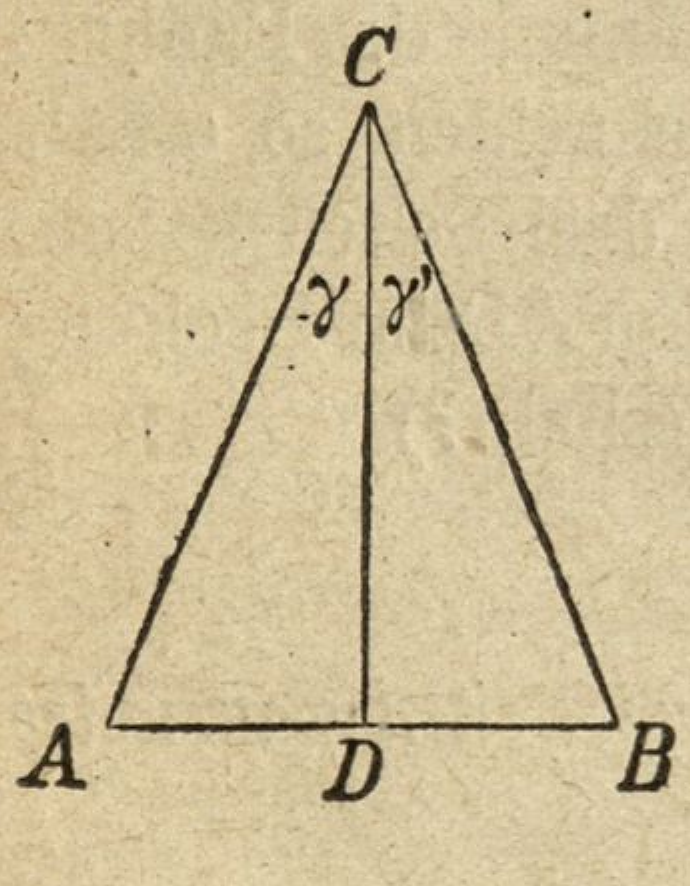
§ 65. Ein Dreieck zu übertragen.

Um diese Konstruktion auszuführen, hat man nur drei Stücke des gegebenen Dreieckes zu wählen, welche ein Dreieck bestimmen, und mit denselben das neue Dreieck zu konstruieren. Welche Konstruktion ist die einfachste?

§ 66. Symmetrie des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes. Das rechtwinklige Dreieck mit einem Winkel von 30°.

a) Es sei (Fig. 80) $AC = BC$, also das Dreieck ABC gleichschenklig. Die Symmetrale der Grundlinie muß durch C gehen. (§ 50.) Dreht man das Dreieck BCD um CD um 180°, so deckt es ACD. Folglich ist $\gamma = \gamma' = \frac{C}{2}$.

Fig. 80.



Die Symmetrale der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, die Höhe, die Strecke zwischen dem Scheitel und dem Halbierungspunkte der Grundlinie, die Symmetrale des Winkels am Scheitel fallen in dieselbe Gerade.

Das gleichschenklige Dreieck ist mithin eine einachsig symmetrische Figur. Seine Symmetrieachse ist die Höhe.

b) Aus diesen Sätzen über das gleichschenklige Dreieck ergibt sich:

In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

Das gleichseitige Dreieck ist eine dreiachsig symmetrische Figur; jede seiner drei Höhen ist eine Symmetrieachse des Dreieckes.

c) Ein gleichseitiges Dreieck zerfällt durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke, welche die spitzen Winkel 30° und 60° enthalten. Die dem Winkel von 30° gegenüberliegende Kathete ist die halbe Grundlinie des gleichseitigen Dreieckes und daher auch die Hälfte der Hypotenuse eines dieser rechtwinkligen Dreiecke. (Zeichnung!)

Es gilt daher der Satz:

Wenn ein Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes 30° beträgt, so ist die gegenüberliegende Kathete halb so groß als die Hypotenuse.

Aufgaben:

1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Grundlinie (42 *mm*) und die zugehörige Höhe (50 *mm*) gegeben sind.
2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn die Höhe auf die Grundlinie und der Winkel am Scheitel gegeben sind. Wie groß kann der Winkel am Scheitel sein?
3. Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Höhe (35 *mm*) auf die Hypotenuse gegeben ist.
4. In welcher Linie liegen die Scheitel aller gleichschenkligen Dreiecke über derselben Grundlinie?
5. Die drei Höhen eines gleichseitigen Dreieckes sind einander gleich.
6. Ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Höhe (40 *mm*) zu konstruieren.
7. Von einem Punkte C außerhalb einer Geraden auf diese im Felde das Lot zu fällen (Fig. 80).

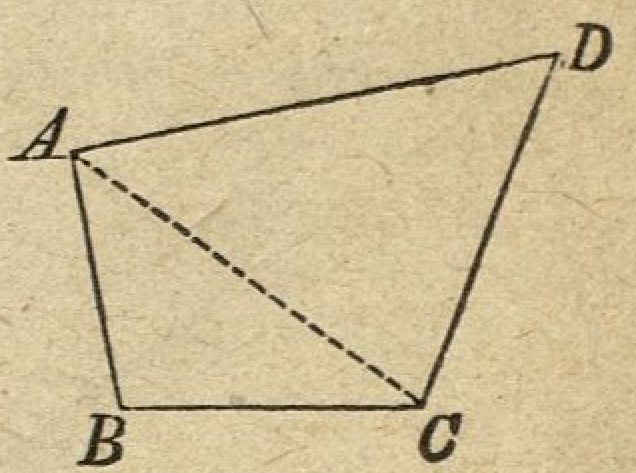
   Man konstruiere mit Hilfe einer Schnur (§ 50) einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkte C, der die Gerade in den Punkten A und B schneidet; halbiert man sodann mit Hilfe des Meßbandes die Strecke AB in D, so ist die Verbindungslinie CD die gesuchte Normale.

2. Das Viereck.

Erklärungen. § 67.

Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein *Viereck* genannt. Jedes Viereck $ABCD$ (Fig. 81) hat vier Seiten, vier Winkel und vier Eckpunkte. Die Summe aller Seiten eines Viereckes heißt dessen *Umfang*.

Fig. 81.



Eine Strecke AC, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt eine *Diagonale*.

Wieviel Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

Winkelsumme eines Viereckes. § 68.

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke.

Prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten oder 360°.

Wieviel Winkel eines Viereckes bestimmen infolge dieser Beziehung die übrigen?

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder?

Wieviel spitze, rechte, stumpfe oder erhabene Winkel kann ein Viereck enthalten?

Es sollen nur Vierecke mit hohlen Winkeln betrachtet werden.

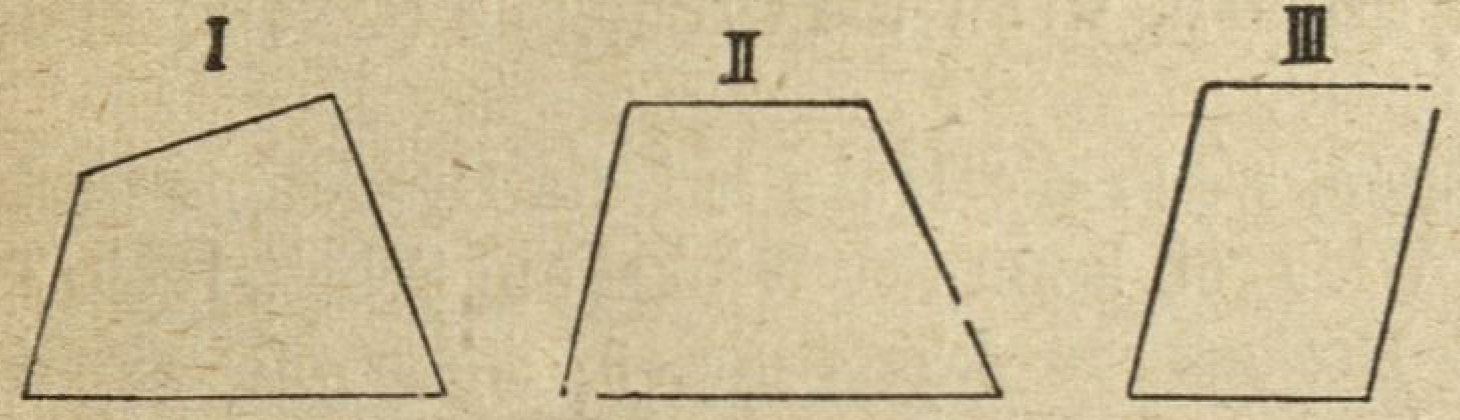
Aufgabe:

In einem Vierecke ist $\sphericalangle A = \frac{2}{3} R$, $\sphericalangle B = \frac{3}{4} R$, $\sphericalangle C = 1\frac{1}{6} R$; $\sphericalangle D$ zu berechnen.

§ 69. Arten der Vierecke.

Mit Rücksicht auf die Lage der *gegenüberliegenden Seiten* unterscheidet man drei Arten der Vierecke.

Fig. 82.



Ein Viereck, in welchem *keine Seite* mit einer anderen parallel ist, heißt ein Trapezoid[1]). Ein Viereck, in welchem *zwei* gegenüberliegende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nicht parallel sind, heißt ein Trapez[2]). Ein Viereck, in welchem *je zwei gegenüberliegende Seiten parallel* sind, heißt ein Parallelogramm[3]) Wie heißen also die Vierecke der Fig. 82?

§ 70. Allgemeine Eigenschaften der Parallelogramme.

a) Die Winkel.

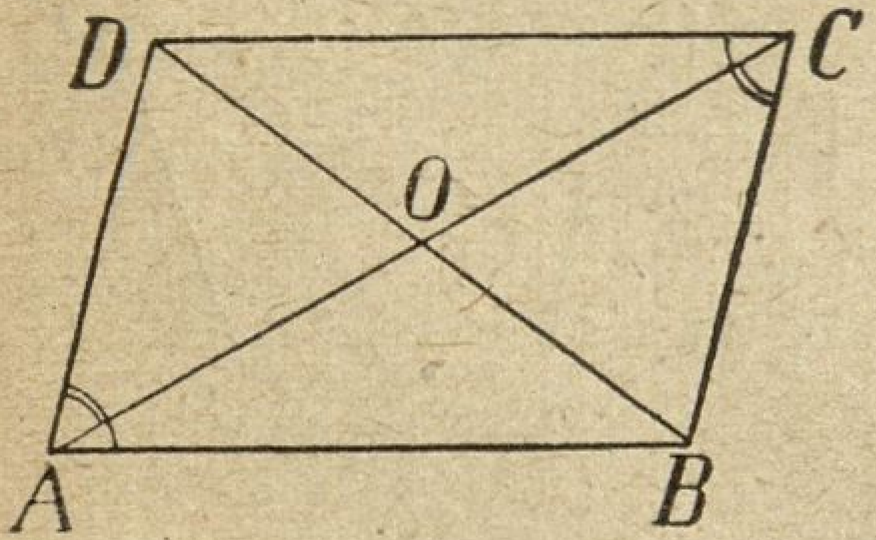
Je zwei gegenüberliegende Winkel eines Parallelogrammes sind einander gleich (§ 43), je zwei an derselben Seite eines Parallelogrammes liegende Winkel sind supplementär (§ 41,1).

Wie viele Winkel eines Parallelogrammes braucht man infolge dieser gegenseitigen Abhängigkeit nur zu kennen, um die übrigen bestimmen zu können?

Wenn ein Winkel eines Parallelogrammes 1. ein rechter, 2. ein schiefer ist, wie sind die übrigen Winkel beschaffen? Kann man also von *rechtwinkligen* und von *schiefwinkligen* Parallelogrammen sprechen?

b) Die Seiten und Diagonalen eines Parallelogrammes.

Fig. 83.



In dem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 83) sei O der Halbierungspunkt der Diagonale AC, DO und BO seine Verbindungslinien mit D und B; dreht man das Parallelogramm $ABCD$ um den Punkt O in der Zeichenebene um 180°[4]), so fällt OC auf OA und OA auf OC, wegen $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$, CD in die Richtung von AB, wegen $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, AD in die Richtung von CB, daher D auf B und CD auf

---

[1]) Griech. trapezoeides (τραπεζοειδής), trapezähnlich. — [2]) Griech. trapeza (τράπεζα), Tisch. — [3]) Griech. gramme (γραμμή), Strich, Umriß; parallelogrammon (παραλληλόγραμμον), die aus Parallelen gebildete Figur. — [4]) Der Schüler mache die Figur 83 auf Pauspapier, bringe sie mit der Figur des Buches zur Deckung und führe die Drehung um eine durch O gesteckte Nadel wirklich aus.

AB, *DA* auf *BC*, *DO* auf *BO* und *BO* auf *DO*; da die Drehung 180° betrug, ist die Linie *DOB* eine gerade. Daraus folgt:

1. *In einem Parallelogramme halbieren die Diagonalen einander und die Gegenseiten sind einander gleich; oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.*

Da Senkrechte auf eine Gerade parallel sind, so gilt der Satz:

2. *Parallele Gerade haben in allen Punkten voneinander den gleichen Abstand.*

Nimmt man eine Seite eines Parallelogrammes als Grundlinie an, so heißt die Normale zwischen der Grundlinie und der Gegenseite die *Höhe* des Parallelogrammes.

Wieviel Höhen hat jedes Parallelogramm?

Wenn zwei anstoßende Seiten eines Parallelogrammes gleich sind, so sind alle vier Seiten gleich, das Parallelogramm heißt *gleichseitig*; sind zwei anstoßende Seiten ungleich, so heißt es *ungleichseitig*.

Kommen in einem ungleichseitigen Parallelogramme nicht auch gleiche Seiten vor?

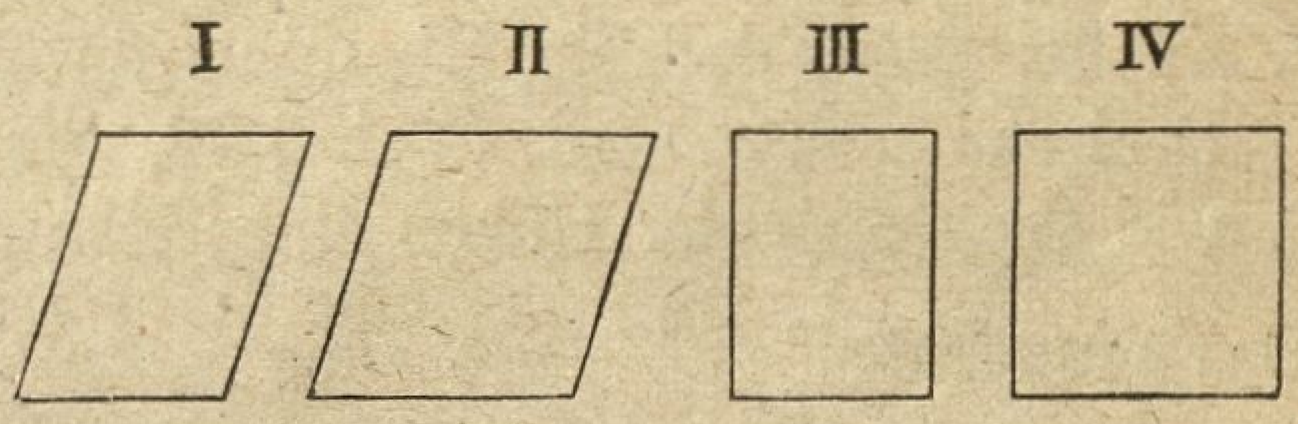
Aufgaben:

1. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist es ein Parallelogramm (§ 63, aus der Gleichheit von Seiten der Dreiecke auf die von Wechselwinkeln zu schließen und § 41, 2).
2. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm. (Mit § 61 und § 41, 2.)
3. Halbieren die Diagonalen eines Viereckes einander, so ist es ein Parallelogramm (§ 61 und Aufgabe 2).

Einteilung der Parallelogramme. **§ 71.**

Mit Rücksicht auf die *Größe der Winkel und der Seiten* ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen: das schiefwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das *Rhomboid*[1]); das schiefwinklige gleichseitige Parallelogramm oder der *Rhombus*[1]); das rechtwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das *Rechteck* und das rechtwinklige gleichseitige Parallelogramm oder das *Quadrat*.

Fig. 84.



Benenne die in Fig. 84 I—IV dargestellten Parallelogramme!

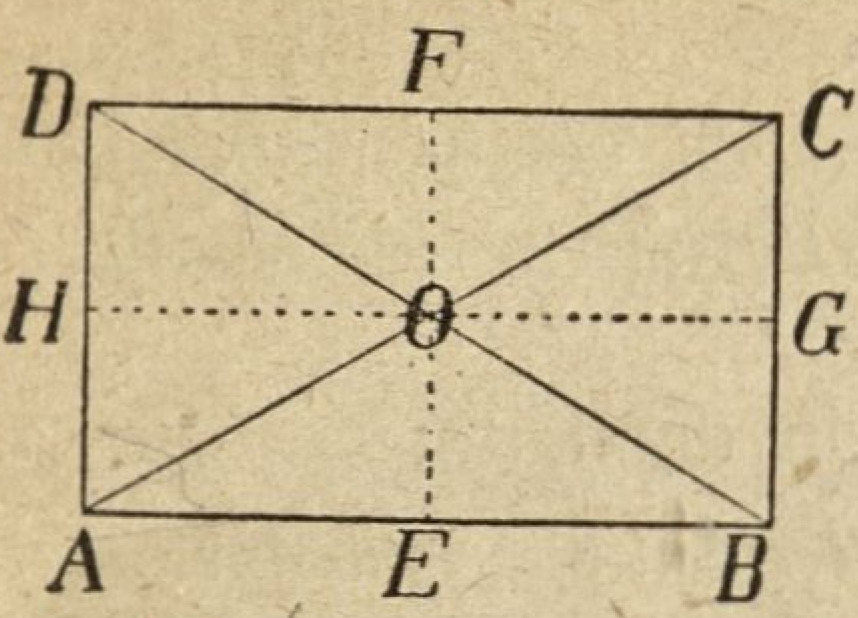
Das Rechteck. **§ 72.**

Das Dreieck *ABC* (Fig. 85) läßt sich durch Umklappen so auf das Dreieck *ABD* legen, daß Winkel *B* den Winkel *A*, Seite *BC* die Seite *AD* deckt; wohin fällt *AC*?

---

[1]) Griech. rhombos (ῥόμβος), rhomboeides (ῥομβοειδής) rhombusartig.

Fig. 85.



1. *Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.*

Die Symmetrale EF der Seite AB ist zugleich Symmetrale des Rechteckes.

Beweis durch Deckung: Wohin kommt B durch eine halbe Umdrehung des Teiles $EBCF$ um EF? In welche Richtung fällt BC? Wohin der Punkt C? Wohin CF?

2. *Das Rechteck ist eine zweiachsig symmetrische Figur. Jede der beiden Seitensymmetralen ist Symmetrieachse.*

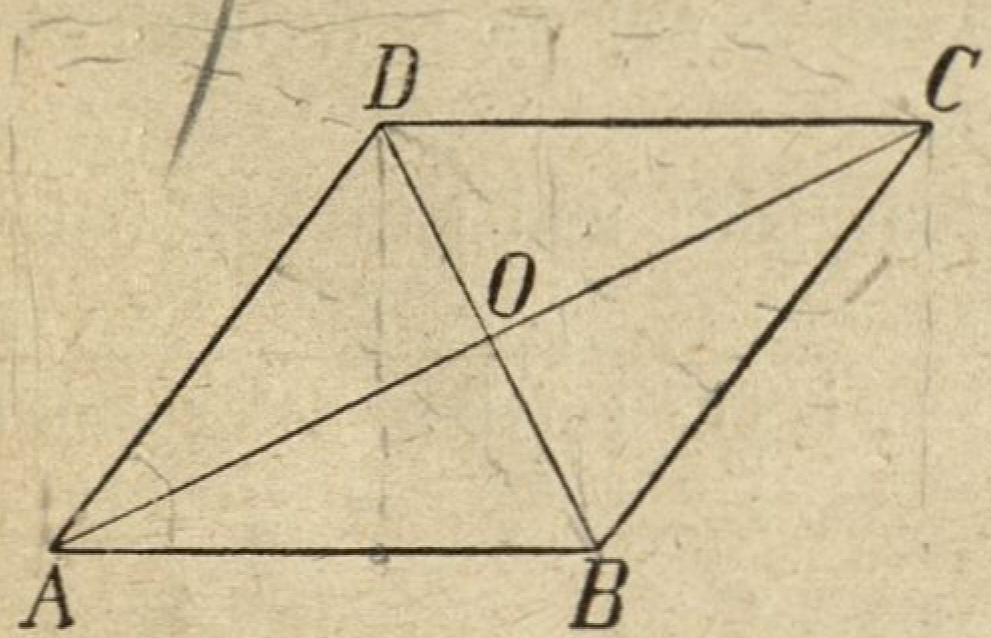
Aufgabe:

Zu beweisen, daß ein Rechteck durch die beiden Diagonalen in zwei Paare kongruenter Dreiecke zerlegt wird. (Vgl. § 73, Aufgabe 1.) Gilt der Satz auch von einem Rhomboid?

§ 73. Der Rhombus.

In Fig. 86 ist $AD = CD = BC = AB$. Nach § 50 ist daher BD die Symmetrale von AC und AC die Symmetrale von BD.

Fig. 86.



Da auch Dreieck ABC mit ADC und Dreieck ABD mit CBD durch eine Drehung um 180° um die Achse AC beziehungsweise BD zur Deckung gebracht werden kann, so sind auch AC und BD Symmetralen des Rhombus.

1. *Jede Diagonale eines Rhombus ist die Symmetrale der andern.*

2. *Jede der beiden Diagonalen ist eine Symmetrieachse des Rhombus; er ist zweiachsig symmetrisch.*

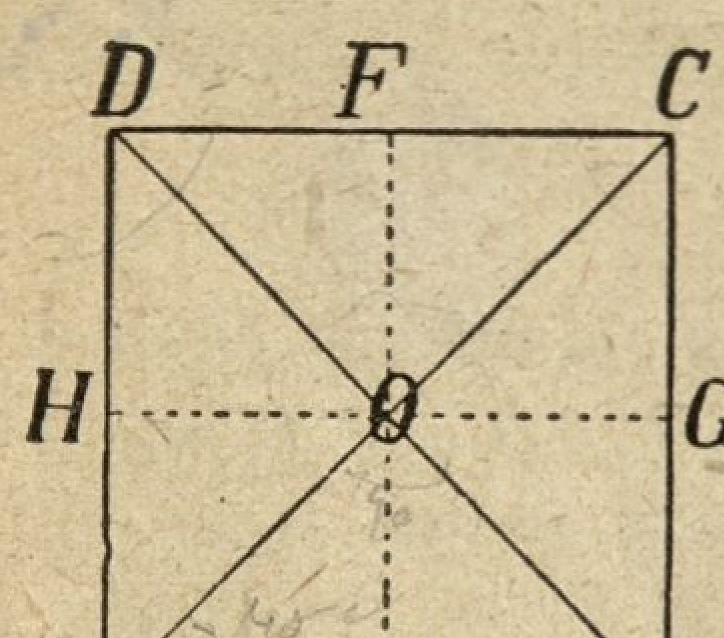
Daraus folgt, daß die Diagonalen eines Rhombus zugleich die Winkelsymmetralen sind.

Aufgaben:

1. Zu beweisen, daß ein Rhombus durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt wird. (Vgl. § 72, Aufgabe!)
2. Die Gleichheit der Höhen eines Rhombus zu beweisen. (§ 60.)

§ 74. Das Quadrat.

Fig. 87.



Das *Quadrat ABCD* (Fig. 87) vereinigt in sich die Eigenschaften des Rechteckes und des Rhombus.

Man hat daher folgende Sätze:

1. *Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich, jede ist die Symmetrale der anderen; sie sind die Symmetralen der Winkel, welche sie durchschneiden.*

2. *Das Quadrat ist vierachsig symmetrisch*; sowohl jede der zwei Seitensymmetralen als auch jede der zwei Diagonalen ist eine Achse desselben.

Aufgabe:

Zu beweisen, daß ein Quadrat durch die Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt wird.

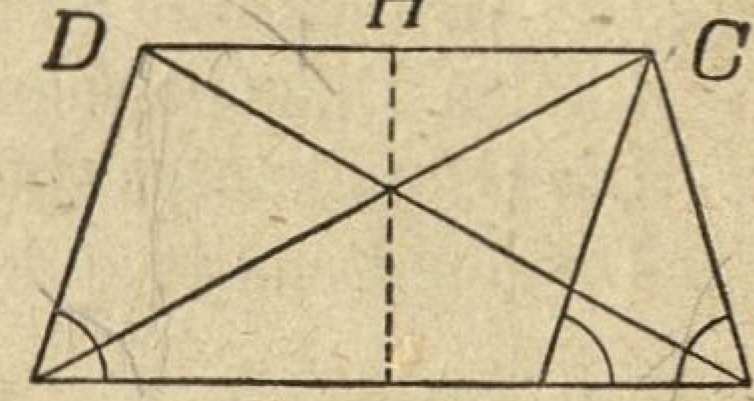
Das Trapez. **§ 75.**

Unter der *Höhe* des Trapezes versteht man die Normale zwischen den parallelen Seiten.

Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes werden *Schenkel* genannt. Sind sie gleich, so heißt das Trapez *gleichschenklig.*

Zieht man in dem Trapeze $ABCD$ (Fig. 88) $CE \parallel DA$, so zerfällt es in ein Parallelogramm $AECD$ und in ein Dreieck ECB, welches die zwei Schenkel und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat. Ist das Trapez $ABCD$ gleichschenklig, so ist in dem Dreiecke EBC auch $CE = CB$, daher ist Winkel $B = E = A$. Dann sind auch die Winkel BCD und ADC gleich (§ 28, Aufgabe 3).

Fig. 88.



Das gleichschenklige Trapez hat daher folgende Eigenschaften:

1. *Die Winkel an jeder der zwei Parallelseiten sind einander gleich.*

2. *Die Diagonalen sind einander gleich.*

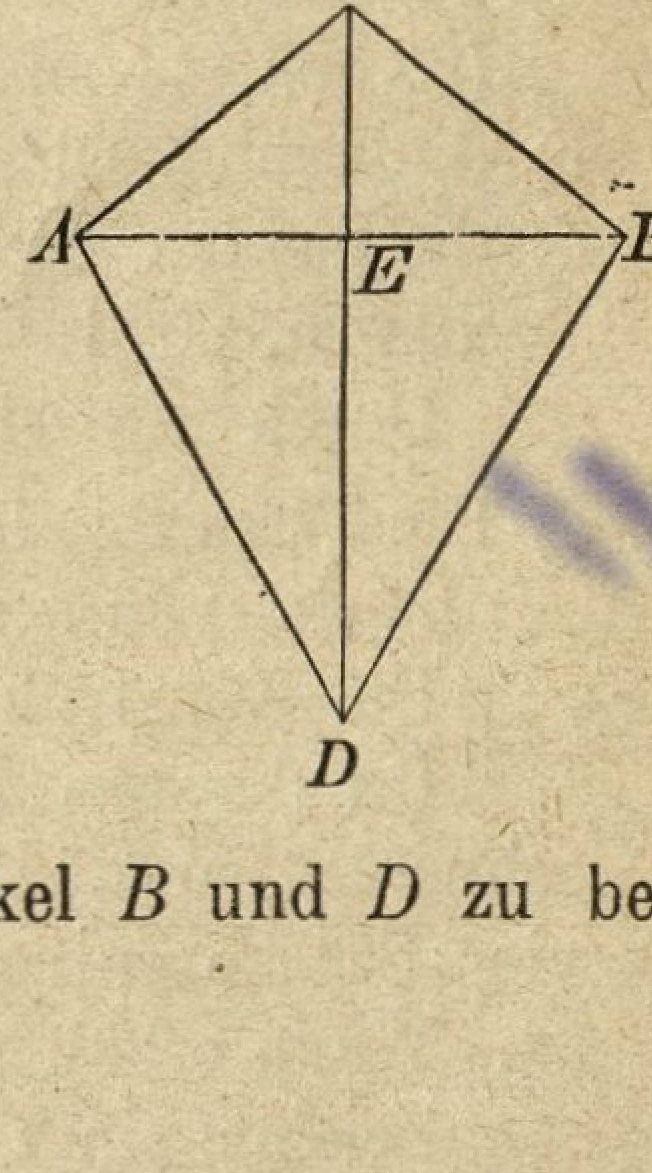
Zu beweisen durch Deckung (oder Kongruenz) welcher Dreiecke?

3. *Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch;* seine Achse ist die Symmetrale einer Parallelseite (Beweis durch Drehung, ähnlich wie § 72).

Das Deltoid. **§ 76.**

Ein Trapezoid, in welchem in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten je zwei gleiche Seiten einander schneiden, heißt ein *Deltoid*[1]). (Fig. 89); es besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken; über welcher Grundlinie?

Fig. 89.



Die Diagonale, welche die Ecken miteinander verbindet, an welcher je zwei gleiche Seiten zusammenstoßen, ist

a) die Symmetrale der anderen Diagonale (weshalb?);

b) die Symmetrale des Deltoides und daher auch der Winkel, welche sie durchschneidet. (Beweis.)

Aufgaben:

1. Die Winkel eines Deltoides, welche die Symmetrale durchschneidet, sind $74\frac{2}{3}°$ und $106\frac{5}{6}°$. Wie groß sind die beiden anderen?
2. $\sphericalangle A$ (Fig. 89) $= 120° 34' 35''$, $\sphericalangle C = 87° 45' 46''$. Die Winkel B und D zu berechnen.

---

[1]) Von delta (δέλτα), der griech. Buchstabe Δ (D).

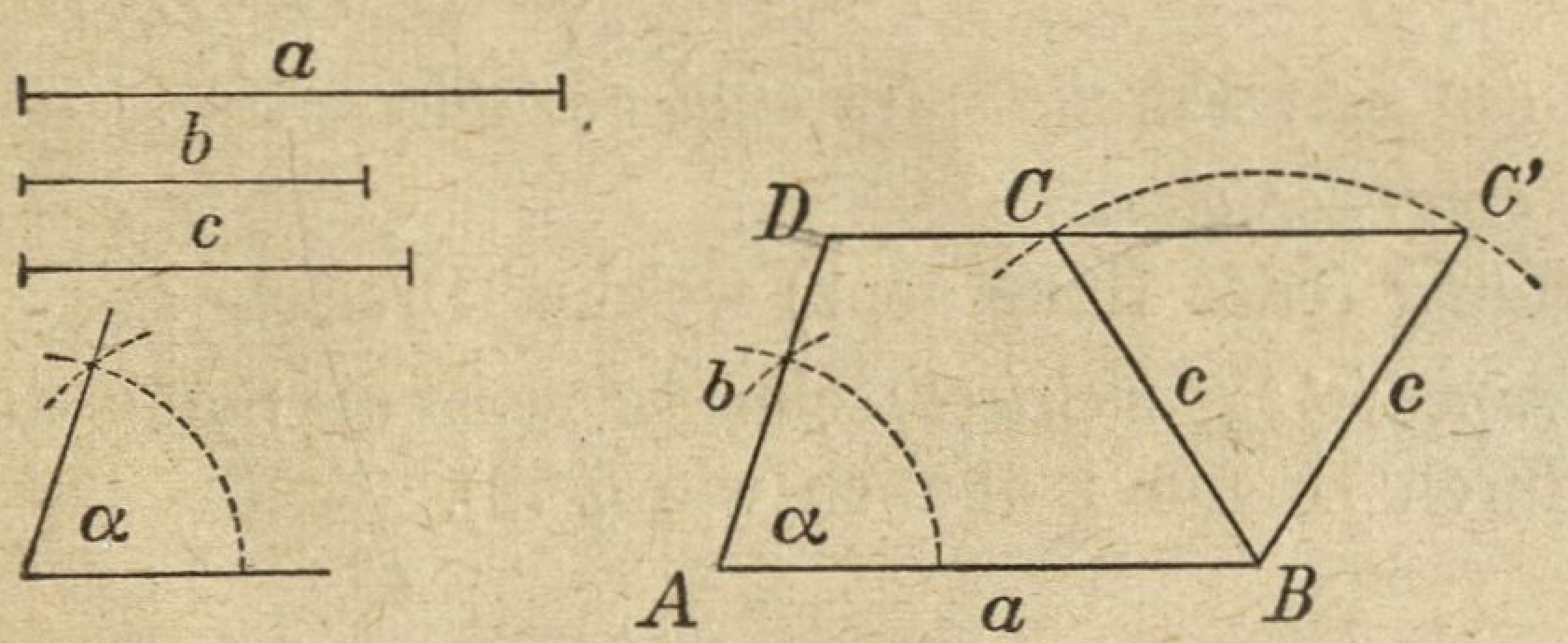
§ 77. Konstruktionsaufgaben.

Bei allen Konstruktionsaufgaben ist anzugeben, wie die gegebenen Stücke beschaffen sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist.

1. Konstruiere ein Quadrat:
   a) dessen Umfang 1 *dm* ist;
   b) welches mit einem gegebenen Rechtecke gleichen Umfang hat;
   c) wenn die Diagonale (46 *mm*) gegeben ist!
   Durch wieviel Bestandstücke wird ein Quadrat bestimmt?

2. Zeichne ein Rechteck,
   a) wenn eine Seite (32 *mm*) und die Diagonale (51 *mm*) gegeben sind;
   b) wenn die Diagonale 48 *mm* beträgt und die beiden Diagonalen einen Winkel von 60° bilden!
   c) Die Kante eines Würfels ist 4 *cm*; seinen Diagonalschnitt zu konstruieren.
   d) Die Grundkante einer quadratischen Säule ist 3·2 *cm*, die Höhe 5 *cm*; den vertikalen Diagonalschnitt zu konstruieren.
   e) Die Grundkanten eines Quaders sind 3 *cm* und 5 *cm*, die Höhe 6 *cm*. Den vertikalen Diagonalschnitt zu konstruieren.

Fig. 90.



Wieviel Bestandstücke bestimmen ein Rechteck?

3. Es soll ein Rhombus konstruiert werden, wenn gegeben sind:
   a) die Seite und ein Winkel (54 *mm*, 30°);
   b) die Seite und eine Diagonale (46 *mm*, 58 *mm*);
   c) die beiden Diagonalen (50 *mm*, 60 *mm*);
   d) eine Diagonale und ein Winkel. (Die gegebene Diagonale kann durch den Scheitel des gegebenen Winkels gehen oder nicht.)

4. Zeichne ein Rhomboid, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten (45 *mm* und 33 *mm*) und der von ihnen eingeschlossene Winkel 60°;
   b) zwei anstoßende Seiten und die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonale (38 *mm*, 44 *mm*, 50 *mm*);
   c) die beiden Diagonalen und eine Seite (44 *mm*, 56 *mm*, 40 *mm*);
   d) die beiden Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel (60 *mm*, 70 *mm*, 60°)!
   Durch wieviel Stücke wird *a*) ein Rhombus, *b*) ein Rhomboid bestimmt?

5. *a*) Ein Trapez zu konstruieren, wenn eine Parallelseite *a*, die zwei Schenkel *b* und *c* und der von *a* und *b* eingeschlossene Winkel gegeben sind.
   Die Konstruktion ist aus der Fig. 90 zu erkennen.
   Da der aus *B* beschriebene Kreisbogen die Parallele *DC* in zwei Punkten schneidet, so erhält man zwei Trapeze: *ABCD* und *ABC'D*, welche die gegebenen vier Stücke enthalten. Die Aufgabe läßt also im allgemeinen *zwei* Auflösungen zu. Wann erhält man nur ein, wann gar kein Trapez?
   Zeichne ein Trapez, wenn gegeben sind:
   b) die Parallelseiten und die Schenkel (52 *mm*, 30 *mm*, 40 *mm*, 35 *mm*).

Sind unter den Bestimmungsstücken eines Trapezes die beiden Parallelseiten gegeben, so wird die Konstruktion mit Hilfe eines Dreieckes ausgeführt, dessen Grundlinie der Differenz der Parallelseiten gleich ist; die beiden anderen Seiten sind die Schenkel des Trapezes. (Siehe Fig. 88).

c) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (70 *mm*, 38 *mm*, 45°, 80°);

d) die zwei Parallelseiten, ein Schenkel und ein ihm anliegender Winkel (60 *mm*, 35 *mm*, 33 *mm*, 75°).

6. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez, von welchem gegeben sind:

a) die Parallelseiten (60 *mm*, 40 *mm*) und der Schenkel (35 *mm*);

b) die Parallelseiten und die Höhe (5 *cm*, 3 *cm*, 26 *mm*);

c) die Parallelseiten und ein Winkel (6 *cm*, 4 *cm*, 110°).

Durch wieviel Stücke wird *a*) ein Trapez überhaupt, *b*) ein gleichschenkliges Trapez bestimmt?

7. Ein Deltoid zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten und die Symmetrale (25 *mm*, 40 *mm*, 45 *mm*);

b) zwei Seiten und die Diagonale, welche nicht die Symmetrale ist (42 *mm*, 31 *mm*, 37 *mm*).

Zahl der Bestimmungsstücke eines Deltoides?

8. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) alle vier Seiten und ein Winkel ($AB = 25\,mm$, $BC = 30\,mm$, $CD = 35\,mm$, $DA = 40\,mm$, $\sphericalangle B = 70°$);

b) alle vier Seiten und eine Diagonale ($AB = 40\,mm$, $BC = 48\,mm$, $CD = 30\,mm$, $DA = 36\,mm$, $AC = 56\,mm$);

c) drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel ($AB = 30\,mm$, $BC = 40\,mm$, $CD = 35\,mm$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 80°$);

d) drei Seiten und die beiden Diagonalen ($AB = 50\,mm$, $BC = 60\,mm$, $CD =$ $= 44\,mm$, $AC = 85\,mm$, $BD = 64\,mm$).

Fig. 91.

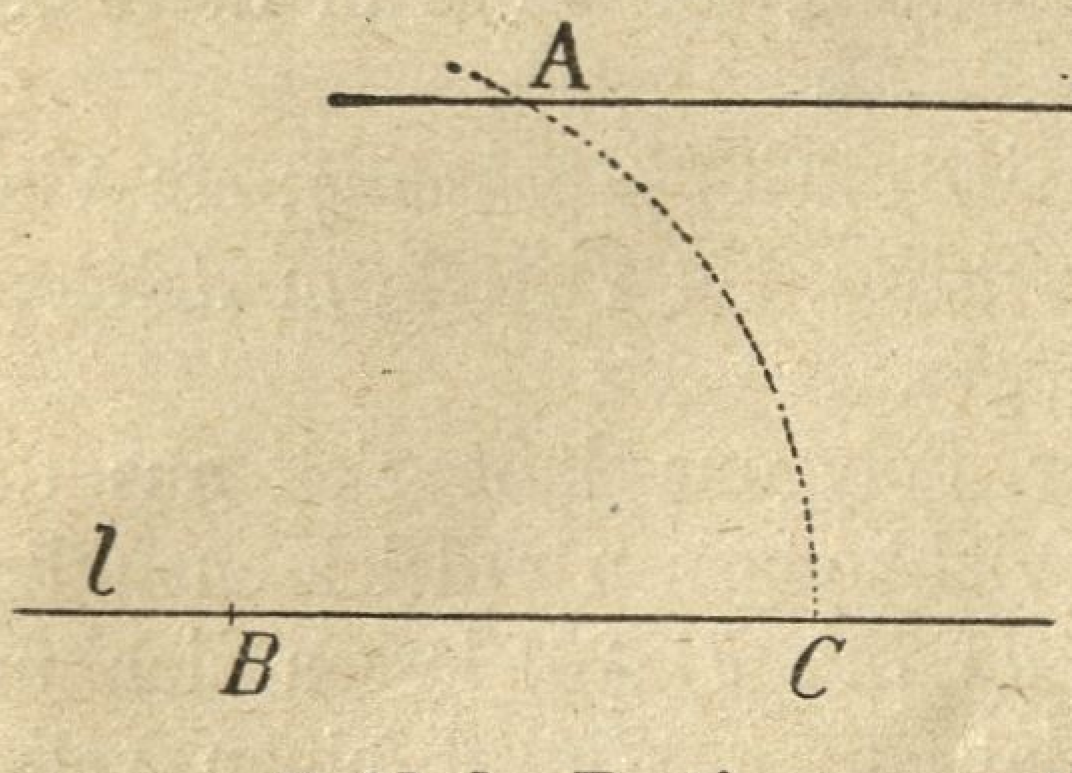
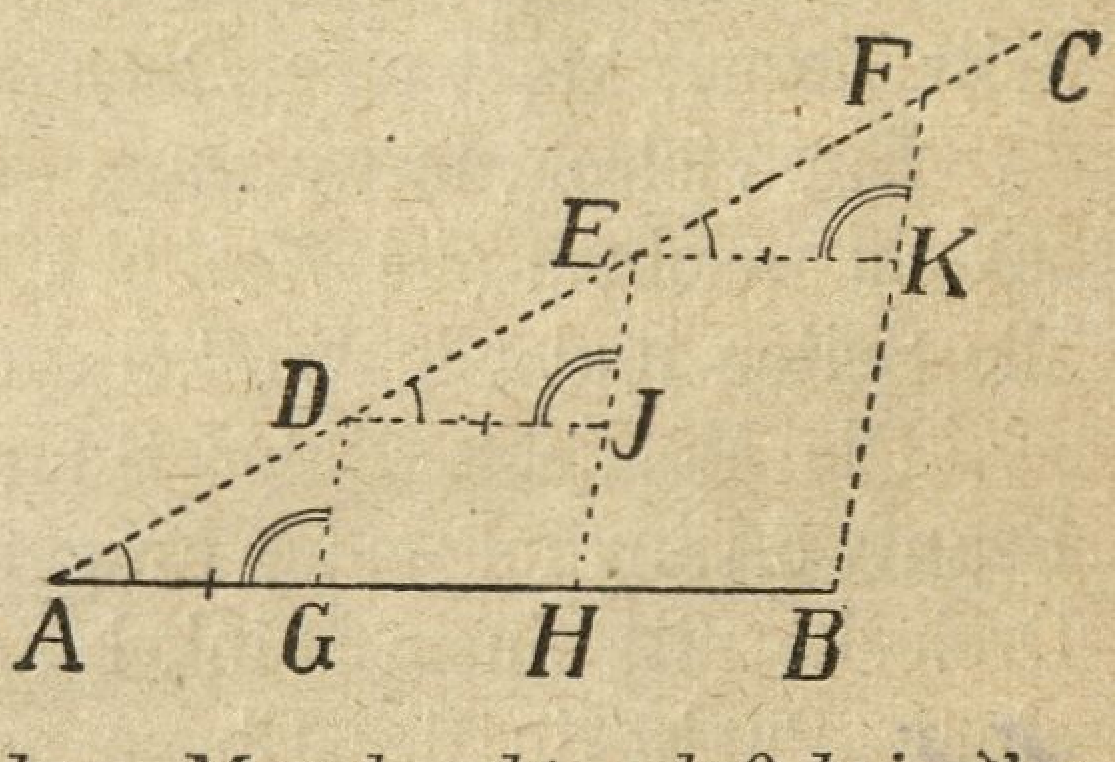


Fig. 92.



Zahl der Bestimmungsstücke eines Viereckes. Man beachte, daß bei allen Vierecken infolge der Abhängigkeit der acht Bestandstücke voneinander eine geringere Zahl von Bestimmungsstücken zur Konstruktion ausreicht! (*Vgl. § 64.*)

9. *Durch einen gegebenen Punkt A zu einer gegebenen Geraden l* (Fig. 91) *die Parallele zu konstruieren.*

Man wähle in der Geraden l den Punkt B und konstruiere mit $AB = r$ als Radius von B aus den Bogen AC; sodann bestimme man den Punkt D so, daß er von C und A die Entfernung r hat. AD ist parallel mit l; denn $ABCD$ ist ein Rhombus.

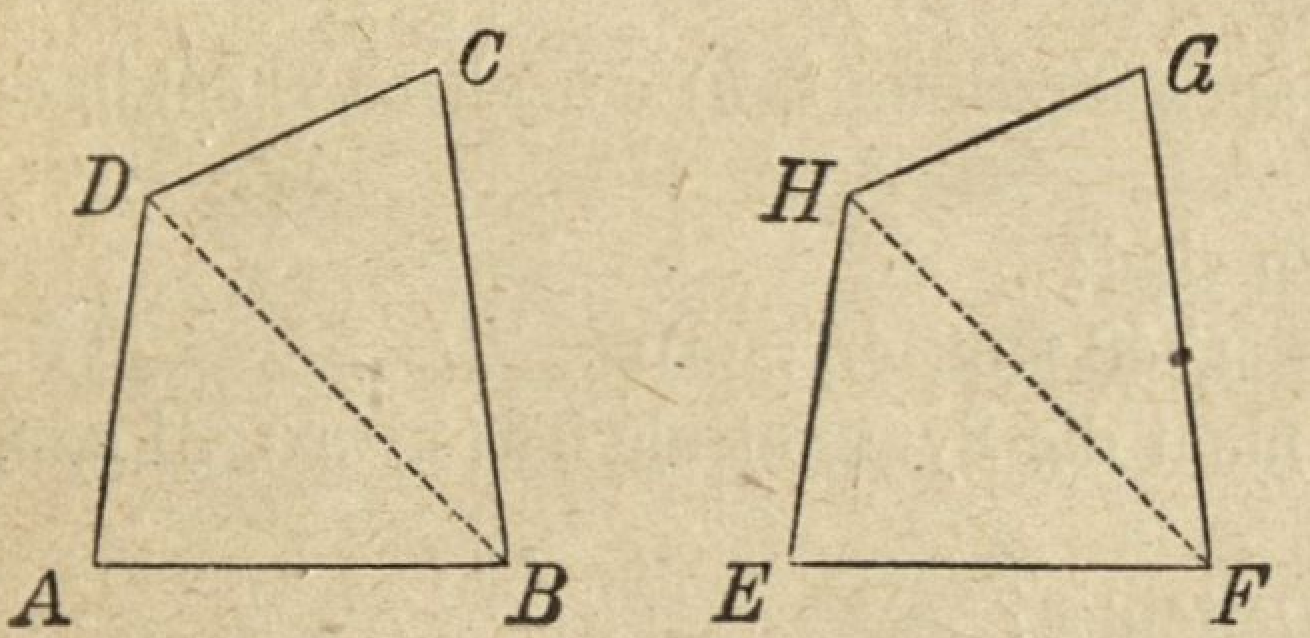
10. *Eine Strecke AB (Fig. 92) in drei gleiche Teile zu teilen.*

Man ziehe den Halbstrahl AC und mache $AD = DE = EF$, verbinde F mit B und ziehe EH und DG parallel zu BF. Es ist dann $AG = GH = HB$. Für den Beweis ziehe man $DJ \parallel AB$, $EK \parallel AB$ und beweise durch die Kongruenz der Dreiecke ADG, DEJ, EFK die Gleichheit der Strecken AG, DJ und EK und beachte, daß $DJ = GH$, $EK = HB$ ist!

11. $\frac{3}{5}$ einer gegebenen Strecke zu ermitteln.

§ 78. Ein Viereck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Vierecke *ABCD* (Fig. 93) kongruent ist.

Fig. 93.



Zieht man die Diagonale BD, konstruiert $\triangle EFH \cong \triangle ABD$ und über FH das Dreieck $FGH \cong \triangle BCD$, so ist das Viereck $EFGH \cong ABCD$. Es ist übrigens nicht nötig, die Diagonale BD wirklich zu ziehen; man braucht nur die Eckpunkte E, F, G, H des neuen Viereckes entsprechend zu bestimmen.

3. Das Vieleck.

§ 79. Erklärungen.

Jede von mehr als vier Seiten begrenzte ebene Figur wird ein *Vieleck* oder *Polygon*[1]) genannt.

Je nachdem ein Vieleck fünf, sechs, ... Ecken hat, heißt es ein *Fünfeck*, *Sechseck* usw.

Vergleiche die Zahl der Seiten, Winkel und Eckpunkte eines Vieleckes miteinander! Wie groß ist ihre Zahl bei einem Fünfeck, Sechseck! Wieviel Winkel liegen an jeder Seite? Wieviel Seiten schließen einen Winkel ein?

Eine Strecke, welche zwei Eckpunkte verbindet, die nicht in derselben Seite liegen, heißt eine *Diagonale* des Vieleckes.

Ein Vieleck, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt *gleichseitig*; ein Vieleck, in welchem alle Winkel gleich sind, *gleichwinklig*; ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, *regelmäßig*.

Die Möglichkeit der Bildung regelmäßiger Polygone läßt sich aus der Beantwortung folgender Fragen erkennen: Wieviel kongruente gleichschenklige Dreiecke mit einem Winkel am Scheitel von *a)* 72°, *b)* 36° lassen sich um einen Punkt in der Ebene so herumlegen, daß diese Winkel einen vollen Winkel ergeben? Wieviel kongruente gleichseitige Dreiecke? Was für Polygone entstehen?

Welches Dreieck und welches Viereck wäre in dem obigen Sinne regelmäßig?

Aufgaben:

1. Wieviel Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wieviel Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

[1]) Griech. polys (πολύς), viel und gonia (γωνία), Winkel.

Die Anzahl der Diagonalen, die in einem Vielecke von einem Eckpunkte aus gezogen werden können, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten; und die Anzahl der Dreiecke, in welche dadurch das Vieleck zerlegt wird, ist um 2 kleiner als die Seitenanzahl. Will man die Zahl aller Diagonalen eines Vieleckes berechnen, so hat man die Zahl der Diagonalen, die von einem Eckpunkte aus möglich sind, mit der Zahl der Eckpunkte zu multiplizieren und das Produkt, da jede Diagonale zweimal gerechnet wurde, durch zwei zu dividieren.

2. Wie groß ist die Zahl aller Diagonalen *a*) in einem Achtecke, *b*) in einem Zwölfecke?
3. In einem Polygon gehen von einem Eckpunkte 7 Diagonalen aus. Wie groß ist die Zahl aller Diagonalen des Polygons?

Die Winkel eines Vieleckes. **§ 80.**

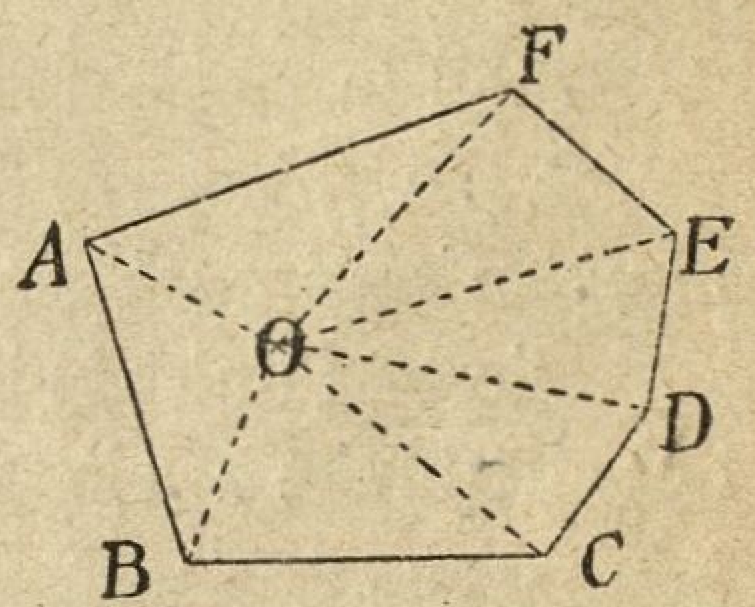
Die *Winkel* eines Polygons können spitz, recht, stumpf und selbst auch erhaben sein.

Zeichne ein Polygon, in welchem alle diese Arten von Winkeln vorkommen!

Es sollen im folgenden nur Polygone mit hohlen Winkeln betrachtet werden.

Zieht man von einem Punkte O innerhalb des Polygons $ABCDEF$ (Fig. 94) zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Polygon Seiten hat; die Winkel eines dieser Dreiecke betragen *zwei* Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal *zwei* Rechte, als das Polygon Seiten hat. Gehören aber alle diese Dreieckswinkel den Polygonwinkeln an? Welche sind daher noch abzuziehen?

Fig. 94.



Prüfe den Satz:

Die Summe aller Winkel eines Polygons ist gleich so vielmal zwei Rechten, als das Polygon Seiten hat, vermindert um vier Rechte.

Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes, eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Zwölfeckes?

In einem regelmäßigen Polygon ist ein Winkel gleich der Summe aller Winkel, dividiert durch ihre Zahl. Es beträgt z. B. jeder Winkel

des regelmäßigen Fünfeckes $\frac{540^0}{5} = 108^\circ$,

des regelmäßigen Sechseckes $\frac{720^0}{6} = 120^\circ$ usw.

Der Winkel eines regelmäßigen Vieleckes ist von der Seitenzahl abhängig. Wie ändert er sich, wenn die Zahl der Seiten zunimmt?

Aufgaben:

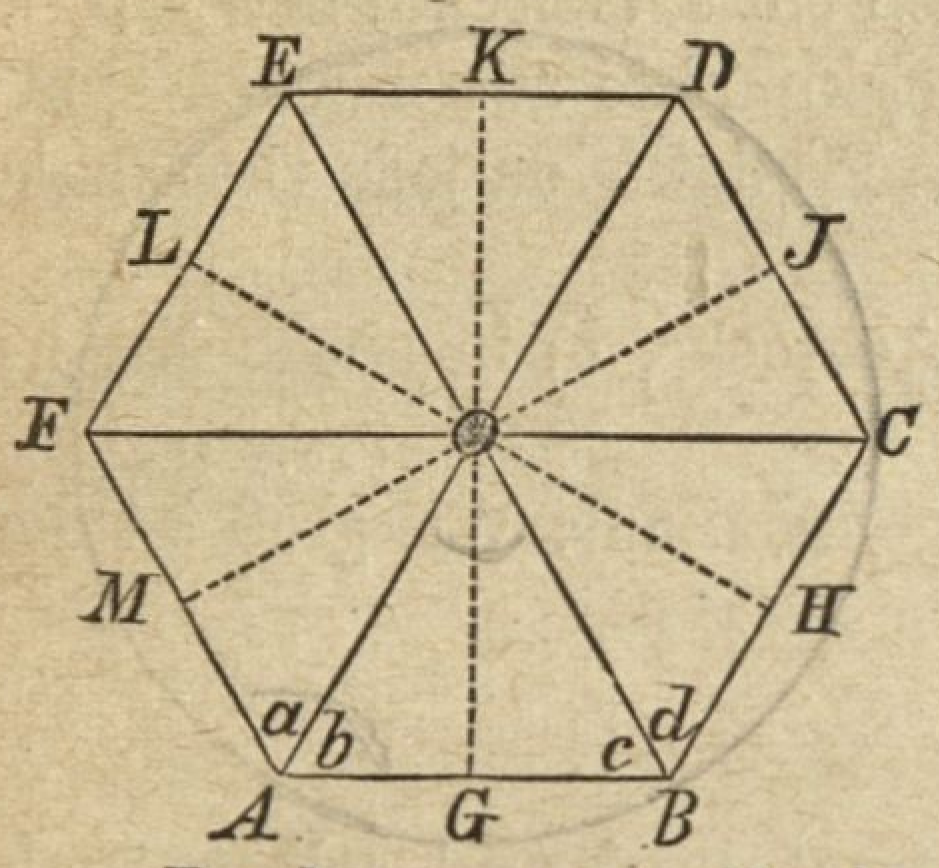
1. Wieviel Winkel eines unregelmäßigen Polygons müssen bekannt sein, um die anderen durch Rechnung bestimmen zu können?
2. Von den Winkeln des Fünfeckes $ABCDE$ ist $A = 28^\circ$; jeder der drei folgenden ist um die Hälfte größer als der vorhergehende. Wie groß ist der 5. Winkel?

Das regelmäßige Polygon. **§ 81.**

Es sei das Polygon $ABCDEF$ (Fig. 95) regelmäßig, also $AB = BC = CD = = \ldots$ und $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \ldots$

Halbiert man zwei Winkel A und B, die an derselben Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABO. Zieht man von seinem Scheitel O zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD, $OE \ldots$, so wird dadurch das Polygon in lauter kongruente, gleichschenklige Dreiecke geteilt; denn wendet man das erste Dreieck ABO um die Seite OB um, so deckt es das Dreieck BCO: es muß nämlich wegen $d = c$ AB in die Richtung von BC fallen und wegen $BC = AB$ der Punkt A auf C; Dreieck BCO kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden usf. Die Strecken OA, OB, $OC \ldots$ sind also einander gleich.

Fig. 95.



Da kongruente Dreiecke in bezug auf gleiche Seiten auch gleiche Höhen haben, so sind die von O auf die Seiten gefällten Normalen OG, OH, OJ, ... einander gleich.

Daraus folgt:

1. *Halbiert man in einem regelmäßigen Polygon zwei aufeinander folgende Winkel und verbindet den Schnittpunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Polygons durch Strecken, so wird dadurch das Polygon in kongruente gleichschenklige Dreiecke geteilt.*

Sind in einem Polygon diese Dreiecke gleichseitig?

2. *In jedem regelmäßigen Polygone gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit absteht.*

Dieser Punkt heißt der *Mittelpunkt* des regelmäßigen Polygons. Er ist der Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Winkelsymmetralen.

§ 82. Symmetrie der regelmäßigen Polygone.

Bezüglich der *Symmetrie der regelmäßigen Polygone* gelten folgende Sätze:

1. *Sowohl jede Seitensymmetrale als jede Winkelsymmetrale eines regelmäßigen Vieleckes ist eine Symmetrieachse* (Fig. 95).

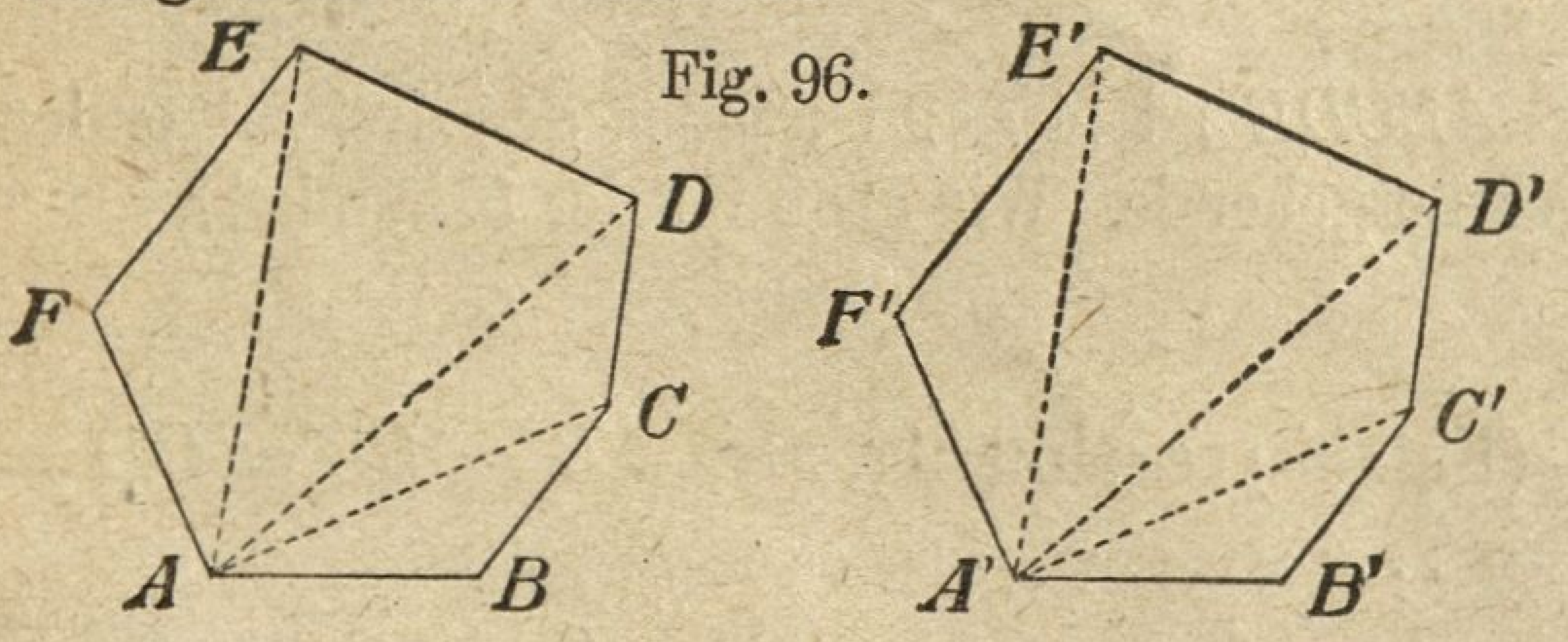
Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch Umwenden um die bezügliche Symmetrale.

2. *Ein regelmäßiges Vieleck hat so viele Symmetrieachsen, als es Seiten hat.*

Denn ist die Seitenanzahl des Vieleckes gerade, so haben immer je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel dieselbe Symmetrale. Ist dagegen die Seitenanzahl ungerade, so fallen immer eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale zusammen.

§ 83. Kongruenz der Vielecke.

Fig. 96.



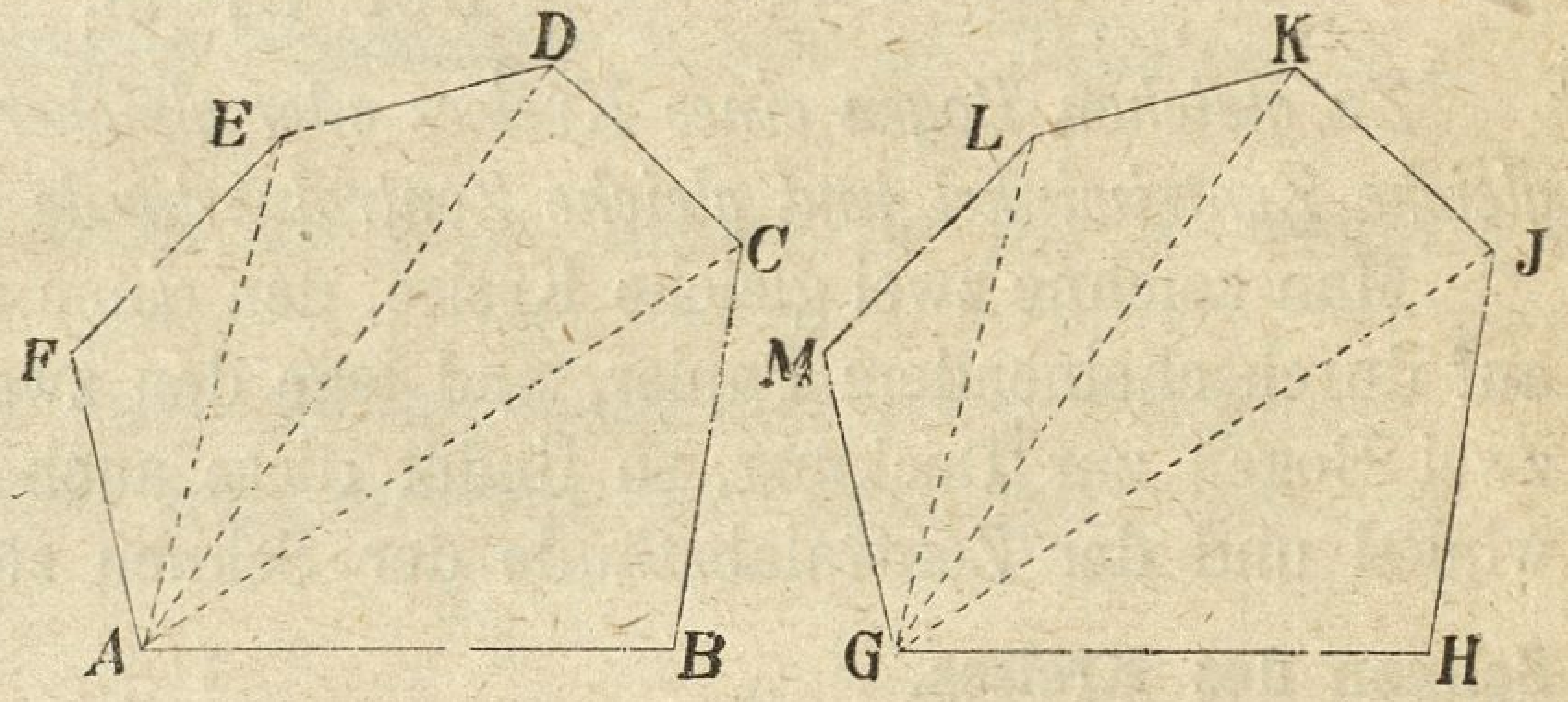
Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ (Fig. 96), *welche aus gleich vielen der Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst kongruent.*

Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, daß zwei gleichliegende Dreiecke aufeinander fallen, z. B. ABC auf $A'B'C'$, so kommt auch das zweite Paar der Dreiecke zur Deckung, folglich auch das dritte Paar ...; daher decken einander auch die ganzen Vielecke, d. i. sie sind kongruent.

Ein Vieleck zu übertragen. **§ 84.**

Zerlegt man das gegebene Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 97) durch Diagonalen in Dreiecke und konstruiert das $\triangle\, GHJ \cong ABC$, über GJ das $\triangle\, GJK \cong ACD$, über GK das $\triangle\, GKL \cong ADE$ und über GL das $\triangle\, GLM \cong AEF$, so ist das Vieleck $GHJKLM \cong ABCDEF$. Man braucht übrigens die Diagonalen der Vielecke nicht zu ziehen, sondern bestimmt nach § 63 nur die Punkte J, K, L, M.



Aufgaben: **§ 85.**

1. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Seiten a, b, c, d und die von diesen eingeschlossenen Winkel 132°, 120° und 86° gegeben sind.

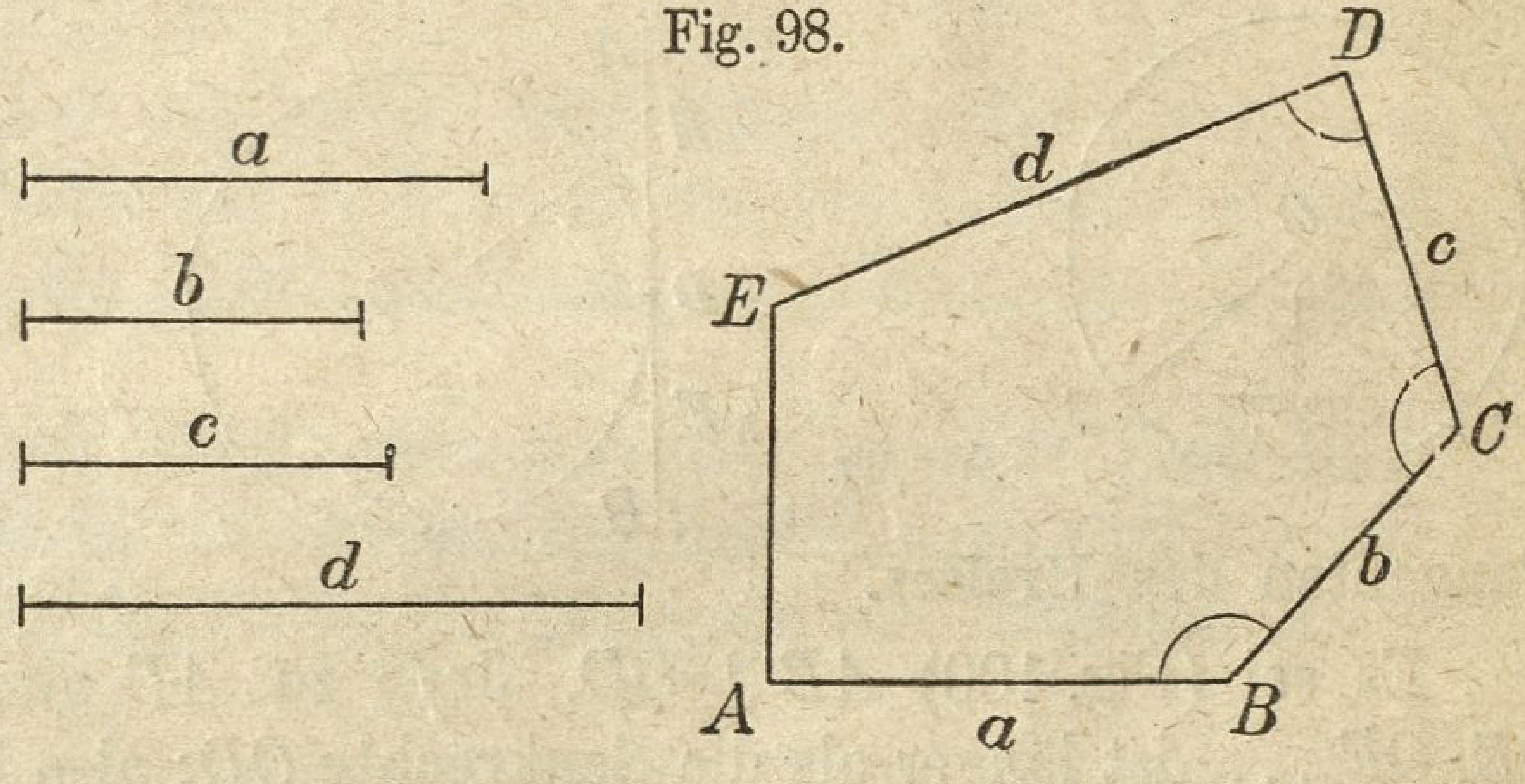
   Man mache (Fig. 98) $AB = a$, trage in B den Winkel 132° auf; auf dem neuen Schenkel schneide man $BC = b$ ab, trage in C den Winkel 120° auf; mache ferner $CD = c$, zeichne in D den Winkel 86° und schneide $DE = d$ ab! Zieht man nun AE, so ist $ABCDE$ das verlangte Fünfeck.

2. Zeichne ein Sechseck, in welchem die Seiten 22 *mm*, 37 *mm*, 18 *mm*, 25 *mm*, 40 *mm* nach der Ordnung die Winkel 120°, 105°, 140°, 135° einschließen!

3. Läßt sich ein Winkel eines regelmäßigen Polygones auch aus dem Winkel AOB (Fig. 95) des zu einer Seite des Polygons gehörigen Dreieckes berechnen?

4. Wie groß ist die Seitenzahl eines regelmäßigen Polygons, wenn ein Winkel desselben 140° beträgt? (Mit Hilfe des Winkels AOB, Fig. 95, welcher zu einer Seite des Polygons gehört.)

Fig. 98.



Zahl der Bestimmungsstücke eines Vieleckes.

Man denke sich das Vieleck durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte aus gezogen werden, in Dreiecke zerlegt. Für das erste Dreieck sind drei Bestimmungsstücke erforderlich. Für das nächste Dreieck (4. Eckpunkt) zwei weitere Stücke; ebenso für jeden folgenden Eckpunkt.

Wieviel Stücke bestimmen ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck? Prüfe daraus die Richtigkeit des Satzes: Die Zahl der Bestimmungsstücke eines Vieleckes ist gleich der doppelten Zahl der Eckpunkte weniger drei.

Die übrigen Bestandteile des Vieleckes ergeben sich aus diesen Bestimmungsstücken, sie können also nicht mehr gewählt werden. Es ist somit auch bei den Vielecken eine Abhängigkeit der Bestandteile voneinander vorhanden. (Vgl. § 64, § 77.)

Ein regelmäßiges Polygon ist durch eine Seite und die Seitenzahl bestimmt. Prüfe diesen Satz an dem Dreieck AOB (Fig. 95)!

Zehnter Abschnitt.

Der Kreis.

§ 86. *Zu gleichen Bogen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Sehnen, gleiche Zentriwinkel und gleiche Zentralabstände der Sehnen.*

Man zeichne zwei gleiche Kreise, den einen auf gewöhnlichem, den zweiten auf durchscheinendem Papier, und lege den zweiten auf den ersten! Kommen zwei Bogen zur Deckung, so findet diese auch bezüglich der Sehnen, Zentriwinkel und der Zentralabstände der Sehnen statt.

§ 87. Sehnen des Kreises.

Jede Sehne AB (Fig. 99) eines Kreises kann als die *Grundlinie* eines *gleichschenkligen Dreieckes*, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden.

Aus § 66 folgt:

1. *Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte die Senkrechte auf eine Sehne, so wird diese halbiert.*

2. *Die Symmetrale einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.*

Fig. 99.

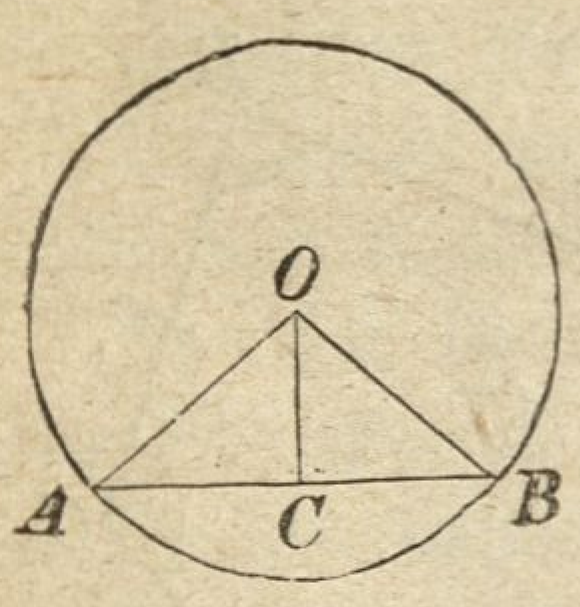


Fig. 100.

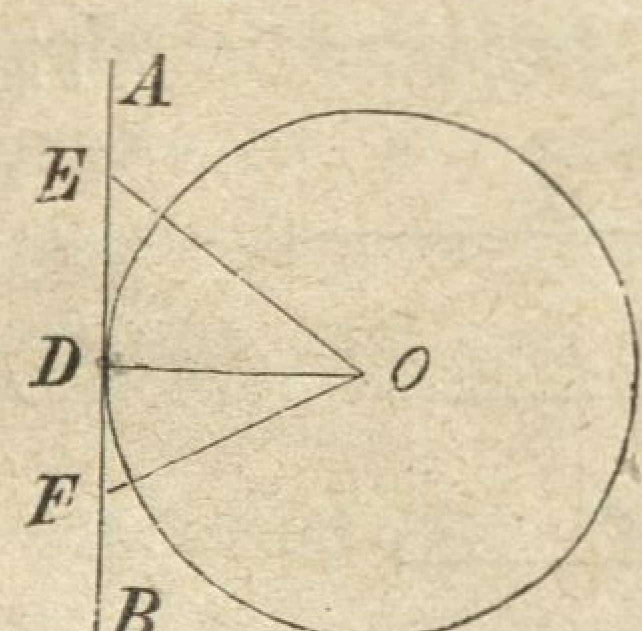
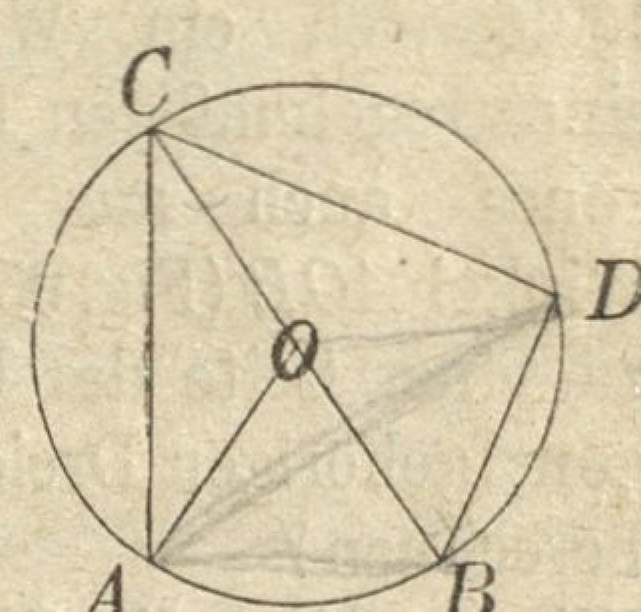


Fig. 101.



§ 88. Tangenten des Kreises.

Es sei (Fig. 100) $AB \perp OD$. Jede zu AB gezogene schiefe Strecke, wie OE, OF ..., ist länger als die Senkrechte OD; also liegen die Punkte E, F, ... außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, ist also eine Tangente des Kreises.

Errichtet man auf einen Halbmesser in dem Endpunkte D (Fig. 100) *die Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.*

Umgekehrt: Die auf einer Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte eines Kreises heißt der *Zentralabstand.* Ist der Zentralabstand einer Geraden kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius, so ist beziehungsweise die Gerade eine Sekante, eine Tangente oder sie liegt ganz außerhalb des Kreises; und umgekehrt.

Peripherie- und Zentriwinkel. **§ 89.**

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein *Peripheriewinkel.*

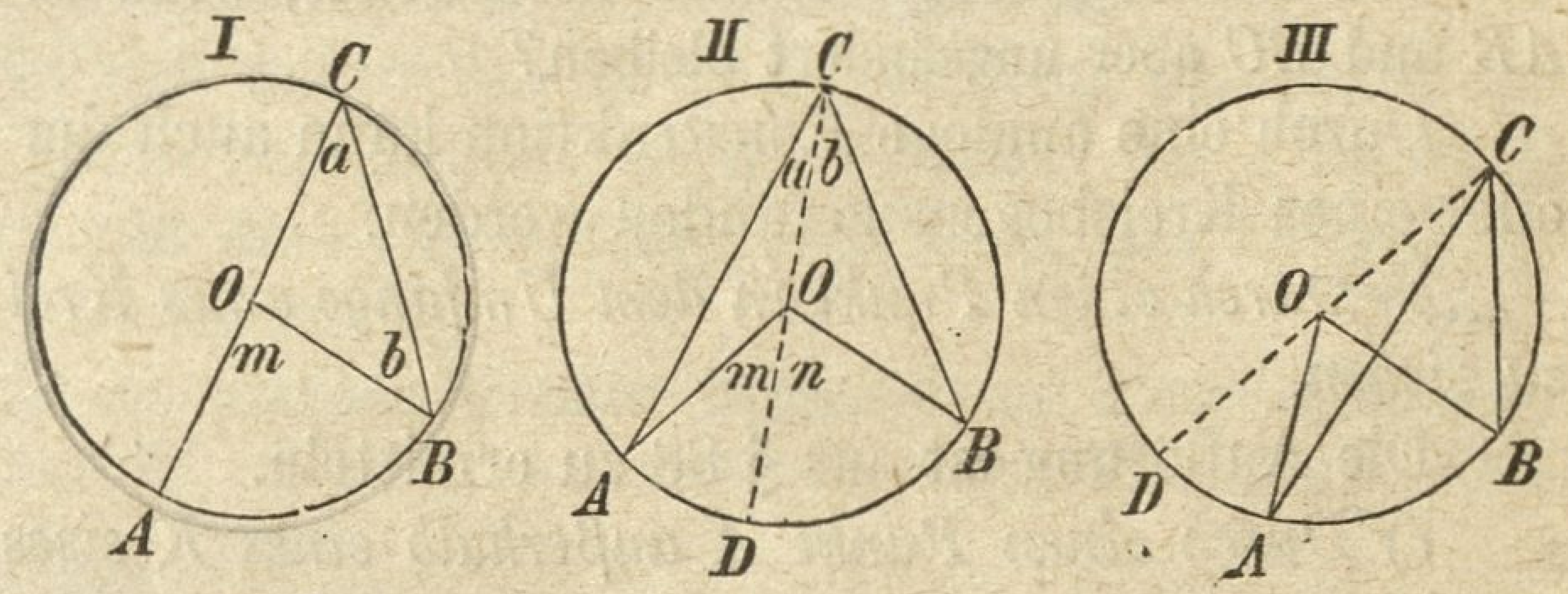
AOB (Fig. 101) ist ein Zentriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

Ein Peripheriewinkel BDC, dessen zugehöriger Bogen ein Halbkreis ist, heißt ein *Winkel im Halbkreise.*

Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des Zentriwinkels, der auf demselben Bogen aufsteht. **§ 90.**

Der Mittelpunkt eines Kreises kann in Beziehung auf einen Peripheriewinkel eine dreifache Lage haben: er liegt entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 102 *I*) oder er liegt in der Winkelfläche des Peripheriewinkels (Fig. 102 *II*), oder er liegt außerhalb der Winkelfläche desselben (Fig. 102, *III*).

Fig. 102.



1. Fall. Der Winkel m ist der Außenwinkel am Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes BOC; daher $a = \frac{m}{2}$. (§ 55, Aufgabe 7.)

2. Fall. Dieser läßt sich auf den ersten zurückführen. Zieht man den Durchmesser CD, so ist a die Hälfte von m, b die Hälfte von n; daher ist auch die Summe $a + b$, d. i. $\sphericalangle ACB$, die Hälfte der Summe $m + n$ oder des Winkels AOB.

3. Fall. Zieht man auch hier den Durchmesser CD, so ist (1. Fall) BCD die Hälfte von BOD, ebenso ACD die Hälfte von AOD, folglich auch die Differenz von BCD und ACD, d. i. $\sphericalangle ACB$ die Hälfte der Differenz von BOD und AOD, d. i. des $\sphericalangle AOB$.

Da ein Zentriwinkel durch den ganzen zugehörigen Bogen gemessen wird, so hat ein Peripheriewinkel die Hälfte des zugehörigen Bogens zum Maß.

Daraus folgt:

a) Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.

b) Ein Winkel im Halbkreise ist ein rechter; denn er hat die Hälfte des Halbkreises zum Maß.

Aufgaben:

1. Ein Zentriwinkel eines Kreises sei *a*) 64°, *b*) 87° 45′, *c*) 128° 13′ 50″, *d*) $64\frac{2}{3}$°. Wie groß ist der Peripheriewinkel über demselben Bogen?
2. Ein Peripheriewinkel eines Kreises sei *a*) 56°, *b*) 41° 37′, *c*) 108° 12′ 12″, *d*) $64\frac{2}{3}$°. Wie groß ist der Zentriwinkel über demselben Bogen?
3. Wie groß ist ein Peripheriewinkel eines Kreises, wenn der zugehörige Zentriwinkel über $\frac{3}{8}$ der Peripherie aufsteht?
4. Von demselben Punkt auf der Peripherie eines Kreises werden zwei Sehnen gezogen, welche Bogen von $130\frac{1}{2}$° und $70\frac{2}{3}$° abschneiden. Welchen Winkel bilden die Sehnen?
5. In welchem Vierecke bilden zwei Durchmesser eines Kreises die Diagonalen? Wann wird es ein Quadrat?

§ 91. Konstruktionsaufgaben.

a) *Durch drei Punkte A, B, C* (Fig. 103), *welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.*

Man denke die Strecken *AB* und *BC* gezogen und errichte ihre Symmetralen; welcher Punkt ist dann der gesuchte Mittelpunkt und welche Linie der Radius?

Wie ändert sich der Radius des Kreises, wenn $\sphericalangle$ *ABC* wächst, die Strecken *AB* und *BC* aber ungeändert bleiben?

Durch eine analoge Konstruktion kann auch der Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens gefunden werden.

b) *Durch einen Punkt in dem Umfange eines Kreises an diesen die Tangente zu ziehen.*

Die Auflösung ist aus § 88 zu ermitteln.

c) *Durch einen Punkt A außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.*

Auflösung: Soll *AD* (Fig. 104) eine Tangente an den Kreis sein, so muß das Dreieck *ADO* bei *D* rechtwinklig sein. Man verbinde also den gegebenen Punkt *A* mit dem Mittelpunkte *O* des gegebenen Kreises durch die Strecke *AO*, halbiere diese in *C* und beschreibe aus *C* mit dem Halbmesser *CA* einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten *D* und *E* schneidet. Zieht man nun *AD* und *AE*, so sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises (§ 90, *b*). Aus der Kongruenz der Dreiecke *ADO* und *AEO* folgt, daß die Tangenten *AE* und *AD* einander gleich sind.

Fig. 103.

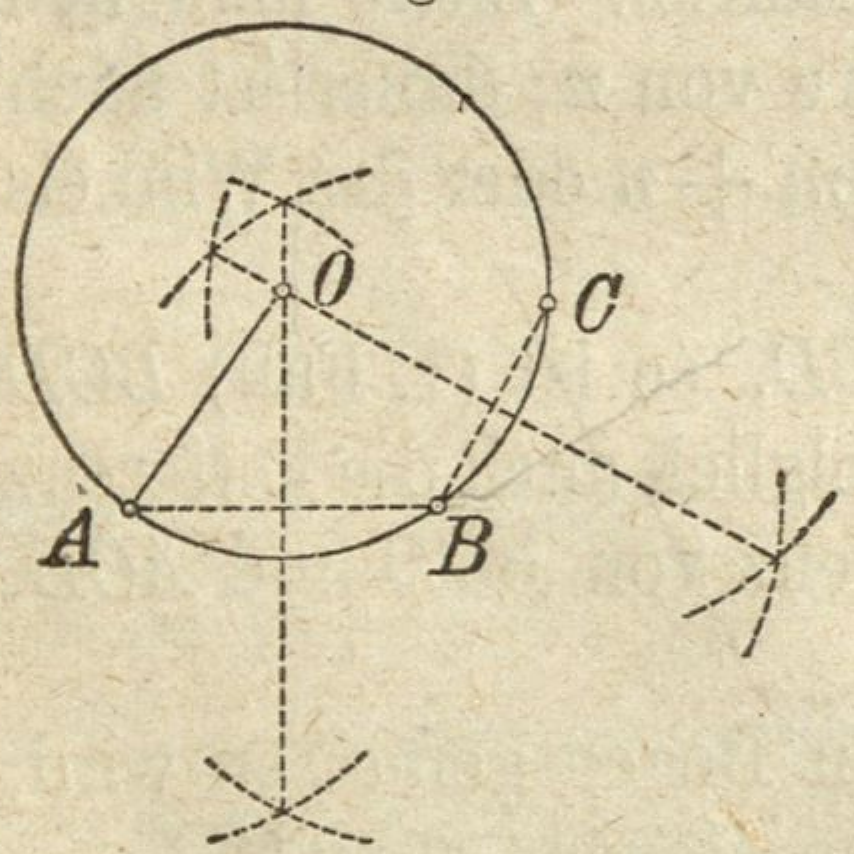
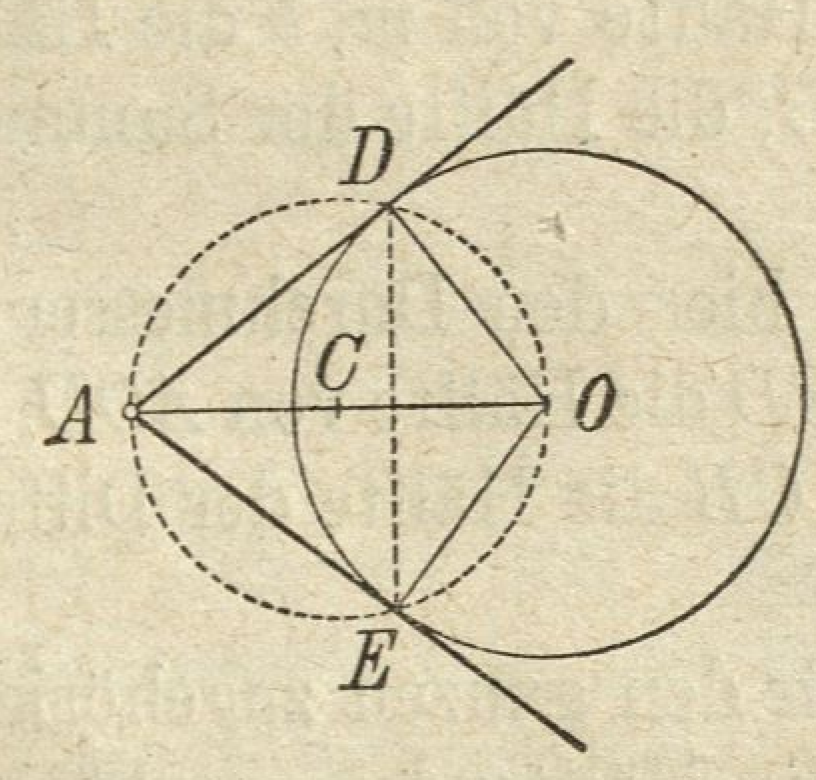


Fig. 104.



Was für eine Figur ist *ADOE*?

Wie ändert sich die Lage der Punkte *D* und *E*, wenn der Abstand *AO* wächst? Wie die Winkel *EOD* und *EAD*? Welche Lage erhalten die Tangenten, wenn der Punkt *A* in unendliche Entfernung von *O* gekommen ist?

Übungsaufgaben:

1. Aus einem gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.
2. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.
3. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.
4. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine Gerade in einem vorgeschriebenen Punkte berührt und überdies durch einen gegebenen Punkt geht.

Sehnen- und Tangentendreiecke. **§ 92.**

a) Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 105) DO die Symmetrale der Seite AB und FO die Symmetrale der Seite AC. Der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen ist sowohl von A und B als auch von A und C, somit auch von B und C gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von B und C gleiche Abstände, so muß er auch in der Symmetrale der Seite BC liegen.

Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Eckpunkten gleiche Abstände hat.

Von dem Punkt O läßt sich mithin ein Kreis beschreiben, der durch die Eckpunkte des Dreieckes geht. Sein Radius ist der Abstand des Punktes O von einem Eckpunkt. Er heißt dem Dreieck umgeschrieben, das Dreieck ist dem Kreis eingeschrieben (*Sehnendreieck*).

Wo liegt der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises *a*) bei einem spitzwinkligen, *b*) bei einem rechtwinkligen, *c*) bei einem stumpfwinkligen Dreiecke? (Konstruktion!)

b) Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 106) AO die Symmetrale des Winkels BAC und CO die Symmetrale des Winkels ACB. Der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen ist sowohl von den Schenkeln AB und AC als auch von den Schenkeln AC und BC, somit auch von AB und BC gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von den Schenkeln AB und BC gleiche Abstände, so muß er auch in der Symmetrale des Winkels ABC liegen.

Dig. 105.

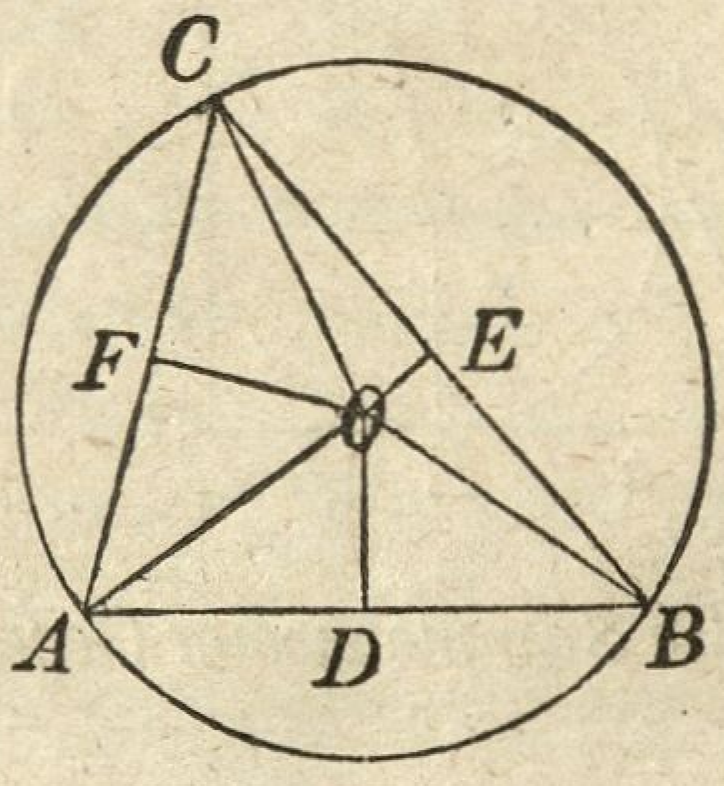
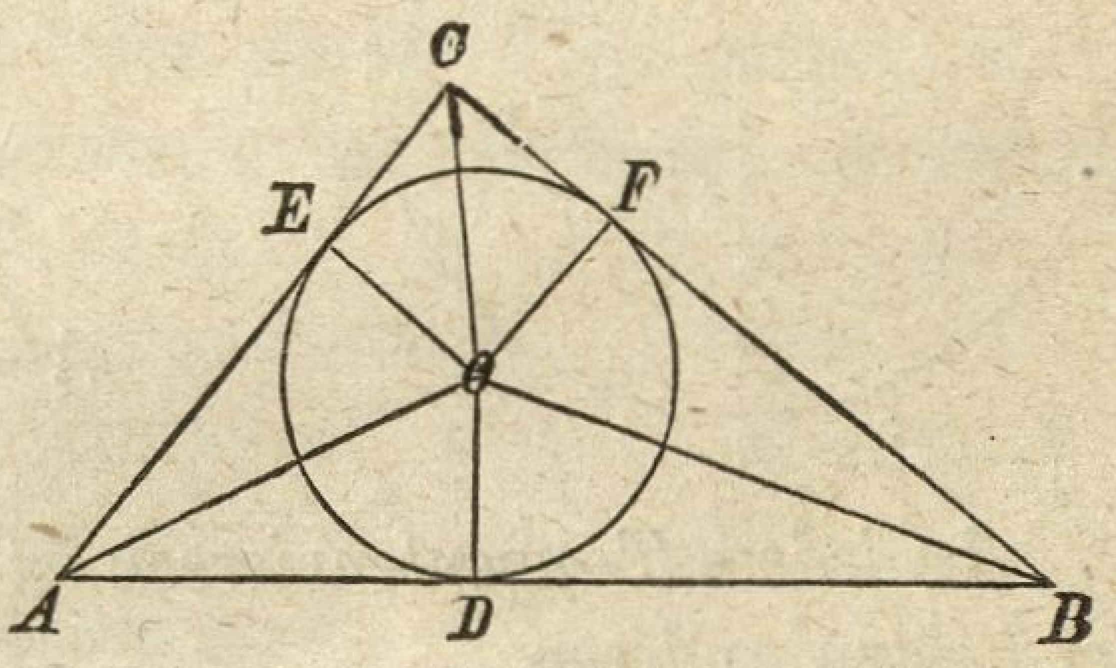


Fig. 106.



Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

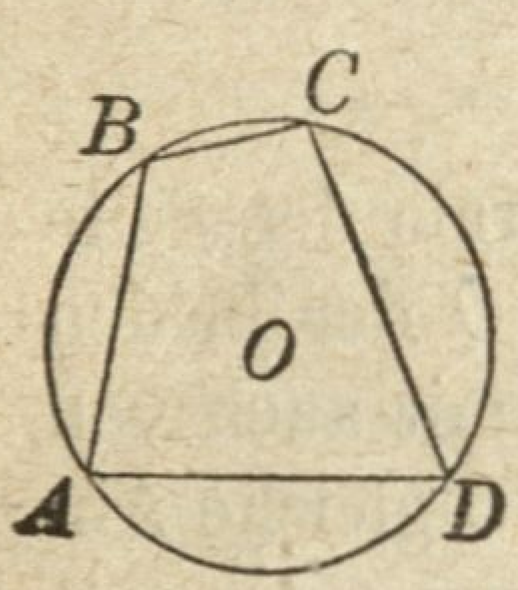
Von dem Punkt O läßt sich ein Kreis beschreiben, der die Seiten des Dreieckes berührt. Sein Radius ist der Abstand des Punktes O von einer Seite. Er heißt dem Dreieck eingeschrieben. Das Dreieck ist dem Kreise umgeschrieben. (*Tangentendreieck.*)

Welche Bedeutung hat jede Seitensymmetrale eines gleichseitigen Dreieckes bezüglich des Winkels, welchen sie durchschneidet? Folgerung daraus bezüglich des Mittelpunktes des einem gleichseitigen Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreises. Vergleich der Radien dieser zwei Kreise durch Messung.

§ 93. Sehnen- und Tangentenvierecke.

a) Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt ein *Sehnenviereck:* $ABCD$ in Fig. 107. Der Kreis ist dem Vierecke *umgeschrieben.* Da die Winkel A und C des Sehnenviereckes $ABCD$ durch die Hälfte der Bogen BCD und BAD gemessen werden, so hat ihre Summe die halbe Peripherie zum Maße; mithin ist $A + C = 180°$, daher auch $B + D = 180°$.

Fig. 107.



In jedem Sehnenviereck sind zwei Gegenwinkel supplementär.

Welche Parallelogramme können daher nur Sehnenvierecke sein? Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises?

Weshalb läßt sich jedem gleichschenkligen Trapez ein Kreis umschreiben? Die Konstruktion ist in Fig. 108 enthalten. Weshalb ist $OB = OA = OD = OC$?

b) Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt ein *Tangentenviereck:* $ABCD$ (Fig. 109). Der Kreis ist ihm eingeschrieben. In Fig. 109 sind die mit a, b, c und d bezeichneten Tangenten paarweise einander gleich. Da $AB + CD = a + b + c + d$ und $AD + BC = a + b + c + d$ ist, so ist $AB + CD = AD + BC$.

Fig. 108.

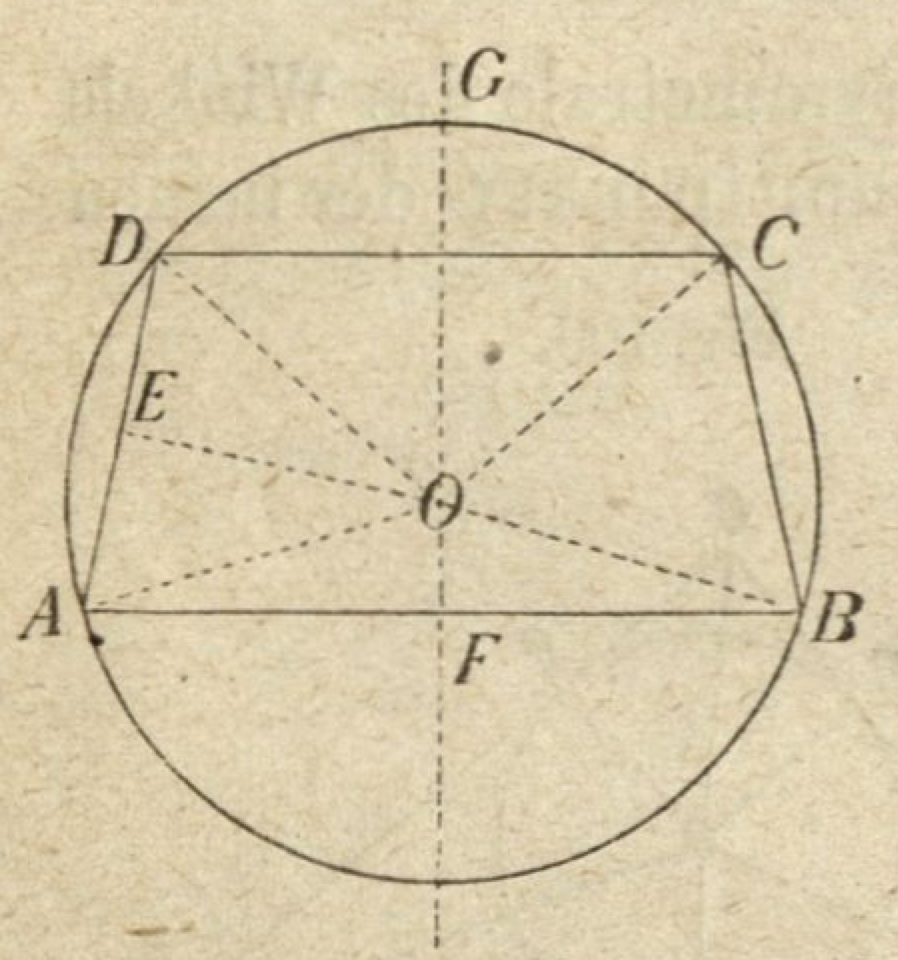


Fig. 109.

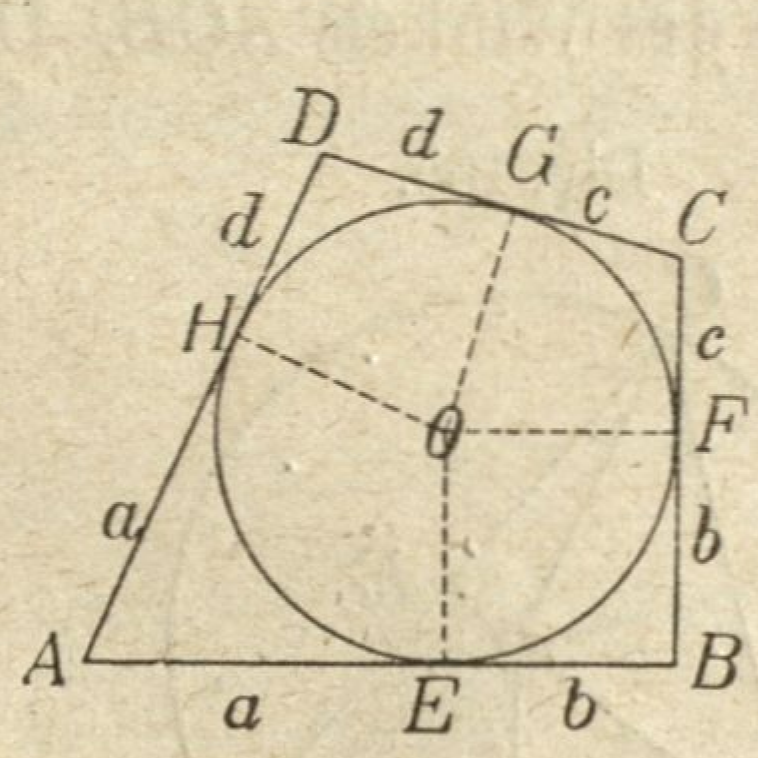
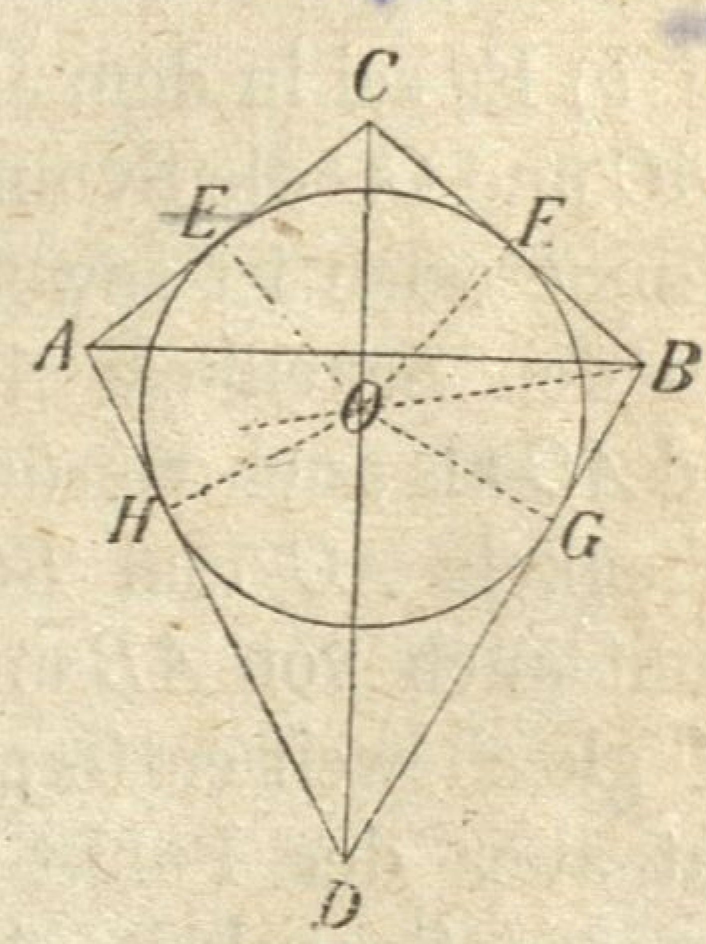


Fig. 110.



In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

Welche Parallelogramme können nur Tangentenvierecke sein? Der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises muß den gleichen Abstand von allen Seiten haben. Wo muß er daher liegen? (§ 50.) Vgl. auch § 92 *b*).

Welchem Parallelogramm läßt sich ein Kreis ein- und umschreiben?

Weshalb läßt sich jedem Deltoid ein Kreis einschreiben? Die Konstruktion ist in Fig. 110 enthalten. Weshalb ist $OE = OF = OG = OH$?

Gibt es ein Deltoid, welchem sich ein Kreis umschreiben läßt?

Der einem regelmäßigen Polygone ein- und umgeschriebene Kreis. **§ 94.**

Der *Mittelpunkt* eines regelmäßigen Polygones (§ 81) ist *a*) von allen Eckpunkten, *b*) von allen Seiten gleich weit entfernt. *Er ist daher sowohl der Mittelpunkt des dem regelmäßigen Polygone umgeschriebenen als auch des eingeschriebenen Kreises* (Fig. 111). Welche Abstände sind die Radien?

Regelmäßige Sehnen- und Tangentenpolygone. **§ 95.**

Es sei (Fig. 112) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Teile geteilt.

a) Zieht man durch die Teilungspunkte die Sehnen AB, BC, CD, DE ... und dreht das dadurch entstehende, dem Kreise eingeschriebene Vieleck $ABCDE$ ... um den Mittelpunkt O, bis jeder Teilungspunkt den nächstfolgenden deckt, so deckt auch jede Seite des Vieleckes die folgende Seite und jeder Winkel den folgenden Winkel; das Vieleck ist also regelmäßig.

Fig. 111.

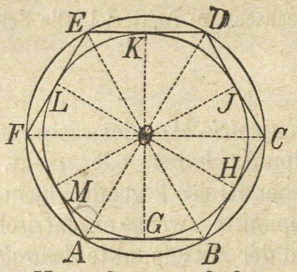
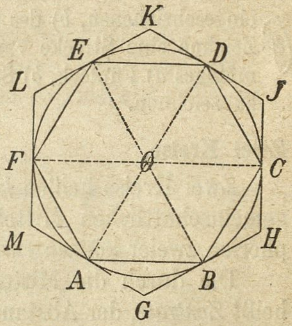


Fig. 112.



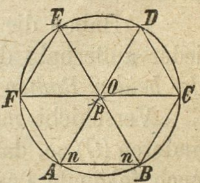
b) Errichtet man in den Teilungspunkten A, B, C, D, ... auf die zu ihnen gezogenen Halbmesser Normale, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck $GHJKL$ ... Dieses Vieleck ist regelmäßig; denn dreht man es um den Mittelpunkt, bis jeder Teilungspunkt mit dem nächstfolgenden zusammenfällt, so deckt auch jeder Halbmesser den folgenden, daher auch jede Tangente die folgende, somit auch jeder Winkel des Vieleckes den folgenden[1].

Es ergibt sich daher der Satz:

Wird die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Teile geteilt, so sind die Teilungspunkte a) die Eckpunkte eines eingeschriebenen und b) die Berührungspunkte eines umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes.

Es sei $ABCDEF$ Fig. 113 ein dem Kreise eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck. Wie groß ist Winkel p? Wie groß sind die Winkel n? *Wie groß ist mithin die Seite des einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes?*

Fig. 113.



Aufgaben: **§ 96.**

1. Die Peripherie eines Kreises *a*) in 6, *b*) in 3, *c*) in 12 gleiche Teile zu teilen. (Mit Benützung des Satzes über die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes.)
2. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges *a*) Dreieck, *b*) Viereck, *c*) Sechseck, *d*) Achteck, *e*) Zwölfeck einzuschreiben und umzuschreiben.

[1]) Der Schüler nehme die Drehung so vor, wie es in der Fußnote zu § 70 beschrieben wurde.

3. Einem gegebenen Kreise mit Hilfe des Transporteurs ein regelmäßiges *a)* Fünfeck, *b)* Zehneck ein- und umzuschreiben.

4. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, wenn die Seite gegeben ist.

Hier kommt es nur darauf an, den Radius des dem Vielecke umgeschriebenen Kreises zu finden. Zu diesem Ende wird das Dreieck *ABO* (Fig. 112) konstruiert, indem man für *AB* die gegebene Seite und für *BAO* und *ABO* die halben Vieleckswinkel annimmt. Man berechne daher zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Strecke, welche der gegebenen Seite gleich ist, trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf, aus dem Schnittpunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man durch die Endpunkte der gezogenen Strecke einen Kreis und trage darin die gegebene Seite als Sehne herum!

Ein regelmäßiges Polygon ist durch zwei Stücke bestimmt. In diesem Falle durch die Seite und einen Winkel.

Ist ein regelmäßiges Polygon durch die Seitenzahl und den Radius *a*) des eingeschriebenen, *b*) des umgeschriebenen Kreises bestimmt?

5. Zeichne eine Strecke von 2 *cm* Länge und konstruiere über derselben ein regelmäßiges *a*) Fünfeck, *b*) Sechseck, *c*) Achteck! Die Seiten- und Winkelsymmetralen zu zeichnen.

§ 97. Zwei Kreise.

Zwei Kreise heißen *konzentrisch*[1]) oder *exzentrisch*[2]), je nachdem sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben oder nicht. Die zwischen den Peripherien zweier konzentrischer Kreise liegende Fläche heißt *Kreisring* (Fig. 114).

Die durch die Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise gelegte Gerade heißt *Zentrale*, der Abstand der Mittelpunkte *Zentralabstand*. Da in die Zentrale ein Durchmesser eines jeden der beiden Kreise fallen muß, so ist sie für beide eine Symmetrieachse.

Fig. 114.

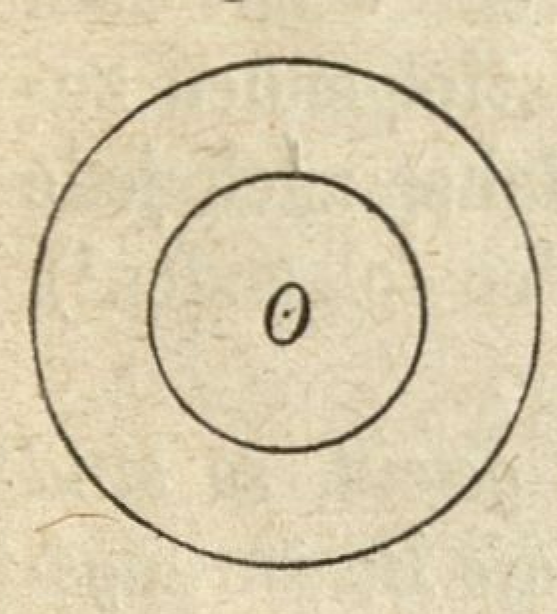
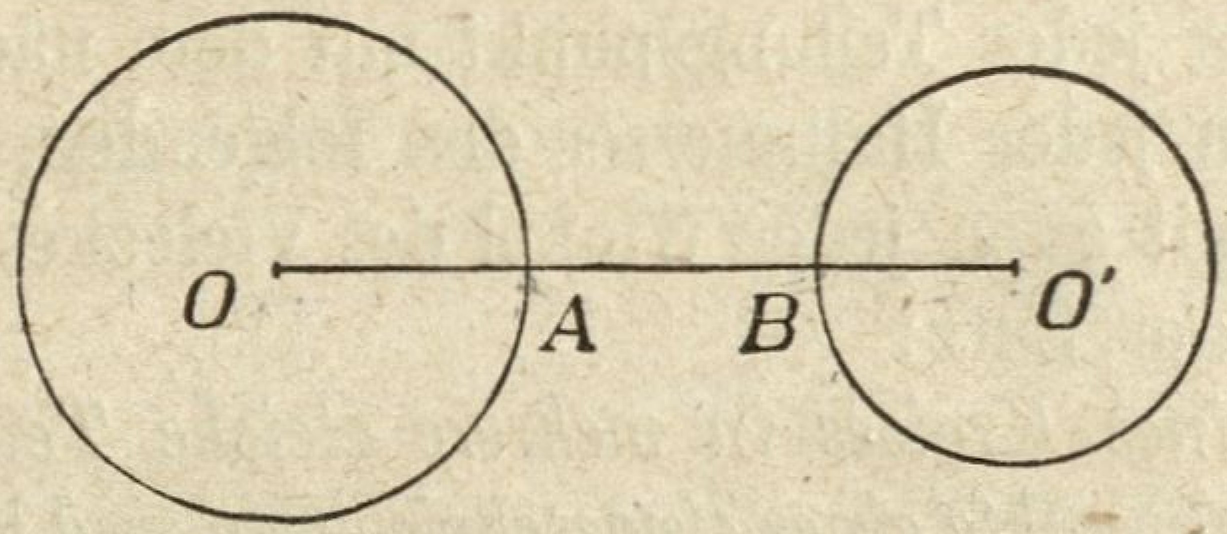


Fig. 115.



Die Lage zweier Kreise ist von der Beziehung zwischen dem Zentralabstand und den beiden Radien derart abhängig, daß sie aus ihr erkannt werden kann.

1. Haben die Umfänge zweier Kreise keinen Punkt gemeinsam und liegt jeder außerhalb des anderen, so ist der *Zentralabstand größer als die Summe der beiden Radien* (Fig. 115). Um welches Stück?

Verschiebt man den einen der beiden Kreise (*O'*) bei fester Lage des anderen (*O*) so, daß sein Mittelpunkt auf der früheren Zentrale bleibt, so sind noch folgende Lagen möglich.

2. Die beiden Umfänge haben *einen* gemeinschaftlichen Punkt und der kleinere Kreis liegt sonst außerhalb des größeren; der gemeinschaftliche Punkt

---

[1]) Lat. con (cum) mit und Seite 17. Mit gemeinsamem Mittelpunkte. — [2]) Lat. ex aus. Mit nicht gemeinsamem Mittelpunkte.

muß wegen der Symmetrie in der Zentrale liegen; *der Zentralabstand ist gleich der Summe der beiden Radien* (Fig. 116).

3. Die beiden Kreise haben *zwei* Punkte gemeinschaftlich, sie schneiden einander (Fig. 117). Wegen der Symmetrie muß die Zentrale die Symmetrale der gemeinschaftlichen Sehne, der zugehörigen Bogen und Zentriwinkel sein. Der *Zentralabstand liegt zwischen der Summe und Differenz der beiden Radien* (§ 52).

Fig. 116.

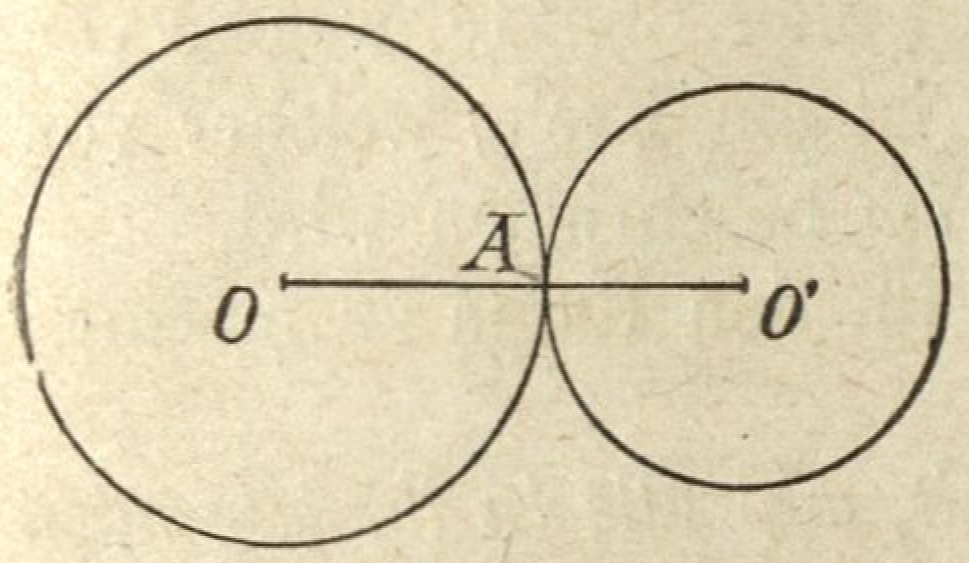


Fig. 117.

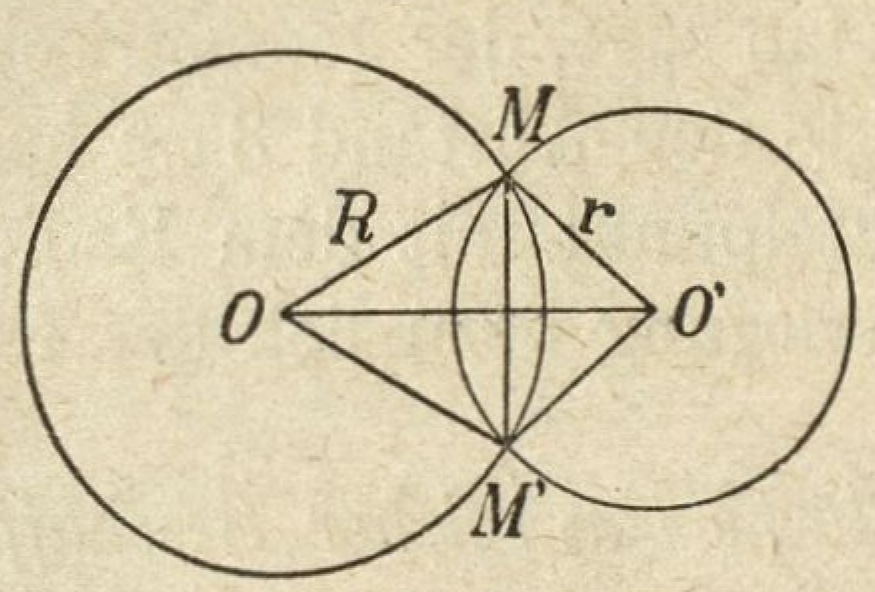
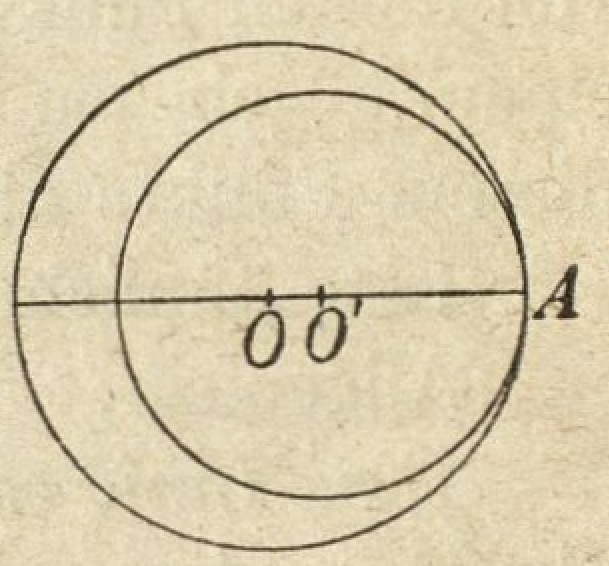


Fig. 118.



4. Die beiden Kreise haben wieder *einen* Punkt gemeinschaftlich (Fig. 118), der ebenfalls auf der Zentrale liegen muß, aber der kleinere Kreis liegt sonst innerhalb des größeren; *der Zentralabstand ist gleich der Differenz der beiden Radien.*

5. Die beiden Kreise haben *keinen* Punkt gemeinsam, der kleinere liegt ganz innerhalb des größeren. *Der Zentralabstand ist kleiner als die Differenz der beiden Radien.* (Die Zeichnung aus Fig. 118 abzuleiten.)

6. Die Kreise werden konzentrisch, *der Zentralabstand ist Null.*

Bei fortgesetzter Verschiebung wiederholen sich die früheren Fälle.

In den Fällen 2 und 4 sagt man, die beiden Kreise *berühren* einander; in 2 von außen, in 4 von innen. Der gemeinschaftliche Punkt heißt der *Berührungspunkt.*

Die obigen Sätze gelten auch umgekehrt. Wie lauten sie dann?

Aufgaben:

1. Die Lage zweier Kreise zu bestimmen, für welche der Zentralabstand und die Halbmesser folgende Werte haben:

a)	Zentralabstand	8 *dm*,	Halbmesser	5 *dm* und	3 *dm*;
b)	„	2 „	„	7 „ „	4 „
c)	„	9 „	„	6 „ „	2 „
d)	„	6 „	„	8 „ „	3 „
e)	„	4 „	„	9 „ „	5 „
f)	„	0 „	„	6 „ „	3 „

2. Mit den Halbmessern 35 *mm* und 21 *mm* zwei Kreise zu konstruieren, die einander *a*) von außen, *b*) von innen berühren.
3. Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu konstruieren, welcher einen gegebenen Kreis berührt.
4. Können alle oben 1. bis 5. beschriebenen Fälle eintreten, wenn die Radien der beiden Kreise gleich sind?
5. Wie viele Symmetrieachsen haben zwei gleiche exzentrische Kreise in allen möglichen Lagen?
6. Wenn in § 25, Aufgabe 3, der eine Abstand gewählt ist, wie muß der zweite beschaffen sein, damit die Aufgabe möglich ist?

Elfter Abschnitt.

Geometrische Örter.

§ 98. Ein Kreis, der mit dem Radius 3 *cm* von einem Punkte aus beschrieben wird, enthält alle Punkte, welche von diesem Punkte den Abstand 3 *cm* haben. Alle anderen Punkte der Zeichnungsebene haben diese Eigenschaft nicht; denn wie groß ist der Abstand *a*) der Punkte innerhalb, *b*) außerhalb des Kreises von diesem Punkte? Man sagt, der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand 3 *cm* haben, ist ein Kreis, welcher von diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Radius 3 *cm* beschrieben wird.

Eine ähnliche Überlegung bezüglich der Kugel für den Raum zu machen. Allgemein:

Eine Linie oder Fläche von solcher Beschaffenheit, daß alle in ihr liegenden Punkte und nur diese eine bestimmte Bedingung erfüllen, heißt der geometrische Ort dieser Punkte.

Den geometrischen Ort anzugeben für

1. alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand *a* haben.
2. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und durch einen gegebenen Punkt gehen.
3. alle Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleich weit abstehen.
4. die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen.
5. alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden den Abstand *d* haben.
6. die Mittelpunkte aller Kreise, welche den Radius *r* haben und eine gegebene Gerade berühren.
7. alle Punkte, welche von zwei Parallelen gleich weit abstehen.
8. die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei Parallele berühren.
9. alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände haben.
10. die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nicht parallele Gerade berühren.
11. die Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke über einer Geraden als Hypotenuse.
12. die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren.
13. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren.
14. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis *a*) von außen, *b*) von innen berühren.
15. alle Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand *d* haben.
16. alle Punkte im Raume, die von einer Ebene den Abstand *d* haben.
17. alle Punkte im Raume, die von zwei gegebenen parallelen Ebenen (z. B. Fußboden und Plafond) denselben Abstand haben.

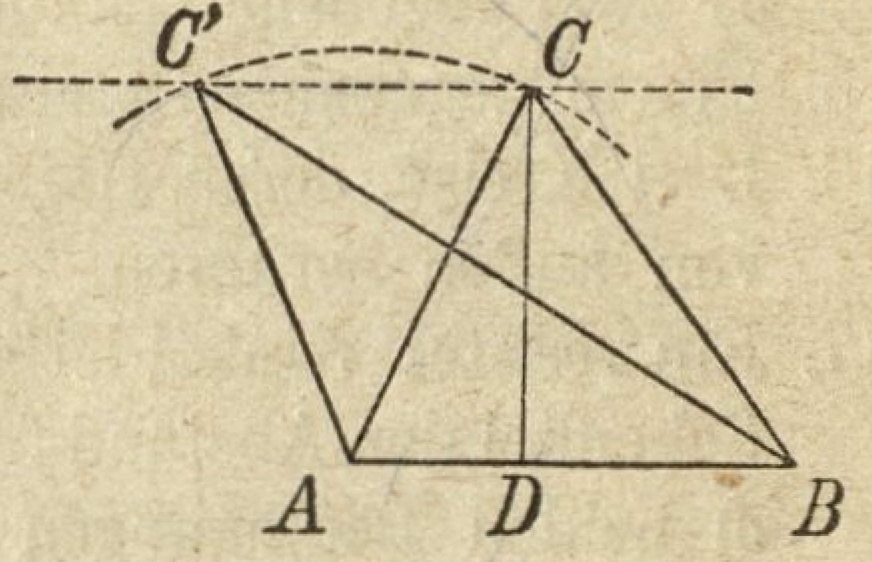
Ist für einen Punkt eine einzige Ortslinie gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht bestimmt, da es unzählig viele Punkte gibt, welche in dieser Ortslinie liegen; ein geometrischer Ort enthält daher die Auflösungen einer *unbestimmten* Aufgabe. Sind dagegen für einen Punkt zwei Ortslinien bekannt, so gibt es nur einen oder eine bestimmte Anzahl von Punkten, welche in beiden geometrischen Örtern liegen; zwei Ortslinien eines Punktes enthalten daher die Auflösung einer *bestimmten* Aufgabe.

Die geometrischen Örter sind für die Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben von großer Wichtigkeit, da es bei diesen meist nur auf die Bestimmung von Punkten ankommt.

Ein Dreieck ABC (Fig. 119) *zu konstruieren, wenn zwei Seiten AB und AC und die Höhe CD auf die erste dieser Seiten gegeben sind.* § 99.

Durch die gegebene Seite AB sind die beiden Eckpunkte A und B bestimmt. Für den dritten Eckpunkt C ist ein geometrischer Ort der um A mit dem Halbmesser AC beschriebene Kreis (weshalb?) und ein zweiter die zu AB im Abstande CD gezogene Parallele (weshalb?); somit ist auch C bestimmt.

Fig. 119.



Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich.

Die Aufgabe hat zwei Auflösungen oder eine oder keine. Wann tritt jeder dieser Fälle ein?

Aufgaben: § 100.

1. In einer Seite eines gegebenen Dreieckes einen Punkt zu finden, welcher von den beiden anderen Seiten gleich weit entfernt ist.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse und die Höhe auf diese gegeben sind. Welche Fälle sind möglich?
3. Einen Punkt zu suchen, welcher von den Endpunkten einer Strecke gleich weit entfernt ist und von welchem aus diese Strecke unter einem rechten Winkel gesehen wird.
4. Gegeben ist eine Strecke (4 *cm*) und ein Punkt M außerhalb derselben. Die Punkte zu suchen, von welchen aus die Strecke unter demselben Winkel wie von M gesehen wird. (§ 60, Aufgabe 4, *b.*)
5. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und die Höhe auf die dritte Seite gegeben sind.
6. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn die Höhe und ein Winkel (29 *mm*, 70°) gegeben sind.
7. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn ein Winkel und der Radius des eingeschriebenen Kreises (25 *mm*, 65°) gegeben sind.
8. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Parallelseiten, ein Winkel an denselben und die Höhe (60 *mm*, 40 *mm*, 60°, 45 *mm*) gegeben sind.
9. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Schenkel, eine Parallelseite und die Höhe (34 *mm*, 42 *mm*, 48 *mm*, 27 *mm*) gegeben sind.
10. Ein gleichschenkliges Trapez zu zeichnen, wenn der Schenkel, die Diagonale und die Höhe (36 *mm*, 46 *mm*, 28 *mm*) gegeben sind.
11. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher
    a) durch zwei gegebene Punkte geht,
    b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,
    c) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,
    d) zwei gegebene Gerade berührt,
    e) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
    f) zwei gegebene Kreise berührt.
12. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt.

13. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt und dessen Peripherie
 a) durch zwei gegebene Punkte geht,
 b) zwei gegebene Gerade berührt. (Sie können parallel sein oder nicht.)
14. Einen Kreis zu beschreiben, welcher
 a) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt,
 b) zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.
15. Einem gegebenen Kreisausschnitt einen Kreis einzuschreiben.
16. Drei Kreise, deren Halbmesser gegeben sind, so zu konstruieren, daß sie einander von außen berühren.
17. Ein rechter Winkel ist gegeben; es sind Punkte zu suchen, die *a*) von dem einen Schenkel den Abstand 5 *cm*, *b*) von dem anderen Schenkel den Abstand 4 *cm* haben, *c*) beiden Bedingungen genügen.
 Wieviel Punkte genügen der Forderung in *a* und *b*, wieviel der in *c*?
18. Man bestimme nach Aufgabe 17 die Lage eines Punktes in der Ebene der Tafel!

Zwölfter Abschnitt.

Die senkrechten Formen des Prismas, des Zylinders, der Pyramide und des Kegels.

§ 101. Das senkrechte Prisma[1]) und der senkrechte Zylinder[2]).

Beispiele für das Prisma sind außer den bei dem Würfel und dem Quader genannten Körpern kantige Bleistifte und Trinkgläser, für den Zylinder eine Walze, ein Lampenzylinder, eine Münze.

Ähnlich wie der Quader über einem rechtwinkligen Parallelogramme aufgebaut ist, können auch verwandte Körper über anderen ebenen Figuren errichtet werden.

Man lege ein Dreieck zunächst auf die Tischebene und nehme mit ihm eine Parallelverschiebung in vertikaler Richtung vor! Es entsteht ein *senkrechtes dreiseitiges Prisma* (Säule, Fig. 120), welches von zwei kongruenten Dreiecken als Grundflächen und drei Rechtecken als Seitenflächen begrenzt wird. Die sämtlichen Seitenflächen bilden den *Mantel* des Prismas. Grundkanten? Seitenkanten? Höhe? Vergleiche die Seitenkanten nach ihrer Länge! Dieses Prisma heißt ein senkrechtes, dreiseitiges Prisma. Wie würde man ein senkrechtes vierseitiges, fünfseitiges, sechsseitiges ... Prisma erhalten?

Regelmäßig heißt ein senkrechtes Prisma, wenn es zu Grundflächen regelmäßige Figuren hat.

Ein *schiefes Prisma* erhält man durch eine Parallelverschiebung einer ebenen geradlinigen Figur aus der horizontalen Lage in einer schrägen Richtung.

Würfel und Quader sind besondere Formen der Prismen.

Legt man durch zwei nicht aufeinander folgende Seitenkanten eines Prismas eine Ebene, so heißt die Durchschnittsfigur ein *Diagonalschnitt* des Prismas.

---

[1]) Griech. prisma (πρῖσμα). — [2]) Griech. kylindros (κύλινδρος), Walze.

Legt man einen Kreis zunächst auf eine horizontale Ebene und nimmt dann in vertikaler Richtung eine Parallelverschiebung vor, so beschreibt er einen *senkrechten Zylinder* (Fig. 121). Dieser ist von zwei parallelen und kongruenten Kreisflächen als Grundflächen und einer zwischen diesen liegenden krummen Fläche als Mantelfläche begrenzt. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte heißt die *Achse.* Eine *Seite CD* des Zylinders erhält man durch die Verbindung der Endpunkte zweier paralleler und gleichgerichteter Radien der Grundflächen. Vergleiche die Seiten nach ihrer Länge! *Höhe* des Zylinders? Ist eine Seite (Höhe) eines senkrechten Zylinders dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt der Zylinder *gleichseitig.* Ein *Achsenschnitt* ist der Schnitt eines Zylinders mit einer durch die Achse gelegten Ebene. Welche Figur ist der Achsenschnitt eines senkrechten, eines gleichseitigen Zylinders?

Einen senkrechten Zylinder kann man auch durch eine Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten entstanden denken; er ist daher ein Rotationskörper[1]). Welche Seite des Rechteckes gibt dieHöhe, welche den Radius der Grundfläche? Welche Figur erzeugt durch eine Umdrehung einen gleichseitigen Zylinder?

Einen *schiefen Zylinder* erhält man durch eine Parallelverschiebung eines Kreises aus der horizontalen Lage in einer schrägen Richtung.

Fig. 120.

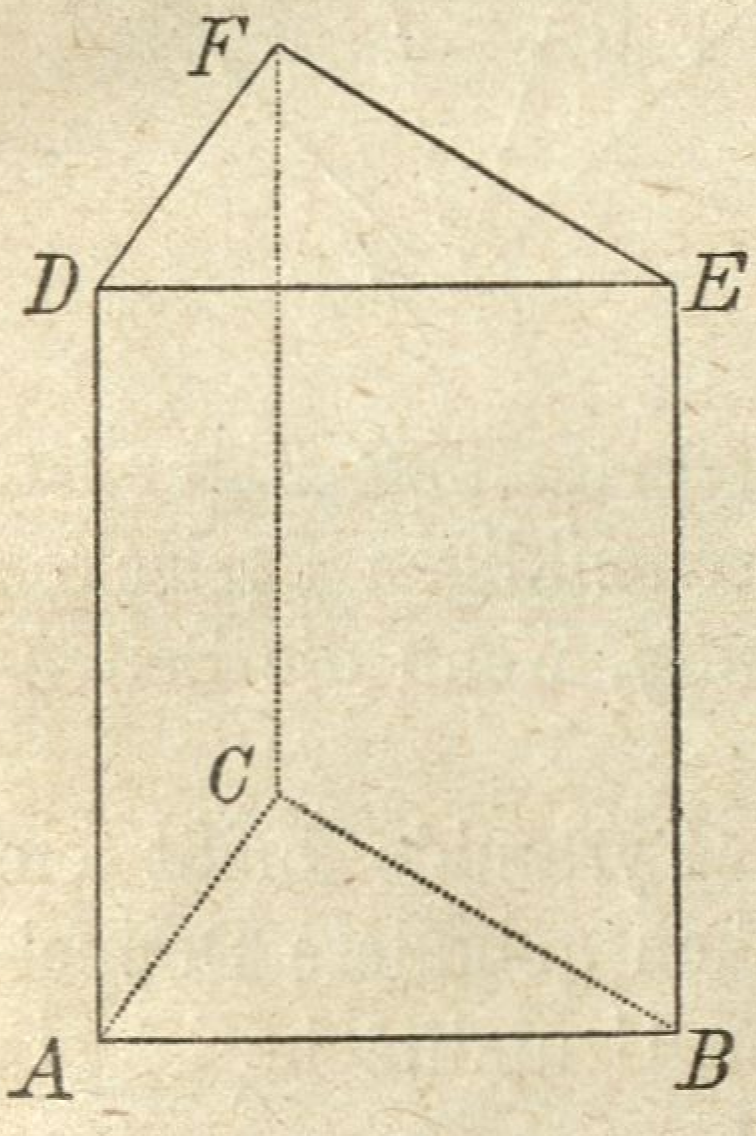


Fig. 121.

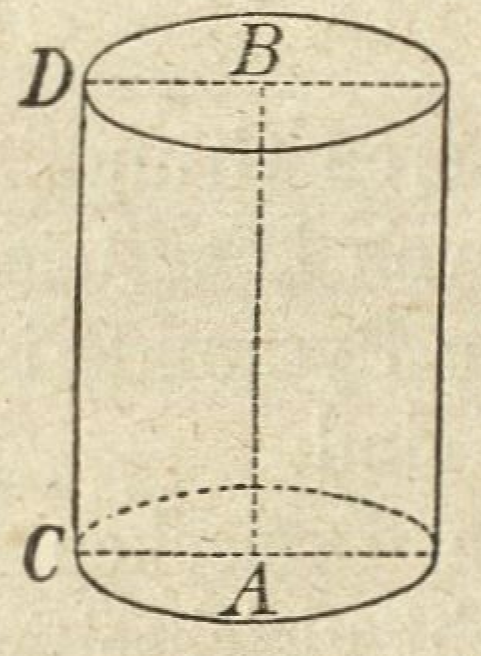
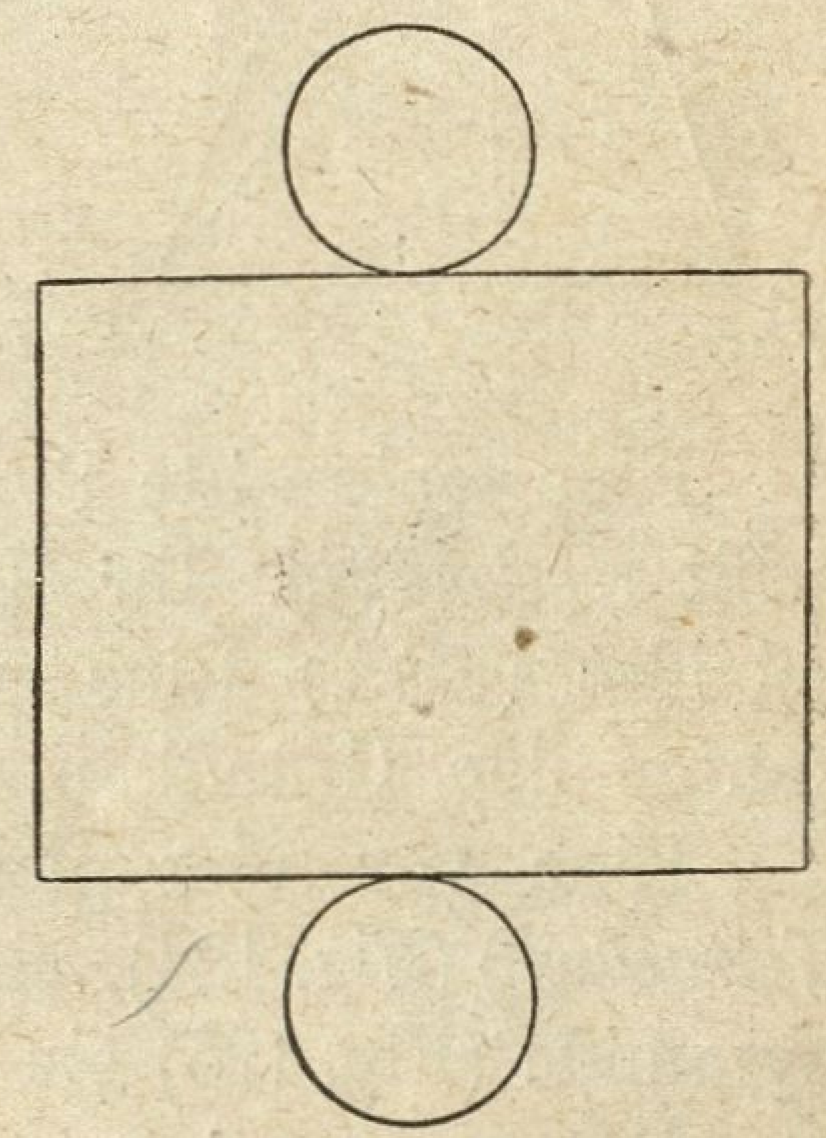


Fig. 122.



Das Netz eines regelmäßigen Prismas zu zeichnen, wenn die Grundfläche *a*) ein Dreieck (welches?), *b*) ein Viereck (welches?) *c*) ein Sechseck ist. Welche Figur ist das Netz des Mantels? Grundlinie und Höhe dieser Figur?

Fig. 122 enthält das Netz eines senkrechten Zylinders. Der Mantel ist ein Rechteck; die Seiten, welche von den beiden Grundkreisen berührt werden, müssen $3\frac{1}{7}$ mal so groß sein als ihr Durchmesser.

Die gerade Pyramide. **§ 102.**

Beispiel: Ein nur von Dreiecken begrenztes Turmdach.

Denkt man sich mit dem Dreiecke *ABC* (Fig. 123) eine Parallelverschiebung so vorgenommen, daß der Mittelpunkt *D* des umgeschriebenen Kreises stets

---

[1]) Lat. rotare, kreisförmig herumdrehen.

in derselben Normalen SD der Dreiecksfläche bleibt und das Dreieck gleichmäßig so abnimmt, daß es endlich in einem Punkte S verschwindet, so wird ein Körper beschrieben, der eine *senkrechte* (*gerade*) *dreiseitige Pyramide*[1]) genannt wird. Sie ist von einem Dreiecke ABC als *Grundfläche* und von drei Dreiecken als *Seitenflächen*, welche den *Mantel* der Pyramide bilden, begrenzt. *Grundkanten*, *Seitenkanten*. Die letzteren sind gleich lang. Nachweis durch Verbindung der Punkte A, B, C mit dem Punkte D und Kongruenz von Dreiecken, in welcher die Seitenkanten der Pyramide als Seiten vorkommen. (SWS.) Der Mantel ist also von gleichschenkligen Dreiecken gebildet. Der Punkt S heißt der *Scheitel*, SD (senkrecht auf der Grundfläche) die *Höhe* der Pyramide. In gleicher Weise kann auch eine gerade vierseitige, fünfseitige ... Pyramide entstehen. In jedem Falle muß die Grundfläche ein Sehnenpolygon sein.

Fig. 123.

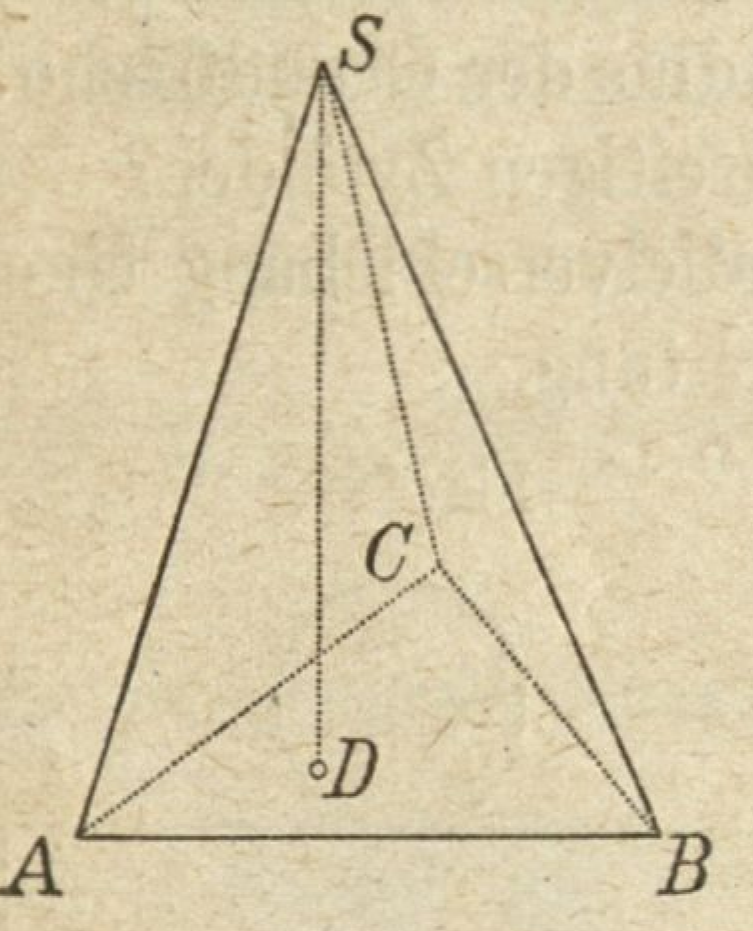


Fig. 124.

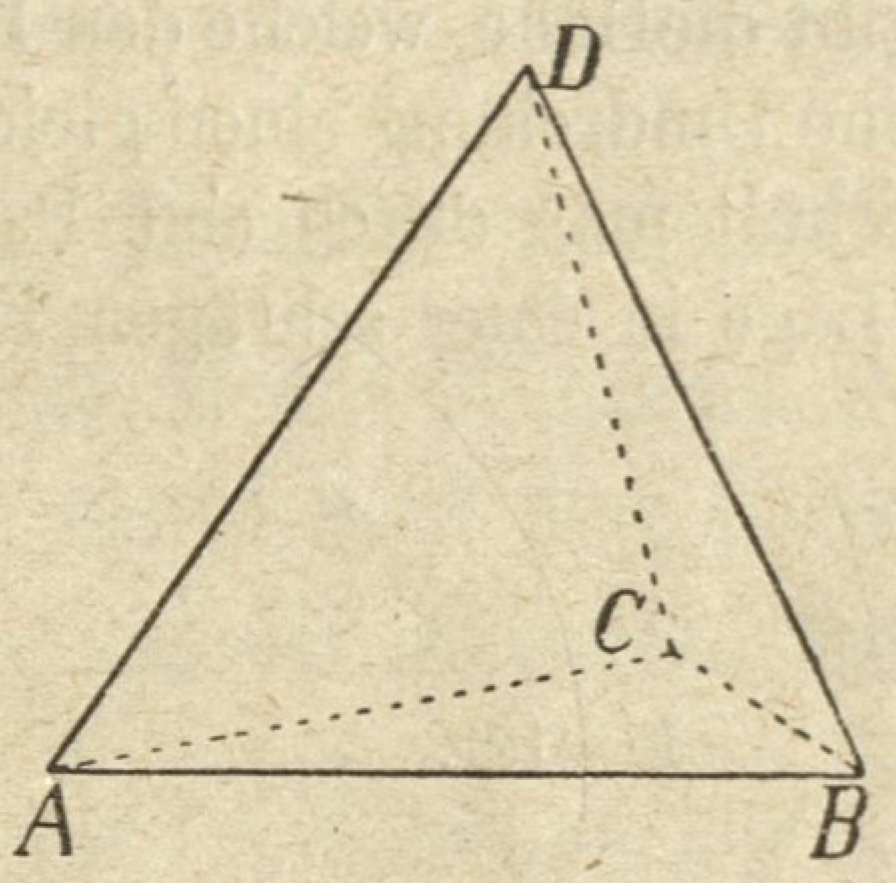
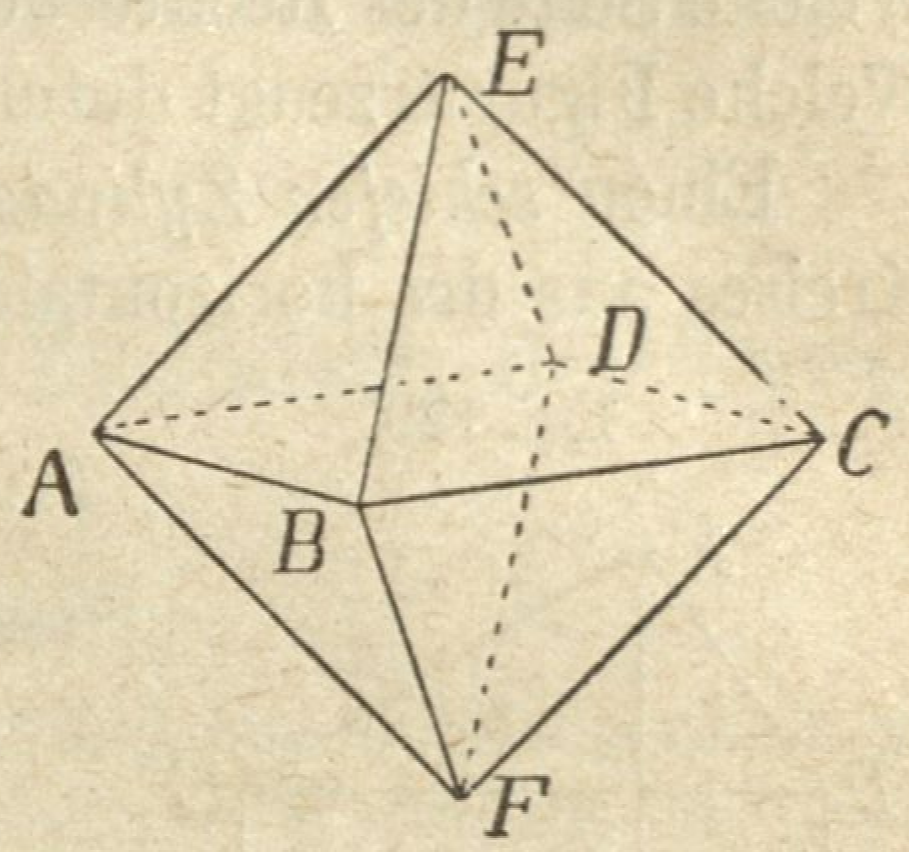


Fig. 125.



Eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche eine regelmäßige Figur ist, heißt *regelmäßig*. Ihr Mantel ist von kongruenten gleichschenkligen Dreiecken gebildet. (SSS.) Eine regelmäßige Pyramide ist *gleichkantig*, wenn die Seitenkanten den Grundkanten gleich sind.

Eine von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzte Pyramide heißt ein *Tetraeder*[2]) (Fig. 124), eine von acht gleichseitigen Dreiecken gebildete Doppelpyramide (Fig. 125) ein *Oktaeder*[3]). Die gemeinschaftliche Grundfläche ist ein Quadrat.

Jede senkrechte Pyramide kann auch dadurch erzeugt werden, daß man im Mittelpunkte D (Fig. 123) des einem Sehnenpolygon umgeschriebenen Kreises die Normale errichtet, einen ihrer Punkte S mit einem Eckpunkte des Polygones durch eine Gerade verbindet und diese Verbindungslinie an dem Umfange des Vieleckes so herumführt, daß sie immer durch den Punkt S geht. Sie beschreibt dabei den Mantel der Pyramide.

---

[1]) Griech. pyramis (πυραμίς). — [2]) Tetraeder wird auch eine dreiseitige Pyramide überhaupt genannt. Das oben erwähnte heißt dann ein regelmäßiges Tetraeder. Der Name Tetraeder stammt aus dem Griechischen; hedra (ἕδρα) Sitz, Basis, Fläche und tetra (τετρα) in Zusammensetzungen vier = Vierflächner. — [3]) Griech. okto (ὀκτώ), acht und ἕδρα = Achtflächner.

Anzugeben, wie eine regelmäßige *a*) vierseitige, *b*) sechsseitige Pyramide entstehen kann. Fig. 126 enthält das Netz einer senkrechten dreiseitigen Pyramide. Wie lange ist die gebrochene Linie $ABCD$? Was ist SA an der Pyramide?

Fig. 126.

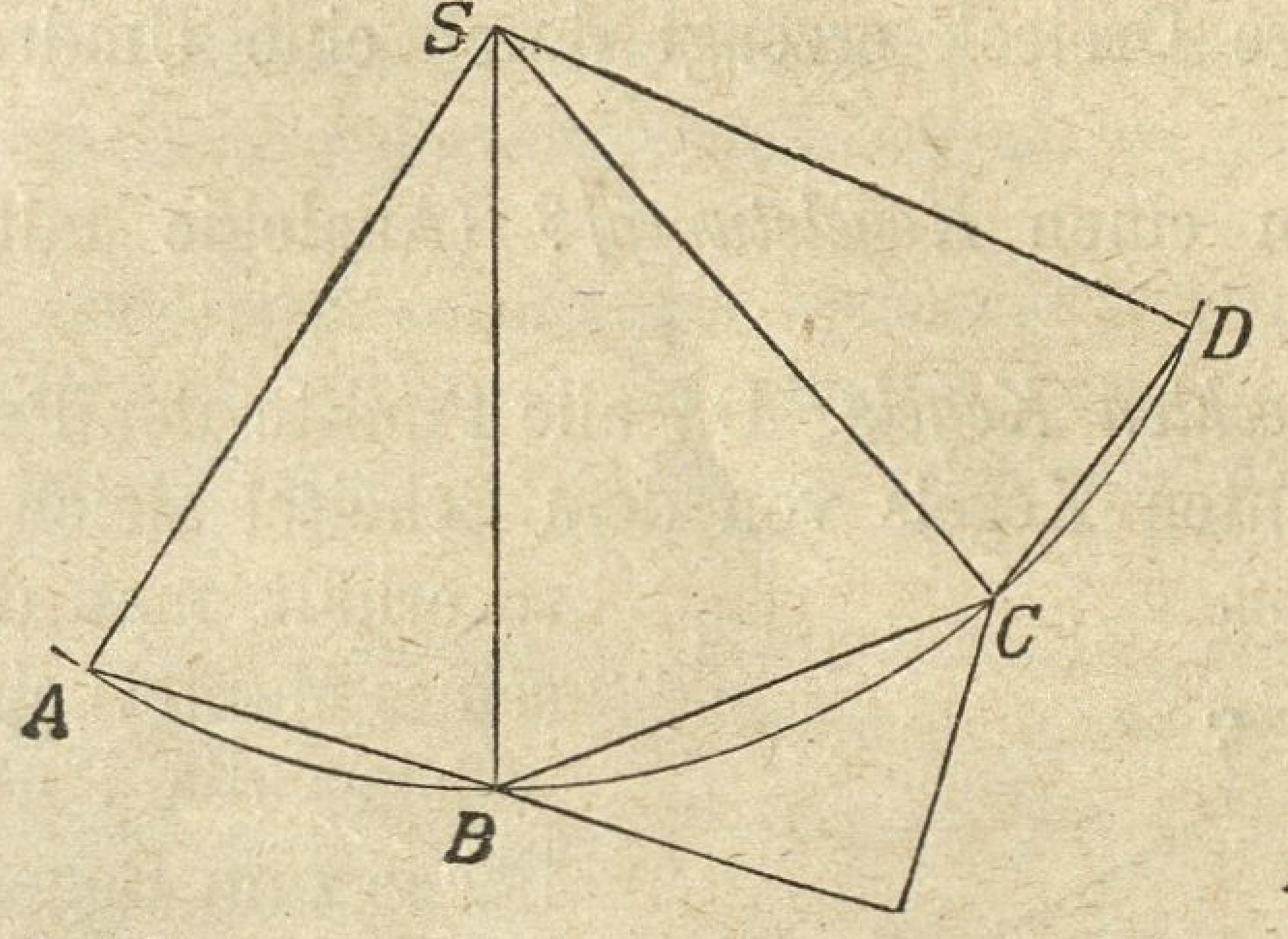
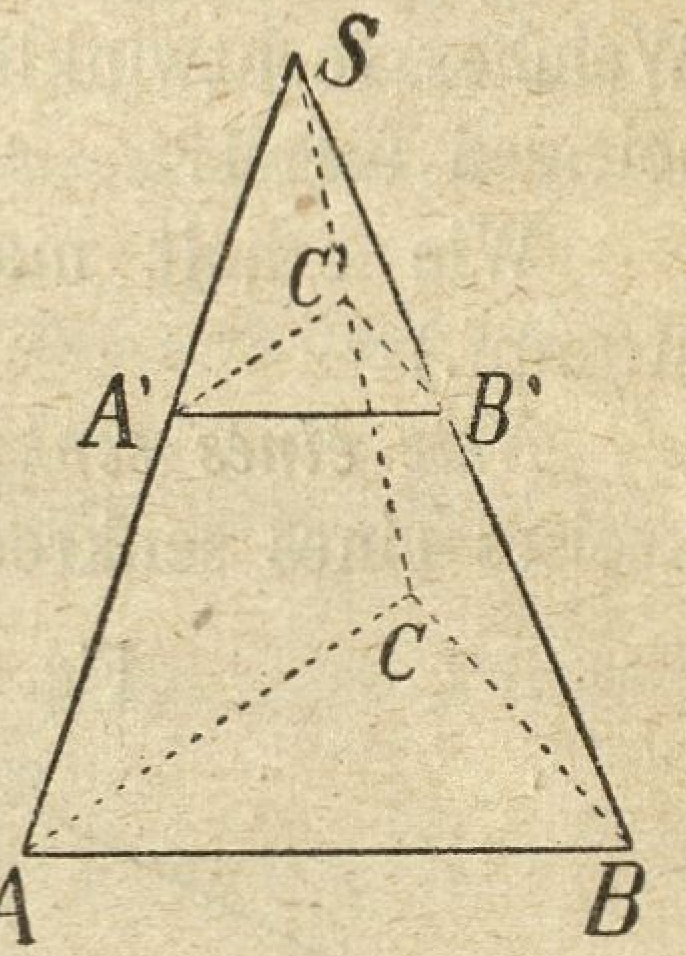


Fig. 127.



Schneidet man die Pyramide $SABC$ (Fig. 127) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so wird sie in zwei Teile zerschnitten, von welchen der eine $ABCA'B'C'$ *Pyramidenstumpf*, der zweite $SA'B'C'$ die *Ergänzungspyramide* heißt.

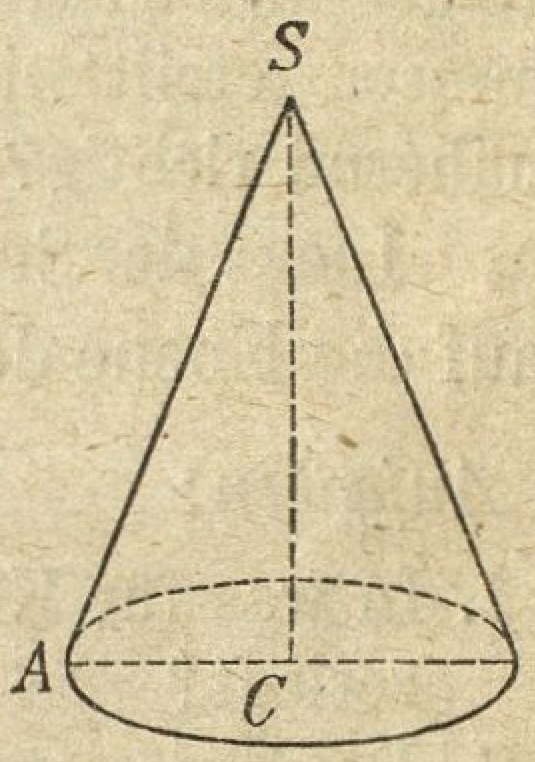
Sind die Seitenkanten einer Pyramide ungleich, so heißt die Pyramide eine *schiefe*.

Der senkrechte Kegel. **§ 103.**

Beispiele: Papiertüte, Stamm eines Tannenbaumes; für den Kegelstumpf ein Trichter.

Nimmt man mit einem Kreise eine Parallelverschiebung so vor, daß der Mittelpunkt stets in derselben Normale auf die Kreisfläche bleibt und der Kreis gleichmäßig so abnimmt, daß er endlich in einen Punkt sich zusammenzieht, so wird ein Körper beschrieben, der ein *senkrechter* Kegel heißt. Er ist von einem Kreise als *Grundfläche* und einer krummen Fläche, dem *Mantel*, begrenzt.

Fig. 128.



Der senkrechte Kegel kann auch dadurch erzeugt werden, daß man im Mittelpunkte eines Kreises die Normale auf die Kreisfläche errichtet, von einem ihrer Punkte S (Fig. 128) zur Peripherie des Kreises eine Strecke zieht und diese an dem Umfange des Kreises so herumführt, daß sie immer durch den Punkt S geht. Sie beschreibt dabei den Mantel eines senkrechten Kegels.

Der Punkt S heißt der *Scheitel*, eine Strecke (SA), welche den Scheitel mit einem Punkte der Grundfläche verbindet, eine *Seite* des Kegels. Alle Seiten eines senkrechten Kegels sind gleich lang. (Kongruenzsatz?) Die *Achse* des Kegels ist die Strecke zwischen dem Scheitel und dem Mittelpunkte des Grundkreises; sie ist zugleich die *Höhe* des senkrechten Kegels.

Ist die Seite eines senkrechten Kegels dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt der Kegel ein *gleichseitiger*.

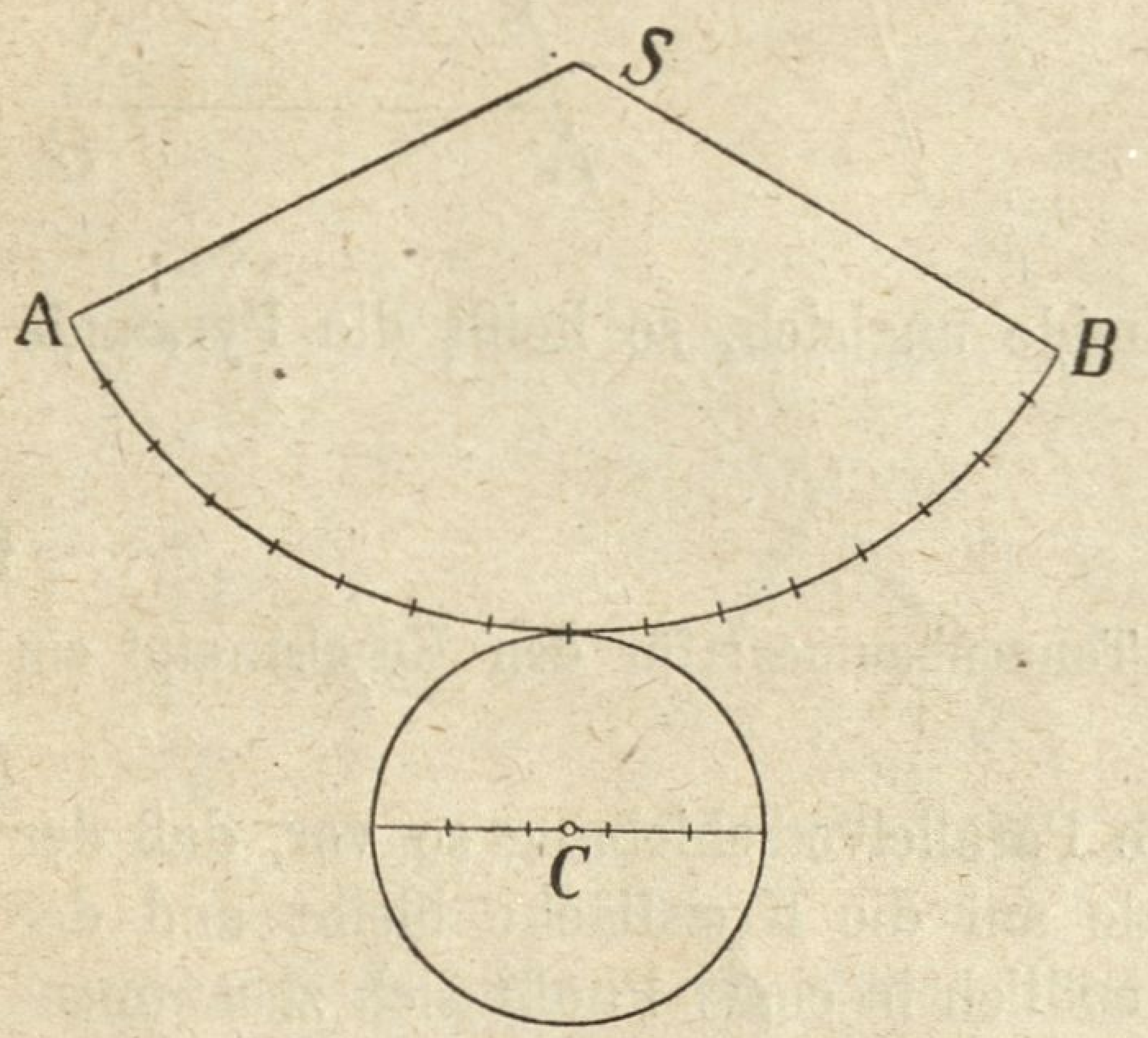
Legt man durch die Achse eines Kegels eine Ebene, so heißt die Schnittfigur ein *Achsenschnitt* des Kegels. Er ist ein Dreieck; welches bei einem *a*) senkrechten, *b*) gleichseitigen Kegel?

Einen senkrechten Kegel kann man auch durch eine Umdrehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten erzeugen. Was bedeutet diese Kathete an dem Kegel, was die andere Kathete, was die Hypotenuse? Welches rechtwinklige Dreieck erzeugt durch eine Umdrehung einen gleichseitigen Kegel?

Wie erhält man einen *Kegelstumpf?* (Analogie mit dem Pyramidenstumpf.)

Netz eines senkrechten Kegels. Da alle Punkte der Peripherie des Grundkreises eines senkrechten Kegels von dem Scheitel gleich weit entfernt sind, so erhält man durch das Aufrollen seines Mantels einen Kreisausschnitt, welcher die Peripherie der Grundfläche zum Bogen und die Seite des Kegels zum Halbmesser hat. Um das Netz eines senkrechten Kegels zu erhalten, hat man an den Bogen des Kreisausschnittes, den man durch Aufrollen des Mantels erhält, noch den Grundkreis zu zeichnen (Fig. 129).

Fig. 129.



Den Bogen des Kreisausschnittes kann man annähernd in folgender Weise erhalten: Er muß (§ 123) $3\frac{1}{7}$ mal so groß als der Durchmesser des Grundkreises sein. In Fig. 129 ist der Durchmesser in 5 gleiche Teile geteilt und auf dem Bogen *AB*, dessen Radius einer Seite des Kegels gleich ist, sind $15\frac{5}{7}$ eines solchen Teiles aufgetragen. In je mehr Teile der Durchmesser geteilt wird, desto genauer wird dieses Verfahren. Weshalb ist es nur annähernd richtig?

Liegt der Scheitel eines Kegels nicht in der Normalen, welche im Mittelpunkte auf die Ebene des Grundkreises errichtet wird, so heißt der Kegel ein *schiefer*.

§ 104. *Aufgaben:*

1. In was für Körper wird *a*) ein Würfel, *b*) ein Quader durch einen Diagonalschnitt zerlegt?
2. Die Symmetrieebenen *a*) eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas, *b*) eines geraden Prismas, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist, anzugeben.
3. Wo sind bei einem Modell eines geraden Prismas die Neigungswinkel der Seitenflächen gegeneinander abgebildet?
4. Was ist der geometrische Ort für alle Punkte des Raumes, welche von einer Strecke den Abstand *a* haben?
5. Die Symmetrieebenen eines geraden Zylinders anzugeben.
6. Welchen vierseitigen Prismen überhaupt und welchen Prismen mit Parallelogrammen als Grundflächen insbesonders läßt sich ein Zylinder *a*) einschreiben, *b*) umschreiben?

7. Das Netz *a)* eines Tetraeders mit der Kante 6 *cm*, *b)* eines Oktaeders mit der Kante 5 *cm* zu zeichnen und mit dem Netze diese Körper zu modellieren.

Zu *a*). Über jeder Seite eines gleichseitigen Dreieckes wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Zu *b*). Eine Hälfte des Netzes des Oktaeders erhält man dadurch, daß man um den Mittelpunkt eines Kreises vier gleichseitige Dreiecke nebeneinanderlegt, deren Seite dem Radius des Kreises gleich ist. Zeichnet man beide Hälften so nebeneinander, daß zwei gleichseitige Dreiecke dieser Hälften eine Seite gemeinschaftlich haben, so erhält man das Netz des ganzen Oktaeders.

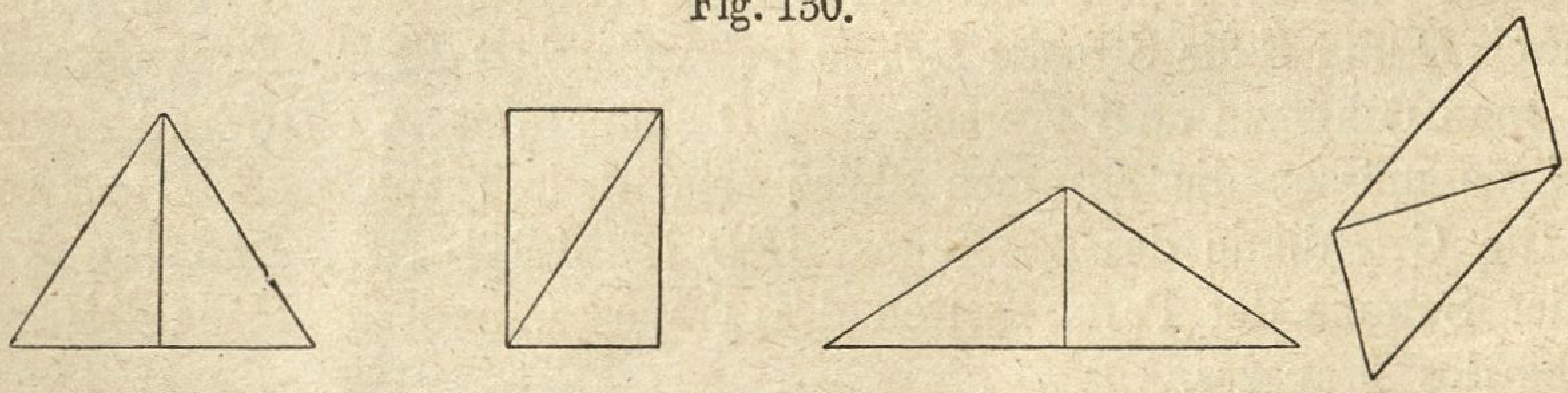
8. Das Netz einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide zu zeichnen und diesen Körper zu modellieren. (Grundkante 4 *cm*, Seitenkante 7 *cm*.)
9. Die Symmetrieebenen *a*) eines Tetraeders, *b*) einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide anzugeben.
10. Die Grundkante einer regelmäßigen *a*) vierseitigen, *b*) sechsseitigen Pyramide ist 4 *cm*, jede Seitenkante 6 *cm*. Die Höhe zu konstruieren.
11. Die Grundkante einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide ist 5 *cm*, die Höhe 7 *cm*; eine Seitenkante zu konstruieren.
12. Welche Vierecke überhaupt, welche Parallelogramme insbesonders können Grundflächen einer senkrechten Pyramide sein?
13. Die Symmetrieebenen eines geraden Kegels anzugeben.
14. Wie viele von den Stücken: Radius der Grundfläche, Höhe, Seite eines geraden Kegels müssen gegeben sein, um die übrigen konstruieren zu können?
15. Welche Flächen kommen an einer Zwirnspule vor?
16. Zwei Punkte liegen *a*) auf einer ebenen Fläche, *b*) auf einer Zylinderfläche, *c*) auf einer Kegelfläche, *d*) auf einer Kugelfläche. Was läßt sich über die Lage der diese Punkte verbindenden Strecke zu diesen Flächen sagen?

Dreizehnter Abschnitt.

Flächengleichheit, Verwandlung und Teilung ebener Figuren.

Zwei Figuren, welche denselben Flächeninhalt haben, heißen *flächengleich.* **§ 105.** Zwei kongruente Figuren sind auch flächengleich. Figuren, welche aus kongruenten Teilen bestehen, sind im allgemeinen nicht kongruent, aber stets flächengleich (Fig. 130).

Fig. 130.



Zieht man (Fig. 131, *a*) auf die Verlängerung der Seite *CD* des Parallelo- **§ 106.** grammes *ABCD* von *A* und *B* die Normalen *AF* und *BE*, so erhält man das Rechteck *ABEF*, welches mit dem Parallelogramm *ABCD* gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Die Dreiecke *AFD* und *BEC* sind kongruent (Kongruenzsatz?) Zieht man jedes von dem Trapeze $ABCF$ ab, so müssen auch die Reste gleich sein, d. h. Parallelogramm $ABCD$ = Rechteck $ABEF$.

Fig. 131 a.

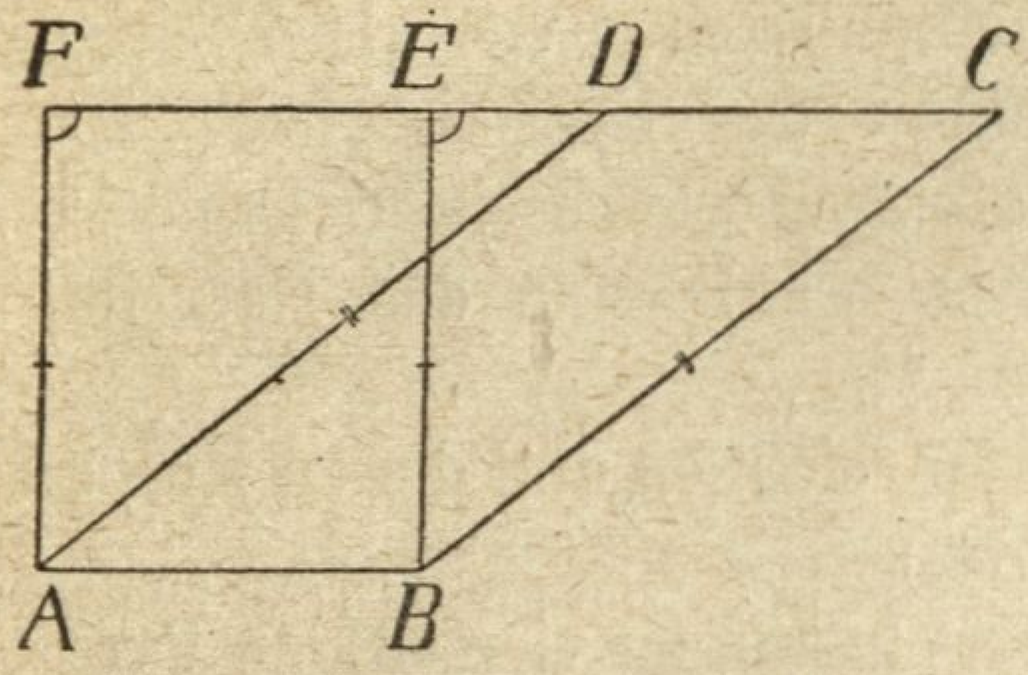


Fig. 131 b.

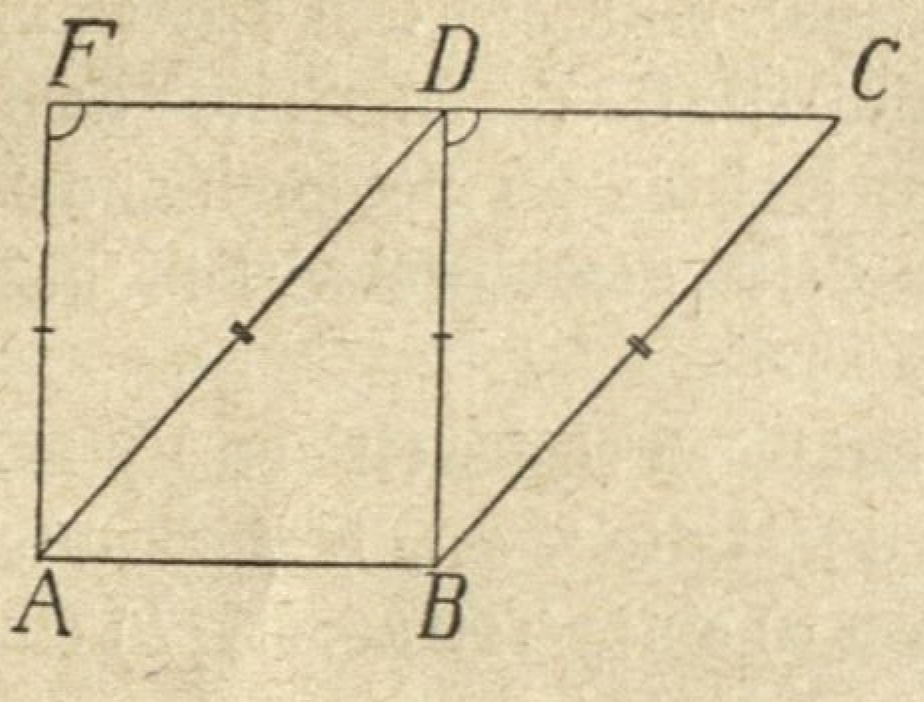
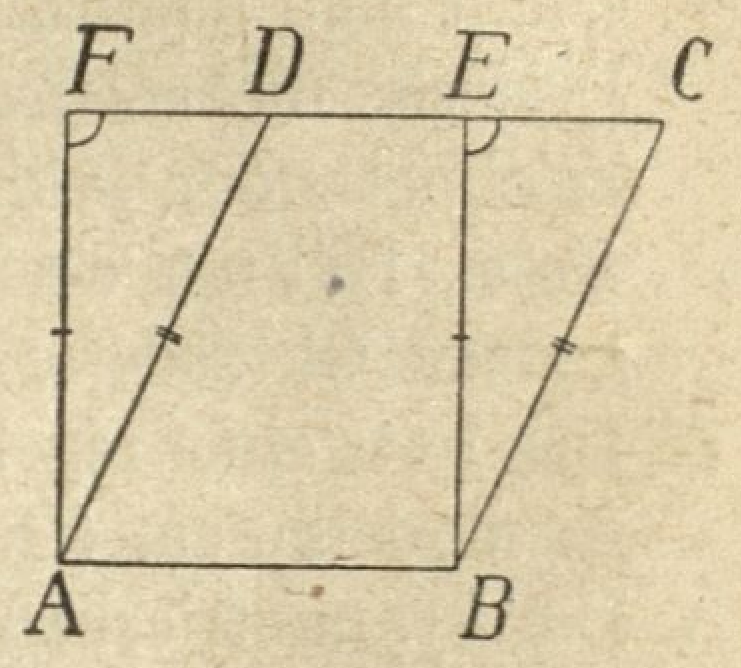


Fig. 131 c.



Der Punkt E kann auch mit D zusammenfallen oder zwischen die Punkte C und D fallen (Fig. 131, b und c). Der Schüler zeige, daß man auch in diesen Fällen zu dem Ergebnis gelangt:

Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist flächengleich einem Rechtecke, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Aus diesem Lehrsatze folgt:

Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich; denn jedes ist mit demselben Rechtecke flächengleich.

Fig. 132.

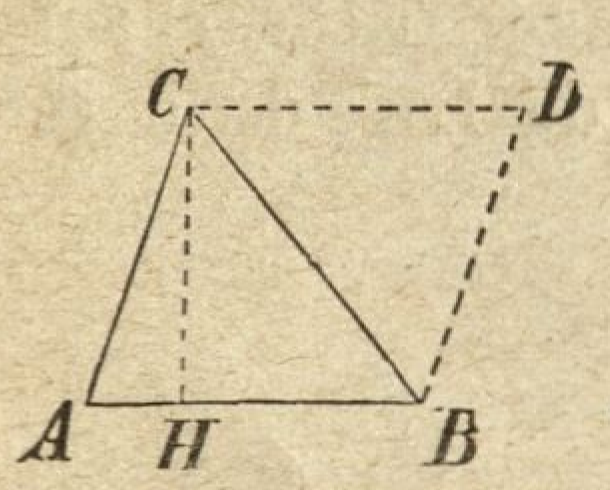
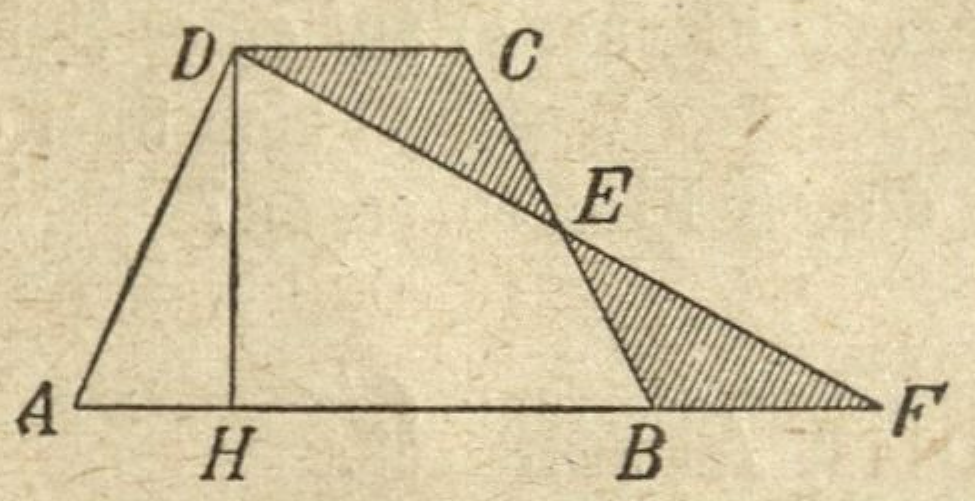


Fig. 133.



§ 107. Zieht man (Fig. 132) durch die zwei Eckpunkte C und B des Dreieckes ABC Parallele mit den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht das Parallelogramm $ABDC$, welches mit dem $\triangle\, ABC$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; von diesem Parallelogramm ist ABC die Hälfte.

Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Hieraus folgt:

Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

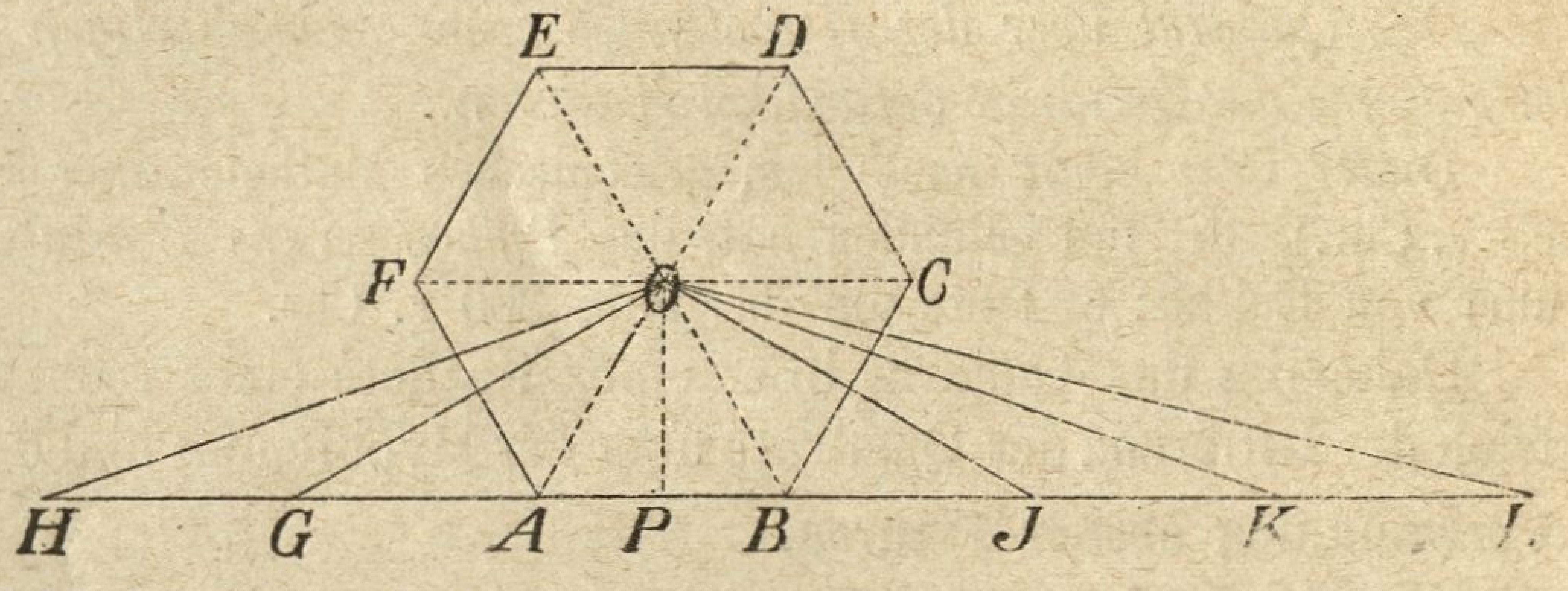
§ 108. Halbiert man in E den Schenkel BC des Trapezes $ABCD$ (Fig. 133) und zieht durch D und E die Strecke DF, so ist $\triangle\, CDE \cong BFE$. (Kongruenzsatz?) Addiert man daher zu dem Viereck $ABED$ einmal das $\triangle\, CDE$ und dann das $\triangle\, BFE$, so müssen die Summen gleich sein, d. i. Trapez $ABCD$ = Dreieck AFD. Die Grundlinie des Dreieckes AFD ist $AB + BF = AB + CD$, also gleich der Summe der Parallelseiten des Trapezes, und die Höhe DH gleich der Höhe des Trapezes.

Jedes Trapez ist flächengleich einem Dreiecke, das mit ihm gleiche Höhe hat und dessen Grundlinie gleich ist der Summe der parallelen Seite des Trapezes.

§ 109. Es sei (Fig. 134) O der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes $ABCDEF$ und $OP \perp AB$. Zieht man die Strecken OA, OB, OC, ..., so wird das Vieleck in kongruente Dreiecke zerlegt. Trägt man nun alle Seiten des Vieleckes auf der verlängerten AB auf und zieht von den Endpunkten zu dem Punkte O Strecken, so ist $\triangle HOL = \triangle AOB \times 6$, Polygon $ABCDEF = \triangle AOB \times 6$. Daher Polygon $ABCDEF = \triangle HOL$.

Jedes regelmäßige Vieleck ist flächengleich einem Dreiecke, das den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite zur Höhe hat.

Fig. 134.



Läßt man die Zahl der Seiten des einem Kreise ein- oder umgeschriebenen Vieleckes ohne Ende zunehmen, so nähert sich jedes der beiden Vielecke ohne Ende dem Kreise, ihr Umfang der Peripherie und der Abstand ihres Mittelpunktes von einer Seite dem Halbmesser des Kreises.

Daraus ergibt sich:

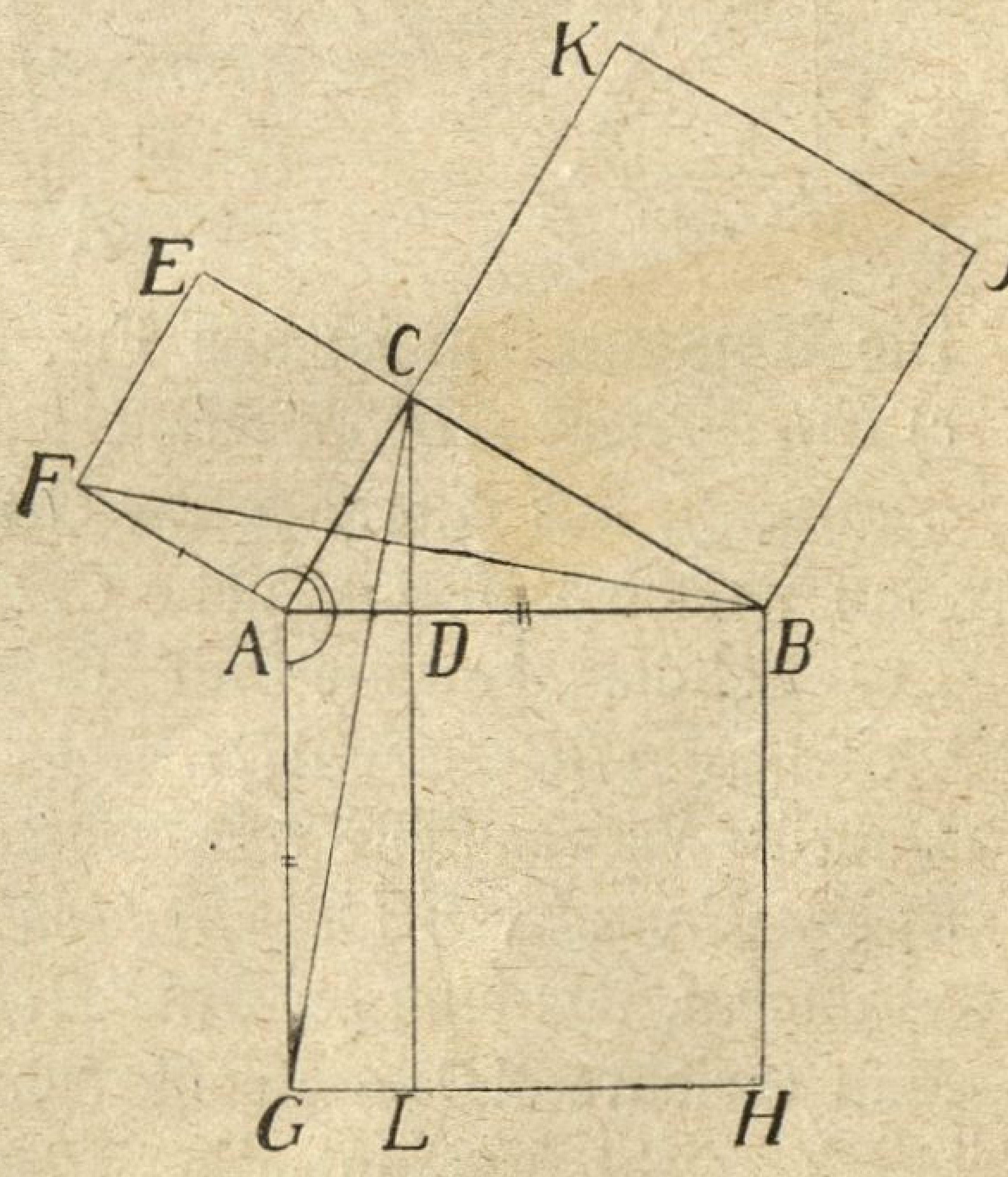
Ein Kreis ist flächengleich einem Dreiecke, das die Peripherie des Kreises zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ebenso findet man:

Ein Kreisausschnitt ist flächengleich einem Dreiecke, das die Länge des Kreisbogens zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Die Verwandlung eines Kreises oder Kreisausschnittes in ein Dreieck kann dadurch ausgeführt werden, daß man die Peripherie beziehungsweise den Bogen des Ausschnittes in kleine Teile teilt und diese auf eine Gerade überträgt. Über der so erhaltenen Strecke als Grundlinie konstruiert man ein Dreieck, dessen Höhe der Radius ist. Weshalb ist dieses Dreieck nur annähernd dem Kreise oder dem Sektor gleich?

Fig. 135.



Flächensätze des rechtwinkligen Dreieckes.

Zieht man (Fig. 135) die Höhe des rechtwinkligen Dreieckes ABC auf die Hypotenuse, so erhält man zwei Abschnitte der Hypotenuse.

Man konstruiere ferner über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes die Quadrate, verlängere CD bis L und ziehe die Strecken FB und CG!

1. Es ist $\triangle ABF \cong AGC$ (Kongruenzsatz?)

Da $\triangle ABF = \frac{1}{2} AFEC$ und $\triangle ACG = \frac{1}{2} ADLG$, so ist $AFEC = ADLG$.

Ebenso kann bewiesen werden, daß $BCKJ = DBHL$.

Das Quadrat über jeder Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und ihrem der Kathete anliegenden Abschnitte.

2. Da die Summe der Rechtecke $ADLG$ und $BDLH$ das Quadrat der Hypotenuse ist, so folgt:

Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Dieser Satz heißt nach dem griechischen Mathematiker Pythagoras (geb. um 568 v. Chr.), der ihn gefunden hat, der *Pythagoreische Lehrsatz*. Der obige Beweis rührt von Euklid; er lebte um das Jahr 300 v. Chr.

Daher ist das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der anderen Kathete.

§ 111. Verwandlung ebener Figuren.

Ein gegebenes Gebilde in ein anderes *verwandeln* heißt ein Gebilde konstruieren, welches bestimmten Bedingungen entspricht und dem gegebenen flächengleich ist.

a) Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 136) *in ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie AB zu verwandeln.*

Die Konstruktion ist aus Fig. 136 zu erkennen. Beweis?

b) Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 137) *in ein anderes zu verwandeln, das an der Grundlinie einen gegebenen Winkel α′ enthält.*

Fig. 136.

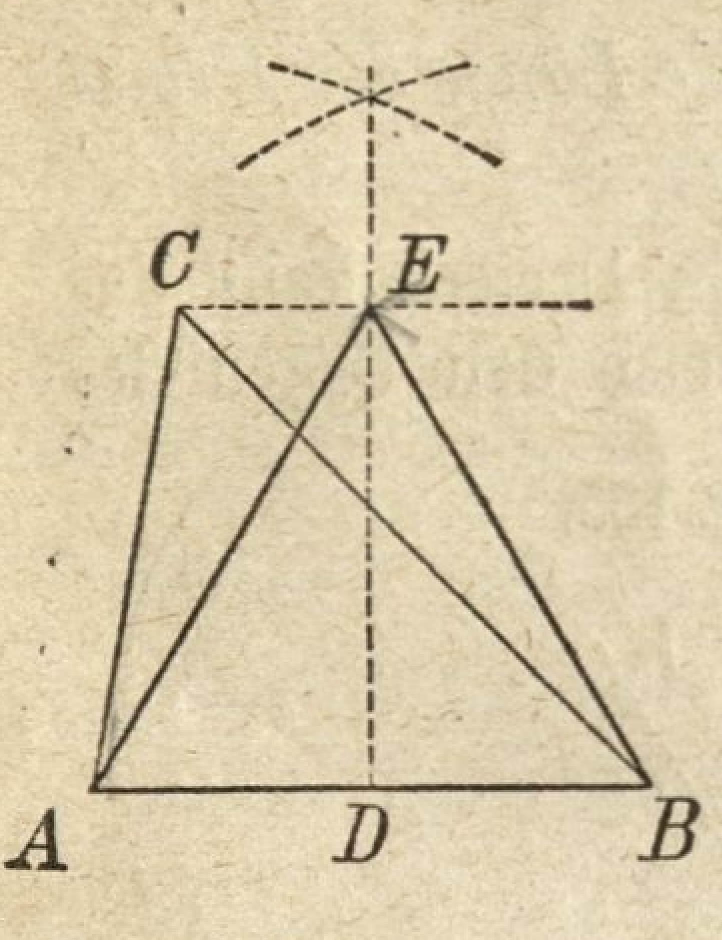


Fig. 137.

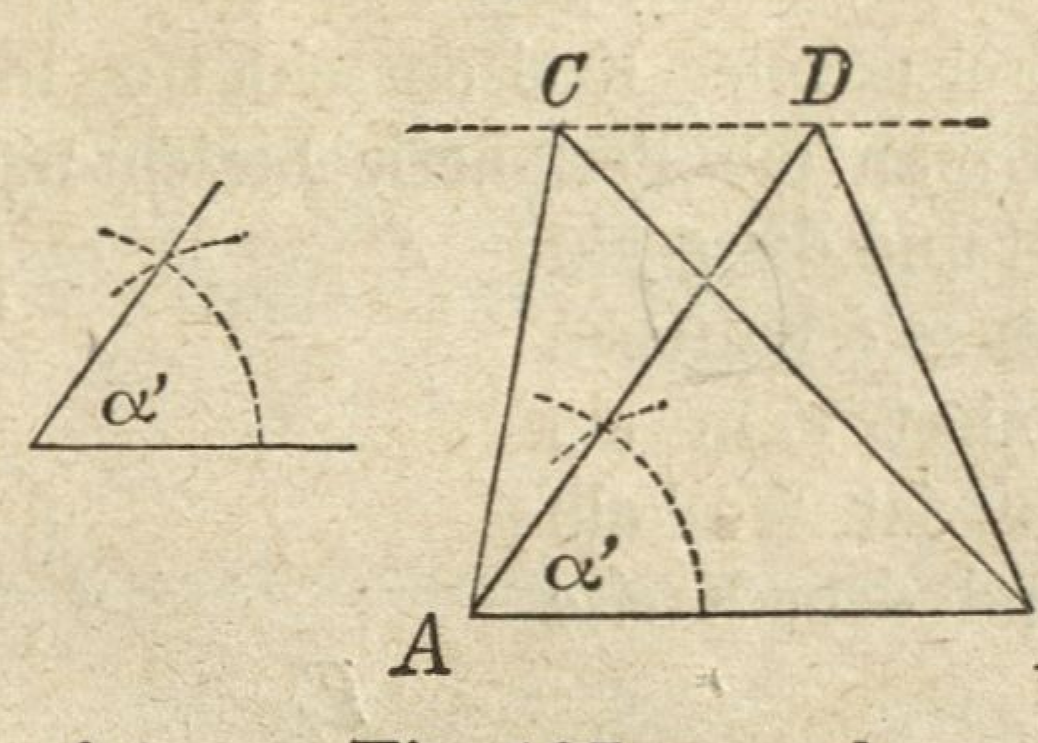
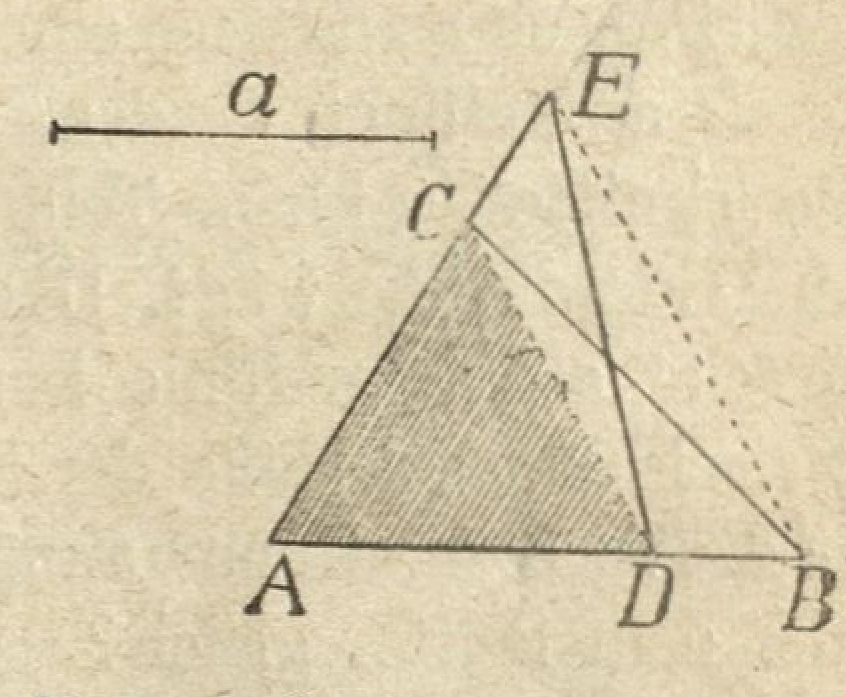


Fig. 138.



Die Konstruktion ist aus Fig. 137 zu erkennen. Beweis?

c) Ein Dreieck ABC mit Beibehaltung des Winkels A (Fig. 138) *in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.*

Man mache $AD = a$, ziehe CD, $BE \parallel CD$ und verbinde D mit E!

Der Schüler beweise mit Beachtung des gemeinschaftlichen Dreieckes ACD, daß $\triangle ABC = \triangle ADE$ ist!

Dieselbe Verwandlung vorzunehmen, wenn $a > AB$ ist.

d) Ein Dreieck ABC mit Beibehaltung des Winkels A (Fig. 139) *in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.*

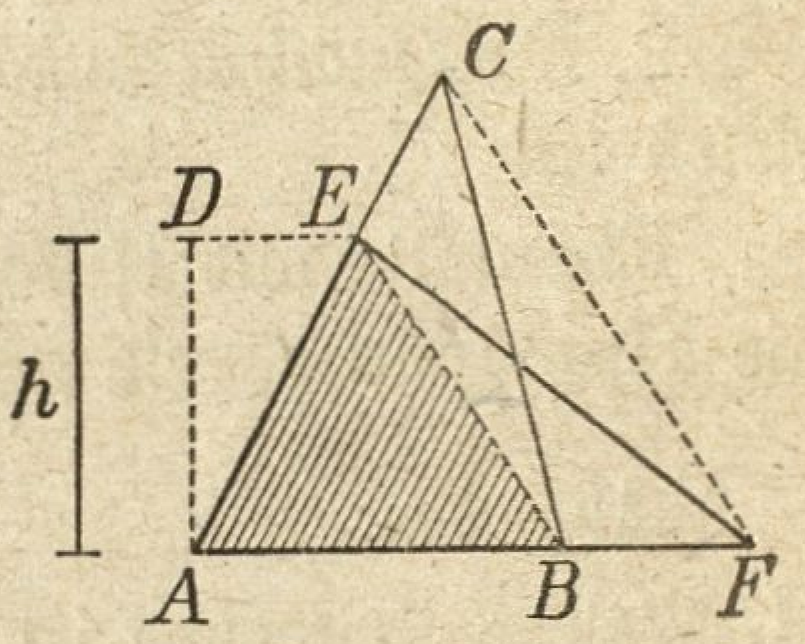
Man errichte $AD = h$ senkrecht auf AB, ziehe $DE \parallel AB$, dann EB, und $CF \parallel BE$! Zieht man nun die Strecke EF, so ist $\triangle AEF = \triangle ABC$. Beweis wie bei der Aufgabe in *c*).

Dieselbe Verwandlung vorzunehmen, wenn h größer als die Höhe des gegebenen Dreieckes ist.

e) Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.

Man halbiere (Fig. 140) die Seite BC, ziehe durch den Halbierungspunkt $EDF \parallel AB$, ferner $BF \parallel AC$! Das dem Dreiecke ABC flächengleiche Parallelogramm ist $ABFD$. Durch die Kongruenz der Dreiecke CDE und BFE nachzuweisen.

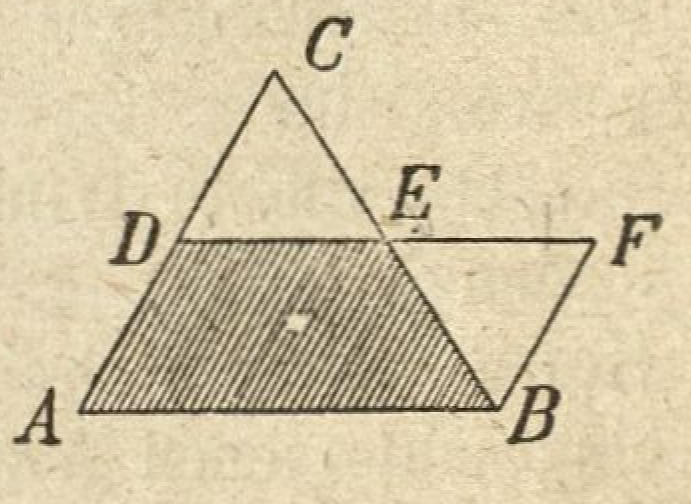
Fig. 139.



f) Ein Rechteck ABCD (Fig. 141) *in ein Quadrat zu verwandeln.*

Man verlängere die kleinere Seite AB bis E, so daß $AE = AD$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher die verlängerte Seite CB in F trifft! Zieht man AF und beschreibt darüber das Quadrat $AFGH$, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke gleich. (§ 110, 1.)

Fig. 140.

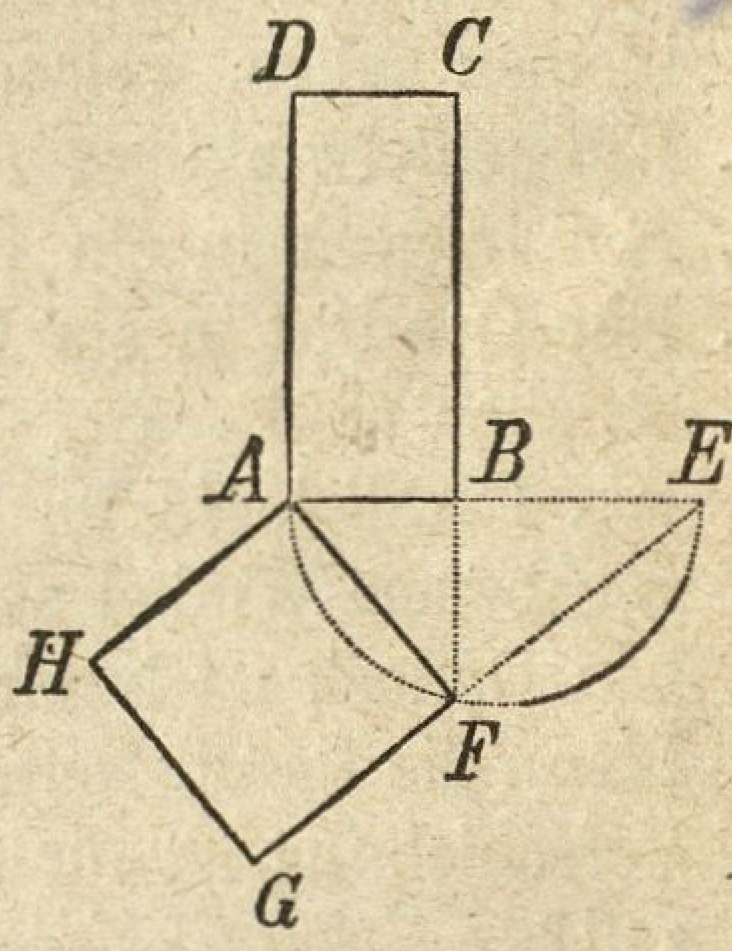


g) Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 142) *in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.*

Man ziehe die Diagonale DF, $EG \parallel DF$ und verlängere AF bis G! Zieht man DG, so ist das Vieleck $ABCDG$ gleich dem Vielecke $ABCDEF$; zu beweisen mit Hilfe der Dreiecke FDE und FDG.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden. Da sich nun jedes Dreieck in ein Parallelogramm, dieses in ein Rechteck und letzteres in ein Quadrat verwandeln läßt, so kann auch jedes Vieleck durch bloße Konstruktion in ein Quadrat verwandelt werden.

Fig. 141.

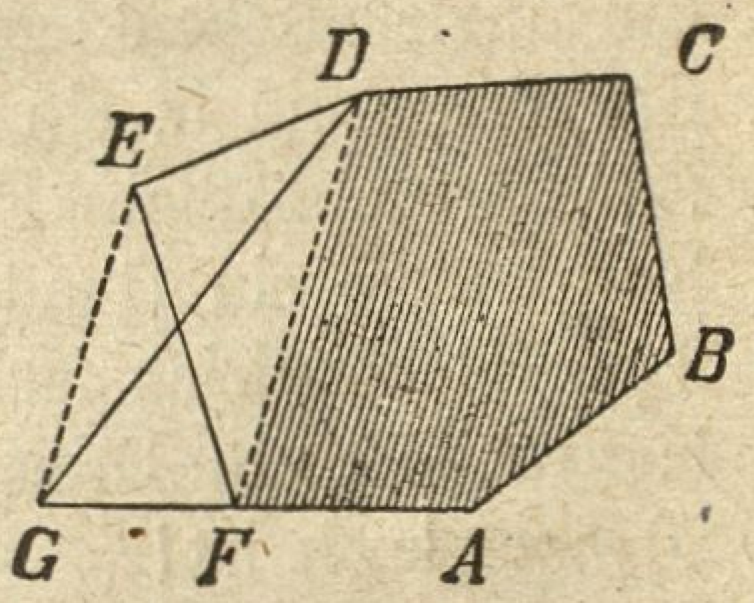


Teilung ebener Figuren. § 112.

a) Ein gegebenes Dreieck durch Strecken, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Teile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde die Teilungspunkte mit jenem Eckpunkte durch Strecken!

Fig. 142.



b) Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien mit zwei Gegenseiten parallel sind.

Teile die beiden anderen Gegenseiten in die verlangte Anzahl gleicher Teile und verbinde je zwei gleichliegende Teilungspunkte durch eine Strecke! (§ 70, Aufgabe 2.)

c) Ein Trapez in mehrere gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden.

Durch Teilung der Parallelseiten in gleiche Teile und Verbindung der entsprechenden Teilungspunkte.

§ 113. 1. *Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.*

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates.

2. *Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.*

Ebenfalls mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreieckes zu lösen; wie groß ist die Hypotenuse, wie groß eine Kathete?

§ 114. *Aufgaben:*

1. Welche Bewegung ist für die Spitze eines Dreieckes gestattet, wenn die Grundlinie und die Fläche ungeändert bleiben sollen?
2. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges über derselben Grundlinie zu verwandeln.

   Der rechte Winkel kann *a*) an der Grundlinie, *b*) gegenüber der Grundlinie liegen.
3. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten 31 *mm* (Grundlinie) und 40 *mm* und dem eingeschlossenen Winkel 45° und verwandle es dann in ein Dreieck mit der Grundlinie 45 *mm* und einem anliegenden Winkel von 60°!
4. Wenn die Grundlinie und der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ungeändert bleiben sollen, welche Bewegung ist für die Gegenseite der Grundlinie zulässig?
5. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.
6. Ein Dreieck in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.
7. Ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, von dem eine Seite und ein Winkel gegeben sind.
8. Ein Parallelogramm in ein anderes *a*) mit einer gegebenen Seite, *b*) mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.
9. Ein Dreieck ist in ein Parallelogramm von gleicher Höhe zu verwandeln.
10. Wenn die Parallelseiten eines Trapezes der Länge nach ungeändert bleiben, welche Verschiebung ist für die eine zulässig, wenn die Fläche keine Änderung erfahren soll?
11. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.
12. Ein ungleichschenkliges Trapez in ein gleichschenkliges zu verwandeln.
13. Ein Trapezoid in ein Rechteck zu verwandeln.
14. Ein unregelmäßiges Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln.
15. Konstruiere ein Quadrat, welches einem regelmäßigen Sechsecke über der Seite 2 *cm* flächengleich ist!
16. Konstruiere ein Dreieck, welches einem regelmäßigen Achtecke über der Seite 20 *mm* gleich ist!
17. Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien *a*) zu addieren, *b*) zu subtrahieren.
18. Zwei Parallelogramme mit gleichen Höhen *a*) zu addieren, *b*) zu subtrahieren.
19. Zwei Dreiecke mit gleichen Höhen *a*) zu addieren, *b*) zu subtrahieren.
20. Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) *a*) zu addieren, *b*) zu subtrahieren.

21. Ein Quadrat zu konstruieren, welches *a*) doppelt so groß, *b*) halb so groß als ein gegebenes Quadrat ist.
22. Ein Quadrat zu konstruieren, das
    a) der Summe dreier oder mehrerer gegebener Quadrate gleich ist;
    b) dreimal, viermal so groß ist als ein gegebenes Quadrat.
23. Ein Dreieck und ein Rechteck sind gegeben; *a*) die Summe, *b*) die Differenz beider als ein Quadrat darzustellen.
24. Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte aus *a*) in vier, *b*) in fünf gleiche Teile zu teilen.

Vierzehnter Abschnitt.

Berechnung der ebenen Figuren; Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht nicht durch *unmittelbares* **§ 115.**
Auftragen der Flächenmaße auf die zu messende Fläche (vgl. Fig. 42 und Fig. 43), da dieses sehr mühsam und meistens auch unausführbar wäre. (Wann?) Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt *mittelbar*, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße mißt und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch *Rechnung* sucht.

Das Quadrat. **§ 116.**

In § 37 *a* wurde folgender Lehrsatz nachgewiesen:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates ist dem Quadrate der Maßzahl einer Seite gleich.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch a und die Maßzahl seines Flächeninhaltes durch f, so ist

$$f = a^2.$$

Bei den Berechnungen sind die Zahlen, welche aus Messungen hervorgegangen sind, als unvollständig anzusehen, daher ist das Endresultat mit der erreichbaren Genauigkeit durch abgekürzte Rechnungen zu entwickeln.

Aufgaben:

1. Die Seite eines Quadrates ist *a*) 236 *m*, *b*) 35·9 ... *cm*, *c*) 0·715 ... *m*, *d*) 3·475 ... *m*. Wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist 217 *m* 2.. *cm*. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58 *m* 5 *dm* ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1 *m* 2 *dm* haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?
4. *Wenn die Pflasterung eines quadratischen Hofes 500 K kostet, wie hoch kommt unter übrigens gleichen Umständen die Pflasterung eines Hofes von a*) *doppelter*, *b*) *halber Seitenlänge?* (Vgl. § 37 *a*, Aufgabe 5.)
5. Man stecke nach dem Augenmaße auf dem Felde ein Quadrat mit dem Flächeninhalte *a*) 1 *a*, *b*) 1 *ha* ab und prüfe sodann die Schätzung durch Messung!

Das Rechteck. **§ 117.**

In § 37 *b* wurde für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes gefunden:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Grundlinie und der Maßzahl der Höhe.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Rechteckes und f die Maßzahl seines Flächeninhaltes, so ist

$$f = g \cdot h.$$

Wie findet man aus dem Produkte zweier Faktoren und dem einen Faktor den anderen?

Prüfe die Richtigkeit der Gleichungen:

$$g = \frac{f}{h} \text{ und } h = \frac{f}{g}!$$

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus!

Aufgaben:

1. Bestimme 1. den Umfang, 2. den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
   a) Grundlinie 12 *m* 3 *dm* 3 *cm*, Höhe 9 *m* 2 *cm*;
   b) Grundlinie 3·215... *m*, Höhe 1·064 ... *m*!
2. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist 34·2 m^2, die Grundlinie 9 *m*. Wie groß ist die Höhe?
3. Ein Rechteck ist 0·873 .. *m* breit und enthält 12·17 .. m^2. Wie groß ist seine Länge?
4. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 87·432...*m*, eine Seite 18·246...*m*. Wie groß ist der Flächeninhalt?
5. Ein Quadrat hat mit einem Rechtecke, dessen Seiten 62 *cm* und 34 *cm* sind, gleichen Umfang. Um wieviel ist der Flächeninhalt des Quadrates größer als der des Rechteckes?
6. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *dm* 5 *cm* Höhe. Wie groß ist *a*) der Umfang, *b*) der Flächeninhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?
7. Ein Kassatisch, der 1·3 *m* lang und 0·8 *m* breit ist, soll eine Steinplatte erhalten. Wieviel kostet die Platte, wenn das Quadratmeter mit 17½ *K* bezahlt wird?
8. Ein Dach von 7·4 *m* Länge und 5·8 *m* Breite soll mit Zinkplatten belegt werden. *a*) Wieviel Platten von 1·5 *m* Länge und 8 *dm* Breite sind dazu erforderlich, wenn an jeder Seite der Platte 3 *cm* durch die Falze verloren gehen? *b*) Wieviel kosten sie, wenn jede Platte 12 *kg* wiegt und 1 *kg* Zinkplatte mit 80 *h* bezahlt wird?
9. Ein Gang ist 12 *m* lang, 3 *m* breit. Wieviel quadratische Platten von 30 *cm* Seite sind zur Pflasterung erforderlich? Was kostet sie, wenn eine Platte mit 1 *K* 60 *h* berechnet wird?
10. Ein Acker hat die Gestalt eines Rechteckes und ist 116 *m* lang und 18 *m* 5 *dm* breit. Wieviel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf 1 *a* 2½ *l* Weizen aussät?
11. *Wie ändert sich die Fläche eines Rechteckes, wenn a) die Grundlinie oder die Höhe mit 3 multipliziert oder durch 3 dividiert wird? b) Die Grundlinie und die Höhe mit 3 beziehungsweise 4 multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert werden? c) Die Grundlinie und die Höhe mit 3 multipliziert beziehungsweise durch 3 dividiert werden? (Bestätigung durch Zeichnungen.)*

    Wie ändert sich die Grundlinie eines Rechteckes, wenn bei ungeänderter Höhe die Fläche verdoppelt wird? Wenn bei ungeänderter Fläche die Höhe verdoppelt *wird? Wenn die Fläche und die Höhe verdoppelt werden? Ähnliche Fragen bezüglich der Höhe.*

12. Die Fläche eines Viereckes mit zueinander normalen Diagonalen ist der Hälfte eines Rechteckes gleich, welches die Diagonalen dieses Viereckes zu Seiten hat; mithin ist $f = \frac{dd'}{2}$, wenn d und d' die Diagonalen sind (z. B. Deltoid, Rhombus. Gilt diese Formel auch für das Quadrat?).

Das schiefwinklige Parallelogramm. **§ 118.**

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus § 106 und § 117.

Daher ist wie beim Rechtecke $f = g\,h$. $g = ?$ $h = ?$

Aufgaben:

1. Die Grundlinie eines Rhomboides ist 108 *dm*, die Höhe 64 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Von einer Wiese, welche die Form eines Rhomboides hat, worin die Grundlinie 66·4 *m* und die Höhe 45·2 *m* beträgt, wird ein Stück von 14 *m* Höhe parallel mit der Grundlinie abgeschnitten und zu Ackerland gemacht. *a*) Wie groß war die Wiese? *b*) Wie groß ist das übrig bleibende Stück?
3. Die Fläche eines Parallelogrammes ist 19·437... m^2, die Grundlinie 6·238... *m*. Die Höhe zu berechnen.
4. Was geschieht mit der Fläche eines Quadrates, wenn es mit ungeänderter Seitenlänge in einen Rhombus umgestaltet wird? Was mit der eines Rechteckes, wenn es ohne Änderung der Seiten in ein Rhomboid umgeändert wird?

Das Dreieck. **§ 119.**

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus § 107 und § 118.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Dreieckes und f seinen Flächeninhalt, so hat man

$$f = \frac{g \,.\, h}{2},\ g = \frac{2f}{h} \text{ und } h = \frac{2f}{g},\ \text{oder } h = f : \frac{g}{2} \text{ und } g = f : \frac{h}{2}.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke wird oft eine Kathete als Grundlinie angenommen; welche Linie ist dann die Höhe? Wie lautet in diesem Falle die Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes?

Von wieviel veränderlichen Größen hängt nach der obigen Formel die Fläche eines Dreieckes ab?

Aufgaben:

1. Berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn gegeben sind:

Grundlinie	*a*) 3·5 *m*,	*b*) 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*,	*c*) 794·3... *cm*,
Höhe	3·2 *m*,	5 *dm* 9 *cm*,	563·4... *cm*!

2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29·35.. *dm*, die andere 18·42.. *dm*. Wie groß ist der Flächeninhalt?

3. Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes, wenn die Höhe 5·64...m und der Flächeninhalt 40·32..m^2 beträgt?
4. Ein Dreieck hat 20·67..dm^2 Flächeninhalt und 5·32...dm zur Grundlinie. Wie groß ist die Höhe?
5. In einem rechtwinkligen Dreiecke, welches 21 m^2 5 dm^2 enthält, ist eine Kathete 7 m 4 dm. Wie groß ist die zweite Kathete?
6. Ein Dreieck hat mit einem Parallelogramme gleichen Flächeninhalt und gleiche Grundlinie. Wie groß ist die Höhe des Dreieckes?
7. Die Fläche eines Dreieckes ist 12·4786...m^2, die Höhe ist die Hälfte der Grundlinie; die Höhe zu berechnen.
8. *Wie ändert sich die Fläche eines Dreieckes, wenn zwei Seiten desselben konstant bleiben, der eingeschlossene Winkel aber veränderlich ist? Für welchen Winkel ist die Dreiecksfläche am größten? Durch eine Zeichnung zu zeigen, daß je zwei dieser Dreiecke flächengleich sind.*
9. Ein Dreieck auf dem Felde abzustecken, die Grundlinie und die Höhe zu schätzen (sodann abzuschreiten) und die Fläche näherungsweise zu berechnen. Das Resultat durch genaue Messung zu prüfen.
10. *Wie ändert sich die Grundlinie eines Dreieckes, wenn die Fläche bei ungeänderter Höhe a) mit 2 multipliziert oder durch 2 dividiert wird? b) Wenn man diese Abänderung bei ungeänderter Fläche an der Höhe vornimmt? c) Wenn man sie an der Fläche und an der Höhe zugleich vornimmt?*

§ 120. Das Trapez.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Maßzahl der Summe der Parallelseiten und der Maßzahl der Höhe.

Folgt aus § 108 und § 119.

Sind a und b die Maßzahlen der zwei Parallelseiten, h die Maßzahl der Höhe eines Trapezes und f des Flächeninhaltes, so hat man

$$f = \frac{(a+b)\,.\,h}{2} = \frac{a+b}{2}\,.\,h = (a+b)\frac{h}{2}.$$

Von wieviel variablen Größen hängt nach dieser Formel die Fläche eines Trapezes ab?

Es ist $(a+b)\,.\,h = 2f$, daher $h = \frac{2f}{a+b}$, oder $h = f : \frac{a+b}{2}$.

Wie findet man aus der Fläche, der Höhe und einer der Parallelseiten die zweite Parallelseite eines Trapezes? (Zuerst $a+b$, dann a suchen.)

Aufgaben:

1. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
   a) Parallelseiten 36 m und 27 m, Höhe 18 m;
   b) „ 3·5 m und 2·8 m, Höhe 1·6 m;
   c) „ 2 m 5 dm 4 cm und 5 m 3 dm 9 cm, Höhe 4 m 2 dm 8 cm!
2. In einem Trapeze, dessen Flächeninhalt 18·81 m^2 beträgt, sind die Parallelseiten $5\frac{1}{2}$ m und $4\frac{2}{5}$ m. Wie groß ist die Höhe?

3. Ein Trapez ist flächengleich mit einem Quadrate, dessen Seite 2·5 *m* beträgt; die Höhe des Trapezes ist 1·2 *m*, eine Parallelseite 1·6 *m*. Wie groß ist die andere Parallelseite?
4. Die Fläche eines Trapezes ist 13·47..m^2, die Höhe 2·474...*m*, eine der beiden Parallelseiten 4·274...*m*. Die zweite Parallelseite zu suchen.
5. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand ist 34·5 *m*. Wieviel ist der Garten wert, das Ar zu 50 *K* gerechnet?
6. Wieviel kostet die Pflasterung eines Hofes von der Form eines Trapezes mit den Parallelseiten 27·6 *m* und 24·5 *m*, die 11·2 *m* voneinander abstehen, wenn 1 m^2 Pflaster zu $6\frac{1}{2}$ *K* gerechnet wird?

Das regelmäßige Vieleck. **§ 121.**

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen des Umfanges und des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite.

Folgt aus § 109 und § 119.

Bezeichnen a, r, u und f folgeweise die Maßzahlen für die Seite eines regelmäßigen n-Eckes, für den Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite, für den Umfang und den Flächeninhalt, so ist

$$u = na \text{ und } f = \frac{u \,.\, r}{2} = \frac{na \,.\, r}{2};$$

und umgekehrt

$$a = \frac{u}{n};\ u = \frac{2f}{r};\ r = \frac{2f}{u} \text{ und } a = \frac{2f}{nr}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muß man die Maßzahl der gegebenen Seite

eines	regelmäßigen	Fünfeckes	mit	0·68819 ...,
,,	,,	Sechseckes	,,	0·86603 ...,
,,	,,	Achteckes	,,	1·20711 ...,
,,	,,	Zehneckes	,,	1·53884 ...,
,,	,,	Zwölfeckes	,,	1·86603 ....

multiplizieren.

Aufgaben:

1. Wie groß ist in jedem der eben angeführten regelmäßigen Vielecke *a*) der Umfang, *b*) der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, *c*) der Flächeninhalt, wenn eine Seite 12·54 *cm* beträgt?
2. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21·5 *dm*. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Es soll eine regelmäßige, achtseitige Laube, deren Seite 2 *m* lang ist, ausgesteckt werden. Wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

Das unregelmäßige Vieleck. **§ 122.**

Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen:

a) Man zerlegt das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, berechnet jedes und addiert alle Dreiecksflächen (Fig. 143).

Fig. 143.

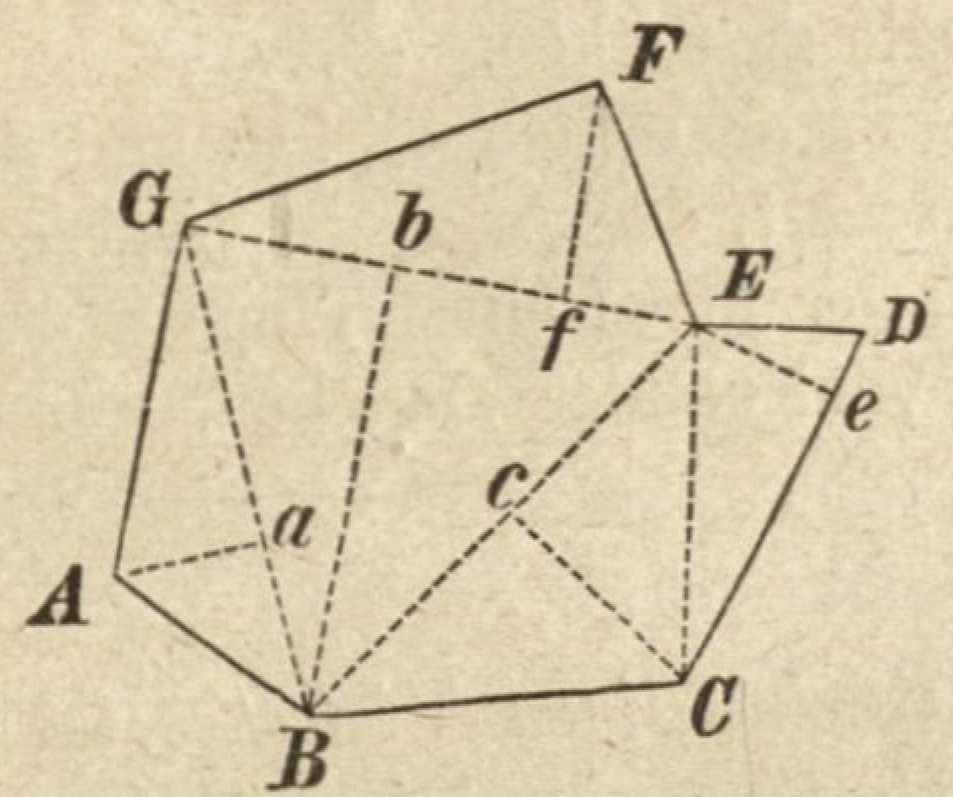
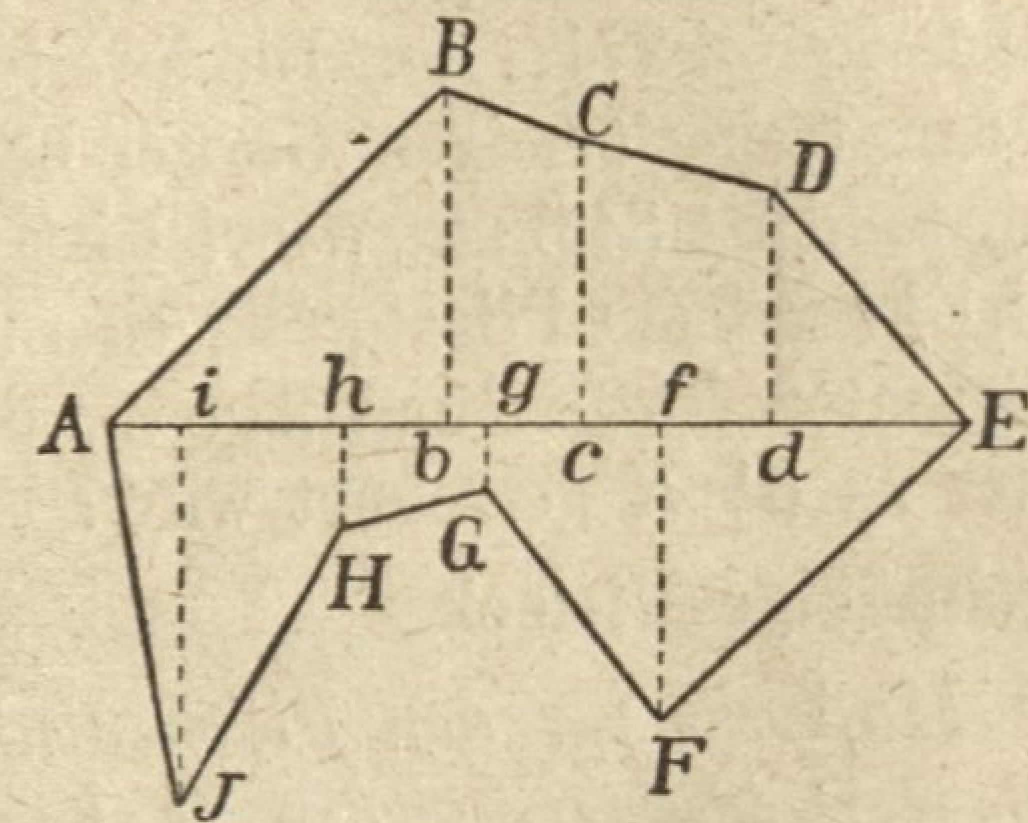


Fig. 144.



b) Man zieht die längste Diagonale des Vieleckes und fällt darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte (Fig. 144); dadurch zerfällt das Vieleck in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, aus denen sein Flächeninhalt berechnet werden kann. Dabei werden die Senkrechten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abschnitte der Diagonale als Höhen betrachtet.

Aufgaben:

1. In dem Vielecke $ABCDEFG$ (Fig. 143) ist gegeben: $BG = 39\,m$, $BE = 42{\cdot}5\,m$, $CD = 31{\cdot}5\,m$, $GE = 39{\cdot}5\,m$, $Aa = 11{\cdot}6\,m$, $Cc = 19{\cdot}7\,m$, $Ee = 12{\cdot}1\,m$, $Bb =$ $= 35{\cdot}4\,m$, $Ff = 16{\cdot}4\,m$. Die Fläche zu suchen.

   Bei den Berechnungen der einzelnen Flächen kommt bei jeder die Division durch 2 vor. Welcher Rechnungsvorteil ist möglich?
2. In dem Vielecke $ABCDEFGHJ$ (Fig. 144) ist gegeben: $Bb = 60{\cdot}5\,m$, $Cc = 57{\cdot}2\,m$, $Dd = 46\,m$, $Ff = 52{\cdot}3\,m$, $Gg = 12{\cdot}1\,m$, $Hh = 17{\cdot}1\,m$, $Ji = 63{\cdot}4\,m$; ferner $Ai =$ $= 9{\cdot}1\,m$, $ih = 29{\cdot}2\,m$, $hb = 22{\cdot}1\,m$, $bg = 3{\cdot}1\,m$, $gc = 19{\cdot}2\,m$, $cf = 15{\cdot}4\,m$, $fd = 16{\cdot}8\,m$, $dE = 34{\cdot}8\,m$. Die Fläche zu suchen.
3. Das Querprofil eines Flusses (Fig. 145) zu berechnen aus nachstehenden Dimensionen: $af =$ $= 5{\cdot}6\,m$, $fg = 6{\cdot}2\,m$, $gh = 5{\cdot}9\,m$, $he = 2{\cdot}8\,m$, $bf = 2{\cdot}1\,m$, $cg = 2{\cdot}9\,m$, $dh = 1{\cdot}9\,m$.
4. Am Ufer eines Flusses liegt eine Wiese *adeh* (Fig. 146). Welche Dimensionen müssen gemessen werden, um sie aus den in der Figur enthaltenen Streifen annähernd berechnen zu können? Wie sind die Strecken *ab*, *bc*, *cd*,... zu wählen, damit der Fehler nicht zu groß wird?

Fig. 146.

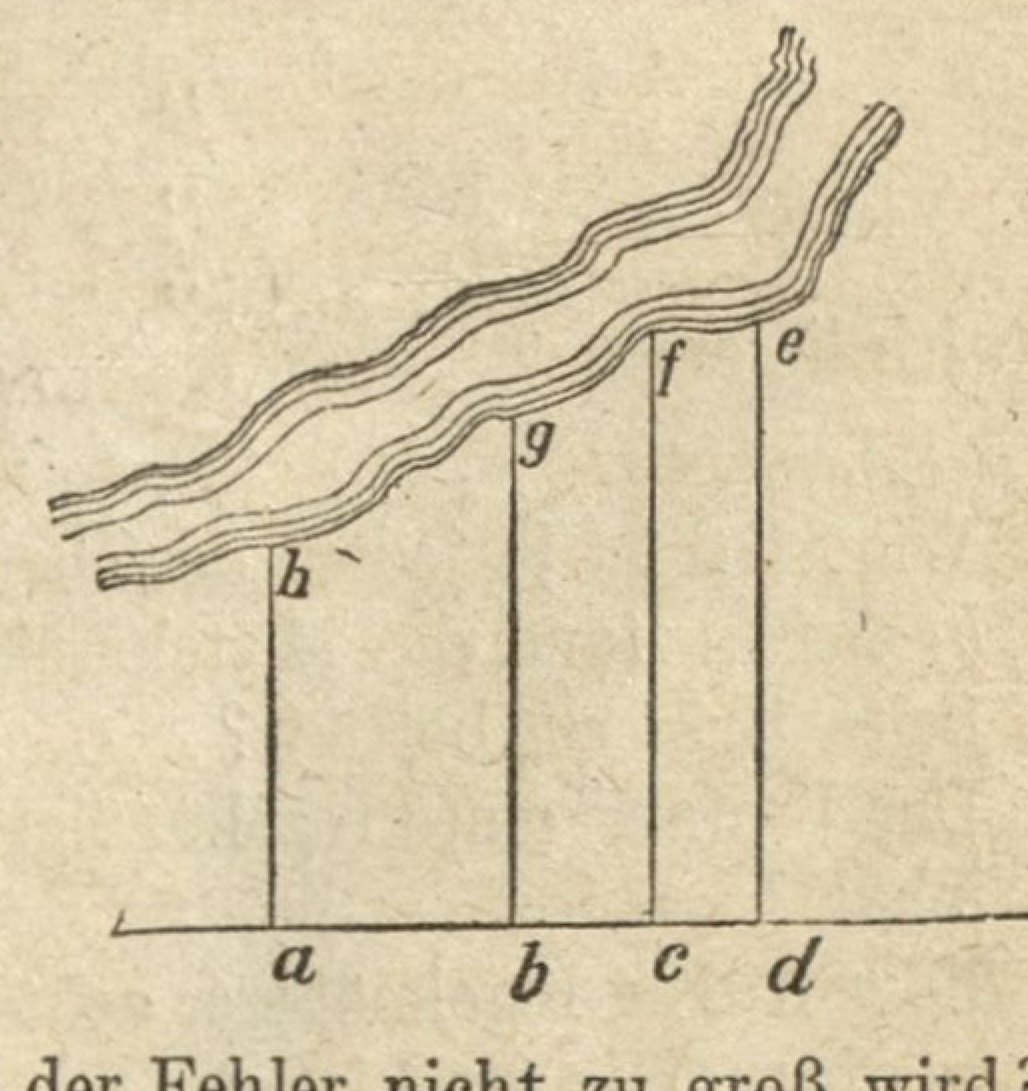
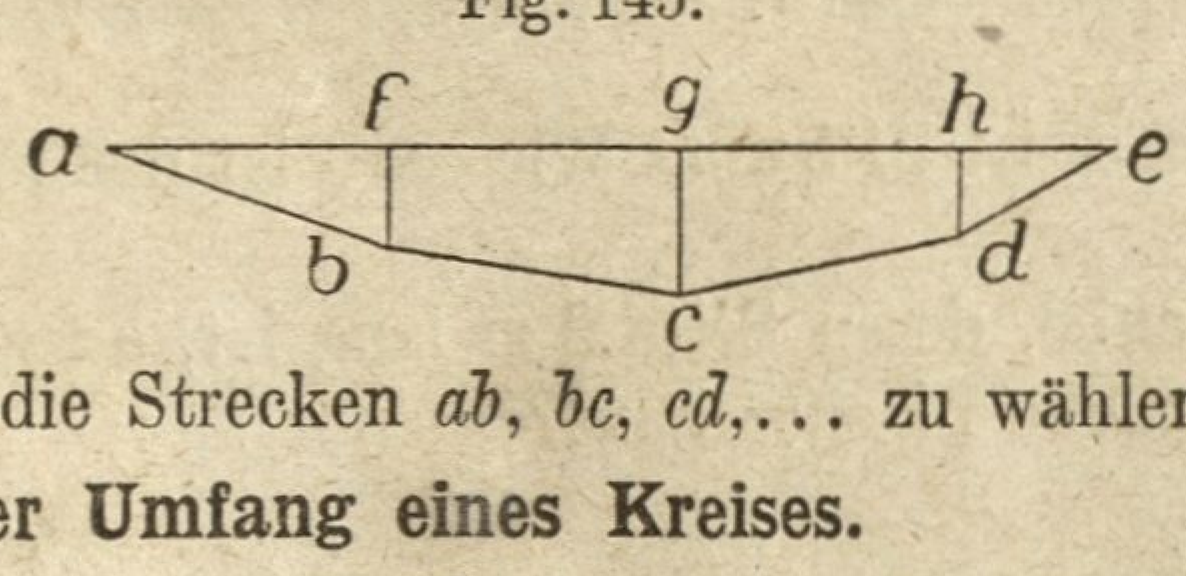


Fig. 145.



§ 123. *a)* Der Umfang eines Kreises.

Das einem Kreis eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen die Peripherie des Kreises liegt. Noch enger wird die Peripherie durch die Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen 12-, 24-, 48-Ecke usw. eingeschlossen. Die betreffenden Rechnungen können erst auf einer höheren Stufe gelehrt werden. Man findet bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenzahl:

Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen 3072eckes $= 3{\cdot}141592 \ldots \times d$,

„ „ umgeschriebenen „ „ $= 3{\cdot}141594 \ldots \times d$,

wenn d die Länge des Durchmessers bedeutet.

Welche Grenzen für die Peripherie liefern das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck und das umgeschriebene Quadrat?

Da nun die Peripherie des Kreises immer zwischen den Umfängen der ein- und der umgeschriebenen Vielecke liegt, so müssen die Dezimalstellen, in welchen die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen 3072eckes übereinstimmen, notwendig auch für die Peripherie des Kreises gelten. Man hat daher auf 5 Dezimalstellen genau

$$\text{Peripherie des Kreises} = 3{\cdot}14159 \ldots \times d.$$

Die Zahl $3{\cdot}14159\ldots$, mit welcher man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren muß, um die Peripherie zu erhalten, heißt die *Ludolfische Zahl*, da sie von Ludolf van Ceulen (1540—1610) auf eine größere Zahl von Dezimalstellen berechnet wurde, und wird mit dem griechischen Buchstaben π[1]) bezeichnet. Sie läßt sich nicht durch einen endlichen Dezimalbruch genau ausdrücken, kann aber mit jedem Grade der Annäherung bestimmt werden. In Rechnungen, welche keine große Genauigkeit erfordern, ist der Näherungswert $\pi = 3{\cdot}14\ldots$ oder $\pi = 3\frac{1}{7}$ ausreichend.

Bezeichnen d, r und p folgeweise die Maßzahlen des Durchmessers, des Halbmessers und der Peripherie eines Kreises, so ist nach dem Vorhergehenden

$$p = d\pi \text{ oder } p = 2\,r\,\pi, \text{ daher}$$

$$d = \frac{p}{\pi} \text{ und } r = \frac{p}{2\,\pi} \text{ oder } r = \frac{p}{2} : \pi.$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Sätze auszusprechen.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit der Gleichung $p = d\pi$ durch Hinrollen einer kreisförmigen Scheibe auf einem Meterstabe oder durch Messung ihrer Peripherie mit einem Stahlmeßband; er ermittle mit Benutzung verschieden großer kreisförmiger Scheiben, ob der Quotient aus der Peripherie und dem Durchmesser von der Größe des Kreises abhängig ist.

Wenn der Halbmesser eines Kreises mit 2, 3, 4... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird, wie ändert sich dadurch sein Umfang? Wie der Radius bei Verdopplung des Umfanges?

***b)* Länge eines Kreisbogens.**

Da der Umfang eines Kreises $2\,r\,\pi$ ist, so ist die Länge eines Bogengrades $\frac{2\,r\,\pi}{360} = \frac{r\,\pi}{180}$; hat ein Bogen m Bogengrade, so ist seine Länge (b) im Längenmaß

[1]) Entspricht dem Buchstaben p.

$b = \frac{r \pi m}{180}$. Da mithin $r \pi m = 180 b$ ist, so erhält man $r = \frac{180 b}{\pi m}$ und $m = \frac{180 b}{r \pi}$

Aufgaben:

(Mit π ist abgekürzt zu rechnen!)

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 13 *m*. Wie groß ist die Peripherie?
2. Der Durchmesser *d* eines Kreises ist *a*) 5·8 *m*, *b*) 3·85 *m*, *c*) 5·83... *m*, *d*) 2·874...*m*. Wie groß ist die Peripherie? ($\pi = 3·1416...$)
3. Wie groß ist der Umfang *p* eines Kreises, dessen Halbmesser *r a*) 2 *m*, *b*) 3·8 *dm*, *c*) 715 *cm*, *d*) 3·479...*m* ist?
4. Wie groß ist *a*) der Durchmesser, *b*) der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie 20 *m* beträgt?
5. Wie groß ist *r* für
a) $p = 2·5$ *m*, *b*) $p = 131·95$ *dm*, *c*) $p = 18$ *dm* 4 *mm*, *d*) $p = 15·247...m$?
6. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 *cm* lang. Welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?
7. Der Umfang eines Baumes ist 8 *dm* 6 *cm*. Wie groß ist der zugehörige Durchmesser?
8. Man will einen kreisrunden Tisch für 8 Personen machen. Wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 *dm* des Umfanges rechnet?
9. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang. Wie groß ist *a*) der Umfang, *b*) der Halbmesser des Äquators?
10. Ein Erdglobus hat 6 *dm* im Durchmesser. Welche Länge hat sein Äquator?
11. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·1 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht. Wie lang war die Strecke?
12. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m* und jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser. Wieviel Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 *km* zurückgelegt hat?
13. Welchen Durchmesser hat ein Lokomotivrad zu erhalten, das sich auf einem Schienenwege von 990 *m* 215 mal umdrehen soll?
14. Welche Strecke legt ein Eisenbahnzug in einer Minute zurück, wenn das Triebrad der Lokomotive einen Radius von 1·1 *m* hat und in einer Minute 210 Umdrehungen macht?
15. Mit welcher Geschwindigkeit müßte sich ein Eisenbahnzug am 21. März oder am 23. September am Äquator bewegen, um die Sonne stets gerade ober sich zu haben? (Radius der Erde 6378 *km*.)
16. Welchen Weg legt die Erde täglich in ihrer Bahn um die Sonne zurück? (Mittlerer Radius der Erdbahn 149,500.000 *km*.)
17. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 37 *cm*. Wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, das bis auf den Grund reicht, 12 mal um die Winde geht?
18. Bestimme die Bogenlänge von *a*) 56°, *b*) 120°, *c*) 270° in einem Kreise vom Halbmesser 1 *m*!
19. Der Durchmesser eines Kreises ist *a*) 1 *m*, *b*) 2 *m*, *c*) 3 *m*. Welche Länge hat in jedem dieser Kreise ein Bogen von 60°?
20. Der französische Arzt Jean Fernel fuhr am 25. August 1525 auf der nahezu im Meridian liegenden Straße Paris—Amiens einen Meridiangrad ab und fand, daß dabei ein Rad seines Wagens 17024 Umläufe machte. Wie groß ist beiläufig der Erdradius, wenn der Durchmesser des Rades = 2·08 *m* war?

21. Wie lang ist ein Äquatorgrad auf der Erde (Erdradius 6378 *km*), wie lang auf der Sonne, wenn der Sonnenradius 109 mal so groß ist wie der Erdradius?
22. Wie groß ist der Längen- und Zeitunterschied zweier Punkte des Äquators, die einen Abstand von 1000 *km* haben?
23. Ein Bogen von 48° hat 1·26 *m* Länge. Wie groß ist der Halbmesser des Bogens?
24. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15° *a*) 3 *dm*, *b*) 7·5 *dm*, *c*) 25·2 *dm*, *d*) 4·5 *cm*, *e*) 1·627 ... *m* lang ist?
25. Wieviel Grade hat ein Bogen von 1·853...*m* Länge, wenn der Kreisdurchmesser 2 *m* lang ist?

Flächeninhalt eines Kreises und seiner Teile. **§ 124.**

a) *Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Peripherie und des Halbmessers.*

Folgt aus § 109 und § 119.

Bezeichnet f den Flächeninhalt und p die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so hat man $f = \frac{p \cdot r}{2}$.

Da aber $p = 2 r \pi$ ist, so ist auch $f = \frac{2 r \pi . r}{2}$ oder $f = r^2 \pi$.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der zweiten Potenz der Maßzahl des Halbmessers multipliziert mit der Ludolfischen Zahl.

Umgekehrt ist $r^2 = \frac{f}{\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$.

Wie ändert sich die Fläche eines Kreises, wenn der Radius mit 2, 3, 4 ... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird? Umgekehrt: wie ist die Fläche abzuändern, wenn der Radius doppelt so groß werden soll?

Nachfolgende Tabelle zu ergänzen.

Radius eines Kreises	Umfang	Fläche
r	p	f
$2r$		
$3r$		
$\frac{r}{2}$		
$\frac{r}{3}$		

Achte auf die Potenz, in welcher bei den obigen Änderungen des Halbmessers a) der Umfang, b) die Fläche des Kreises sich ändert! Wie ist es beim Würfel bezüglich der Oberfläche und des Volumens? (§ 39, Aufgabe 5.)

Von wieviel variablen Größen hängen nach den obigen Formeln die Peripherie und die Fläche eines Kreises ab?

b) *Der Flächeninhalt eines Kreisringes* ist gleich der Differenz der Flächeninhalte der beiden konzentrischen Kreise, die den Ring einschließen.

Sind R und r die Maßzahlen der Halbmesser zweier konzentrischer Kreise und f der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Kreisringes, so hat man

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi \text{ oder}$$
$$f = (R + r)(R - r)\pi.$$

c) Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Länge des Bogens und des Halbmessers.

Folgt aus § 109 und § 119.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit dem Halbmesser r und der Bogenlänge b, so hat man

$$f = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{b}{2} \cdot r = b \cdot \frac{r}{2};\; b = \frac{2f}{r} \text{ und } r = \frac{2f}{b},$$

$$\text{oder } r = f : \frac{b}{2} \text{ und } b = f : \frac{r}{2}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes kann auch aus dem Radius und dem Zentriwinkel m berechnet werden;

$$\text{da } b = \frac{r\pi m}{180}, \text{ so ist } f = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r^2\pi m}{360}.$$

(Ableitung der letzten Formel durch Schluß auf einen Kreissektor mit dem Zentriwinkel von 1°.)

d) Um den *Flächeninhalt eines Kreisabschnittes* zu finden, berechnet man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiert davon den Inhalt des Dreieckes, um welches der Ausschnitt größer als der Abschnitt ist.

Aufgaben:

1. Der Flächeninhalt eines Kreises zu suchen, wenn der Radius 8 *dm* ist.
2. In einem Kreise ist der Halbmesser *a*) 2·65 *m*, *b*) 1 *m* 7 *dm* 8 *cm*, *c*) $35\frac{1}{2}$ *dm*, *d*) 3·475...*m*. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser *a*) 15 *m*, *b*) 5·135 *m*, *c*) 8 *dm* 3 *cm* 4...*mm*, *d*) 8·473...*m* beträgt?
4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Peripherie 24·41...*cm* beträgt?
5. Eine Scheibe hat 1·48...*m* im Umfange. Wie groß ist ihr Flächeninhalt?
6. Der Umfang eines Baumes ist $2\frac{4}{5}$ *m*. Wie groß ist der Flächeninhalt des zugehörigen Querschnittes?
7. Wieviel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 *m* ist, wenn auf einen Menschen 25 dm^2 gerechnet werden?
8. Den Druck auf den Kolben einer Dampfmaschine zu berechnen, wenn der Kolbendurchmesser 24 *cm* und der Dampfdruck 4 Atmosphären beträgt.

   Welche Änderung würde der Druck erfahren, wenn *a*) der Dampfdruck, *b*) der Kolbendurchmesser verdoppelt werden könnte?
9. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die zwei konzentrischen Kreise 5 *m* 6 *dm* und 4 *m* 4 *dm* zu Durchmessern haben?
10. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315 *mm* und 410 *mm* betragen!
11. Auf einer Schießscheibe beträgt der Durchmesser des inneren schwarzen Kreises 0·15 *m* und die Breite des weißen Ringes 0·3 *m*. Wie groß ist der weiße Ring?

12. Um einen kreisrunden Turm von 32 *m* Umfang wird ein 3 *m* breiter Graben gezogen. Welchen Flächenraum nimmt dieser ein?
13. Wie groß ist der Flächeninhalt eines *Kreisausschnittes*, wenn
    a) der Halbmesser 5·8 *m*, der Bogen 8·2 *m*,
    b) „ „ 0·17 *dm*, „ „ 0·25 *dm* ist?
14. Ein Kreisausschnitt von 23·4...*cm* Bogenlänge hat 161...cm^2 Flächeninhalt. Wie groß ist der Halbmesser?
15. Der Halbmesser eines Kreises ist 4 *m*, ein Zentriwinkel beträgt 36°. Den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes zu berechnen.
16. Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel 57° 20′ hat 12 *cm* Halbmesser. Wie groß ist sein Flächeninhalt?
17. Ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser 6 *cm* ist, hat 41·357...cm^2 Flächeninhalt. Wie groß ist der zugehörige Zentriwinkel?
18. Die Fläche eines Kreises beträgt 4·0115 . . . m^2. Wie groß ist die Peripherie?
19. Die Fläche *f* eines Kreisausschnittes und der zugehörige Zentriwinkel *m* sind gegeben. Man suche den Halbmesser!
    Es ist $m\, r^2 \pi = 360\, f$, somit r^2 und r?
    Z. B.: $f = 37{\cdot}72\ldots\ dm^2$ und $m = 30°$.
20. Einem Kreise, dessen Radius 2·7 *m* beträgt, ist ein Quadrat eingeschrieben. Wie groß ist das durch eine Seite abgeschnittene Segment?
21. Einem Kreise, dessen Halbmesser 3·4 *m* ist, ist ein Quadrat umgeschrieben. Wie groß ist die Differenz der Flächeninhalte?
22. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der einem Quadrate mit der Seite *a*) 2 *m* 3 *dm*, *b*) 3·473...*m* flächengleich ist!
23. *Der Flächeninhalt eines Kreises ist a) 10* dm^2, *b) 0·8659* m^2, *c) 31·47...* dm^2, *d) 23·4763...* m^2. *Wie groß ist der Halbmesser? Wie müssen diese Zahlen abgeändert werden, wenn die zugehörigen Halbmesser a) doppelt, b) halb so groß werden sollen?*
24. *Wenn man die Fläche eines Kreises vervierfacht, wie ändert sich der Umfang? Wenn man den Umfang eines Kreises auf die Hälfte verkleinert, was geschieht mit der Fläche?*
25. Mit wieviel Kilogramm darf ein vertikal aufgehängter Stahldraht von 3 *mm* Durchmesser belastet werden, wenn die höchste noch zulässige Belastung für 1 mm^2 70 *kg* ist?
    Die größte noch zulässige Belastung wächst wie der Querschnitt. Wie groß darf also die Belastung sein, wenn der Durchmesser *a*) $1\frac{1}{2}$ *mm*, *b*) 6 *mm* ist?
26. In welcher geographischen Breite ist der Radius des Parallelkreises der Erde halb so groß wie der am Äquator? Man vergleiche *a*) die Peripherie, *b*) die Fläche dieses Parallelkreises mit denselben Größen des Äquators!

Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes. § 125.

a) *Das rechtwinklige Dreieck.*

Ist *c* die Maßzahl der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Maßzahlen *a* und *b* haben, so sind a^2, b^2, c^2 die Maßzahlen der Inhalte der über den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes errichteten Quadrate. Somit erhält der Pythagoreische Lehrsatz, dessen Richtigkeit in *geometrischem Sinne* in § 110 bewiesen wurde, die Form

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dies ist der *arithmetische Ausdruck* für den Pythagoreischen Lehrsatz.

Der Schüler zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten 3 *cm* und 4 *cm*. Die Messung ergibt für die Hypotenuse 5 *cm*. Er zeichne die Quadrate über den Seiten und teile sie in Quadratzentimeter. Was ergibt die Vergleichung der Zahl dieser Quadratzentimeter?

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes sind mithin derart voneinander abhängig, daß nur für zwei die Wahl zulässig ist, durch diese aber die dritte schon bestimmt ist.

1. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 36 *cm* und 160 *cm* sind?

Da $c^2 = a^2 + b^2$ ist, so ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a^2 = 36^2 = 1296$$
$$b^2 = 160^2 = 25600, \text{ daher}$$
$$c = \sqrt{26896} = 164. \quad c = 164\ cm = 1\ m\ 6\ dm\ 4\ cm$$[1]).

2. Gegeben ist die Hypotenuse c und eine Kathete a; zu suchen die andere Kathete b.

Aus $b^2 = c^2 - a^2$ erhält man

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

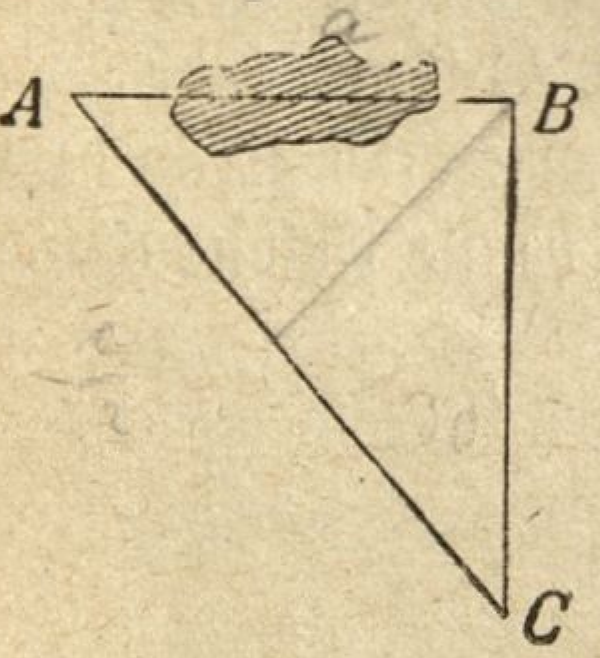
Ist z. B. die Hypotenuse 208 *cm*, eine Kathete 80 *cm*, so hat man

$$c^2 = 208^2 = 43264$$
$$a^2 = 80^2 = 6400, \text{ daher}$$
$$b = \sqrt{36864} = 192. \quad b = 192\ cm = 1\ m\ 9\ dm\ 2\ cm.$$

3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind *a*) 35 *m* und 12 *m*, *b*) 7·23... *dm* und 3·84... *dm*. Wie groß ist *a*) die Hypotenuse, *b*) der Flächeninhalt?

4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist *a*) die Hypotenuse 68 *dm*, eine Kathete 32 *dm*; *b*) die Hypotenuse 5·46..*m*, eine Kathete 2·72..*m*. Wie groß ist die andere Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

Fig. 147.



5. Die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes ist 10 *cm*; wie groß ist jede der beiden Katheten a und der Flächeninhalt? ($2\,a^2 = 100$, $a = 5\sqrt{2}$.)

6. Wie groß sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse c, wenn ein spitzer Winkel 30° ist? (§ 66.)

7. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 5 *m* und 12 *m*; wie groß ist die Höhe auf die Hypotenuse?

8. Eine Leiter von 10 *m* Länge reicht bis zur oberen Kante einer Mauer. Wie hoch ist diese, wenn der Fuß der Leiter 2·5 *m* von der Mauer absteht?

---

[1]) Der Schüler untersuche stets, wie die gegebenen Stücke beschaffen sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist! Die vorliegende Aufgabe ist immer möglich. Wie ist es bei der folgenden?

9. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 10 cm und 24 cm; die Fläche des umgeschriebenen Kreises zu suchen.

10. Die Diagonalen eines Rhombus sind 6 cm und 8 cm; die Seite zu berechnen.

11. Den Radius eines Kreises zu konstruieren, dessen Fläche a) der Summe, b) der Differenz der Flächeninhalte zweier Kreise mit den Radien R und r gleich ist. (Oder einen Kreisring in einen Kreis verwandeln.)

Wie wäre die Aufgabe bezüglich der Peripherien der Kreise zu lösen?

12. Einen Kreis (R) zu konstruieren, dessen Inhalt doppelt so groß ist als der eines Kreises mit dem Radius r. (Es ist $R^2 = r^2 + r^2$; was für ein Dreieck ist zu zeichnen?)

13. Einen Kreis mit dem Radius R durch einen konzentrischen Kreis zu halbieren. (Ist der Radius des gesuchten Kreises r, so ist $r^2\pi = \frac{R^2\pi}{2}$, oder $2r^2 = R^2$, $r^2 + r^2 = R^2$. Durch welches Dreieck kann also r gefunden werden?)

14. Den Abstand zweier Punkte A und B (Fig. 147) auf dem Felde zu bestimmen, wenn man von dem einen zum anderen sehen, aber nicht gehen kann.

Man stecke ein rechtwinkliges Dreieck ABC ab, messe AC und BC!

$$AC = 40\,m, \quad BC = 22\,m, \quad AB = ?$$

15. Wenn c konstant bleibt, a hingegen zu- oder abnimmt, wie ändert sich b? (Durch Zeichnung [§ 90, b] und auch mit der Gleichung $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ zu untersuchen.)

b) *Das Quadrat.*

Es seien a, d und f die Maßzahlen der Seite, der Diagonale und des Flächeninhaltes eines Quadrates.

1. Aus der Seite a eines Quadrates die Diagonale d zu berechnen.

Es ist $d^2 = a^2 + a^2$, oder $d^2 = 2a^2$; mithin $d = \sqrt{2a^2}$ oder $d = a\sqrt{2}$.

Wie groß ist der Radius des dem Quadrate umgeschriebenen Kreises?

2. Gegeben die Diagonale d; zu suchen die Seite a und der Flächeninhalt f.

Da $2a^2 = d^2$, so ist $a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{2d^2}{4}$, daher $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Aus $f = a^2$ folgt dann $f = \frac{d^2}{2}$. (Vgl. § 117, Aufg. 12.)

3. Gegeben der Flächeninhalt f; gesucht wird a und d.

Aus $a^2 = f$ ergibt sich $a = \sqrt{f}$.

Aus $d^2 = 2a^2$ folgt ferner $d^2 = 2f$, somit $d = \sqrt{2f}$.

4. Die Diagonale eines Quadrates beträgt 1·4 m. Wie groß ist a) die Seite, b) der Flächeninhalt?

5. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist 15·1321..... m^2. Wie groß ist a) die Seite, b) die Diagonale?

6. Wie lang ist die Seite eines Quadrates, welches der Summe zweier Quadrate gleich ist, deren Seiten 2·58 dm und 9·34 cm sind?

7. Wenn die Seite eines Quadrates a) verdoppelt, b) halbiert wird, wie ändert sich a) die Diagonale (Zeichnung!), b) der Flächeninhalt?

8. Einem Kreise mit dem Radius r ist ein Quadrat eingeschrieben. Wie groß ist dessen Seite?

9. Den Inhalt des Kreisringes zu berechnen, der von den einem Quadrate mit der Seite a ein- und umgeschriebenen Kreisen gebildet wird.

c) Das Rechteck.

Man bezeichne die Maßzahlen der Seiten eines Rechteckes durch a und b, die Maßzahl der Diagonale durch d und die Maßzahl des Flächeninhaltes durch f.

1. Gegeben die Seiten a und b eines Rechteckes; zu suchen d und f.

Es ist $d^2 = a^2 + b^2$, daher $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; $f = ab$.

2. Gegeben ist eine Seite a und die Diagonale d; man berechne b und f!

Es ist $b = \sqrt{d^2 - a^2}$.

Für den Flächeninhalt hat man $f = a\,b = a\sqrt{d^2 - a^2}$.

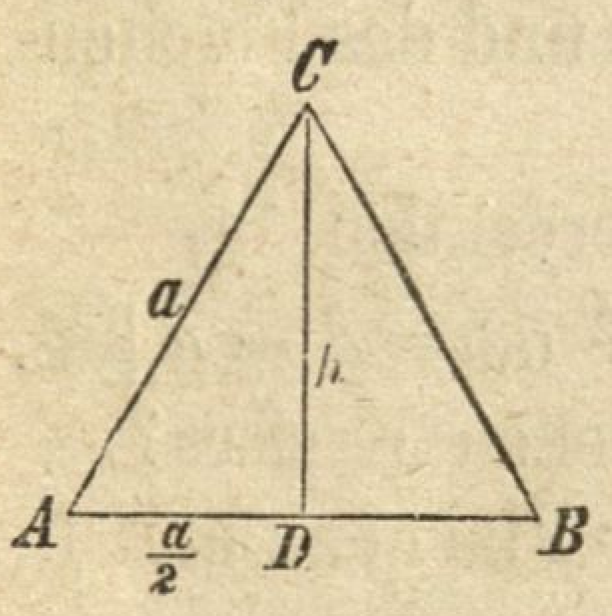
3. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes von 5·6 m Länge und 3·3 m Breite? Wie groß ist der Radius des dem Rechtecke umgeschriebenen Kreises?

4. Die Diagonale eines Rechteckes ist 7·3 dm, eine Seite 4·8 dm. Wie groß ist die Seite eines flächengleichen Quadrates?

d) Das gleichseitige Dreieck.

Es sei in dem gleichseitigen Dreiecke ABC (Fig. 148) die Seite $AB = BC = AC = a$, die Höhe $CD = h$ und f die Maßzahl des Flächeninhaltes.

Fig 148.



1. Gegeben sei die Seite a; zu suchen h und f.

$$\text{Es ist } h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\,a^2}{4}, \text{ daher } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$f = \frac{a\,h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Wie viele variable und wie viele konstante Größen kommen in dieser Gleichung vor?

2. Gegeben die Fläche, zu suchen a und h.

$$\text{Es ist } f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},\; a^2\sqrt{3} = 4\,f,\; a^2 = \frac{4\,f}{\sqrt{3}} = \frac{4\,f\sqrt{3}}{3}, \text{ daher } a = \sqrt{\frac{4\,f\sqrt{3}}{3}}.$$

3. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 dm. Wie groß ist a) die Höhe, b) der Flächeninhalt?

4. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, das mit einem Quadrate von 15 dm Seitenlänge flächengleich ist?

5. *Wenn die Seite eines gleichseitigen Dreieckes a) verdoppelt, b) halbiert wird, wie ändert sich a) der Umfang, b) die Höhe, c) der Flächeninhalt?*

6. Ein Baum und ein Beobachter stehen auf derselben horizontalen Ebene. Wie hoch ist der Baum, wenn seine Spitze dem in der Entfernung von 20 m stehenden Beobachter unter dem Höhenwinkel a) 60°, b) 30° erscheint? (Augenhöhe 1·6 m.)

e) Das gleichschenklige Dreieck.

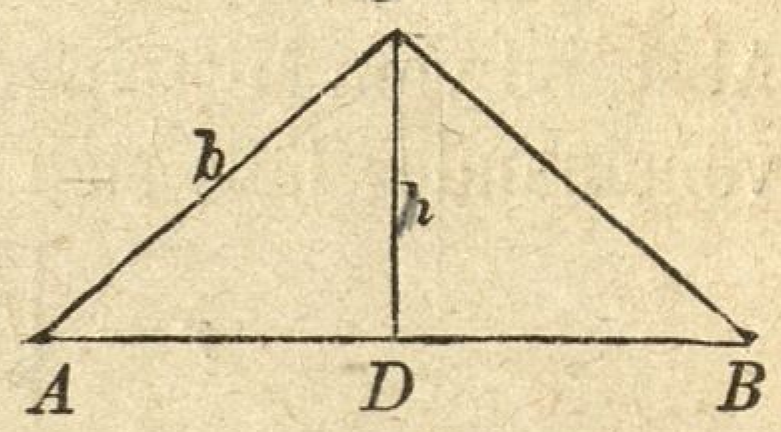
Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 149) die Grundlinie $AB = a$, der Schenkel $AC = BC = b$ und die Höhe $CD = h$; die Maßzahl des Flächeninhaltes sei f.

1. Aus der Grundlinie a und dem Schenkel b die Höhe h und den Flächeninhalt f zu berechnen.

Man hat (Fig. 149) $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$,

daher $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; sodann $f = \frac{ah}{2}$.

Fig. 149.



2. Gegeben die Höhe h und der Schenkel b; zu suchen a und f.

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$, daher $\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}$ und $a = 2\sqrt{b^2 - h^2}$ und damit $f = \frac{ah}{2}$.

3. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4·8 *dm* und jeder Schenkel 3·5 *dm*. Wie groß ist *a*) die Höhe, *b*) der Flächeninhalt?

4. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3·36 *m* und die Höhe 4·25 *m*. Wie groß ist ein Schenkel?

5. Bei einem gewöhnlichen Hausdache ist der Dachstuhl 14 *m* breit. Wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl 6 *m* hoch sein soll?

6. Die alten Ägypter machten die Landvermessungen mit Hilfe von gleichschenkligen Dreiecken, deren Inhalt sie durch das halbe Produkt von Grundlinie und Schenkel bestimmten. Welcher Fehler wurde dabei bei einer Grundlinie von 20 *m* und einem Schenkel von 60 *m* gemacht?

7. Die Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes sind 36 *m* und 20 *m*, ein Schenkel ist 10 *m*. Die Höhe und den Flächeninhalt zu berechnen.

f) Das regelmäßige Sechseck.

1. Aus der Seite a eines regelmäßigen Sechseckes den Flächeninhalt f zu bestimmen.

Da der Umfang des regelmäßigen Sechseckes $6\,a$, der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite aber die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge a und daher gleich $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist, so erhält man:

$$f = \frac{6a.a\sqrt{3}}{4} = \frac{3\,a^2\sqrt{3}}{2}.$$

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seitenlänge 4·24 *dm*?

3. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck haben gleichen Umfang, nämlich 2·4 *m*. Um wieviel ist der Flächeninhalt des Quadrates kleiner als der des Sechseckes?

4. Die in § 121 für die Berechnung des Abstandes des Mittelpunktes eines regelmäßigen Sechseckes von einer Seite angegebene Zahl zu ermitteln.

5. Wenn die Seite eines regelmäßigen Sechseckes *a*) verdoppelt, *b*) halbiert wird, wie ändert sich dadurch der Umfang, wie die Fläche?

g) *Sehnen eines Kreises.*

Der Halbmesser eines Kreises sei r, die Länge einer Sehne s und ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises a; infolge der Abhängigkeit dieser Größen voneinander läßt sich aus zweien die dritte berechnen. (§ 125, *a*).

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}},\ s = 2\sqrt{r^2 - a^2},\ a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Aus den letzten zwei Ausdrücken ergibt sich:

1. Zwei Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, sind einander gleich.

2. Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die größere, welche einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

3. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

4. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

5. Wie groß wird s, wenn $a = o$ ist? Wie groß für $a = r$? (Berechnung aus der 2. der obigen Gleichungen und Prüfung an einer Figur.)

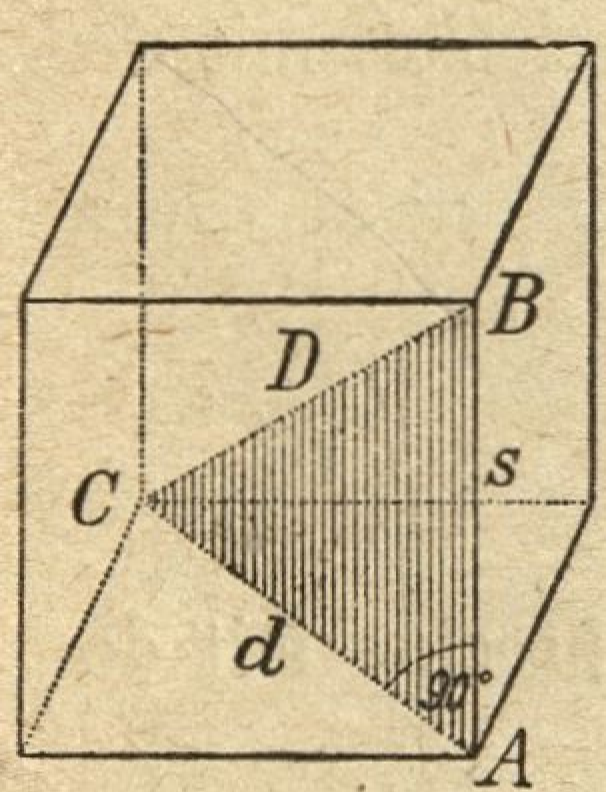
Beispiele.

1. Gegeben $s = 24\ cm$, $a = 7\ cm$; zu suchen r.
2. „ $r = 29\ cm$, $a = 21\ cm$; „ „ s.
3. „ $r = 35\ cm$, $s = 28\ cm$; „ „ a.

h) *Der Würfel.*

Ist die Kante des Würfels s, so ist die Diagonale einer Fläche $d = s\sqrt{2}$. Berechnung der Diagonale BC des Würfels (Fig. 150).

Fig. 150.



Da die Kante AB (Fig. 150) senkrecht auf der Grundfläche des Würfels steht, so bildet sie auch einen rechten Winkel mit jeder Geraden, die durch ihren Fußpunkt A in der Grundfläche gezogen wird, daher auch mit der Diagonalen d der Grundfläche (§ 45).

Mithin ist $BC = D = \sqrt{s^2 + d^2} = \sqrt{s^2 + 2\,s^2} = \sqrt{3\,s^2} = s\sqrt{3}$.

Aufgaben:

1. Die Kante eines Würfels ist 2 *m* 3 *dm*; die Diagonale desselben zu berechnen.
2. Die Kante eines Würfels ist 4 *cm*; die Diagonale desselben zu konstruieren.
3. Die Kante eines Würfels ist 4 *cm*; den Inhalt eines Diagonalschnittes zu berechnen.
4. Die Diagonale eines Würfels ist 1·5 *m*; zu berechnen *a*) die Kante, *b*) die Oberfläche.

i) Der Quader.

Drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten seien a, b, c (Fig. 151). Wieviel verschiedene Flächendiagonalen kommen vor? Sie zu berechnen. Für die Diagonale D' des Quaders erhält man

$$D'^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ daher } D' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Was geschieht mit D', wenn a, b, c verdoppelt werden?

Aufgaben:

1. Die Kanten eines Quaders sind 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*; die Diagonale zu berechnen. Kann sie auch konstruiert werden?
2. Die Dimensionen eines Quaders (Fig. 151) sind $a = 30$ *cm*, $b = 16$ *cm*, $c = 40$ *cm*. Den Inhalt des durch die Kanten BF und DH gelegten Diagonalschnittes zu berechnen.

Fig. 151.

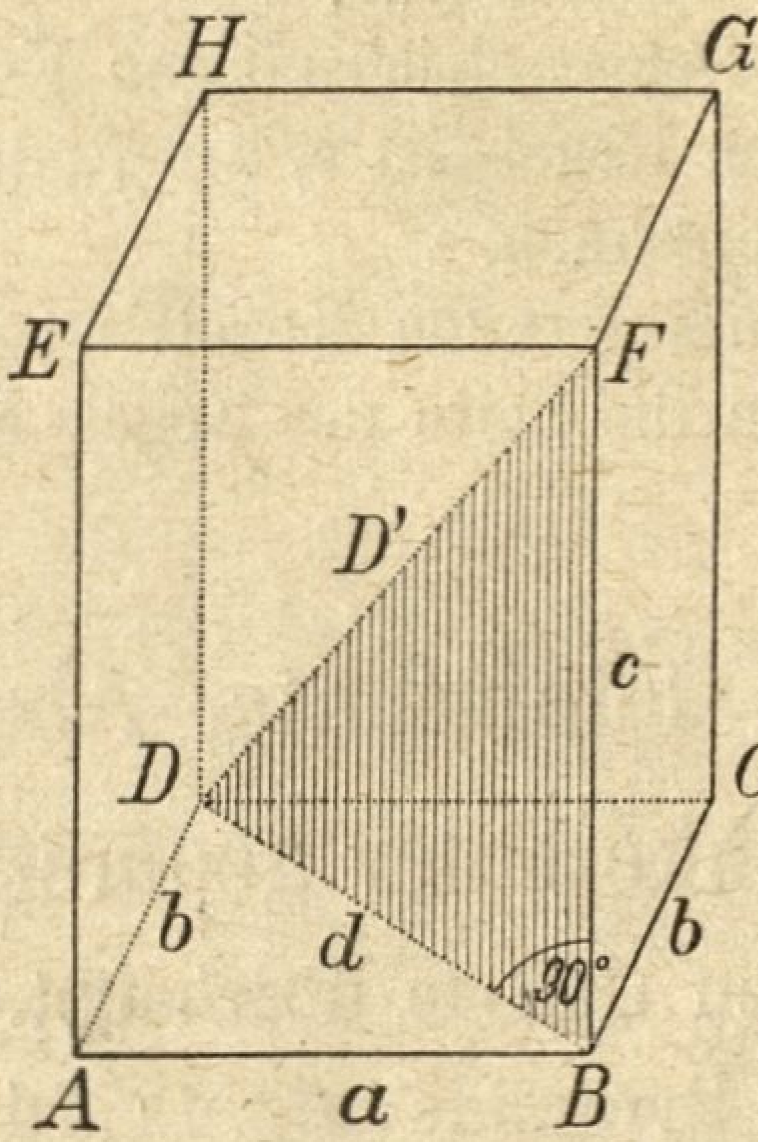
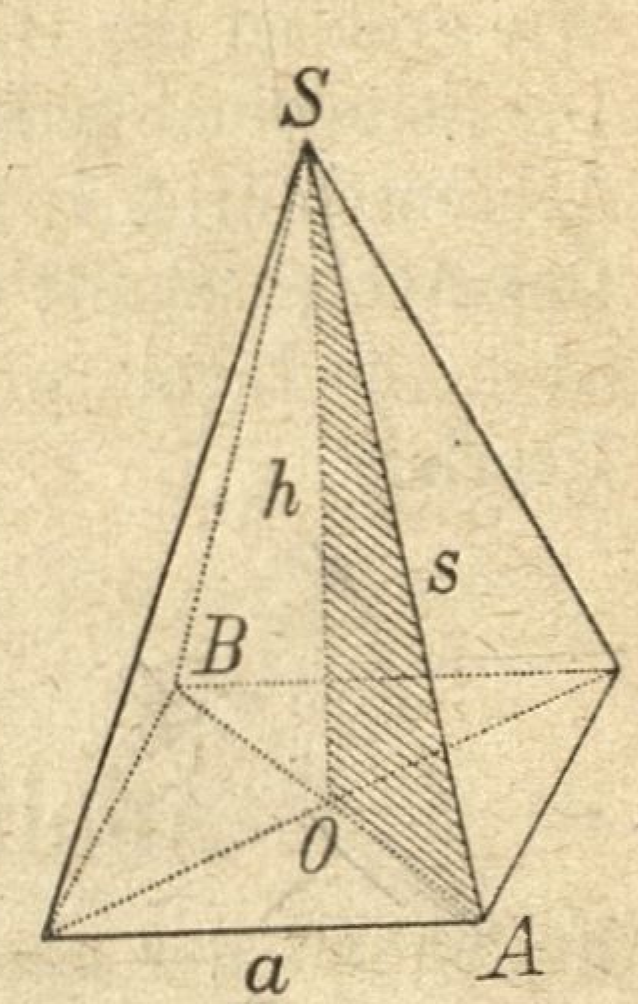


Fig. 152.



k) Die Pyramide.

1. Die Höhe h einer geraden quadratischen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante s zu berechnen.

Da (Fig. 152) $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke SOA:

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

2. Ist a die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide und s eine Seitenkante, so ist zu zeigen, daß $h = \sqrt{s^2 - a^2}$ ist.

Aufgaben:

1. Die Grundkante einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide ist 4 *dm*, die Höhe 7 *dm*. Wie groß ist eine Seitenkante?
2. Die Diagonale der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 14 *cm*, eine Seitenkante 25 *cm*; welchen Inhalt hat der durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegte Schnitt?
3. Zu zeigen, daß die Höhe einer quadratischen gleichkantigen Pyramide der halben Diagonale der Grundfläche gleich ist.
4. Die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist 2 *dm*, eine Seitenkante 7 *dm*; wie groß ist die Höhe?

l) Der Kegel.

Die Maßzahlen des Radius r der Grundfläche, der Seite s und der Höhe h eines senkrechten Kegels sind nach dem Pythagoreischen Lehrsatze so voneinander abhängig, daß aus je zweien die dritte berechnet werden kann. Man hat: $s = \sqrt{h^2 + r^2}$, $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, $r = \sqrt{s^2 - h^2}$.

Aufgaben:

1. In einem Kegel ist:
   a) $r = 5\,cm, \quad h = 12\,cm, \quad s = ?$
   b) $r = 11\,cm, \quad s = 61\,cm, \quad h = ?$
   c) $s = 2{\cdot}5\,dm, h = 2{\cdot}4\,dm, \quad r = ?$
   Wie beschaffen müssen in Aufgabe *b*) die Werte von r und s, in Aufgabe *c*) die Werte von s und h sein, damit die Aufgabe möglich ist? Wie ist es in Aufgabe *a*) bezüglich der Werte von r und h?
2. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Kegels, wenn seine Seite $7{\cdot}48\,m$ ist?
3. Die Seite eines geraden Kegels ist s, der Radius der Grundfläche r; den Inhalt des Achsenschnittes zu berechnen.
4. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist dessen Inhalt, wenn die Seite des Kegels $5\,dm$ ist? Wie groß ist die Höhe des Kegels?

Fünfzehnter Abschnitt[1]).

Ähnlichkeit der geometrischen Gebilde.

§ 126. Ähnlichkeit der ebenen Gebilde überhaupt.

Schneidet man die Pyramide (Fig. 127) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so erhält man als Schnittfigur ein Dreieck $A'B'C'$. Dieses stimmt mit der Grundfläche in den Winkeln überein; es ist $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, wie man sich an einem Modell durch Deckung überzeugen kann. Ferner zeigt die Messung der Seiten beider Dreiecke und die Bildung des Quotienten der Maßzahlen, daß die Seiten des Dreieckes $A'B'C'$ im Vergleich mit den gleichliegenden des Dreieckes ABC in gleichem Maße verkleinert sind. Wäre z. B. A' der Halbierungspunkt der Kante SA, so fände man $A'B' = \frac{1}{2}\,AB$, $B'C' = \frac{1}{2}\,BC$, $A'C' = \frac{1}{2}\,AC$. Denselben Sachverhalt könnte man in gleicher Weise auch an einem Modell einer mehrseitigen Pyramide feststellen. Man kann daher sagen:

Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so sind die gleichliegenden Winkel der Durchschnittsfigur und der Grundfläche paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten der ersteren sind in demselben Maße verkleinert.

Denkt man die Seitenflächen einer Pyramide über die Grundfläche hinaus erweitert und legt man zur Grundfläche eine parallele Ebene, so wäre das Ergebnis bezüglich der Winkel der Durchschnittsfigur dasselbe, alle Seiten wären aber in gleichem Maße vergrößert. (Fig. 127. $SA'B'C'$ die Pyramide.)

Wenn die Winkel zweier Polygone paarweise gleich und die bezüglich der gleichen Winkel gleichliegenden Seiten des einen in demselben Maße verkleinert oder vergrößert sind, so heißen die Polygone ähnlich.

---

[1]) Mit Weglassung dieses Abschnittes können seine wichtigsten Ergebnisse auch in § 37 *a*, Aufgabe 5, § 117, Aufgabe 11 *c*, § 123 *a*, § 124 *a*, § 125 *d*, Aufgabe 5, § 125 *f*, Aufgabe 5 vorgenommen werden, wenn die Schüler die dort in Beziehung gebrachten geometrischen Gebilde als ähnlich erkennen.

Versetzt man das Auge in Fig. 127 nach S, so erkennt man (auch bei einer mehrseitigen Pyramide), daß die beiden ähnlichen Figuren die gleiche Gestalt besitzen, die eine derselben ist nur eine Abbildung der anderen in verkleinertem oder vergrößertem Maßstabe.

Aus der obigen Erklärung ähnlicher Polgyone folgt, daß alle regelmäßigen Polygone mit gleicher Seitenzahl ähnlich sind. Denn sie stimmen in den Winkeln überein und die Verkleinerung oder Vergrößerung *einer* Seite trifft wegen der Gleichheit der Seiten alle übrigen in gleicher Weise.

Die Ähnlichkeit aller Kreise mit ungleichen Halbmessern ist ohneweiters nach der Anschauung zu erkennen.

Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\backsim$, entstanden aus dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes similis, ähnlich.

Ähnlichkeit der Dreiecke. **§ 127.**

a) Zieht man durch das Dreieck ABC (Fig. 153) *zur Seite BC die Parallele DE, so ist das abgeschnittene Dreieck mit dem ursprünglichen Dreiecke ähnlich.*

Denn ist z. B. in Fig. 153 AB in fünf gleiche Teile geteilt, werden durch die Teilungspunkte die Parallelen mit BC und durch die Schnittpunkte derselben mit AC die Parallelen mit AB gezogen, so ist $AD = \frac{3}{5} AB$, $AE = \frac{3}{5} AC$ (§ 77, Aufgabe 10) und aus demselben Grunde und nach § 70, 1 auch $DE = \frac{3}{5} BC$; d. h. die Seiten des Dreieckes ADE sind Verkleinerungen der entsprechenden Seiten des Dreieckes ABC in demselben Maßstabe; da überdies die Winkel paarweise gleich sind, so ist $\triangle ADE \backsim ABC$.

Fig. 153.

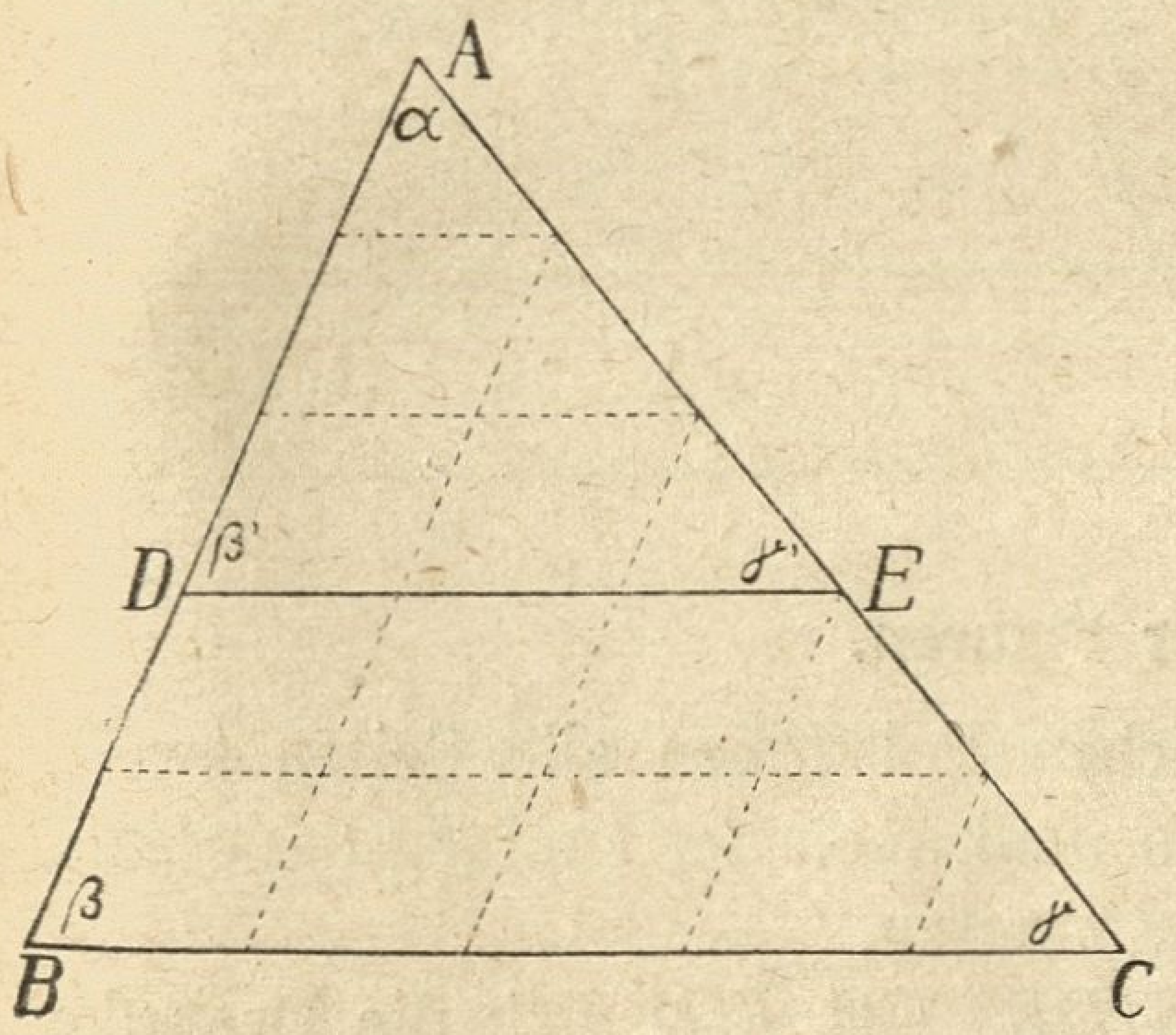
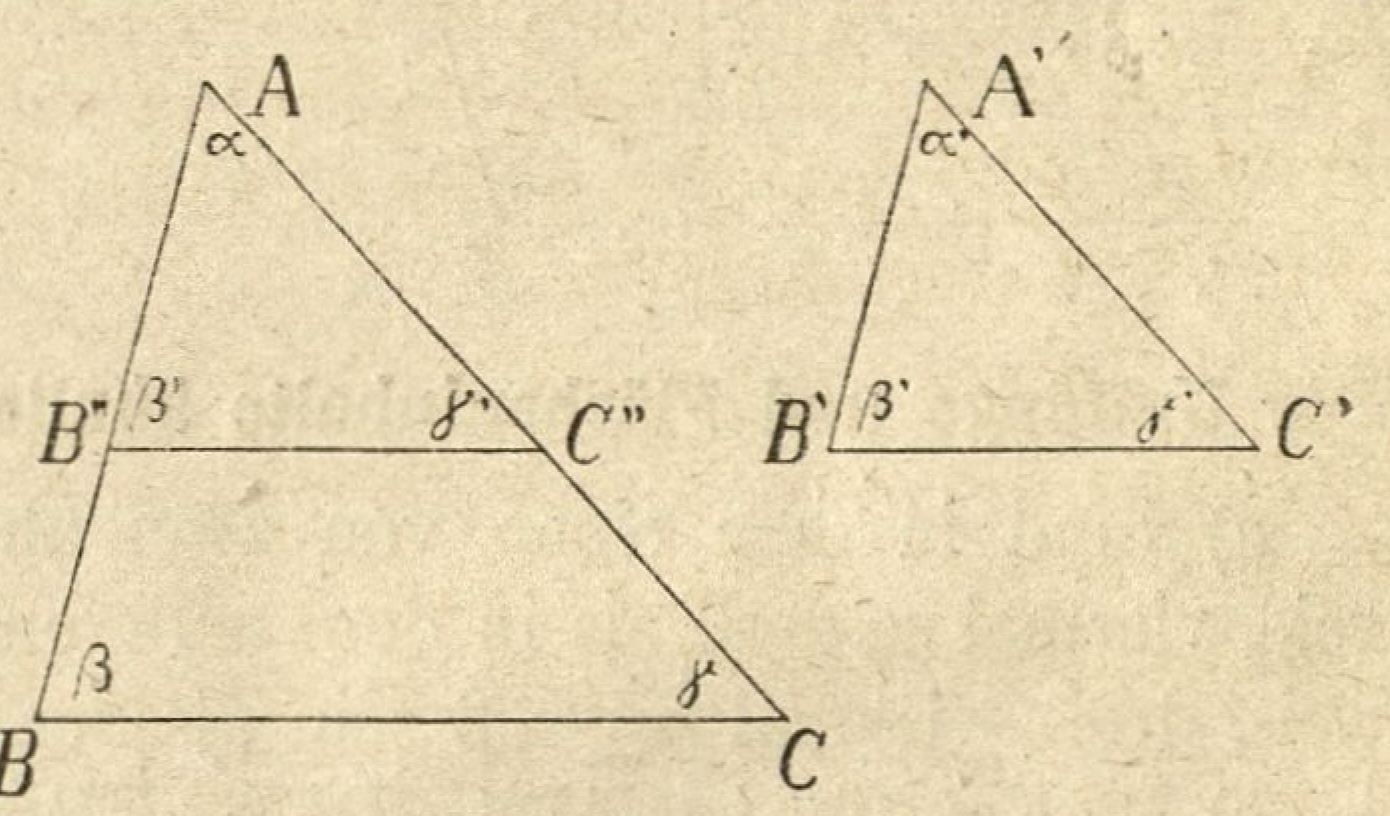


Fig. 154.



b) Die Verkleinerung oder Vergrößerung aller drei Seiten nach demselben Maßstabe und die paarweise Gleichheit der Winkel eines Dreieckes sind nicht unabhängig voneinander; es läßt sich zeigen, daß schon auf die Ähnlichkeit zweier Dreiecke geschlossen werden kann, wenn ihre Winkel paarweise gleich sind.

Es sei (Fig. 154) in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ und daher auch $\gamma = \gamma'$. Dann läßt sich das Dreieck $A'B'C'$ in das Dreieck ABC so legen, wie es Fig. 154 zeigt. Aus $\beta' = \beta$ folgt $B''C'' \parallel BC$. Da aber nach *a*) $ABC \backsim AB''C''$ ist, so ist auch $A'B'C' \backsim ABC$.

Zwei Dreiecke sind daher ähnlich, wenn die Winkel paarweise gleich sind.

§ 128. Ähnlichkeit der Polygone.

Man ziehe (Fig. 155) von A aus die Diagonalen des Polygones $ABCDE$, teile AB in fünf gleiche Teile, ziehe durch den dritten Teilungspunkt $FG \parallel BC$, ferner $GH \parallel CD$, $HJ \parallel DE$. Nach § 127 *a*) ist $ABC \sim AFG$, $ACD \sim AGH$, $ADE \sim AHJ$. Es läßt sich zeigen, daß auch die Vielecke $ABCDE$ und $AFGHJ$ ähnlich sind. Denn es ist $AF = \frac{3}{5} AB$, daher auch $FG = \frac{3}{5} BC$ und $AG = \frac{3}{5} AC$. Da $GH \parallel CD$ ist, so ist auch $GH = \frac{3}{5} CD$, $AH = \frac{3}{5} AD$. Wegen $HJ \parallel DE$ ist ferner auch $HJ = \frac{3}{5} DE$ und $AJ = \frac{3}{5} AE$. Mithin sind die Seiten des Polygones $AFGHJ$ im Vergleich mit den gleichliegenden des Polygones $ABCDE$ in demselben Maße verkleinert. Ferner ist der Winkel bei A beiden Vielecken gemeinschaftlich und die übrigen Winkel sind nach § 41, 1 und § 43 paarweise gleich. Mithin ist $AFGHJ \sim ABCDE$.

An diesem Sachverhalte ändert sich nichts, wenn ein mit $AFGHJ$ kongruentes Polygon außerhalb des Vieleckes $ABCDE$ gezeichnet wird. Es gilt daher der Satz:

Zwei Polygone sind ähnlich, wenn sie in übereinstimmender Weise aus paarweise ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind.

Fig. 155.

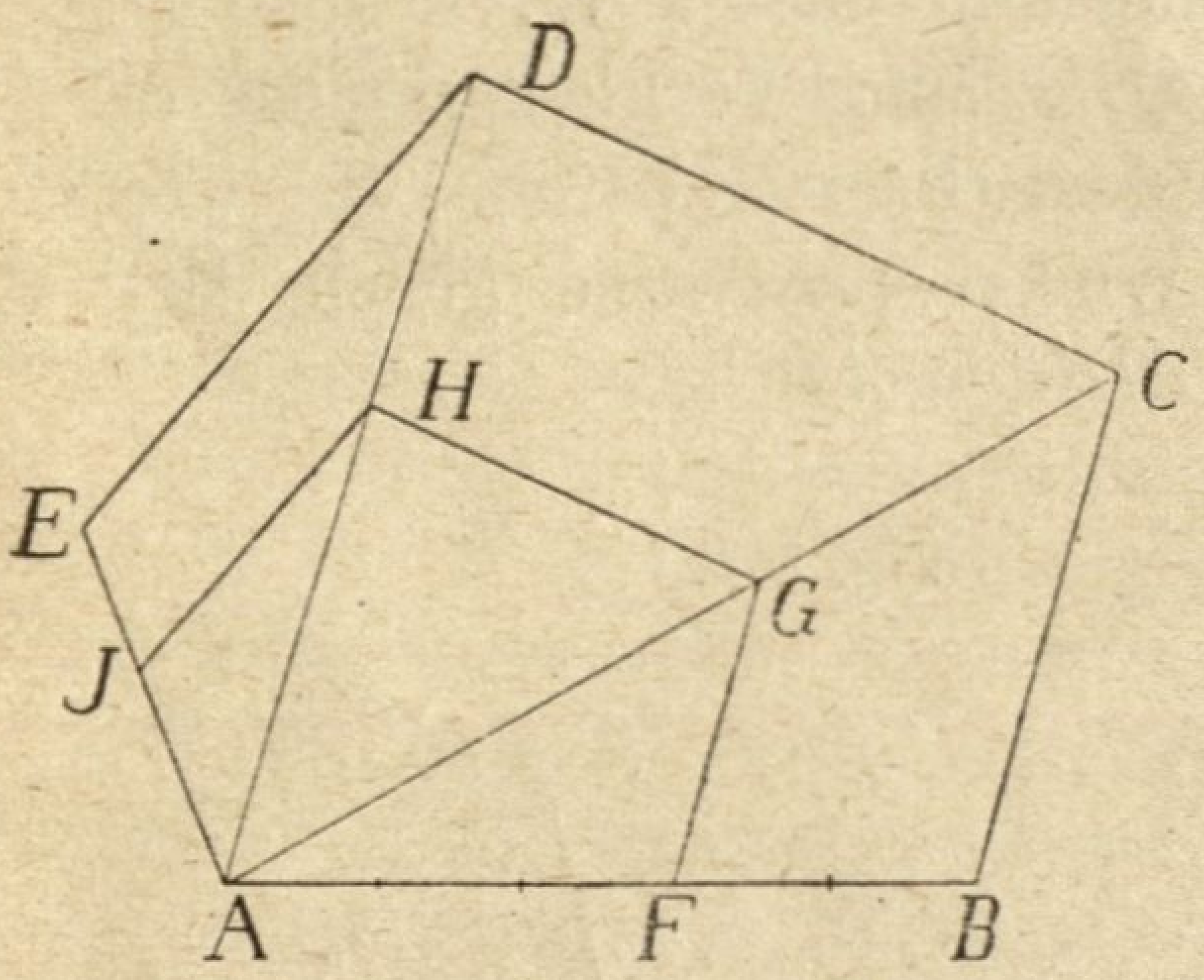
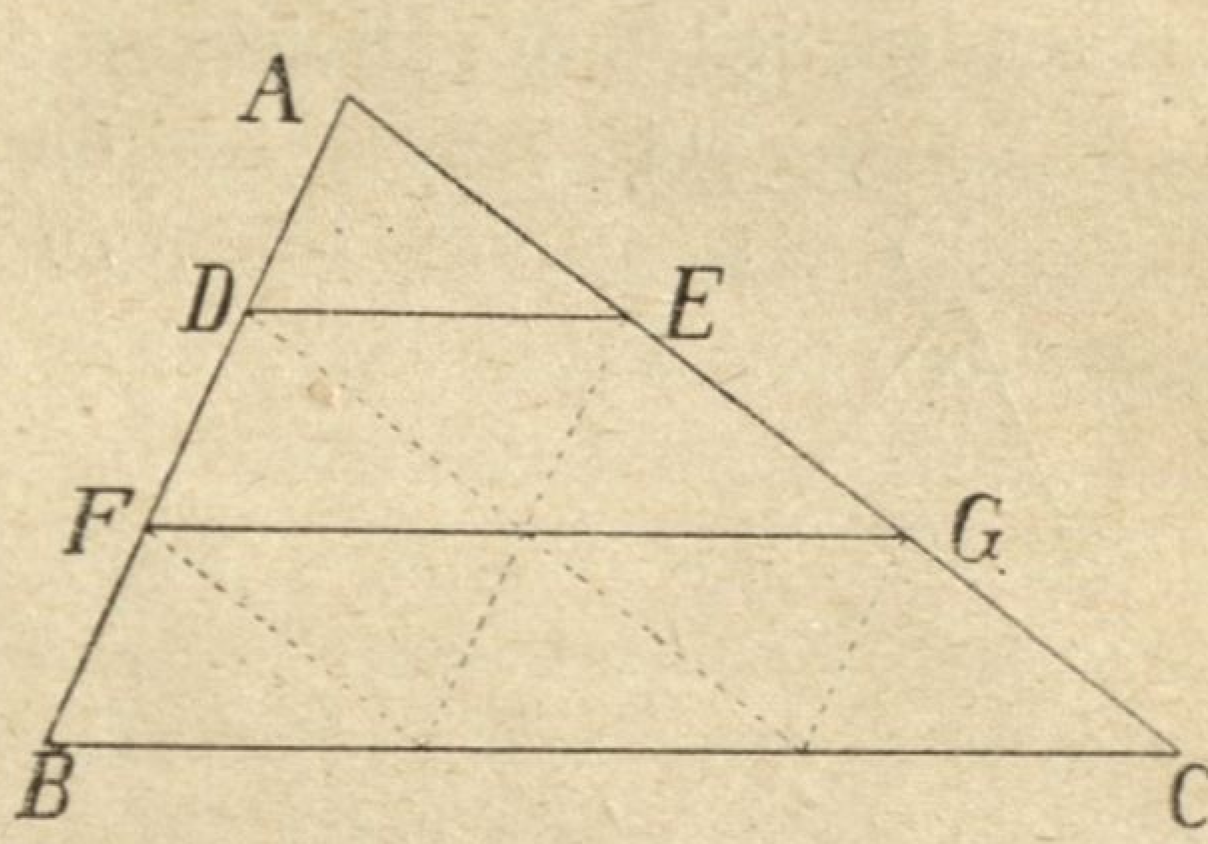


Fig. 156.



§ 129. Die Umfänge und Flächeninhalte ähnlicher Figuren.

a) Sind in dem einen von zwei ähnlichen Polygonen alle Seiten zwei-, drei-, viermal so groß als in dem anderen, so muß auch der Umfang des ersten zwei-, drei-, viermal so groß sein als der des zweiten.

b) In Fig. 156 ist $AD = DF = FB$ und $DE \parallel BC$, $FG \parallel BC$; die Dreiecke ADE, AFG und ABC sind ähnlich, die Seiten des zweiten sind zweimal, die des dritten dreimal so groß als die des ersten. ABC ist in der aus der Figur ersichtlichen Weise in neun kongruente Dreiecke geteilt, von welchen eines ADE selbst ist und vier auf AFG kommen. Mithin ist $\triangle AFG$ viermal und $\triangle ABC$ neunmal so groß als ADE; während die Seiten zweimal beziehungsweise dreimal so groß sind als die des Dreieckes ADE.

Dasselbe muß auch bei derselben Vergrößerung der Seiten von den Flächeninhalten ähnlicher Polygone gelten, da man sie als Summe der Inhalte zweier Reihen ähnlicher Dreiecke darstellen kann (Fig. 155).

Der Quotient aus den Maßzahlen der einander entsprechenden Seiten zweier ähnlicher Polygone gibt die Beziehung zwischen den Umfängen, sein Quadrat die zwischen den Flächeninhalten an.

Sind z. B. die Seiten eines Vieleckes 10 mal ($\frac{3}{5}$ mal) so groß als die entsprechenden Seiten eines ähnlichen Vieleckes, so ist der Umfang des ersten 10 mal ($\frac{3}{5}$ mal), sein Flächeninhalt 100 mal ($\frac{9}{25}$ mal) so groß als der des zweiten.

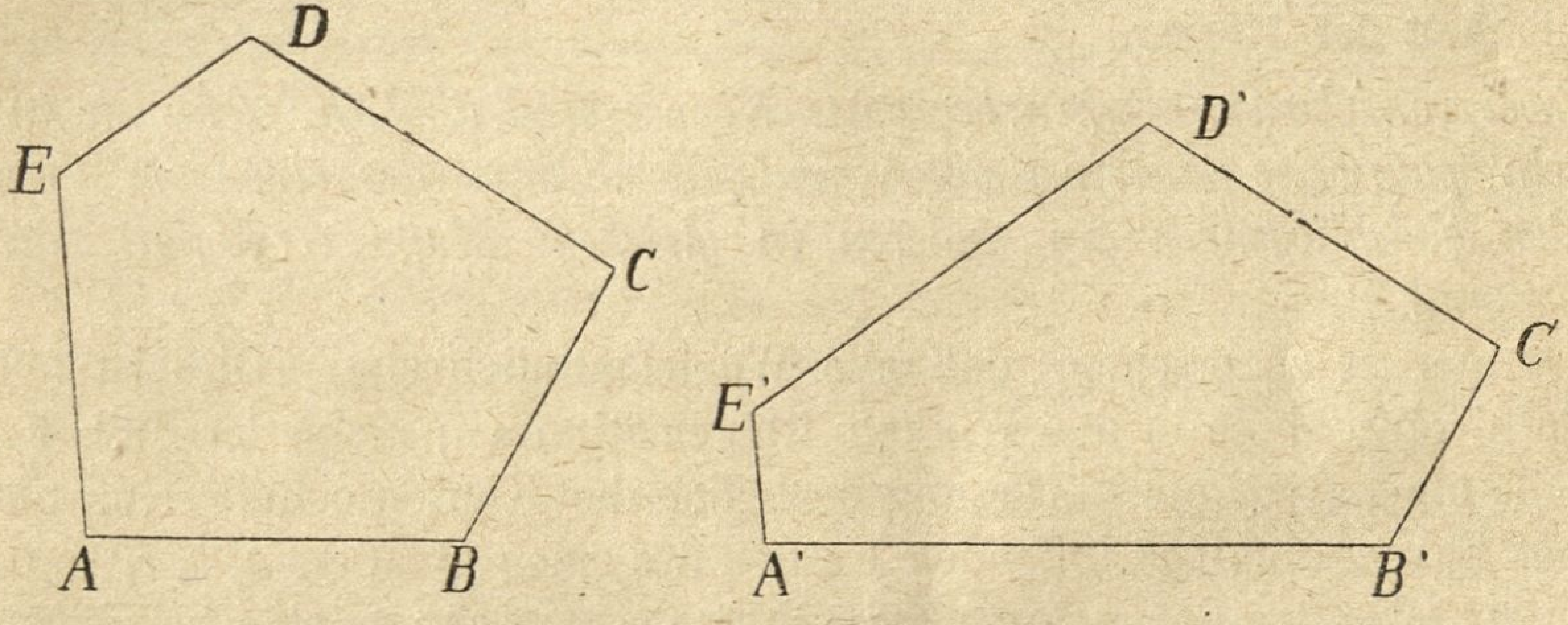
Der Schüler vergleiche diesen Sachverhalt mit dem in anderer Weise gefundenen: für das Quadrat § 37 *a*, Aufgabe 5, für das Rechteck § 117, Aufgabe 11 *c*, für den Kreis § 123 *a* und § 124 *a*, für das gleichseitige Dreieck § 125 *d*, Aufgabe 5, für das regelmäßige Sechseck § 125 *f*, Aufgabe 5!

Diese Beziehungen gelten nicht allein für geradlinig begrenzte ähnliche Figuren, sondern auch für solche beliebiger Kontur; z. B. für eine Landschaft, für ein flächenhaftes Objekt, wie es dem mit einem Fernrohre oder Mikroskope bewaffneten und dem unbewaffneten Auge erscheint. Ist z. B. die Vergrößerung eines Fernrohres zwanzigfach, d. h. sieht man bei seinem Gebrauche eine lineare Dimension des Objektes zwanzigmal so lang als mit dem bloßen Auge, so ist die Flächenvergrößerung 400.

Aufgaben: **§ 130.**

1. Sind zwei gleichschenklige Dreiecke ähnlich, wenn sie *a*) in dem Winkel am Scheitel, *b*) in einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen?
2. Weshalb sind die in Fig. 157 dargestellten Fünfecke, obwohl ihre Winkel paarweise gleich sind, nicht ähnlich?

Fig. 157.

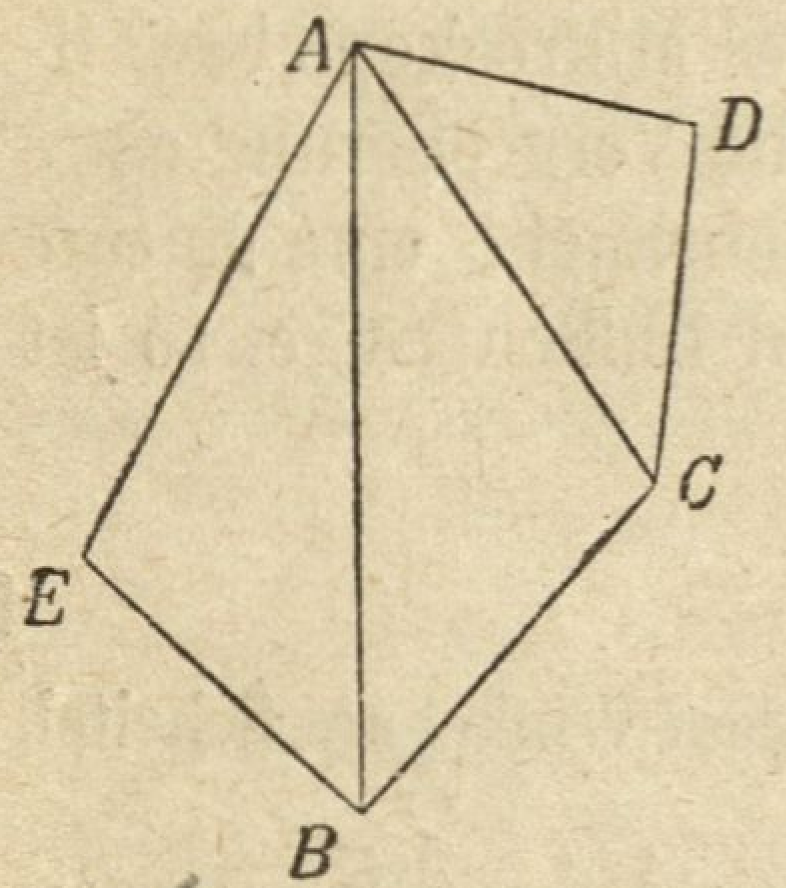


3. Zu einem gegebenen Dreiecke ein ähnliches zu zeichnen. (Zahl der Auflösungen?) Es ist nur die Gestalt des zu zeichnenden Dreieckes bestimmt.
4. Über einer vorgeschriebenen Seite ein einem gegebenen Dreiecke ähnliches zu zeichnen. Weshalb ist in dieser Aufgabe auch die Größe des zu zeichnenden Dreieckes bestimmt?
5. Zu einem gegebenen Dreiecke ein ähnliches nach dem Maßstab $\frac{2}{3}$ zu zeichnen.
6. Ein Dreieck ist einem anderen ähnlich und hat eine 144 mal so große Fläche als dieses. Die Beziehung *a*) zwischen den Seiten, *b*) zwischen den Umfängen zu suchen.
7. Von einem Dreiecke soll durch eine Parallele zur Grundlinie an der Spitze ein Dreieck abgeschnitten werden, dessen Fläche $\frac{1}{25}$ des ursprünglichen Dreieckes ist.

8. Ein Rechteck ist gegeben; es ist ihm nach dem Maßstabe $\frac{1}{3}$ ein ähnliches so einzuzeichnen, daß beide einen Winkel gemeinschaftlich haben. Ihre Umfänge und ihre Flächen nach der Figur zu vergleichen. Übereinstimmung mit dem Satze in § 129.
9. Zu einem gegebenen regelmäßigen Fünfecke ein ähnliches nach dem Maßstabe *a*) 2, *b*) $\frac{1}{3}$ so zu zeichnen, daß die Mittelpunkte beider Vielecke zusammenfallen.
10. Ein Trapezoid in neunfacher Flächenvergrößerung abzubilden.
11. Die lineare Vergrößerung eines Mikroskopes ist 200; wie groß ist die Flächenvergrößerung?
12. Ein Terrain in verkleinertem Maßstabe darzustellen.

Man zerlege das Terrain (Fig. 158) durch Verbindungslinien passender Punkte in Dreiecke, messe eine Seite (*AB*) eines Dreieckes (*ABC*) — die Standlinie —, zeichne dieses Dreieck in verjüngtem Maßstabe und schließe daran in gleicher Verjüngung die anderen Dreiecke. Welche Größen müssen außer der Standlinie noch gemessen werden?

Fig. 158.



13. Die Steigung einer Gebirgsstraße ist $\frac{6}{100}$, d. h. auf 100 *m* Länge steigt die Straße um 6 *m*. In einem in verjüngtem Maßstabe gezeichnetem rechtwinkligen Dreiecke den Neigungswinkel der Straße gegen den Horizont zu messen.[1])
14. Ein vertikales Objekt wirft einen Schatten von 45 *m* Länge, während zu gleicher Zeit der Schatten eines vertikalen Stabes von 2 *m* Länge 3 *m* lang ist. Wie hoch ist das Objekt?
15. Die österreichisch-ungarische Monarchie hat einen Flächeninhalt von rund 676.000 km^2. Welche Fläche nimmt sie auf der Spezialkarte ein, deren verjüngter Maßstab $\frac{1}{75000}$ ist.

§ 131. Ähnlichkeit der Körper.

Zwei von ebenen Flächen begrenzte Körper sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln paarweise übereinstimmen und alle Kanten des einen im Vergleiche mit den gleichliegenden des anderen in gleichem Maße vergrößert oder verkleinert sind.

Daraus ist zu ersehen, daß alle Würfel ähnlich sind. Dies ist aber bei Quadern, obwohl sie in den Winkeln übereinstimmen, nicht der Fall. Es muß noch die oben erwähnte Forderung bezüglich der Kanten erfüllt sein. Sind die in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten des einen Quaders *a*, *b*, *c*, so müssen die entsprechenden des anderen *ma*, *mb*, *mc* sein, wenn *m* eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl ist.

Die Ähnlichkeit von Kugeln mit ungleichen Halbmessern ist ohneweiters nach der Anschauung zu erkennen.

Aufgabe:

Der Schüler zeichne in passender Verjüngung mit Ausschluß aller Nischen das Netz des Schulzimmers und modelliere den Körper.

---

[1]) Die obige Erklärung der Steigung ist in der Physik bei der schiefen Ebene üblich; die Techniker erklären als Steigung bei Eisenbahnen oder Straßen den Quotienten aus der Höhe durch die horizontale Basis.

Gleichheit, Ähnlichkeit, Kongruenz. § 132.

Gleiche geometrische Gebilde haben dieselbe Größe. Zeichen: $=$. Ähnliche geometrische Gebilde haben dieselbe Form. Zeichen: $\sim$. Kongruente geometrische Gebilde stimmen in der Form und in der Größe überein. Daher ist das Zeichen für die Kongruenz: $\cong$.

Sechzehnter Abschnitt.

1. Berechnung der senkrechten Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel.

Berechnung des senkrechten Prismas. § 133.

a) Die Oberfläche.

Die Oberfläche eines senkrechten Prismas besteht aus der doppelten Grundfläche und der Summe der Seitenflächen, dem Mantel. Ist u der Umfang der Grundfläche und s eine Seitenkante, so ist der *Mantel* $M = us$.

Der Schüler bestätige die Richtigkeit der Formel durch Abwickeln des Mantels in eine Ebene! Welche Figur ergibt sich?

Ist G eine Grundfläche, M der Mantel des Prismas, so ist die *Oberfläche* $O = 2G + M$.

Für den Würfel ergibt sich $O = 6s^2$, wenn s seine Kante ist.

b) Das Volumen.

Ein Quader und ein senkrechtes z. B. fünfseitiges Prisma, welches mit dem Quader gleiche Grundfläche und Höhe hat, stehen auf derselben Ebene. Man legt zu dieser Ebene durch die beiden Körper in gleichen sehr kleinen Abständen parallele Ebenen. Durch diese werden die beiden Körper in sehr dünne Platten von gleichen Grundflächen und Höhen zerlegt, welche daher gleiches Volumen besitzen. Daher ist auch das mehrseitige Prisma gleich dem Quader.

Von der Richtigkeit kann man sich auch experimentell[1]) überzeugen:

1. Durch Wägung der beiden Körper, wenn sie aus demselben Materiale bestehen.

2. Durch das gleich hohe Ansteigen von Wasser in einem kubiziertem Gefäße, wenn man beide Körper nacheinander in die Flüssigkeit versenkt.

Es gilt daher der Satz:

Jedes senkrechte Prisma ist mit einem Quader von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich.

Durch diesen Satz ist die Berechnung des Volumens eines jeden senkrechten Prismas auf die eines Quaders von derselben Grundfläche und Höhe zurückgeführt.

Das Volumen eines senkrechten Prismas ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche g und der Höhe h; mithin ist $v = gh$ und $g = \frac{v}{h}$, $h = \frac{v}{g}$.

Sind die Kanten eines Quaders a, b, c, so ist $v = abc$.

Für den Würfel ist $v = s^3$, wenn s dessen Kante ist, und $s = \sqrt[3]{v}$.

[1]) Lat. experimentum, Versuch.

Wie ändert sich das Volumen eines senkrechten Prismas, wenn die Grundfläche mit 2, 3, 4, ... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird? Wenn man dasselbe mit der Höhe macht? Wenn man es an beiden Größen ausführt?

Wie ändert sich das Volumen eines Quaders, wenn a) eine Kante, b) zwei Kanten, c) alle drei Kanten einer Ecke mit m multipliziert oder durch m dividiert werden? In diesem Falle sind die Quader ähnliche Körper. Vergleiche auch die Oberflächen und achte auf die Potenz, in welcher m bei der Vergleichung der Oberflächen und der Volumina auftritt. Anwendung von c) auf den Würfel. Die erhaltenen Würfel sind ähnlich.

Aufgaben:

1. Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Kante *a*) 12 *dm*, *b*) 2 *m* 3 *dm*, *c*) 0·575... *m*, *d*) 2·478 ... *m* ist?
2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398·535 *cm*². Wie groß ist seine Kante? Wie groß ist der Kubikinhalt? Wie schwer ist er, wenn die Dichte des Materials 2·4 ist?
3. Eine Seitenfläche eines Würfels beträgt 3 *m*² 61 *dm*². Wie groß ist der Kubikinhalt?
4. Der Kubikinhalt eines Würfels ist 6434·856... *cm*³. Wie groß ist dessen Oberfläche?
5. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Blechgefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertigt werden. Wieviel Quadratmeter Blech braucht man?
6. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite. Wieviel Liter faßt es?
7. Wie schwer ist ein Würfel mit der Kante 3 *dm* 7 *cm*, wenn 1 *dm*³ des Materiales 0·86 *kg* wiegt?
8. Ein Würfel von 2 *dm* Kantenlänge wiegt 16 *kg*. Wieviel wiegt ein anderer Würfel aus demselben Materiale von 6 *dm* Kantenlänge?
9. Es soll ein Würfel gemacht werden, welcher der Summe zweier Würfel gleich ist, deren Kanten 5·4 *dm* und 4·9 *dm* sind. Welche Länge muß man seiner Kante geben?
10. Wenn ein hohler Würfel 20 *kg* Wasser faßt, wie groß ist seine Kante?
11. Das Gewicht eines Würfels ist 1 *kg* 23 *g*. Wie groß ist seine Kante, wenn die Dichte des Materiales 8·4 ist?
12. *Wenn man das Volumen eines Würfels achtmal so groß macht, wie ändert sich die Oberfläche?*
13. *Wenn man das Volumen eines Würfels auf ein Achtel verkleinert, wie ändert sich die Oberfläche?*
14. Schätze das Volumen eines Ziegelsteines, prüfe sodann die Schätzung durch Messung und Rechnung!
15. Genügt ein 8 *m* langes, 5·5 *m* breites, 3·8 *m* hohes Zimmer für 40 Schüler, wenn auf einen Schüler 2·9 *m*³ Luftraum kommen sollen?
16. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Deltoid mit den Diagonalen 6 *cm* und 9 *cm*, die Höhe des Prismas ist 15 *cm*; das Volumen zu berechnen.
17. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche 5·6 *m* zur Grundlinie, 5 *m* zur Höhe hat und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 *m* beträgt. Wieviel Kilogramm Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 *m*³ Heu 114 *kg* wiegt?
18. Die Grundflächen eines 2·4 *dm* hohen senkrechten Prismas sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 0·5 *dm* und 1·2 *dm*. Berechne *a*) die Oberfläche, *b*) den Kubikinhalt!

19. Die Höhe eines senkrechten Prismas ist h, die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Man berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt!

Der Umfang der Grundfläche des dreiseitigen Prismas ist $3\,a$, der Flächeninhalt $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; daher ist $o = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3\,a\,h = a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3\,h\right)$.

Für den Kubikinhalt hat man $v = \frac{a^2\,h \sqrt{3}}{4}$.

20. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt eines senkrechten dreiseitigen Prismas, wenn jede Kante $3\,dm$ beträgt?

21. Ein prismatischer Balken ist $5\,m$ lang und hat zu Grundflächen Trapeze, in denen die Parallelseiten $40\,cm$ und $30\,cm$ sind und die Höhe $15\,cm$ beträgt. Wie groß ist der Inhalt?

22. Der Querschnitt eines Eisenbahneinschnittes ist ein gleichschenkliges Trapez. Die Parallelseiten sind $8\,m$ und $14\,m$, ein Schenkel mißt $4\,m$. Wieviel Kubikmeter Erdreich sind auf einer geradlinigen Strecke von $20\,m$ Länge auszuheben? Wieviel Waggonladungen ergeben sich, wenn durch die Auflockerung des Erdreichs das Volumen um 30% vermehrt wird und auf eine Ladung $5{\cdot}4\,m^3$ gerechnet werden?

23. Die Höhe eines senkrechten Prismas ist h, die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a. Man bestimme die Oberfläche und den Kubikinhalt!

24. Die Grundfläche eines senkrechten Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe beträgt $1\,m$ $8\,dm$. Wie groß ist der Mantel, wenn eine Seite der Grundfläche $1\,m$ $1\,dm$ ist?

25. Der Mantel einer $4{\cdot}2\,m$ hohen senkrechten Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $0{\cdot}4\,m$ ist, soll einen Ölanstrich erhalten. Wieviel kostet er, wenn für das Quadratmeter $1\frac{1}{2}\,K$ gezahlt werden?

26. Oberfläche und Volumen eines gleichkantigen regelmäßigen sechsseitigen Prismas zu berechnen, wenn jede Kante a ist. Wie ändern sich beide Größen, wenn die Kante verdoppelt wird? (Die beiden Körper sind ähnlich.)

27. Der Inhalt eines senkrechten Prismas ist $5{\cdot}85\,m^3$, die Höhe $1{\cdot}3\,m$. Wie groß ist die Grundfläche?

28. Ein Würfel ist inhaltsgleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $5\,cm$ ist. Wie groß ist die Kante des Würfels, wenn die Seitenkante des Prismas $8\,cm$ beträgt?

29. Wie schwer ist eine Platte aus Gußeisen, welche $1{\cdot}9\,m$ lang, $0{\cdot}2\,m$ breit und $0{\cdot}04\,m$ dick ist, wenn die Dichte des Gußeisens $7{\cdot}21$ ist?

30. Die Grundkante einer quadratischen Säule aus Marmor ist $18\,cm$, eine Seitenkante ist $36\,cm$ lang. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Marmors, wenn das Gewicht der Säule $30{\cdot}33\,kg$ beträgt?

31. Die Bodenfläche eines senkrechten prismatischen Gefäßes von $1\,m$ Länge und $5\,dm$ Breite kann nur einen Druck von $170\,kg$ aushalten. Bis zu welcher Höhe kann dieses Gefäß mit Öl ($d = 0{\cdot}92$) gefüllt werden? (Anleitung: Das Gewicht des Öles kann höchstens $170\,kg$ sein.)

32. Die Größe des Luftdruckes auf eine Fläche ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche diese Fläche und deren Höhe der jeweilige Barometerstand ist. Wie groß ist der Luftdruck auf eine Fläche von $1\,dm^2$ bei einem Barometerstande von $742\,mm$?

33. Wie groß ist die Wassermenge, welche *a*) in einer Sekunde, *b*) in einer Minute durch das Querprofil des Flusses (Fig. 145) strömt, wenn die Geschwindigkeit des Wassers 1·3 *m* in der Sekunde beträgt?

§ 134. Berechnung des senkrechten Zylinders.

a) *Die Oberfläche.*

Der Schüler prüfe an dem Netz eines senkrechten Zylinders die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl der Mantelfläche eines senkrechten Zylinders ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen des Umfanges der Grundfläche und der Höhe.

Es ist daher $m = 2\,r\,\pi\,h$.

Ist o die ganze Oberfläche, so ist: $o = 2\,r^2\pi + 2\,r\,\pi\,h = 2\,r\,\pi\,(r + h)$.

Der Schüler leite daraus die Formeln für den gleichseitigen Zylinder ab: $m = 4\,r^2\pi$, $o = 6\,r^2\pi$!

Was geschieht mit dem Mantel eines senkrechten Zylinders, wenn a) r mit 2, 3, 4,... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird; b) wenn dasselbe mit h geschieht; c) wenn beides ausgeführt wird? Wie ändert sich im letzteren Falle die Oberfläche? Im Falle c) sind die beiden Zylinder ähnliche Körper.

b) *Das Volumen.*

Da der senkrechte Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl des Volumens eines senkrechten Zylinders ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe; mithin ist $v = r^2\pi\,h$. *Für den gleichseitigen Zylinder ist die Formel abzuleiten:* $v = 2\,r^3\pi$.

Die Mantelflächen zweier senkrechter Zylinder mit gemeinschaftlicher Achse begrenzen mit den beiden zugehörigen Kreisringen eine *zylindrische Röhre.* Ihr Volumen ist $v = \pi\,h\,(R^2 - r^2)$.

Suche in den obigen Formeln für m, o und v die Zahl der veränderlichen und der konstanten Größen auf!

Aufgaben:

1. Zu berechnen 1. die Oberfläche, 2. den Kubikinhalt folgender senkrechter Zylinder:
   a) Durchmesser der Grundfläche 23 *dm*, Höhe 14 *dm*;
   b) Halbmesser der Grundfläche 8·25 *dm*, Höhe 5·24 *dm*.
2. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Zylinders, in welchem die Seite 3 *dm* 4 *cm* und der Umfang der Grundfläche 7 *dm* 8 *cm* beträgt?
3. Der Durchmesser eines gleichseitigen Zylinders ist 2·43... *dm*. Wie groß ist der Kubikinhalt?
4. Die Mantelfläche eines senkrechten Zylinders beträgt 7 m^2 4 dm^2, der Umfang der Grundfläche 1·76 *m*. Wie groß ist der Kubikinhalt des Zylinders?
5. Die Mantelfläche eines senkrechten Zylinders ist 62·84 ... dm^2, der Durchmesser der Grundfläche 4·2 ... *dm*. Wie groß ist die Höhe?
6. Wie schwer ist ein gleichseitiger Zylinder, dessen Radius 7 *cm* 8 *mm* mißt, wenn 1 dm^3 des Materiales 8·4 *kg* wiegt?
7. Wie groß ist der Halbmesser eines gleichseitigen Zylinders, wenn *a*) dessen Mantelfläche 10 dm^2, *b*) dessen Inhalt 10 cm^3 beträgt?

8. Ein Brunnen hat eine zylindrische Form mit 14 *dm* im Durchmesser; wenn nun das Wasser 3 *m* hoch steht, wieviel Hektoliter sind es?
9. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 20 *a* ganz überwalzt werden soll und die Walze 1·6 *m* lang ist und 0·3 *m* im Durchmesser hat, wenn angenommen wird, daß jeder Teil des Feldes nur einmal überwalzt wird?
10. Ein zylindrisches Gefäß soll 1 *l* halten. Wie hoch muß es sein, wenn der innere Durchmesser 108 *mm* beträgt?
11. Wie groß ist der Durchmesser eines zylindrischen Gefäßes, das 5·03 *dm* hoch ist und 1 *hl* hält?
12. Der innere Durchmesser eines runden Turmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick. Wieviel Kubikmeter enthält die Mauer, wenn die Höhe des Turmes 14·5 *m* beträgt?
13. Eine gußeiserne Walze von 1·2 *m* Länge und 11 *cm* Durchmesser wird so weit abgedreht, daß der Durchmesser nur 9·5 *cm* beträgt. Um wieviel ist die abgedrehte Walze kleiner als die frühere?
14. Zu einer Wasserleitung von 84 *m* Länge braucht man Röhren von Blei, welche bei einem äußeren Durchmesser von 6 *cm* im Lichten eine Weite von 4 *cm* haben. Wieviel kostet das Blei, wenn 1 dm^3 desselben 11·35 *kg* wiegt und das Kilogramm mit 60 *h* bezahlt wird?
15. Eine Walze aus Messing soll 32 *kg* wiegen und 3 *dm* lang sein. Welchen Durchmesser muß man ihr geben? ($d = 8·4$.)
16. Es soll ein gleichseitiger Zylinder aus Gußeisen vom Gewichte 1 *kg* gegossen werden. Welchen Durchmesser muß er haben?
17. Der Ring eines Schwungrades aus Gußeisen ($d = 7·2$) hat die Form eines senkrechten Hohlzylinders. Wie schwer ist er, wenn seine Halbmesser 2 *m* und 2·4 *m* sind und die Höhe 0·34 *m* mißt?
18. Ein Hohlzylinder mit den Radien R und r soll in einen inhaltsgleichen Zylinder mit derselben Höhe verwandelt werden; den Radius dieses Zylinders zu konstruieren.
19. Ein senkrechtes zylindrisches Gefäß mit dem Radius der Grundfläche 4 *cm* ist bis zu der Höhe von 12 *cm* mit Quecksilber ($d = 13·6$) gefüllt. Wie groß ist der Druck auf den Boden des Gefäßes?
20. Man bringt einen unregelmäßig geformten Stein in Wasser, welches in einem senkrechten Zylinder von 5 *cm* Halbmesser sich befindet, und sieht, daß das Wasser um 8 *cm* steigt. Welchen Raum nimmt der Stein ein?
21. Ein gleichseitiger Zylinder mit dem Radius der Grundfläche = 1·2 *dm* wiegt 21·704 *kg*. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Materiales?
22. Wie groß ist der Durchmesser einer zylindrischen Röhre im Lichten, wenn ein Quecksilberfaden von dem Gewichte 20 *g* in ihrem Hohlraum die Länge von 8 *cm* hat?
23. Wenn ein Quadrat um eine seiner Seiten a rotiert, wie groß ist die Oberfläche und das Volumen des Rotationskörpers?
24. Wenn ein Rechteck mit den Seiten a und b um b rotiert, wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Rotationskörpers?
25. Wievielmal so groß ist der Mantel des einem Würfel umgeschriebenen als der des eingeschriebenen Zylinders? (Durch Vergleichung der Durchmesser zu beantworten.)
26. Das Volumen des einem Würfel mit der Kante s *a*) eingeschriebenen, *b*) umgeschriebenen Zylinders zu berechnen. Die Inhalte durch die Beziehung zwischen den Halbmessern zu vergleichen.

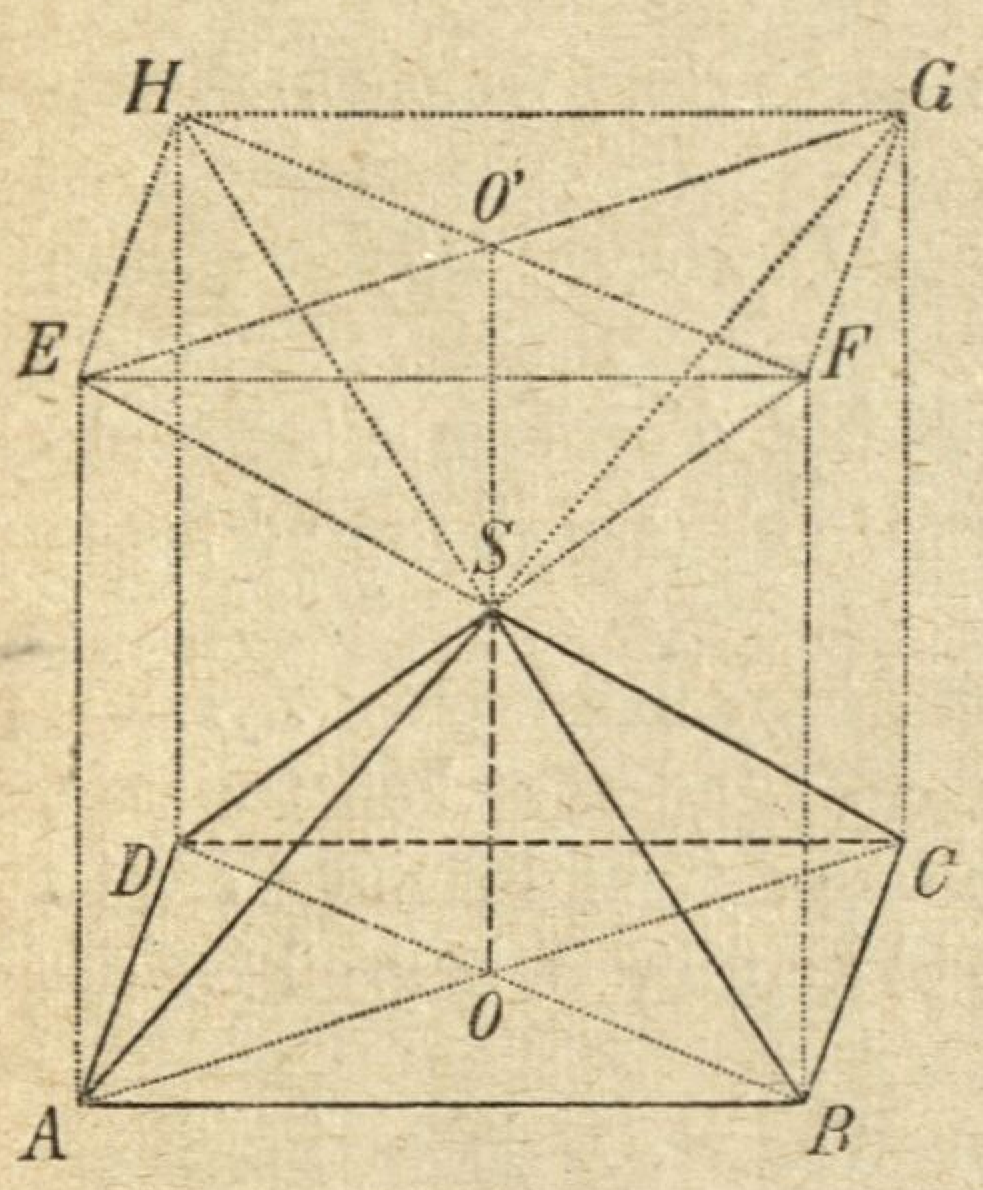
27. Aus einem geraden Zylinder aus Holz mit dem Radius r und der Höhe h wird das größte regelmäßige sechsseitige Prisma geschnitten. Wie groß ist der Abfall?
28. Ein gerader Zylinder soll konzentrisch so ausgebohrt werden, daß die zylindrische Röhre das halbe Volumen des vollen Zylinders hat. Den Halbmesser der Bohrung zu berechnen. Wievielmal so groß ist der äußere als der innere Mantel?
29. In einem zylindrischen Gefäße mit dem Radius 1·3 *dm* und der Höhe 4·2 *dm* befindet sich ein Gas mit einer Expansivkraft von 3 Atmosphären. Wie groß ist der Druck auf die innere Fläche des Gefäßes?
30. *Wie ändert sich das Volumen einer zylindrischen Röhre, wenn h verdoppelt wird? Wenn R und r verdoppelt werden? Wenn R und r verdoppelt, hingegen h viermal so klein gewählt wird?*

§ 135. Berechnung der senkrechten Pyramide.

a) Oberfläche.

Die Oberfläche einer senkrechten Pyramide ist die Summe aus der Grundfläche und dem Mantel. Der letztere besteht aus soviel gleichschenkligen Dreiecken, als die Grundfläche Kanten hat. Da diese Dreiecke im allgemeinen voneinander verschieden sind, so muß jedes einzeln berechnet werden, die Summe ihrer Inhalte gibt den Mantel. Bei einer regelmäßigen Pyramide sind alle Seitendreiecke kongruent. (Kongruenzsatz?)

Fig. 159.



Die Maßzahl des Mantels einer regelmäßigen Pyramide ist daher dem Produkte aus der Maßzahl des Inhaltes einer Seitenfläche und der Zahl derselben gleich.

b) Volumen.

Zieht man (Fig. 159) die vier Diagonalen des Würfels und legt durch je zwei aufeinander folgende die Ebene, so wird der Würfel in sechs kongruente regelmäßige vierseitige Pyramiden zerschnitten. Die Grundfläche einer derselben z. B. $ABCD$ ist eine Fläche des Würfels, ihre Höhe SO ist der halben Würfelkante gleich; mithin ist das Volumen der Pyramide $SABCD = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{3} \cdot h$; es ist also dem dritten Teile des Produktes aus der Grundfläche und Höhe gleich.

Dieser Satz gilt zunächst für eine regelmäßige vierseitige Pyramide, deren Höhe der halben Grundkante gleich ist. Er ist aber auch für andere Formen von senkrechten Pyramiden richtig. Errichtet man nämlich über einem regelmäßigen oder unregelmäßigen Sehnenpolygone, dessen Inhalt dem des Quadrates $ABCD$ (Fig. 159) gleich ist, eine senkrechte Pyramide P mit der halben Würfelkante als Höhe, so ist sie der Pyramide $SABCD$ inhaltsgleich. Denn stellt man beide auf eine Ebene, so müssen sie mit jeder zu dieser parallel gelegten Ebene nach der Entstehungsweise der Pyramide gleiche Schnittfiguren ergeben. Man kann also, wenn man solche Schnittebenen unendlich nahe annimmt, beide Pyramiden in gleich viele sehr dünne, paarweise inhaltsgleiche Platten zerlegen; daher haben auch die ganzen Pyramiden dasselbe Volumen. Die oben angegebene Berechnung des Inhaltes der Pyramide $SABCD$ (Fig. 159) kann mithin auch auf die Pyramide P angewendet werden.

Durch diese Betrachtung wird der Schluß nahegelegt:

Das Volumen einer senkrechten Pyramide ist dem dritten Teile des Produktes aus der Grundfläche und der Höhe gleich.

Der strenge Beweis dieses Satzes muß einer höheren Stufe vorbehalten bleiben.

Sind v, g und h beziehungsweise das Volumen, die Grundfläche und die Höhe einer senkrechten Pyramide, so ist $v = \frac{g\,h}{3}$.

Ferner $3\,v = g\,h$ und

$$g = \frac{3\,v}{h},\ h = \frac{3\,v}{g}.$$

Aufgaben:

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 5 *cm* Seitenlänge, die Höhe ist 7 *cm*. Das Volumen zu berechnen. Experimentelle Bestätigung des Resultates durch das Ansteigen des Wassers in einem kubizierten Gefäße, wenn man die Pyramide in die Flüssigkeit versenkt.
2. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe ist 12·37 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?
3. Berechne den Kubikinhalt folgender senkrechten Pyramiden:
   a) Grundfläche: ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 2·34 ... *m*; Höhe 4·82... *m*;
   b) Grundfläche: ein Quadrat mit der Seite 4·34...*m*; Höhe 2·45...*m*;
   c) Grundfläche: ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 0·837...*m*; Höhe 1·246...*m*!
4. Aus der Kante a 1. eines Tetraeders, 2. eines Oktaeders die Oberfläche zu berechnen.
5. Das Netz der Pyramide $SABCD$ (Fig. 159) zu zeichnen und den Körper zu modellieren, wenn die Würfelkante 6 *cm* ist.
6. Oberfläche und Volumen der Pyramide $SABCD$ (Fig. 159) zu berechnen, wenn die Würfelkante 8 *cm* ist.
7. Oberfläche und Volumen einer gleichkantigen quadratischen Pyramide zu berechnen, wenn eine Kante 12 *cm* ist. (Bezüglich der Höhe kann der Satz § 125 *k*), Aufgabe 3, berücksichtigt werden.)
8. Das Volumen eines Oktaeders mit der Kante a zu berechnen. (Die Höhe der Doppelpyramide — Strecke zwischen E und F in Fig. 125 — ist die Diagonale des Quadrates $AECF$.) $v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$
9. Wie ändert sich *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen eines Oktaeders, wenn die Kante mit m multipliziert wird? (Die beiden Oktaeder sind ähnliche Körper.)
10. Die Pyramide des Cheops ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide, eine Grundkante mißt 233 *m*, die Höhe 149 *m*. Eine wie lange Mauer von 1 *m* Dicke und 2 *m* Höhe könnte man aus dem Materiale dieser Pyramide herstellen?
11. Die Seitenhöhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 5 *cm*, die Grundkante 8 *cm*. Die Oberfläche und den Inhalt zu berechnen.

12. Die Grundfläche einer senkrechten, 1·4 *m* hohen Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten 6 *dm* und 8 *dm*; man berechne die Seitenkante und die Oberfläche der Pyramide.
13. Der Kubikinhalt einer senkrechten Pyramide ist 0·6264 m^3, die Höhe 0·9 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
14. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ist ein Rechteck von 3 *dm* 4 *cm* Länge und 1 *dm* 9 *cm* Breite, der Kubikinhalt ist 17 dm^3 955 cm^3; wie groß ist die Höhe?
15. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Tetraeder mit der Kante 1 *dm*; wie groß ist die Kante des Würfels?
16. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 m^2 15 dm^2 und deren Höhe 2 *m* beträgt, aus Eisen gegossen werden; wieviel wird sie wiegen, wenn 1 dm^3 Eisen 7·21 *kg* wiegt?
17. Wie groß ist das Gewicht einer senkrechten Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 *m* und eine Seite der quadratischen Grundfläche 5 *dm* beträgt und 1 dm^3 Marmor 2·72 *kg* wiegt?

§ 136. Berechnung des senkrechten Kegels.

a) Die Oberfläche.

Die Oberfläche eines Kegels findet man, indem man die Summe aus der Grundfläche und dem Mantel bildet.

Da der *Mantel* eines senkrechten Kegels abgewickelt einen Kreisausschnitt gibt, dessen Bogen und Radius beziehungsweise dem Umfange der Grundfläche und der Seite des Kegels gleich sind, so ist $M = 2\,r\pi \,.\, \frac{s}{2} = r\pi s$, wenn M, r und s die Maßzahlen des Mantels, des Halbmessers der Grundfläche und der Seite des Kegels sind.

Ist der Kegel ein gleichseitiger, so ist $s = 2\,r$ und

$$M = r\pi \,.\, 2\,r = 2\,r^2\pi.$$

Die ganze *Oberfläche* O eines senkrechten Kegels ist

$$O = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s).$$

Ist der Kegel gleichseitig, so ist $O = 3\,r^2\pi$.

b) Das Volumen.

Da ein senkrechter Kegel als eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl für das Volumen eines senkrechten Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, so ist das Volumen

$$v = \frac{r^2\pi h}{3};$$

daher $3\,v = r^2\pi h$ und $h = \frac{3\,v}{r^2\pi}$, $r = \sqrt{\frac{3\,v}{\pi h}}$.

Ist statt der Höhe h die Seite s eines senkrechten Kegels gegeben, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher

$$v = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $h = r\sqrt{3}$, und

$$v = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}.$$

$$3v = r^3 \pi \sqrt{3}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{v\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Wie ändert sich das Volumen eines senkrechten Kegels, wenn man a) den Radius, b) die Höhe verdoppelt, c) beides macht? Wie im letzten Falle die Oberfläche? In c) sind die beiden Kegel ähnliche Körper.

Wie ändert sich die Oberfläche und das Volumen eines gleichseitigen Kegels bei Verdopplung des Halbmessers? (Die beiden gleichseitigen Kegel sind ähnliche Körper.)

Aufgaben:

1. Suche die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Grundfläche 11·8 *cm* zum Halbmesser hat, und dessen Seite 15·5 *cm* beträgt!
2. Berechne den Kubikinhalt folgender senkrechter Kegel:
   a) Halbmesser der Grundfläche 6·2 *dm*, Höhe 7·5 *dm*;
   b) „ „ „ $14\frac{1}{2}$ *cm*, „ $23\frac{2}{5}$ *cm*;
   c) „ „ „ 1 *m* 1 *dm* 8...*cm*, „ 2 *m* 4 *dm* 6...*cm*!
3. Der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels ist 12 *cm*, die Höhe 35 *cm*; wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?
4. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Kegels ist 7·5 *dm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt?
5. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels ist 2530 cm^2; wie groß ist dessen Kubikinhalt?
6. Der Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels ist 0·16 m^3; berechne dessen Oberfläche!
7. Der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels ist 1·5 *m*, die Seite 1·8 *m*; eine Pyramide hat mit dem Kegel denselben Scheitel und zur Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels eingeschriebenes Quadrat; wie groß ist die Differenz der Kubikinhalte beider Körper? (Die Pyramide ist dem Kegel eingeschrieben.)
8. Der Umfang der Grundfläche eines annähernd kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufens beträgt 8 *m* 5 *dm*, die Höhe 1 *m*; wieviel Hektoliter Getreide enthält der Haufen ungefähr?
9. Ein nahezu kegelförmiger Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wieviel Kilogramm Heu enthält er beiläufig, wenn das Kubikmeter Heu 114 *kg* wiegt?
10. Ein messingener Kegel ist 21 *cm* hoch und hat eine Grundfläche mit dem Durchmesser von 10·5 *cm*; wie groß ist sein Gewicht, wenn 1 dm^3 Messing $8\frac{2}{5}$ *kg* wiegt?
11. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der mit einem Kegel inhaltsgleich ist, wenn der Durchmesser der Grundfläche 0·85 *m* und die Höhe 1·08 *m* ist?
12. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe wird das Wasser in ein zylindrisches Gefäß von 12 *cm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird es in diesem Gefäße stehen?

13. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a rotiert um seine Höhe. Oberfläche und Volumen des entstehenden Rotationskörpers zu berechnen.
14. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b rotiert um die Kathete b. Oberfläche und Volumen des entstehenden Rotationskörpers zu berechnen.
15. Der Kathete a eines rechtwinkligen Dreieckes liegt ein Winkel von 30° gegenüber; es rotiert um die andere Kathete. Oberfläche und Volumen des entstehenden Rotationskörpers zu berechnen.
16. Die Diagonalen eines Deltoides sind d und d'; es rotiert um die Diagonale d. Das Volumen des entstehenden Doppelkegels zu berechnen.
17. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen des einem Würfel mit der Kante s eingeschriebenen senkrechten Kegels?
18. Einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h ist ein Kegel umgeschrieben. Die Oberfläche und das Volumen desselben zu berechnen.
19. Ist s die Seite, r der Radius des Grundkreises eines geraden Kegels, m der Zentriwinkel des durch Abwicklung des Mantels entstehenden Kreisausschnittes, so ist zu zeigen, daß $m^\circ = 360^\circ \cdot \frac{r}{s}$ ist. Wie groß ist m für einen gleichseitigen Kegel?
20. Die Seite eines geraden Kegels ist dreimal so groß als der Radius des Grundkreises; den Kegel zu modellieren. ($r = 3$ cm.)

2. Die Kugel.

§ 137. Die Entstehung und Erklärung der Kugel ist in § 24 enthalten.

Der Abstand irgend eines Punktes vom Mittelpunkt einer Kugel heißt der *Zentralabstand des Punktes.* Ein Punkt liegt auf der Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Zentralabstand gleich dem Halbmesser der Kugel, kleiner oder größer als dieser ist.

Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der *Zentralabstand der Geraden.* Ist der Zentralabstand einer Geraden größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Gerade mit der Kugelfläche *keinen* Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand der Geraden gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur *einen Punkt* gemeinschaftlich, während alle anderen Punkte außerhalb der Kugel liegen; sie heißt eine *Tangente* der Kugelfläche. Ist endlich der Zentralabstand der Geraden kleiner als der Halbmesser, so *schneidet* sie die Kugelfläche in *zwei* Punkten.

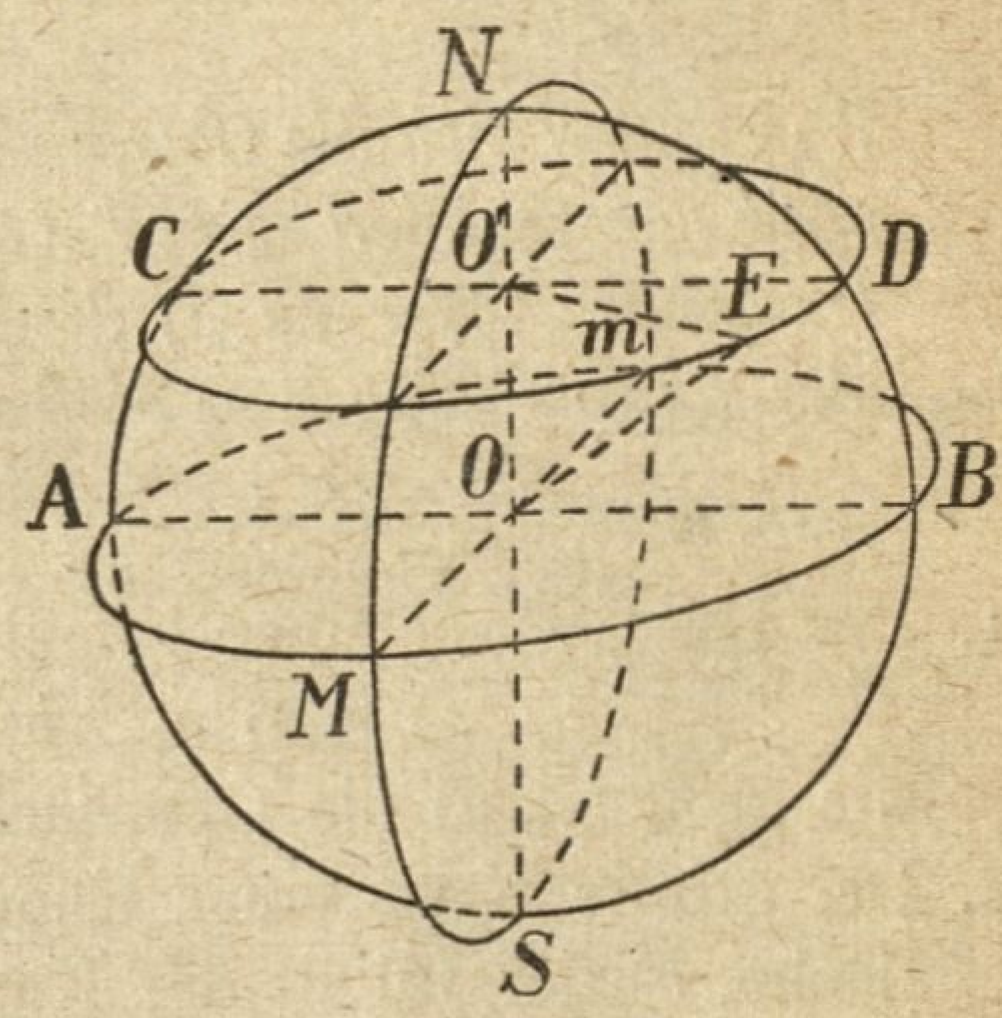
Der Abstand einer Ebene von dem Mittelpunkt einer Kugel heißt der *Zentralabstand der Ebene.* Ist der Zentralabstand einer Ebene größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Ebene mit der Kugelfläche *keinen* Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand der Ebene gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur *einen* Punkt gemeinschaftlich und heißt eine *Berührungs-* oder *Tangentialebene*; sie enthält alle Tangenten, welche im Berührungspunkte an die Kugel gelegt werden können. Ist der Zentralabstand der Ebene kleiner als der Halbmesser, so *schneidet* die Ebene die Kugelfläche.

Es besteht mithin eine Abhängigkeit der Lage eines Punktes, einer Geraden, einer Ebene gegen eine Kugel von dem Zentralabstande. Vergleich mit dem Kreise!

Aus der Entstehung der Kugel folgt der Satz:

Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Normale vom Kugelmittelpunkte auf die Schnittebene ist. Dieser Schnittkreis (z. B. CDE, Fig. 160) wird ein Kugelkreis genannt.

Fig. 160.



Zwischen dem Halbmesser $OE = r$ der Kugel, dem Halbmesser $O'E = \varrho$ des Kugelkreises und dem Zentralabstande $OO' = a$ des letzteren bestehen, da das Dreieck $OO'E$ rechtwinklig ist, die Beziehungen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}, \quad \varrho = \sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Daraus folgt: 1. Zu gleichen Zentralabständen gehören gleiche Kugelkreise; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Zentralabstande gehört ein größerer Kugelkreis; und umgekehrt.

3. Am größten wird ein Kugelkreis, wenn er durch den Mittelpunkt der Kugel geht; er heißt deshalb geradezu ein *größter Kugelkreis* oder auch ein *Hauptkreis*; jeder andere Kugelkreis heißt ein *Nebenkreis.*

Der Halbmesser eines Hauptkreises ist gleich dem Halbmesser der Kugel. Alle Hauptkreise sind daher einander gleich.

Zur eindeutigen Bestimmung eines Hauptkreises sind außer dem Kugelmittelpunkte noch zwei mit ihm nicht in gerader Linie liegende Punkte erforderlich.

Durch die Endpunkte eines Durchmessers kann man unzählig viele Hauptkreise, durch zwei Punkte, welche nicht Endpunkte eines Durchmessers sind, nur einen einzigen Hauptkreis legen.

Aufgabe:

Wie groß ist der Radius des Parallelkreises der Erde unter *a*) 30°, *b*) 45°, *c*) 60° geographischer Breite? (Erdradius 6378 *km.*)

Berechnung der Kugel. **§ 138.**

Bezeichnen r, o, v den Radius, die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, so ist, wie hier nicht bewiesen werden soll, $o = 4 r^2 \pi$, $v = \frac{4 r^3 \pi}{3}$.

Da $v = \frac{4 r^3 \pi}{3} = 4 r^2 \pi \cdot \frac{r}{3}$, so ist $v = o \cdot \frac{r}{3}$.

Diese Gleichungen enthalten folgende Sätze:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalt eines Hauptkreises. Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Oberfläche und dem dritten Teile des Radius derselben.

Umgekehrt folgt $r^2 = \frac{o}{4\pi}$, daher $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$.

Ferner ist $3\,v = 4\,r^3\pi$, $r^3 = \frac{3\,v}{4\pi}$ und $r = \sqrt[3]{\frac{3\,v}{4\pi}}$.

Eine Hohlkugel ist der zwischen zwei konzentrischen Kugeln liegende Raum; sind deren Radien R und r, so ist $V = \frac{4\,R^3\pi}{3} - \frac{4\,r^3\pi}{3} = \frac{4\,\pi}{3}\,(R^3 - r^3)$.

Wie ändert sich die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, wenn ihr Halbmesser verdoppelt oder halbiert wird? (Die drei Kugeln sind ähnliche Körper).

Umgekehrt: Wie ist a) die Oberfläche, b) das Volumen einer Kugel abzuändern, wenn der Radius doppelt so groß werden soll?

Aufgaben:

1. Der Halbmesser einer Kugel ist
 a) 0·36 *m*, *b*) $48\frac{4}{5}$ *dm*, *c*) 1·32 *dm*; 0·847...*m*
 wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt der Kugel?
2. Der größte Kreis einer Kugel hat 4·8 *dm* im Umfange; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt der Kugel?
3. Die Oberfläche einer Kugel beträgt *a*) 0·15 m^2, *b*) 12·76 cm^2, *c*) 66 dm^2 3 cm^2; wie groß ist der Durchmesser?
4. Der Kubikinhalt einer Kugel ist *a*) 4 dm^3, *b*) 0·357 m^3, *c*) 4 dm^3 875 cm^3; wie groß ist die Oberfläche?
5. Der Umfang und Inhalt eines Nebenkreises einer Kugel mit dem Halbmesser 13 *cm* zu berechnen, wenn sein Zentralabstand 12 *cm* ist.
6. Ein Kugelkreis, welcher 9 *cm* vom Mittelpunkte der Kugel absteht, hat 454·74 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt dieser Kugel?
7. Von zwei Kugeln hat die erste 6 *dm*, die zweite 5 *dm* im Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Inhalt der Summe der Volumina dieser zwei Kugeln gleich ist?
8. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche so groß ist wie ein Würfel, dessen Seite 1·11 *m* beträgt?
9. Suche die Seite eines Würfels, der an Inhalt gleich ist einer Kugel von 1 *m* 2 *dm* Durchmesser!
10. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man sie als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 6378 *km* beträgt? ($\pi = 3·141593\ldots$) Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt des Erdmondes, wenn der Halbmesser der Erde 3·66...mal so groß ist als der des Mondes?
11. Der Radius der Sonne ist 109 mal so groß als der Erdradius. Wie vielmal so groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen der Sonne als die entsprechenden Größen der Erde?
12. Das Vergolden einer Kugel kostet *a K*; wieviel kostet das Vergolden einer Kugel, deren Durchmesser *a*) dreimal so groß ist, *b*) den dritten Teil beträgt?
13. Eine Kugel mit dem Radius *r* wiegt 10 *kg*; wie schwer sind die Kugeln aus gleichem Materiale mit den Radien *a*) 10 *r*, *b*) $\frac{r}{10}$? Was für ein Gewicht gehört zu den Radien 2 *r* und $\frac{r}{2}$?
14. Das Gewicht einer Korkkugel mit dem Radius 1 *m* zu schätzen und dann zu berechnen. (Dichte des Korkes 0·2.)

15. Wie groß ist der Durchmesser einer Kanonenkugel von 15 *kg* Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7·2 *kg* wiegt?
16. Der Umfang des äußeren größten Kreises einer Halbkugel ist 1·2 *m*, die Wandstärke 2 *cm*; wie groß ist der Inhalt der Kugelschale?
17. Ein zylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist innen 1 *m* weit, die Länge des Zylinders beträgt 3 *m*; wie groß ist *a*) die äußere Oberfläche, *b*) der Hohlraum des Kessels, *c*) sein Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7·2 *kg* wiegt und die Wandstärke 1·4 *cm* ist?
18. Wenn man den Durchmesser der Erde = 12756 *km* und die Höhe ihrer Luftschichte = 84 *km* setzt, wie groß ist der Inhalt der Luftschichte?
19. Einem Würfel mit der Kante s ist eine Kugel ein- und umgeschrieben. Das Volumen der von diesen beiden Kugeln begrenzten Hohlkugel zu berechnen. (Der Durchmesser der umgeschriebenen Kugel ist die Diagonale des Würfels.)
20. Wenn man über der Basis einer Halbkugel einen geraden Kegel errichtet, wann ist der Winkel am Scheitel des Achsenschnittes *a*) ein stumpfer, *b*) ein rechter, *c*) ein spitzer? (Figuren!)
21. Einer Halbkugel ist ein senkrechter Kegel eingeschrieben. Wievielmal so groß ist der Inhalt der Halbkugel als der des Kegels?
22. Einem gleichseitigen Zylinder ist eine Kugel eingeschrieben. Wievielmal so groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt des Zylinders als die entsprechenden Größen der Kugel?
23. Ein gleichseitiger Zylinder mit dem Radius r hat dieselbe Oberfläche wie eine Kugel. Das Volumen der Kugel zu berechnen.

Inhalt.

Schriftarten.

Rondschrift.

abcddefghijklmnopqrsſ
ßtuvwxyz, 1234567890.

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRSTUVWXYZ.

Steinschrift.

ABCDEFGHIJK
LMNOPQRSTU
12345VWXYZ6789

PRAG

Nadel- oder Skelettschrift

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s ſ ß t u v w x y z,

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s ſ ß t u v w x y z,

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

I II III IV V VI VII VIII IX X,

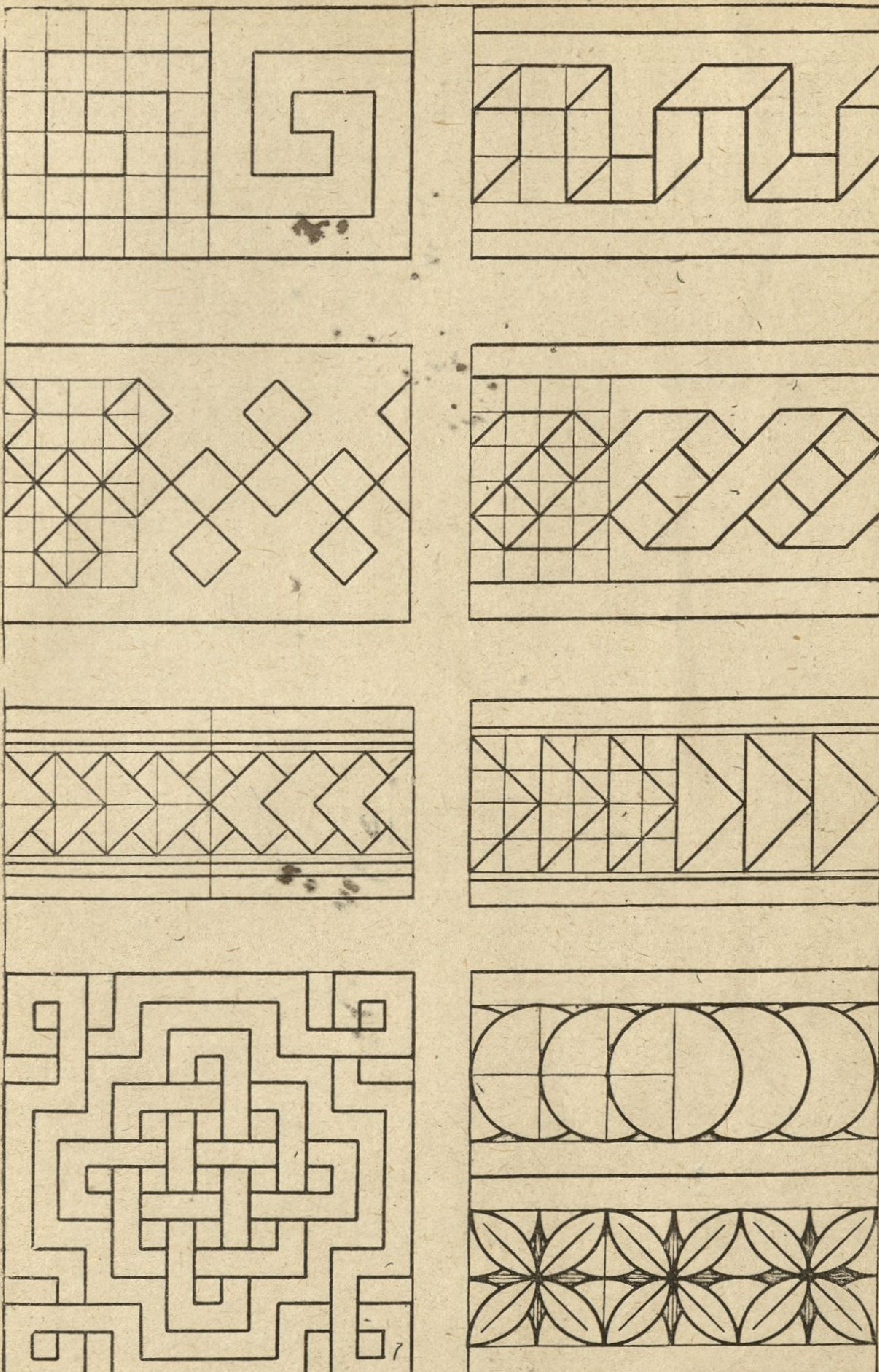
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

A B C D E F G H I J K L

M N O P Q R S T U V

W X Y Z

WIEN



[illegible]

[illegible]

$f = \frac{g h}{2} =$

$h = \frac{9}{2}$

$0{\cdot}15 : 2 = 1{\cdot}075$

81
120

$49 : 2 = 24{\cdot}5$

81

19

$\frac{\mu}{2\pi} = 2\sqrt{2}$