PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **5** (1977/1978)
Številka 1
Strani 3–8

Ivan Pucelj:

PLOŠČINA MREŽNIH VEČKOTNIKOV

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/5/5-1-Pucelj.pdf

PLOŠČINA MREŽNIH VEČKOTNIKOV

Ravnino lahko prekrijemo s kvadratno mrežo. Izberimo v določenem vrstnem redu nekaj vozlišč v mreži in jih povežimo z daljicami, pa dobimo lomnico; povežemo še končno točko danega nabora točk z začetno daljico, pa dobimo sklenjeno lomnico. Lomnica je enostavno sklenjena, če nobena daljica ne seče kake druge izmed daljic dane lomnice v notranji točki daljice.

Vidimo, da enostavno sklenjena lomnica razdeli ravnino v dva dela, eden od delov je omejen, drugi pa ni. To kaže slika 1.

Z dvema enostavno sklenjenima lomnicama lahko včasih ogradimo v ravnini lik z votlino (na primer okenski okvir ali slika 2). če je treba, lahko z večjim številom lomnic omejimo lik, ki ima več votlin.

Ker imajo vsi naši večkotniki, ki jih po tej poti oblikujemo, oglišča v vozliščih mreže, jim dajmo ime mrežni večkotniki.

Vidimo, da ima rob mrežnega večkotnika vsaj eno enostavno sklenjeno lomnico. če sestoji rob takega lika iz k enostavno sklenjenih lomnic, rečemo, da je večkotnik k-povezan.

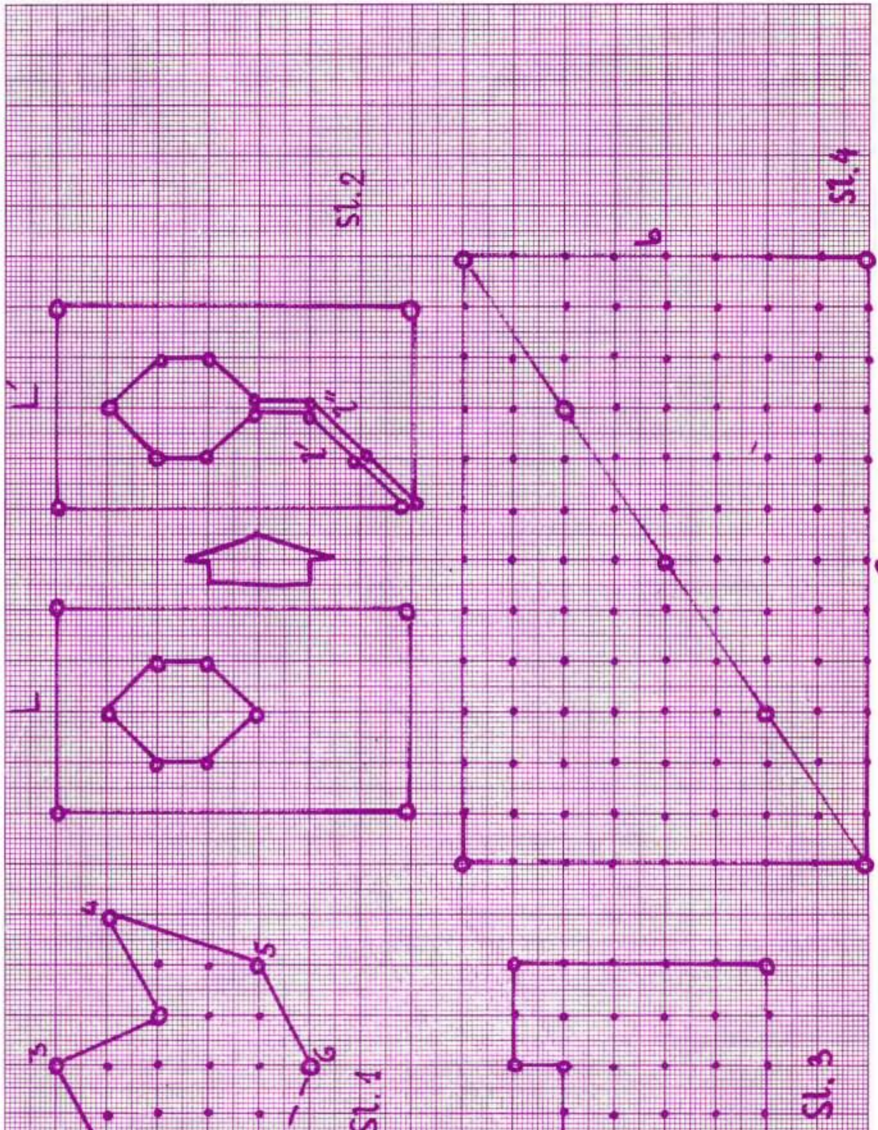
Poglejmo 2-povezan večkotnik L v sliki 2. Prerežimo tá lik z rezom, ki poteka od robne lomnice do druge po notranjosti lika! Potem se ob rezu pojavita dve lomnici l' in l'', druga tik druge. Novi lik L', ki smo ga dobili z rezom iz lika L, je 1-povezan!

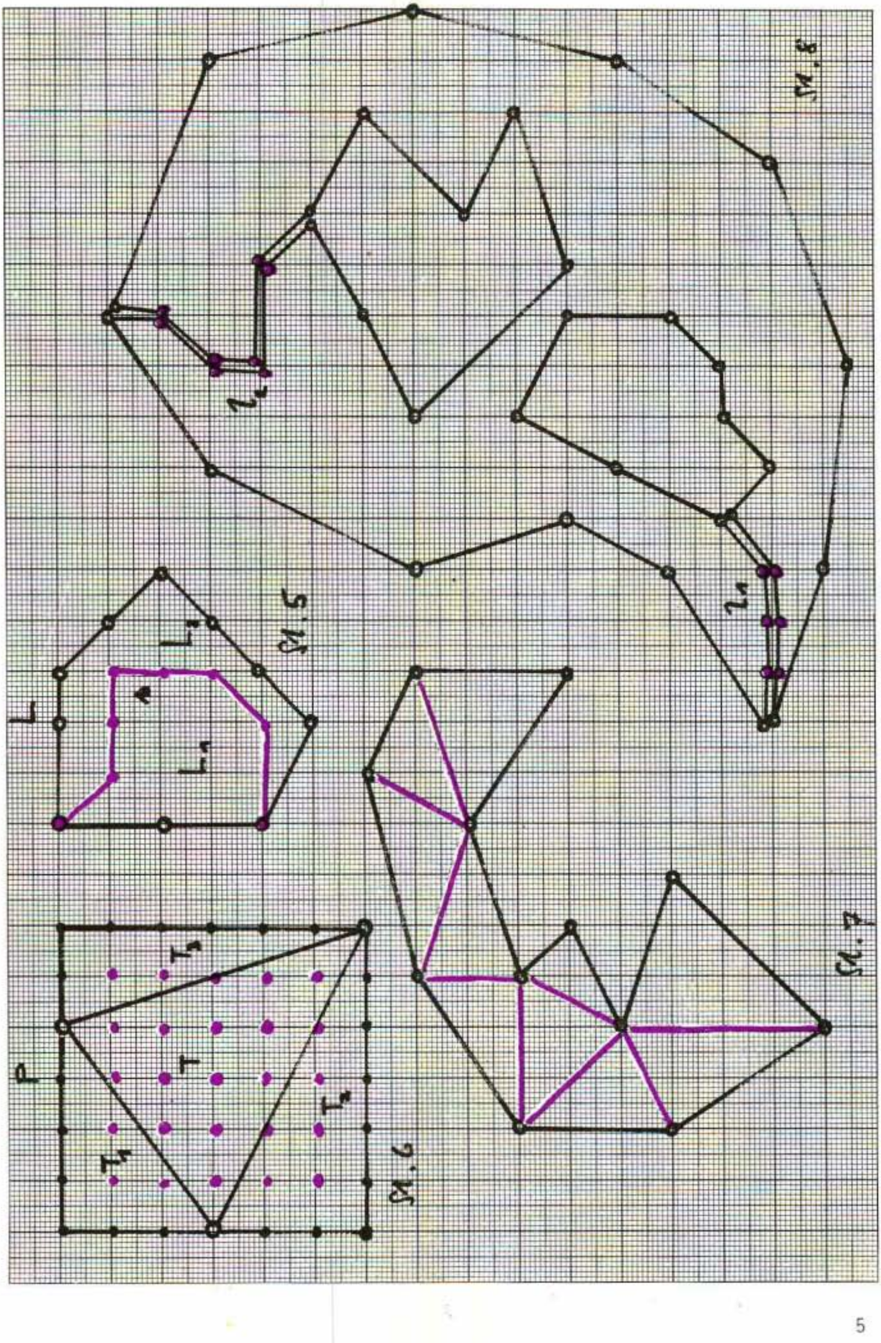
Sklepamo: če je mrežni večkotnik k-povezan, je potrebnih k-1 rezov, tako da dobimo 1- povezan večkotnik!

Zdaj se zanimamo za ploščino mrežnih večkotnikov.

Najprej glejmo 1-povezane večkotnike. če teče rob lika le po stranicah kvadratne mreže, je določitev ploščine lahka: s štetjem določimo število kvadratov, ki jih večkotnik vsebuje.

Zanimivo pa je, da lahko ploščino p določimo tudi drugače:


Sl. 1
Sl. 2
Sl. 3
Sl. 4
L
L'
a
b


Сл. 5
Сл. 6
Сл. 7
Сл. 8
L
L_1
L_2
P
T
T_1
T_2
T_3

Označimo z r število mrežnih vozlišč, ki leže na robu lika in z n število vozlišč znotraj lika. V sliki 3 lahko preverimo tole zvezo:

(1) $$p = n + \frac{1}{2}r - 1$$

Poglejmo utemeljitev, ki pokaže, da velja ta zakonitost za vsak 1-povezan mrežni večkotnik!

Najprej izberimo mrežni pravokotnik s stranicama a in b, slika 4. Seveda vemo, da je $p = ab$. Vidimo pa tudi, da velja

$$n = (a-1)(b-1) = ab-(a+b)+1 \qquad r = 2(a-1)+2(b-1)+4=2(a+b)$$

in je potem zares

$$n + \frac{1}{2}r - 1 = ab = p$$

Pa razdelimo pravokotnik z diagonalo v dva mrežna pravokotna trikotnika. Diagonalo pravokotnika razdele mrežne točke na d delov; število d je največji skupni delitelj števil a in b (v sliki 4 je $d = 4$). Zato imamo za števili n in r trikotnika tole

$$n = \frac{1}{2}(a-1)(b-1) - (d-1) \qquad r = a + b + d$$

in prav lahko preverimo, da za ploščino p trikotnika velja (1):

$$p = n + \frac{1}{2}r - 1 = \frac{1}{2}ab$$

Zdaj bomo izpeljali tole dejstvo: če sestoji mrežni večkotnik L iz dveh mrežnih večkotnikov L_1 in L_2, ki nimata skupne notranje točke, velja med ploščinami zveza (2), če le velja za ploščino zakonitost (1). (Privzeli smo seveda, da so L_1, L_2, L vsi 1-povezani liki.)

(2) $$p = p_1 + p_2$$

To izvedemo takole: Denimo, da imata L_1 in L_2 del roba skupen, ta skupni del roba naj vsebuje s vozlišč mreže. Vidno je - slika 5, da je s-2 točk iz tega dela skupnega roba potem notranjih glede na večkotnik L. Zdaj sklepamo, da velja za ustrezna števila vozlišč

$$r = r_1 + r_2 - 2s + 2 \qquad n = n_1 + n_2 + s - 2$$

in dobimo

$$p = n + \frac{1}{2}r - 1 = n_1+n_2+s-2 + \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - s + 1 - 1 =$$
$$= (n_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1) + (n_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1) = p_1 + p_2$$

Malo splošnejše lahko trdimo: če velja za ploščino 1-povezanih mrežnih večkotnikov (1) in če je večkotnik L unija končno mnogih mrežnih večkotnikov L_1, L_2, ... , L_n, ki paroma nimajo skupnih notranjih točk, velja

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Naj bo zdaj T poljuben mrežni trikotnik (slika 6). Pokažimo, da velja za ploščino p obrazec (1). Najprej ogradimo trikotnik T s čim manjšim pravokotnikom P (prim. sliko 6). Potem razdelimo P v unijo štirih trikotnikov T_1, T_2, T_3 in T (s tujimi si notranjostmi). Za ploščino trikotnikov T_1, T_2, T_3 že vemo, da velja (1). Označimo potem števila notranjih in robnih točk teh likov z znaki n', r', n_1, r_1, n_2, r_2, n_3, r_3, n, r. Nadalje označimo z d_1, d_2 in d_3 števila vozlišč, ki leže znotraj stranic trikotnika T. Torej velja $r - 3 = d_1+d_2+d_3$. Potem lahko zapišemo

$$p(P) = p(T_1) + p(T_2) + p(T_3) + p(T)$$

in velja zato zveza

$$\begin{aligned} p(T) &= p(P) - p(T_1) - p(T_2) - p(T_3) = \\ &= (n' + \tfrac{1}{2}r' - 1) - (n_1+n_2+n_3+\tfrac{1}{2}(r_1+r_2+r_3) - 3) = \\ &= (n' - (n_1+n_2+n_3)) + \tfrac{1}{2}(r' - (r_1+r_2+r_3)) + 2 \end{aligned}$$

če pogledamo sliko 6, vidimo brž, da je izraz $n' - (n_1+n_2+n_3)$ enak vrednosti $n + (r-3)$, izraz $r' - (r_1+r_2+r_3)$ pa je enak ravno številu $(-r)$. Tako imamo

$$p(T) = n + \tfrac{1}{2}r - 1$$

in trditev je dokazana.

Končno, če je L poljuben 1-povezan mrežni večkotnik, ga lahko razcepimo na trikotnike (to kaže slika 7); na podlagi prejšnjih odstavkov velja tudi za njegovo ploščino zakonitost (1).

Kako določimo ploščino k-povezanega mrežnega večkotnika L s štetjem vozlišč, če je $k \geq 1$?

S k-1 rezi ga spremenimo v 1-povezan večkotnik L', označimo lomnice teh rezov z l_1, l_2, ... , l_{k-1}. Pa naj ima lomnica l_1 denimo s_1 vozlišč, ki ne leže na robu večkotnika, ... Ploščina večkotnika L se seveda zaradi teh rezov po vrednosti ni nič spremenila. Ker za L in L' veljata zvezi

$$n' = n - (s_1+s_2+\dots+s_{k-1}), \qquad r' = r + 2(s_1+s_2+\dots+s_{k-1})+2(k-1)$$

dobimo

(2') $$p' = p = n' + \frac{1}{2}r' - 1 = n + \frac{1}{2}r + (k-2)$$

Vidimo, da je (1) posebni primer za (2'), namreč $k = 1$.

Za vajo določi ploščine večkotnikom v slikah 1, 2, 5, 7 in 8, lahko pa tudi v drugih primerih.

Vir:

Hadwiger, H., Wills, J.M., Konveksna telesa in mrežne točke v evklidskem prostoru, Geometriae Dedicata 2 (1973) 2, str. 255-260.

Ivan Pucelj