

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **20** (1992/1993)

Številka 3

Strani 146-150

Boris Lavrič:

PARALELOGRAMSKO PRAVILO

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/20/1137-Lavric.pdf>

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PARALELOGRAMSKO PRAVILO

Načrtajmo paralelogram $ABCD$ z diagonalama AC , BD in iz oglišč C , D spustimo višini CM , DN na nosilko stranice AB . Pravokotna trikotnika AND in BMD sta skladna, iz slike tedaj preberemo enakosti

$$g = |AN| = |BM|,$$

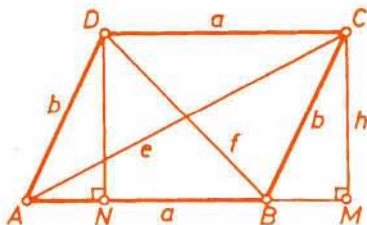
$$h = |DN| = |CM|.$$

$$a = |AB| = |CD|,$$

$$b = |BC| = |AD|.$$

Zaznamujmo še

$$e = |AC|, f = |BD|.$$



Pitagorov izrek za trikotnika AMC in BND nam da enakosti

$$e^2 = |AM|^2 + h^2, f^2 = |BN|^2 + h^2.$$

Seštejmo ju, upoštevajmo, da je ena od daljic AM in BN dolga $a + g$, druga pa $|a - g|$, in dobimo

$$e^2 + f^2 = (a + g)^2 + (a - g)^2 + 2h^2 = 2(a^2 + g^2 + h^2).$$

Od tod zaradi enakosti $g^2 + h^2 = b^2$ za pravokotni trikotnik AND takoj sledi

paralelogramsko pravilo

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Kratko in elegantno lahko to pravilo dokažemo s pomočjo vektorjev, kar pa prepustimo tistim, ki te vsaj nekoliko poznajo.

Oglejmo si zdaj splošnejši primer. Vzemimo štiri točke A , B , C in D v prostoru. Dolžine stranic AB , BC , CD in DA štirikotnika $ABCD$ zaznamujmo zaporedoma z a , b , c , d , dolžini diagonal AC , BD pa z e in f .

Dokažimo, da velja neenakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2, \quad (1)$$

in razmislimo, za katere štirikotnike $ABCD$ se (1) prelevi v enakost.

Nad stranicama AB in BC zgradimo paralelogram $ABCD_1$, nad stranicama CD in DA pa paralelogram AB_1CD . Iz zvez

$$AB_1 \parallel CD, |AB_1| = |CD| = c,$$

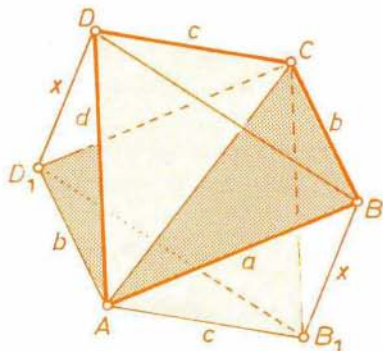
$$AD_1 \parallel BC, |AD_1| = |BC| = b$$

in

$$AD \parallel B_1C, BC \parallel AD_1$$

sledi

$$B_1D_1 \parallel BD, BB_1 \parallel DD_1$$



(Oglej si vzporedni premik BB_1 .), zato je tudi BDD_1B_1 paralelogram. Označimo

$$x = |BB_1| = |DD_1|,$$

zapišimo paralelogramsko pravilo za našete paralelograme

$$e^2 + |B_1D|^2 = 2(c^2 + d^2)$$

$$e^2 + |BD_1|^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$|B_1D|^2 + |BD_1|^2 = 2(x^2 + f^2)$$

in od vsote prvih dveh enakosti odštejmo tretjo. Po preureditvi dobimo zvezo

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2),$$

ki dokazuje neenakost (1).

Enačaj nastopi v (1) seveda le tedaj, ko je $x = 0$, torej ko B sovпада z B_1 in D z D_1 . To se zgodi natanko takrat, kadar $ABCD$ sovпада z AB_1CD in je potemtakem paralelogram z diagonalama AC in BD . Od tod sledi naslednji rezultat.

IZREK 1. V štirikotniku $ABCD$ velja neenakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2.$$

Enačaj je dosežen tedaj in le tedaj, kadar je $ABCD$ paralelogram z diagonalama AC in BD .

Prostorska posplošitev paralelograma je paralelepiped. To telo omejujejo trije pari skladnih vzporednih paralelogramov, ki se stikajo v dvanajstih robovih in osmih ogliščih. Paralelepiped ima štiri telesne diagonale. Je morda vsota kvadratov njihovih dolžin enaka vsoti kvadratov dolžin vseh njegovih robov?

Odgovorimo na to vprašanje v splošnejšem okviru. Vzemimo osem točk v prostoru, razvrstimo jih v zaporedje in označimo z

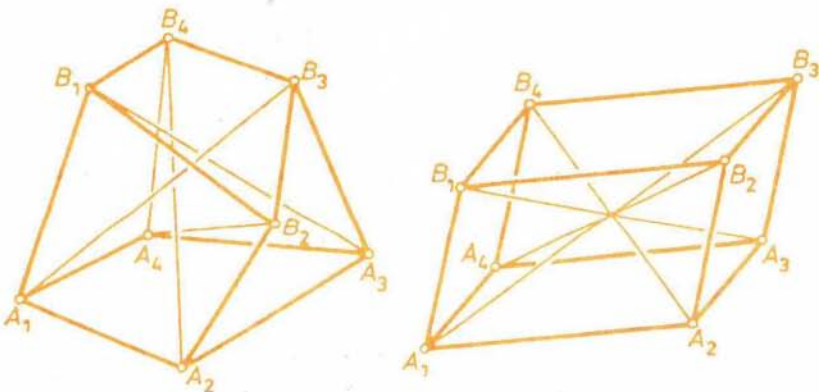
$$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4.$$

Nekatere daljice, ki vežejo pare teh točk, imenujmo "robovi", nekatere pa "telesne diagonale". Dolžine "robov" zaznamujmo z

$$|A_1A_2| = a_1, |A_2A_3| = a_2, |A_3A_4| = a_3, |A_4A_1| = a_4,$$

$$|B_1B_2| = b_1, |B_2B_3| = b_2, |B_3B_4| = b_3, |B_4B_1| = b_4,$$

$$|A_1B_1| = c_1, |A_2B_2| = c_2, |A_3B_3| = c_3, |A_4B_4| = c_4,$$



"telesne diagonale" pa naj merijo

$$|A_1B_3| = d_1, |A_2B_4| = d_2, |A_3B_1| = d_3, |A_4B_2| = d_4.$$

Dokažimo, da velja

IZREK 2. Točke $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ v prostoru izpolnjujejo neenakost

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \geq d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Enačaj je dosežen natanko takrat, kadar je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 .

Dokaz. Seštejmo neenakosti, ki jim po izreku 1 ustrezajo štirikotniki

$$A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, A_1A_3B_3B_1, A_4A_2B_2B_4. \quad (2)$$

Brž ko dobljeno neenakost poenostavimo, najdemo oceno iz izreka 2. Če je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 , so vsi štirje obravnavani štirikotniki paralelogrami, zato tedaj v neenakosti izreka 2 velja enačaj.

Predpostavimo zdaj, da je v tej neenakosti dosežen enačaj. S pomočjo izreka 1 vidimo, da so potem štirikotniki (2) paralelogrami. Ker imata tudi osmerici točk

$$A_1A_2B_2B_1A_4A_3B_3B_4, A_2A_3B_3B_2A_1A_4B_4B_1$$

iste "robove" in "telesne diagonale" kot prvotna osmerica, so tudi

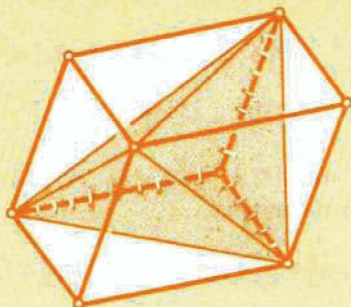
$$A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, A_3A_4B_4B_3, A_4A_1B_1B_4$$

paralelogrami. Od tod sledi, da je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 , dokaz izreka pa je s tem končan.

Sklenimo članek z nalogami.

1. S pomočjo paralelogramskega pravila izrazi dolžine težiščnic trikotnika z dolžinami njegovih stranic.

2. Včrtaj v dani paralelepiped \mathcal{P} tetraeder \mathcal{T} kot kaže slika. Dokaži, da je vsota kvadratov dolžin robov paralelepipeda \mathcal{P} enaka vsoti kvadratov dolžin robov tetraedra \mathcal{T} .



3. Izrazi razdaljo med središčema nasproti ležečih robov tetraedra z dolžinami njegovih robov. Podobno izrazi še dolžine težiščnic tetraedra. Težiščnica tetraedra veže njegovo oglišče s težiščem nasproti ležeče stranice.

Boris Lavrič