PREPOGIBANJE PAPIRJA, PODVOJITEV KOCKE IN SLUSOVA KONHOIDA

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

S prepogibanjem papirja lahko določimo točko, ki razdeli stranico kvadrata v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$. Ta točka je presečišče stranice kvadrata in Slusove konhoide, ki je tudi nožiščna krivulja parabole.

PAPER FOLDING, DUPLICATION OF CUBE AND CONCHOID OF DE SLUZE

By paper folding we can determine a point that divides the side of a square in ratio $1 : \sqrt[3]{2}$. This point is the intersection of this side and a conchoid of de Sluze which is also the pedal curve of a parabola.

Uvod

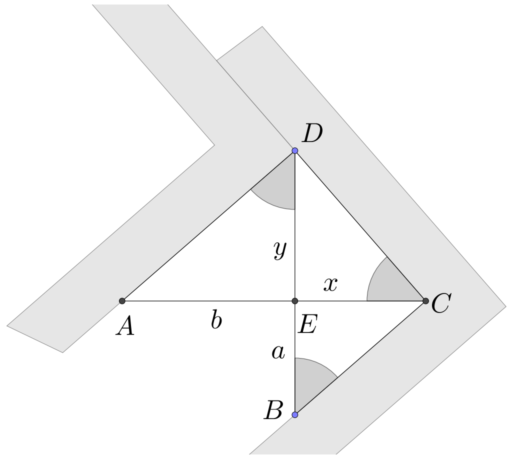
Podvojitev kocke, tretjinjenje kota in kvadratura kroga so trije klasični grški geometrijski problemi, ki se jih ne da rešiti samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, kar so dokazali šele v 19. stoletju. Prvi problem zahteva določiti rob kocke, ki ima prostornino enako dvakratniku prostornine dane kocke. To pomeni, da je treba za dano daljico a konstruirati tako daljico b, za katero je $b = a\sqrt[3]{2}$. Pri drugem problemu je treba dani kot razdeliti na tri enake dele, pri tretjem pa pretvoriti krog v ploščinsko enak kvadrat.

Grki so znali rešiti te tri probleme na poseben način. Problem podvojitve kocke so rešili z Dioklovo cisoido in z uporabo stožnic, kvadraturo kroga z Arhimedovo spiralo ali pa s Hipijevo kvadratriso in tretjinjenje kota z Nikomedovo konhoido. Za risanje nekaterih od teh krivulj so imeli Grki izdelana tudi posebna mehanska orodja.

Poglejmo, kako lahko rešimo problem podvojitve kocke oziroma kako konstruiramo $a\sqrt[3]{2}$ z uporabo dveh kotnikov, kot kaže slika 1. Ustrezno stranico za podvojitev kocke dobimo z višinskim izrekom za pravokotni trikotnik BCD in z razmerjem stranic podobnih trikotnikov AED in CEB:

$$x^2 = ay, \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{b}, \quad ab = xy, \quad x^3 = a^2 b.$$

Če je $b = 2a$, potem je $x = a\sqrt[3]{2}$. To konstrukcijo imenujejo tudi Platonova podvojitev kocke (povzeto po [1]).



Slika 1. Podvojitev kocke z dvema kotnikoma. Če je $b = 2a$, je $x^3 = 2a^3$, torej $x = a\sqrt[3]{2}$.

S prepogibanjem papirja do $\sqrt[3]{2}$

Problem podvojitve kocke pa lahko rešimo tudi s prepogibanjem papirja. Poglejmo, kako to naredimo (več o tem v [2]).

Najprej vzamemo kvadratni list papirja in ga razdelimo na tri skladne dele tako, kot kaže slika 2. Kvadrat najprej prepognemo po navpični simetrali NO, razgrnemo in prepognemo po diagonali DB ter razgrnemo. Nato prepognemo po diagonali NC pravokotnika $NBCO$. Presečišče diagonal NC in DB je točka P.

Naredimo prepogib skozi točko P tako, da točki C in B drsita po vodoravnih stranicah kvadrata. Dobimo pregib GH. Pravokotnik $AGHD$ razpolovimo po njegovi navpični simetrali in dobimo pregib EF. Kvadrat smo s tem razdelili na tri skladne pravokotnike: $AEFD$, $EGHF$ in $GBCH$. To res velja, ker je razdalja točke P od stranice BC (in tudi od AB) enaka $c = a/3$. Da to dokažemo, vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v oglišču A, abscisno osjo v smeri stranice AB in ordinatno osjo v smeri stranice AD. Iz slike 2 razberemo enačbi premic skozi D in B ter skozi N in C:

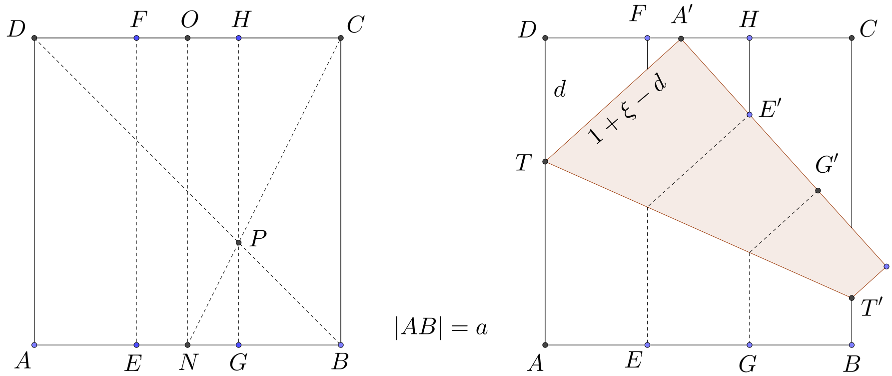
$$x + y = a, \quad y = 2x - a.$$

Njuno presečišče je točka $P(2c, c)$.

Zdaj pa prepognemo kvadrat tako, da pade oglišče A na stranico DC in točka E na daljico GH. Prepogib poteka po daljici TT'. Sliki točk A in

E pri zrcaljenju čez daljico TT' ustrezno imenujemo A' in E'. Trdimo, da tedaj velja $|DA'| : |A'C| = 1 : \sqrt[3]{2}$.

Dokaz ni težak. Da bo hitrejši, vzemimo $|DA'| = 1$, $|TD| = d$ in $|A'C| = \xi$. S tem je stranica kvadrata $a = 1 + \xi$ in $|A'H| = |DC| - |DA'| - |HC| = (2\xi - 1)/3$. Potem veljajo relacije:



Slika 2. Kvadratni list papirja razdelimo na tri skladne dele, potem pa list prepognemo tako, kot kaže desna slika. Velja relacija $|A'C| : |DA'| = \sqrt[3]{2}$.

$$|DA'| = 1, \quad |A'C| = \xi, \quad |A'T| = |AT| = 1 + \xi - d, \quad |A'E'| = \frac{1+\xi}{3}.$$

Iz pravokotnega trikotnika $TA'D$ sledi:

$$d^2 + 1 = (1 + \xi - d)^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\xi^2 + 2\xi}{2\xi + 2}.$$

Iz podobnih trikotnikov DTA' in $HA'E'$ pa dobimo:

$$\frac{d}{1 + \xi - d} = \frac{2\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi^2 + 2\xi + 2} = \frac{2\xi - 1}{\xi + 1},$$

$$\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi = 2\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi - 2 \quad \Rightarrow \quad \xi^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt[3]{2}.$$

Torej nam konstrukcija omogoča delitev daljice v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$, pa tudi konstrukcijo daljice dolžine $b = a\sqrt[3]{2}$ za poljubno daljico dolžine a.

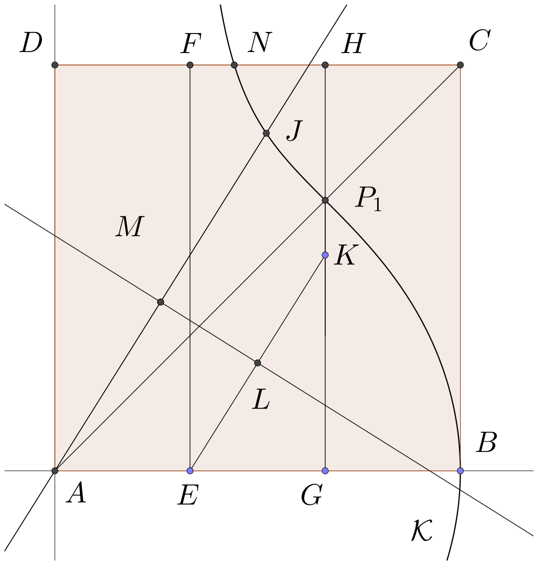
V opisani konstrukciji se število $\sqrt[3]{2}$ pojavi še enkrat. Razmerje med $|GE'| - c$ in c, kjer je $c = a/3$, je

$$\frac{|GE'| - c}{c} = \frac{2\xi^2 + 2}{\xi^2 + 2\xi} = \frac{\xi(2\xi + 2/\xi)}{\xi^2 + 2\xi} = \frac{\xi(2\xi + \xi^2)}{\xi^2 + 2\xi} = \xi.$$

Upoštevali smo zvezo $\xi^3 = 2$ oziroma $2/\xi = \xi^2$. Torej je

$$\frac{|GE'| - c}{c} = \xi = \sqrt[3]{2}.$$

Kako pa tako prepogibanje opišemo analitično? Izračunati moramo koordinati točke A'. Za stranico kvadrata bomo vzeli $a = 3c$, tako da laže kvadrat razdelimo na tri skladne pravokotnike s stranicama a in c (slika 3).



Slika 3. Kvadrat postavimo v prvi kvadrant. Osnovnica kvadrata je $3c$. Ko točka K potuje po premici skozi G in H, točka J opisuje krivuljo $\mathcal{K}$.

Tako kot prej kvadrat $ABCD$ razdelimo z navpičnima daljicama EF in GH na tri skladne dele. Na premici skozi G in H izberemo točko $K(2c, t)$. Središče daljice EK je točka $L(3c/2, t/2)$. Simetrala daljice EK je premica z enačbo

$$y - \frac{t}{2} = -\frac{c}{t}\left(x - \frac{3c}{2}\right). \tag{1}$$

Torej je točka K zrcalna slika točke $E(c, 0)$ prek premice (1). Prek te premice prezrcalimo tudi točko A in njeno sliko imenujmo J. Zrcalni točki K in J ustrezata slikama točk E in A po prepogibanju papirja vzdolž premice (1).

Premica skozi A, na kateri leži točka J, je vzporedna z daljico EK. Torej je njena enačba

$$y = \frac{tx}{c}. \tag{2}$$

Presečišče premic (1) in (2) je točka M. Njeni koordinati sta:

$$x_M = \frac{c(t^2+3c^2)}{2(t^2+c^2)}, \quad y_M = \frac{t(t^2+3c^2)}{2(t^2+c^2)}. \tag{3}$$

Ker je točka M središče daljice AJ, hitro dobimo za točko J koordinati, ki sta dvakratnika koordinat točke M:

$$x_J = \frac{c(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}, \quad y_J = \frac{t(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}. \tag{4}$$

Ko točka K potuje po premici skozi H in G, točka J opisuje krivuljo $\mathcal{K}$, katere parametrični enačbi sta:

$$x = \frac{c(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}, \quad y = \frac{t(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}. \tag{5}$$

Hitro najdemo iz enačb (5) asimptoto krivulje $\mathcal{K}$. To je premica $x = c$. Ko namreč $|t|$ narašča prek vseh meja, raste tudi $|y|$ prek vseh meja, x pa se bliža c. Krivulja $\mathcal{K}$ je simetrična glede na stranico AB.

Iz enačb (5) izločimo parameter t, ki mu dovolimo vse realne vrednosti. Ker je v (5) $x \neq 0$, je iz (2) $t = cy/x$, kar vstavimo v prvo enačbo v (5) in dobimo

$$x = \frac{c(3x^2+y^2)}{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Našli smo krivuljo z implicitno enačbo

$$x(x^2+y^2) - c(3x^2+y^2) = 0, \tag{7}$$

ki spada v družino *Slusovih*[1] *konhoid*[2]. Splošna Slusova konhoida ima enačbo $x(x^2+y^2) - (\alpha x^2 + \beta y^2) = 0$, kjer sta α in β realni konstanti.

Točka $A(0,0)$ je izolirana točka krivulje (7). Če točko A z nje odstranimo, dobimo krivuljo $\mathcal{K}$.

Kje krivulja $\mathcal{K}$ preseka stranico DC kvadrata $ABCD$? Poiščimo njeno presečišče s stranico CD, to je presečišče s premico $y = 3c$. Iz (7) dobimo za $y = 3c$ kubično enačbo

$$x^3 - 3cx^2 + 9c^2x - 9c^3 = 0,$$

[1]René-François Walter de Sluse (1622–1685), tudi Sluze, latinizirano Renatus Franciscus Slusius, je bil valonski matematik in kanonik.

[2]Iz grške besede *kónche*, kar pomeni školjka.

ki ima edino realno rešitev

$$x_1 = |DN| = c(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = c(\xi^2 - \xi + 1).$$

Dobimo jo s Cardanovimi formulami za korene kubične enačbe. Zato velja $|NC| = 3c - |DN|$. Z upoštevanjem zveze $2/\xi = \xi^2$, dobimo

$$|NC| = c(2+\xi-\xi^2) = c\xi(2/\xi+1-\xi) = c\xi(\xi^2+1-\xi) = |DN|\xi = |DN|\sqrt[3]{2}.$$

Torej točka N deli stranico DC v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$, kar smo želeli pokazati. Za $t = 0$ doseže krivulja $\mathcal{K}$ točko B, kjer ima navpično tangento, točko N in njeno zrcalno sliko N' čez stranico AB pa za $t = \pm c(1 + \xi)$. Za $t = \pm c$ ima krivulja $\mathcal{K}$ prevoja v točkah $P_{1,2}(2c, \pm 2c)$, v katerih sta smerna koeficienta tangent enaka ∓ 1. Prevoj P_1 je v presečišču daljice GH, diagonale AC in konhoide.

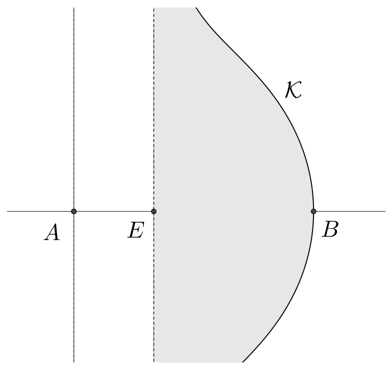
Zapišimo krivuljo $\mathcal{K}$ še v polarni obliki. V ta namen implicitno enačbo (7) preoblikujemo v

$$(x - c)(x^2 + y^2) - 2cx^2 = 0 \tag{8}$$

ter nato z uvedbo polarnih koordinat r in φ v polarno obliko

$$r = c(\sec\varphi + 2\cos\varphi). \tag{9}$$

Pri tem je $\sec\varphi = 1/\cos\varphi$.



Slika 4. Ploščina lika med konhoido in njeno asimptoto je $\pi a^2/3$.

Izračunajmo še ploščino S lika med konhoido (9) in njeno asimptoto $x = c$ (slika 4). Najprej zapišimo

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = c(1 + 2\cos^2\varphi), \\ y &= r\sin\varphi = c(\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi), \\ \mathrm{d}x &= -2c\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Ploščina lika je potem

$$S = 2\int_c^{3c} y\,\mathrm{d}x = -4c^2\int_{\pi/2}^{0}(\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi)\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi c^2 = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Ploščina lika je torej enaka tretjini ploščine kroga s polmerom a.

Povezava med parabolo in krivuljo $\mathcal{K}$

Nožiščna krivulja dane krivulje $\mathcal{L}$ glede na točko P je, po [3], množica pravokotnih projekcij (nožišč) točke P na vse tangente krivulje $\mathcal{L}$. Dokazali bomo, da je nožiščna krivulja parabole $y^2 = -4c(x - 3c)$ glede na oglišče A ravno obravnavana krivulja $\mathcal{K}$. Parabola ima parameter $p = 2c$, gorišče v točki $G(2c, 0)$ in teme v točki $B(3c, 0)$ (slika 5). Najprej v poljubni točki $V(s, 2t)$ parabole konstruiramo tangento. Nato pa spustimo pravokotnico iz točke $A(0, 0)$ na to tangento. Dobimo presečišče $T(x, y)$. Ko točka V potuje po paraboli oziroma ko se parameter t spreminja po realnih vrednostih, točka T opisuje krivuljo $\mathcal{K}$ (slika 5).

Ker je za parabolo $y' = -2c/y$, je smerni koeficient tangente na parabolo v točki V enak $-c/t$. Enačba tangente na parabolo v točki $V(s, 2t)$ je:

$$y - 2t = -\frac{c}{t}\left(x - \frac{3c^2 - t^2}{c}\right). \tag{10}$$

Pravokotnica iz točke $A(0, 0)$ na tangento pa ima enačbo:

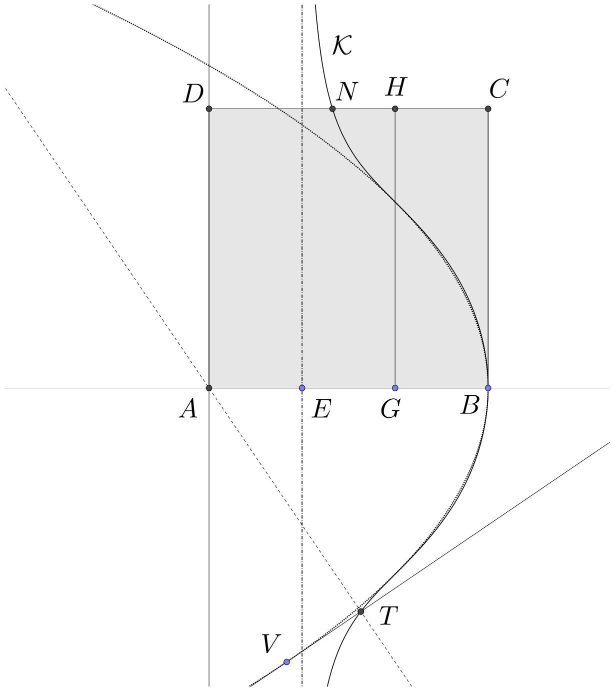
$$y = \frac{tx}{c}. \tag{11}$$

Presečišče premic (10) in (11) je točka T s koordinatama

$$x_T = \frac{c(t^2 + 3c^2)}{t^2 + c^2}, \quad y_T = \frac{t(t^2 + 3c^2)}{t^2 + c^2}. \tag{12}$$

Točka T opisuje krivuljo, ko teče parameter t po realnih vrednostih. Ko primerjamo enačbi (12) z enačbama (5), ugotovimo, da je nožiščna krivulja parabole $y^2 = -4c(x - 3c)$ glede na oglišče A krivulja $\mathcal{K}$.

Parabola in krivulja $\mathcal{K}$ imata tri skupne točke: teme $B(3c, 0)$ ter prevoja $P_1(2c, 2c)$ in $P_2(2c, -2c)$. V teh točkah imata $\mathcal{K}$ in parabola skupne tangente.



Slika 5. Ko točka $V(s, 2t)$ potuje po paraboli, točka T opisuje Slusovo konhoido. Nožiščna krivulja parabole je Slusova konhoida.

Inverzija konhoide glede na krožnico

Krožnica naj ima središče v točki $A(0, 0)$ in polmer $a = 3c$. Enačbo krivulje, ki nastane z inverzijo krivulje $\mathcal{K}$ na tej krožnici, dobimo, če izvedemo substitucijo

$$x \to \frac{9c^2x}{x^2 + y^2}, \quad y \to \frac{9c^2y}{x^2 + y^2}$$

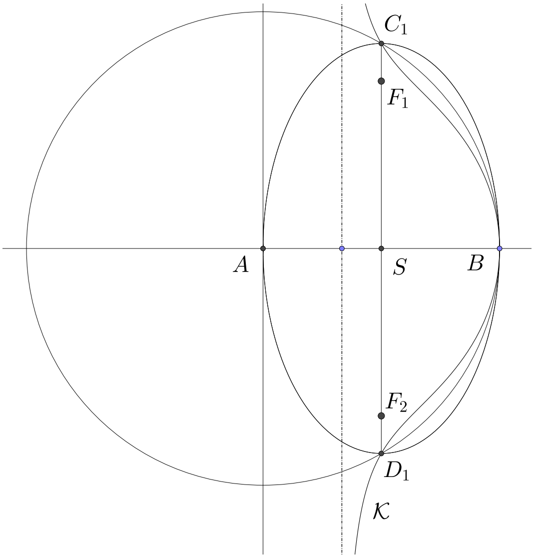
v enačbi (7). Dobimo:

$$3x^2 - 9cx + y^2 = 0. \tag{13}$$

To je enačba elipse, ki je načrtana na sliki 6. Poteka skozi točki A in B. Brez težav poiščemo njeno središče in polosi, če zapišemo enačbo (13) v enakovredni obliki:

$$\left(x - \frac{3c}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{3} = \frac{9c^2}{4}. \tag{14}$$

Središče elipse je točka $S(3c/2, 0)$, polosi pa sta $3c/2$ in $3c\sqrt{3}/2$.



Slika 6. Inverzija Slusove konhoide glede na krožnico je elipsa.

Elipsa, krožnica in konhoida imajo tri skupne točke. To so $C_1(3c/2, 3c\sqrt{3}/2)$, $D_1(3c/2, -3c\sqrt{3}/2)$ in $B(3c, 0)$. Gorišči elipse sta v točkah $F_1(3c/2, 3c\sqrt{2}/2)$ in $F_2(3c/2, -3c\sqrt{2}/2)$.

Slusova konhoida in zlati pravokotnik

Poiščimo presečišče krivulje $\mathcal{K}$ s premico $x = 4c/3$. V kvadratu $ABCD$ dobimo točko $F(4c/3, 4c\sqrt{5}/3)$ (slika 7).

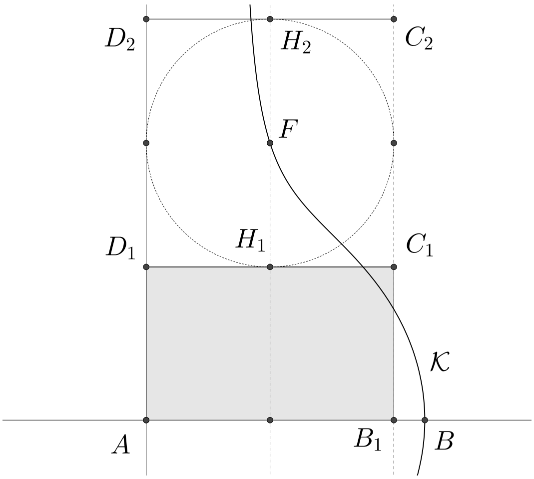
Narišemo krožnico s središčem v F in polmerom $4c/3$. Presečišči krožnice in premice $x = 4c/3$ sta točki $H_1(4c/3, 4c(\sqrt{5}-1)/3)$ in $H_2(4c/3, 4c(\sqrt{5}+1)/3)$. Krožnici očrtamo kvadrat $D_1C_1C_2D_2$, ki ima za eno simetralo premico $x = 4c/3$. Pravokotnik $AB_1C_1D_1$ ima torej stranici

$$|AB_1| = \frac{8c}{3}, \quad |AD_1| = \frac{4c}{3}(\sqrt{5}-1),$$

ki sta v razmerju

$$\frac{|AB_1|}{|AD_1|} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

to se pravi v zlatem razmerju. Zato je štirikotnik $AB_1C_1D_1$ zlati pravokotnik. Prav tako je zlati pravokotnik štirikotnik $AB_1C_2D_2$.



Slika 7. Točka $F(4c/3, 4c\sqrt{5}/3)$ leži na konhoidi. Štirikotnika $AB_1C_1D_1$ in $AB_1C_2D_2$ sta zlata pravokotnika.

Načrtovanje Slusove konhoide po točkah

Za konec si oglejmo, kako pridemo do konhoide z načrtovanjem po točkah. Pri tem nam pomaga polarna oblika (9), če jo zapišemo v obliki

$$r = c \sec \varphi + 2c \cos \varphi .$$

Prvi člen

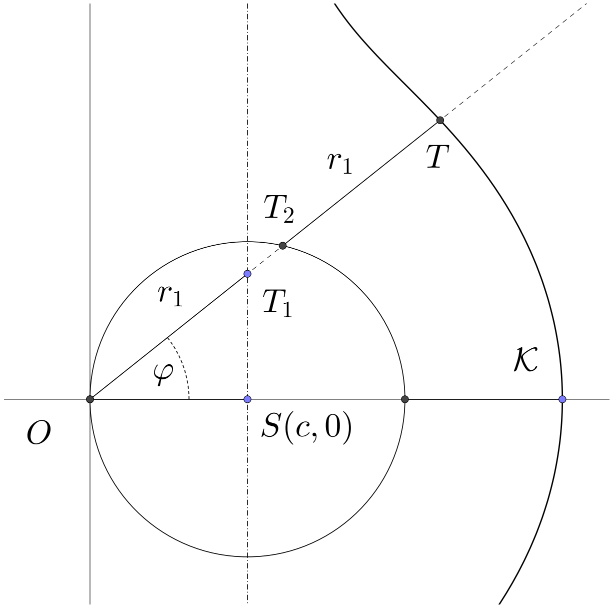
$$r_1 = c \sec \varphi$$

je enačba premice $x = c$ v polarni obliki, drugi člen

$$r_2 = 2c \cos \varphi$$

pa polarna oblika krožnice $(x - c)^2 + y^2 = c^2$. To pomeni, da je Slusova konhoida na neki način vsota premice in krožnice, kar omogoča njeno načrtovanje po točkah.

V ta namen najprej narišemo krožnico s središčem v točki $S(c, 0)$ in polmerom c ter pravokotnico skozi njeno središče na izbrani premer. Iz krajišča premera $O(0, 0)$ narišemo poltrak pod nekim kotom φ glede na premer. Poiščemo presečišči T_1 in T_2 poltraka s pravokotnico skozi središče krožnice in s krožnico. Nato pa daljico $r_2 = |OT_2|$ podaljšamo z daljico $r_1 = |OT_1|$, tako da dobimo daljico $|OT| = r_1 + r_2$ (slika 8). Točka T je na Slusovi konhoidi. Konstrukcijo ponovimo za več kotov φ in dobljene točke s krivuljnikom povežemo v krivuljo.



Slika 8. Risanje Slusove konhoide po točkah.

Za konec

Od prepogibanja papirja smo prišli do krivulje $\mathcal{K}$, ki ima zanimive lastnosti. Z računanjem se nam ni treba posebej ukvarjati, če imamo na voljo katerega izmed programov za dinamično geometrijo in morda še Derive ali Mathematico, ki hitro rešujeta sisteme enačb in poenostavljata marsikateri izračun. Skoraj vse naštete probleme lahko rešijo srednješolci, saj zahtevajo le osnovna znanja iz geometrije in algebre.

LITERATURA

[1] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer, New York in drugje, 1998.

[2] T. Hull, *Project Origami*, Activities for Exploring Mathematics, Second Edition, CRC Press, 2013.

[3] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.