MATRIČNO KONVEKSNE MNOŽICE

IGOR KLEP

Institut Jožef Stefan
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 46L07, 13J30

V prispevku predstavimo matrično konveksne množice, ki so naravna posplošitev konveksnosti za matrične prostore. Ogledali si bomo ustrezno različico matričnega Hahn-Banachovega izreka in njegovo uporabo.

MATRIX CONVEX SETS

In this article we explore a natural extension of the notion of convexity to matrix spaces, the so-called matrix convex sets. We shall give an appropriate analog of the Hahn-Banach theorem and present some of its applications.

Uvod

Podmnožico K evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ imenujemo **konveksna**, če za poljubni točki $x, y \in K$ vsa daljica, ki povezuje x in y, leži v K. Funkcija je konveksna, če je območje nad njenim grafom konveksna množica. Ta preprost koncept izvira iz geometrije in se uporablja kot orodje v mnogih znanostih. Konveksnost je pomembna v ekonomiji in financah (splošna teorija ravnotežja predvideva konveksne preference), statistiki in verjetnosti (glej npr. Jensenovo neenakost) ter v matematični optimizaciji. Slednja vsebuje kot samostojno vejo konveksno optimizacijo, ki je zaradi nedavnih prelomnic (metoda notranjih točk [13] in semidefinitno programiranje oz. linearne matrične neenakosti [16]) aktualna tema v matematiki in računalništvu. Konveksnost naredi optimizacijo zanesljivo, saj je vsak lokalni minimum v tem primeru globalen.

V tem sestavku si bomo ogledali posplošitev pojma konveksnosti v matričnih prostorih. Pojem je vpeljal Wittstock [18], mi pa bomo sledili šoli Effrosa [5].

Matrično konveksne množice

Simetrične in pozitivno semidefinitne matrike

Spomnimo, da je realna $n \times n$ matrika $A = (a_{ij})_{i,j}$ **simetrična**, če je $A = A^t$, kjer smo z A^t označili transponiranko matrike A. Z drugimi besedami, A

je simetrična, če za poljubna $1 \leq i, j \leq n$ velja $a_{ij} = a_{ji}$. Množico vseh simetričnih $n \times n$ matrik bomo označili s $\mathbb{S}_n$.

Lastne vrednosti simetrične matrike so vselej realne. Če so vse lastne vrednosti nenegativne (oz. pozitivne), potem je A **pozitivno semidefinitna** (oz. **definitna**), kar označimo z $A \succeq 0$ (oz. $A \succ 0$). Pozitivno semidefinitnost lahko ekvivalentno vpeljemo na več načinov: simetrična matrika A je pozitivno semidefinitna natanko takrat, ko velja katera koli izmed naslednjih izjav:

(i) $\langle Av, v \rangle = v^t Av \geq 0$ za vse vektorje $v \in \mathbb{R}^n$;

(ii) obstaja realna matrika B, za katero velja $A = B^t B$;

(iii) obstaja simetrična realna matrika C, za katero velja $A = C^2$;

(iv) vsi glavni minorji matrike A so nenegativni.

Povsem analogno lahko karakteriziramo tudi pozitivno definitne matrike.

Množica vseh pozitivno semidefinitnih $n \times n$ matrik tvori konveksen stožec $\mathbb{S}_n^{\succeq 0}$ v $\mathbb{S}_n$. Na sliki 1 je predstavljen rob stožca vseh 2×2 pozitivno semidefinitnih matrik $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$ kot podmnožica $\mathbb{R}^3$.

V nadaljevanju bo ključno vlogo imela **Löwnerjeva delna ureditev** na $\mathbb{S}_n$, ki jo porodi $\mathbb{S}_n^{\succeq 0}$: za $A, B \in \mathbb{S}_n$,

$$A \succeq B \quad \iff \quad A - B \succeq 0.$$

(Kroneckerjev) tenzorski produkt matrik

Pogosto bomo posegali tudi po tenzorskem produktu matrik, zato si na kratko oglejmo njegove lastnosti. Če je $A = (a_{ij})_{i,j}$ matrika velikosti $m \times n$ in B matrika velikosti $p \times q$, potem je

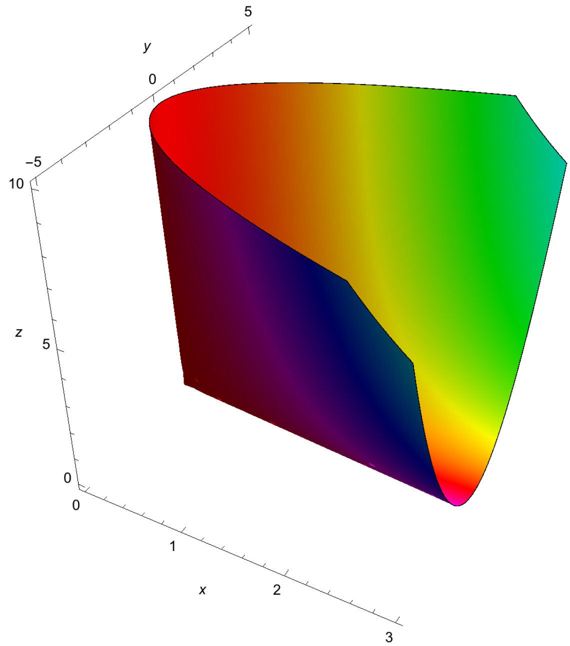
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

matrika velikosti $mp \times nq$. Kroneckerjev produkt je bilinearen, asociativen in skoraj komutativen: obstajata permutacijski matriki P, Q, za kateri velja

$$B \otimes A = P(A \otimes B)Q.$$

Če sta A, B kvadratni, smemo vzeti $Q = P^t$. V tem primeru sta torej $A \otimes B$ in $B \otimes A$ ortogonalno ekvivalentni. Velja tudi

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$



Slika 1

kadar sta produkta AC in BD definirana. Operatorska norma[1] tenzorskega produkta je produkt norm, transponiranka tenzorskega produkta pa je tenzorski produkt transponirank.

Matrično konveksne množice

Fiksirajmo naravno število g. Naš univerzum bodo g-terice realnih simetričnih matrik vseh velikosti nad realnimi števili,

$$\mathbb{S}^g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^g_n.$$

Na $\mathbb{S}^g$ vpeljemo operacijo **direktne vsote**: za $A \in \mathbb{S}^g_n$ in $B \in \mathbb{S}^g_m$ postavimo

$$A \oplus B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{S}^g_{n+m}.$$

[1] **Operatorska norma** $n \times m$ matrike W je definirana kot $\|W\| := \max\{\|Wx\| \mid x \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| = 1\}$. Operatorska norma je submultiplikativna: $\|VW\| \le \|V\| \cdot \|W\|$, kadar je produkt VW definiran.

Tako si lahko $\mathbb{S}^g$ mislimo kot neskončno disjunktno unijo ali pa kot stopničasto množico. *Podmnožica* $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ je zaporedje

$$\mathcal{K} = \big(\mathcal{K}(n)\big)_n,$$

kjer je $\mathcal{K}(n) \subseteq \mathbb{S}^g_n$.

Definicija 1. Podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ imenujemo **matrično konveksna**, če zadošča naslednjim pogojem:

(0) $0 \in \mathcal{K}$ (vsebovanost izhodišča);

(1) $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$: za vse $A, B \in \mathcal{K}$ velja $A \oplus B \in \mathcal{K}$ (zaprtost za direktne vsote);

(2) (zaprtost za $*$-konjugiranje s skrčitvami) za vse $n, m \in \mathbb{N}$, vsako skrčitev[2] $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in vsak $A = (A_1, \dots, A_g) \in \mathcal{K}(n)$ velja

$$V^t A V := (V^t A_1 V, \dots, V^t A_g V) \in \mathcal{K}(m).$$

Omenimo, da je predpostavka (0) nebistvena, a jo tukaj privzamemo, da se izognemo nekaterim tehničnim zapletom. Če (0) izpustimo, lahko v (2) predpostavimo le zaprtje za $*$-konjugiranje z izometrijami V.

Opomba 2. Podmnožici $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$, ki zadošča aksiomu (1) in aksiomu (2) za *ortogonalne matrike* V, pravimo prosta množica. Proste množice so domene in kodomene prostih preslikav, s katerimi se ukvarja prosta analiza [17, 10].

Zgled 3. Preden se lotimo študija matrično konveksnih množic, si poglejmo nekaj zgledov.
(a) Fiksirajmo g-terico simetričnih matrik $\Omega \in \mathbb{S}^g_n$. Potem je

$$\mathcal{K} := \{V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \mid \mu \in \mathbb{N},\ V \in \mathbb{R}^{n\mu \times m} \text{ je skrčitev, } m \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

matrično konveksna množica. Tukaj z $\otimes$ označujemo Kroneckerjev tenzorski produkt matrik. Če zapišemo

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_\mu \end{pmatrix},$$

[2]Matriki V rečemo **skrčitev**, če je njena operatorska norma ≤ 1. Ekvivalentno: matrika $I - V^t V$ je pozitivno semidefinitna, $I - V^t V \succeq 0$. Simetrična matrika S je skrčitev natanko takrat, ko je $-I \preceq S \preceq I$.

kjer $V_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, potem je

$$V^t(I_\mu \otimes \Omega)V = \sum_{j=1}^{\mu} V_j^t \Omega V_j,$$

$V^tV \preceq I$ pa se prepiše v $\sum_j V_j^t V_j \preceq I$.

Očitno je $0 \in \mathcal{K}$, saj lahko v (1) postavimo $V = 0$. Pokažimo sedaj, da je $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Vzemimo $V^t(I_\mu \otimes \Omega)V$, $W^t(I_\nu \otimes \Omega)W \in \mathcal{K}$. Tedaj je

$$V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \oplus W^t(I_\nu \otimes \Omega)W = (W \oplus V)^t(I_{\mu+\nu} \otimes \Omega)(W \oplus V) \in \mathcal{K}.$$

Zaprtost $\mathcal{K}$ za $*$-konjugiranje s skrčitvami je še preprostejša. Za $V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \in \mathcal{K}(n)$ in skrčitev $W \in M_n(\mathbb{R})$ velja

$$W^tV^t(I_\mu \otimes \Omega)VW = (VW)^t(I_\mu \otimes \Omega)(VW),$$

hkrati pa je

$$\|VW\| \leq \|V\| \cdot \|W\| \leq 1$$

zaradi submultiplikativnosti operatorske norme.

Množica $\mathcal{K}$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje Ω. Pravimo ji **matrično konveksna ogrinjača** množice $\{\Omega\}$ in jo označimo s

$$\mathcal{K} = \text{mat-konv}\{\Omega\}.$$

(b) Vzemimo sedaj $\Omega_1, \ldots, \Omega_r \in \mathbb{S}^g$. Tedaj je najmanjša matrično konveksna množica $\mathcal{K}$, ki vsebuje vse Ω_j, enaka mat-konv$\{\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r\}$.

Očitno je $\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r \in \mathcal{K}$, saj je $\mathcal{K}$ zaprta za direktne vsote. Hkrati pa vsaka matrično konveksna množica, ki vsebuje $\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r$, vsebuje tudi vsak Ω_j, saj velja npr.

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \Omega_1 & & & \\ & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

S tem smo pokazali, da so vse matrično konveksne množice, ki so napete s končno mnogo tericami matrik, vselej napete kar s singletonom.

(c) Naj bo $\varepsilon > 0$. Definirajmo **prosto ε-kroglo** s središčem v izhodišču 0:

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \|X\| \leq \varepsilon\} = \Big\{X \in \mathbb{S}^g \mid \varepsilon^2 I \succeq \sum_j X_j^2\Big\}.$$

Preprosto je preveriti, da je $\mathcal{N}_\varepsilon$ matrično konveksna množica.

(d) Vzemimo $A = (A_1, \ldots, A_g) \in \mathbb{S}_d^g$ in tvorimo enični **matrični šop** velikosti d:

$$\Lambda(x) := I_d + x_1 A_1 + \cdots + x_g A_g. \tag{2}$$

Matrični šop lahko seveda vrednotimo v $\mathbb{R}^g$: za $x \in \mathbb{R}^g$ je $\Lambda(x)$ identiteta plus ustrezna linearna kombinacija matrik A_j. Veliko bolj zanimivo pa je vrednotenje v $\mathbb{S}_n$ za $n \geq 2$. Če so $X_1, \ldots, X_g \in \mathbb{S}_n$, potem definiramo

$$\Lambda(X) = I_n \otimes I_d + X_1 \otimes A_1 + \cdots + X_g \otimes A_g \in \mathbb{S}_{dn}.$$

Sedaj tvorimo **linearno matrično neenakost** $\Lambda(x) \succeq 0$ in njeno množico rešitev, t. i. **(prost) spektraeder**

$$\mathcal{D}_\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \Lambda(X) \succeq 0\}.$$

Vse skalarne točke $\mathcal{D}_\Lambda(1) = \mathcal{D}_\Lambda \cap \mathbb{R}^g$ tvorijo konveksno podmnožico $\mathbb{R}^g$.

Množica $\mathcal{D}_\Lambda$ je matrično konveksna. Res, $\Lambda(0) = I \succeq 0$, torej je $0 \in \mathcal{D}_\Lambda(1)$. Zaprtost $\mathcal{D}_\Lambda$ za direktne vsote sledi iz

$$\Lambda(X \oplus Y) = \Lambda(X) \oplus \Lambda(Y),$$

zaprtost za $*$-konjugiranje s skrčitvami pa iz

$$\begin{aligned}
\Lambda(V^t X V) &= I \otimes I + \sum_j (V^t X_j V) \otimes A_j \\
&= (V \otimes I)^t \Big(I \otimes I + \sum_j X_j \otimes A_j \Big) (V \otimes I) + (I - V^t V) \otimes I \\
&= (V \otimes I)^t \Lambda(X) (V \otimes I) + (I - V^t V) \otimes I \succeq 0.
\end{aligned}$$

Matrični šop (2) po navadi označimo z $\Lambda_A(x)$.

(e) Oglejmo si konkretna primera prostih spektraedrov. Definirajmo

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, x_2) &:= I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\Gamma(x_1, x_2) &:= I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Skalarne točke prostih spektraedrov $\mathcal{D}_\Delta$ in $\mathcal{D}_\Gamma$ je preprosto izračunati npr. s pomočjo minorjev (razdelek (Kroneckerjev) tenzorski produkt matrik). Velja

$$\mathcal{D}_\Delta(1) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1^2 + X_2^2 \le 1\},$$
$$\mathcal{D}_\Gamma(1) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1^2 + X_2^2 \le 1\}.$$

Množici $\mathcal{D}_\Delta(1)$ in $\mathcal{D}_\Gamma(1)$ sovpadata. Po drugi strani pa je preprosto videti

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{D}_\Delta \setminus \mathcal{D}_\Gamma,$$

zato iz $\Delta(X_1, X_2) \succeq 0$ ne sledi $\Gamma(X_1, X_2) \succeq 0$. Velja pa obratna implikacija: $\mathcal{D}_\Gamma \subset \mathcal{D}_\Delta$. To bomo podrobneje razložili v razdelku Uporaba Hahn-Banachovega izreka, glej zgled 17.

Ker je

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in je konjugacijska matrika obrnljiva,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

sledi

$$\mathcal{D}_\Delta = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{S}^2 \mid 1 - X_1^2 - X_2^2 \succeq 0\}.$$

(f) Iz matrično konveksnih množic lahko tvorimo nove matrično konveksne množice, npr. s preseki, kartezičnimi produkti, zaprtji. Tukaj vse te konstrukcije izvajamo stopničeno; npr. zaprtje $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ je

$$\overline{\mathcal{K}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{K}(n)},$$

pri čemer $\mathcal{K}(n) \subseteq \mathbb{S}_n^g$ opremimo z inducirano evklidsko topologijo.

Projekcija matrično konveksne množice je ponovno matrično konveksna: če je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^{g+h}$ matrično konveksna, potem je tudi

$$\operatorname{proj}_g \mathcal{K} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \exists Y \in \mathbb{S}_n^h : (X, Y) \in \mathcal{K}\}$$

matrično konveksna.

(g) Podajmo še eno konstrukcijo matrično konveksnih množic. Za podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ označimo s

$$\mathcal{K}^\circ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A \in \mathbb{S}_n^g \mid \forall\, X \in \mathcal{K} :\, \Lambda_A(X) \succeq 0\}$$

njeno **polaro**. Opazimo, da bi lahko v definiciji namesto $\Lambda_A(X) \succeq 0$ zahtevali $\Lambda_X(A) \succeq 0$, saj sta matriki $\Lambda_A(X)$ in $\Lambda_X(A)$ ortogonalno ekvivalentni; prehodna matrika je celo permutacijska in realizira izomorfizem $A \otimes B \mapsto B \otimes A$.[3] Preprosto je videti, da je $\mathcal{K}^\circ$ matrično konveksna množica. Opazimo tudi, da $\circ$ obrača inkluzije: če je $\mathcal{K} \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}$, potem velja $\mathcal{K}^\circ \supseteq \widetilde{\mathcal{K}}^\circ$.

(h) Vrnimo se k prostim kroglam iz (c). Za $\varepsilon > 0$ velja

$$\mathcal{N}_{\frac{1}{g\varepsilon}} \subset \mathcal{N}_\varepsilon^\circ \subset \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{g}}{\varepsilon}}.$$

Pokažimo najprej prvo inkluzijo. Če je $\|A\| \leq \frac{1}{g\varepsilon}$, potem za vsak $X \in \mathcal{N}_\varepsilon$ velja

$$\|A_1 \otimes X_1 + \cdots + A_g \otimes X_g\| \leq g \max_j \|A_j\| \cdot \max_k \|X_k\| \leq 1.$$

Sledi

$$\Lambda_A(X) \succeq 0,$$

zatorej je $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^\circ$.

Za desno inkluzijo vzemimo poljuben $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^\circ$. Potem za vsak X_j norme ε velja

$$1 \geq \|A_j \otimes X_j\| = \|A_j\| \cdot \|X_j\| = \varepsilon \|A_j\|,$$

torej je

$$\Big\| \sum_j A_j^2 \Big\| \leq \frac{g}{\varepsilon^2}.$$

Osnovne lastnosti matrično konveksnih množic

Sedaj smo pripravljeni, da si ogledamo preproste lastnosti matrično konveksnih množic. Najprej razložimo, od kod ime.

Lema 4. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ matrično konveksna. Tedaj je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\mathcal{K}(n) = \mathcal{K} \cap \mathbb{S}_n^g$ konveksna.*

[3] V angleščini tej preslikavi rečemo *canonical shuffle*.

Dokaz. Vzemimo realni števili s, t, za kateri velja $s^2 + t^2 = 1$, in naj bosta $X, Y \in \mathcal{K}(n)$. Definirajmo skrčitev

$$V = \begin{pmatrix} sI_n \\ tI_n \end{pmatrix}$$

in poračunajmo:

$$s^2X + t^2Y = V^t \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} V = V^t(X \oplus Y)V \in \mathcal{K}(n). \qquad \blacksquare$$

Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ prosta množica. Pravimo, da je $\mathcal{K}$ **zaprta za zožitve na invariantne podprostore**, če za vsak $X \in \mathcal{K}(n)$ in vsak podprostor $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije m, ki je invarianten za X, velja

$$X|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{K}(m). \tag{3}$$

Strogo gledano $X|_{\mathcal{H}}$ seveda ni $m \times m$ matrika, temveč le linearna preslikava na m razsežnem podprostoru $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$. V izjavi (3) vsebovanost v $\mathcal{K}(m)$ preverjamo s kakšno od matrik, ki jih tej linearni preslikavi priredimo glede na ortonormirano bazo $\mathcal{H}$. Ali je dobljena matrika element $\mathcal{K}(m)$, je neodvisno od izbire baze, saj je množica $\mathcal{K}$ prosta in zato zaprta za ortogonalno $*$-konjugiranje.

Izrek 5. *Naj bo $0 \in \mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ prosta podmnožica, ki je zaprta za zožitve na invariantne podprostore. Potem je $\mathcal{K}$ matrično konveksna natanko takrat, ko je $\mathcal{K}(n)$ konveksna za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Implikacija ($\Rightarrow$) drži po prejšnji lemi. Poglejmo si še obrat. Vzemimo $X \in \mathcal{K}(n)$, podprostor $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ in naj bo $\mathcal{L}$ ortogonalni komplement $\mathcal{H}$ v $\mathbb{R}^n$. Glede na direktno vsoto $\mathbb{R}^n = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ naj ima X zapis

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}.$$

Če z V označimo izometrijo $\mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$, potem je $V^*XV = A$. Hkrati je

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

element $\mathcal{K}(n)$, saj je $\mathcal{K}(n)$ konveksna in je matrika $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ortogonalna.

Ker je $\mathcal{H}$ invarianten podprostor za $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, dobimo še $A = V^*XV \in \mathcal{K}$.

Od tod sledi, da je $V^*XV \in \mathcal{K}$ za vsako izometrijo V.

Naj bo $W : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$ poljubna skrčitev. Potem je

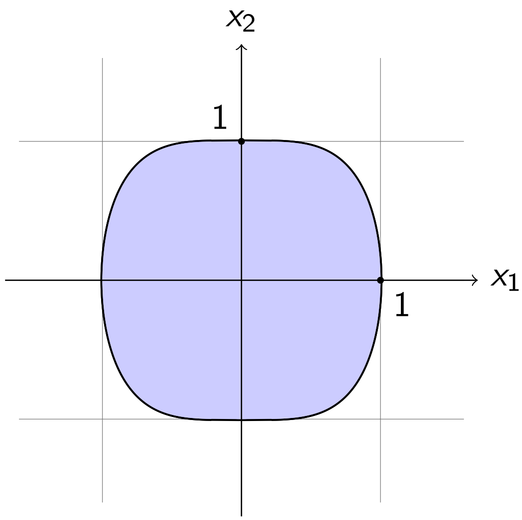
$$V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n \oplus \mathcal{H}, \quad x \mapsto \Big(Wx, \sqrt{I - W^tW}x\Big) = \Big(W, \sqrt{I - W^tW}\Big)\, x$$

izometrija. Ker je $0 \in \mathcal{K}$, za vsak $X \in \mathcal{K}(n)$ velja $X \oplus 0 \in \mathcal{K}$. Sledi

$$W^tXW = V^t \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V \in \mathcal{K}. \qquad \blacksquare$$

Zgled 6. Podajmo še primer nekonveksne proste množice v $\mathbb{S}^2$, katere skalarne točke tvorijo konveksno podmnožico v $\mathbb{R}^2$. (Nekomutativnemu) polinomu $p = 1 - x_1^4 - x_2^2$ priredimo **prosto semialgebraično množico**

$$\mathcal{D}_p := \{(X_1, X_2) \in \mathbb{S}^2 \mid p(X_1, X_2) \succeq 0\}.$$

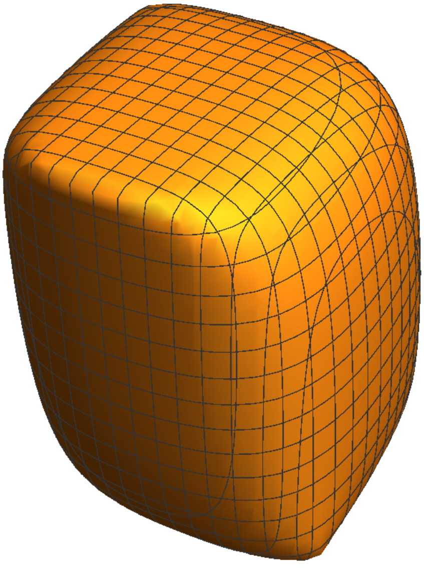


Slika 2. TV zaslon $\mathcal{D}_p(1) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x_1^4 - x_2^2 \geq 0\big\}$.

Čeprav je množica $\mathcal{D}_p(1)$ konveksna, $\mathcal{D}_p$ ni matrično konveksna. Z nekoliko računske spretnosti je možno pokazati, da podmnožica $\mathcal{D}_p(2)$ v 6-razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{S}_2^2$ ni konveksna. Res, za

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

velja $(X_j, Y_j) \in \mathcal{D}_p(2)$ in $\big(\frac{1}{2}(X_1 + X_2), \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\big) \notin \mathcal{D}_p(2)$.



Slika 3. »Tipičen« trirazsežni prerez TV zaslona $\mathcal{D}_p(2)$.

Rečemo, da je 0 **v notranjosti** podmnožice $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, če je $\mathcal{N}_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}$ za kak $\varepsilon > 0$. Množica $\mathcal{K}$ je **omejena**, če obstaja $N \in \mathbb{N}$, za katerega je $\|X\| \leq N$ za vse $X \in \mathcal{K}$. Ekvivalentno: $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}_N$. (Tukaj velja opozoriti, da je ta zahteva močnejša od omejenosti vseh $\mathcal{K}(n)$.)

Lema 7. *Denimo, da je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ matrično konveksna. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) $0 \in \mathbb{R}^g$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(1)$;

(ii) $0 \in \mathbb{S}_n^g$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(n)$ za kak $n \in \mathbb{N}$;

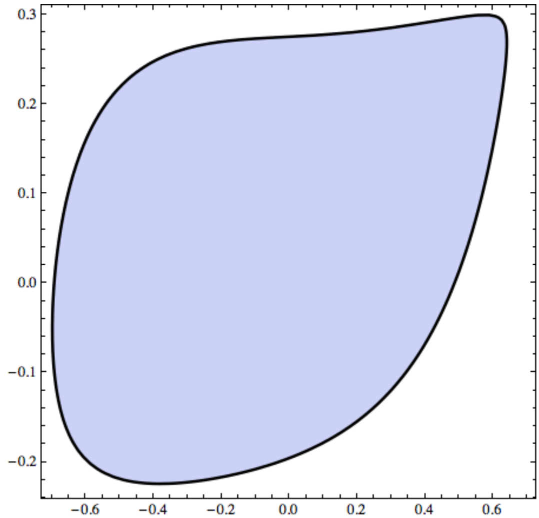
(iii) $0 \in \mathbb{S}_n^g$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(n)$ za vse $n \in \mathbb{N}$;

(iv) 0 je v notranjosti množice $\mathcal{K}$.

Dokaz. Očitno velja (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii). Predpostavimo, da drži (ii). Potem obstaja $\varepsilon > 0$ z $\mathcal{N}_\varepsilon(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$. Ker je

$$\mathcal{N}_\varepsilon(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(n),$$

in je $\mathcal{N}_\varepsilon$ zaprt za $*$-konjugiranje s skrčitvami, je tudi $\mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{K}(1)$, torej velja (i).



Slika 4. Nekonveksen 2-razsežni prerez $\mathcal{D}_p(2)$.

Naj sedaj drži (i), tj. $\mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{K}(1)$ za kak $\varepsilon > 0$. Trdimo, da je $\mathcal{N}_{\varepsilon/g^2} \subseteq \mathcal{K}$. Vzemimo poljuben $X \in \mathcal{N}_{\varepsilon/g^2}$. Očitno je

$$\left[-\frac{\varepsilon}{g}, \frac{\varepsilon}{g}\right]^g \subseteq \mathcal{K}(1).$$

Ker ima vsak X_j normo $\leq \varepsilon/g^2$, imajo v njegovi diagonalizaciji $X_j = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U$ vse λ_j absolutno vrednost $\leq \varepsilon/g^2$. Zato je $(0, \ldots, 0, g\lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{K}(1)$ in nato zaradi zaprtosti za direktne vsote $\Bigg(0, \ldots, 0, g \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\Bigg) \in \mathcal{K}$. Samo še $*$-konjugiramo z U in dobimo

$$(0, \ldots, 0, gX_j, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{K}.$$

Sledi

$$X = \frac{1}{g}\big((gX_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, gX_g)\big) \in \mathcal{K}. \qquad \blacksquare$$

Opomba 8. Pri študiju matrično konveksnih množic se po navadi omejimo na takšne, ki vsebujejo 0 v notranjosti. Če ima $\mathcal{K}(1)$ kakšno notranjo točko, npr. $a \in \mathbb{R}^n$, potem preprosto s translacijo

$$\mathcal{K} - a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X - aI_n \mid X \in \mathcal{K}(n)\}$$

prevedemo na takšen primer. Če $\mathcal{K}(1)$ nima notranje točke, potem pa leži v kakšnem afinem podprostoru $\{\ell = 0\}$ [3, Theorem 2.4]. Kratek račun pokaže, da iz $\ell_{\mathcal{K}(1)} = 0$ sledi $\ell|_{\mathcal{K}} = 0$. Torej lahko iz enačbe $\ell = 0$ izrazimo kakšno od spremenljivk in s tem preidemo na nižje razsežen ambientni prostor. Postopek nadaljujemo, dokler $\mathcal{K}(1)$ nima notranje točke.

Trditev 9. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$.*

(1) *če je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}$, potem je $\mathcal{K}^\circ$ omejena;*

(2) *$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}$; z drugimi besedami, za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{K}(n) \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}(n)$;*

(3) *$\mathcal{K}$ je omejena natanko takrat, ko je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$.*

Dokaz. Če ima $\mathcal{K}$ izhodišče v notranjosti, potem je $\mathcal{N}_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}$ za neki $\varepsilon > 0$. Torej je $\mathcal{K}^\circ \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon^\circ \subset \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{g}}{\varepsilon}}$ omejena. Tukaj smo za zadnjo inkluzijo uporabili zgled 3(h).

Trditev (2) je tavtologija. Res, za $X \in \mathcal{K}(n)$ želimo pokazati $\Lambda_X(A) \succeq 0$, kadarkoli velja $\Lambda_A(Y) \succeq 0$ za vse $Y \in \mathcal{K}$. To pa je preprosta posledica dejstva, da sta matriki $\Lambda_X(A)$ in $\Lambda_A(X)$ ortogonalno ekvivalentni.

Če je $\mathcal{K}$ omejena, potem je 0 očitno v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$. Obratno, če je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$, potem iz (1) sledi, da je $\mathcal{K}^{\circ\circ}$ omejena. Ker nam (2) pove, da velja $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}$, je tudi $\mathcal{K}$ omejena. ■

Lema 10. *Za podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^{g+h}$ si oglejmo njeno sliko $\operatorname{proj} \mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ pri projekciji $\operatorname{proj} : \mathbb{S}^{g+h} \to \mathbb{S}^g$. Terica $A \in \mathbb{S}^g$ je element $(\operatorname{proj} \mathcal{K})^\circ$ tedaj in le tedaj, ko je $(A, 0) \in \mathcal{K}^\circ$.*

Dokaz. $A \in (\operatorname{proj} \mathcal{K})^\circ$ natanko tedaj, ko za vse $X \in \operatorname{proj} \mathcal{K}$ velja $\Lambda_A(X) \succeq 0$. Slednje je ekvivalentno $\Lambda_{(A,0)}(X, Y) \succeq 0$ za vse $X \in \operatorname{proj} \mathcal{K}$ in vse $Y \in \mathbb{S}^h$, kar je ekvivalentno $\Lambda_{(A,0)}(X, Y) \succeq 0$ za vse $(X, Y) \in \mathcal{K}$. To pa se zgodi natanko takrat, ko $(A, 0) \in \mathcal{K}^\circ$. ■

Matrični Hahn-Banachov izrek

V tem razdelku si bomo ogledali eno glavnih orodij pri delu z matrično konveksnimi množicami – analog Hahn-Banachovega izreka. Kot prva sta ga dokazala Effros in Wikler [5], alternativni dokaz pa si bralec lahko ogleda v [9]. Dokaz je razmeroma zapleten in predolg, da bi ga lahko tukaj predstavili. Podrobneje pa si bomo pogledali nekaj posledic in uporab tega izreka.

Izrek 11 (Matrični Hahn-Banachov izrek). *Naj bo $\mathcal{K}$ matrično konveksna množica, katere stopnice $\mathcal{K}(n)$ so zaprte. Če $X' \in \mathbb{S}_n^g$ ne leži v $\mathcal{K}(n)$, potem obstaja eničen matrični šop $\Lambda(x)$ velikosti n, za katerega je $\Lambda(Y) \succeq 0$ za vse $Y \in \mathcal{K}$ in $\Lambda(X') \not\succeq 0$.*

Naslednja posledica pove, v kakšnem smislu lahko izrek 11 razumemo kot matrični analog Hahn-Banachovega izreka. Hkrati nas prepriča, da so prosti spektraedri ustrezni analogi polprostorov iz klasične konveksnosti za univerzum $\mathbb{S}^g$.

Posledica 12. *Naj bo $\mathcal{K}$ zaprta matrično konveksna množica. Potem je $\mathcal{K}$ enaka preseku vseh prostih spektraedrov, ki jo vsebujejo.*

Nadaljnje lastnosti matrično konveksnih množic

Najmanjšo zaprto matrično konveksno množico, ki vsebuje $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, bomo označili z $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$.

Trditev 13. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$.*

(1) *Če za neki $m \in \mathbb{N}$ velja $0 \in \mathcal{K}(m)$, potem je $\mathcal{K}^{\circ\circ} = \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$.*

(2) *Če je $\mathcal{K}$ zaprta matrično konveksna množica, tedaj velja $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\circ\circ}$;*

Dokaz. Začnimo s točko (1). Najprej opazimo, da je $0 \in \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}(m)$, in ker je $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$ matrično konveksna, dobimo $0 \in \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}(1)$. Denimo, da $W \notin \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$. Potem nam izrek (11) da obstoj eničnega matričnega šopa Λ_A (kjer velikost matrik A ni večja od velikosti W), ki loči W od $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$: $\Lambda_A(W) \not\succeq 0$ in $\Lambda_A(X) \succeq 0$ za vse $X \in \text{mat-konv}\,\mathcal{K}$. V posebnem je $A \in \mathcal{K}^\circ$. Ker sta matriki $\Lambda_W(A)$ in $\Lambda_A(W)$ ortogonalno ekvivalentni, sledi $\Lambda_W(A) \not\succeq 0$ in $W \notin \mathcal{K}^{\circ\circ}$. Torej je $\mathcal{K}^{\circ\circ} \subset \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$. Obratna inkluzija sledi iz trditve 9(2). Točka (2) je preprosta posledica točke (1). ∎

Posledica 14. *Če je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, potem je $\mathcal{K}^{\circ\circ} = \overline{\text{mat-konv}}\big(\mathcal{K} \cup \{0\}\big)$.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{K}^\circ = (\mathcal{K} \cup \{0\})^\circ$, sledi

$$\mathcal{K}^{\circ\circ} = (\mathcal{K} \cup \{0\})^{\circ\circ}.$$

Po trditvi 9(1) in (13) sedaj dobimo

$$\overline{\text{mat-konv}}\big(\mathcal{K} \cup \{0\}\big) = (\mathcal{K} \cup \{0\})^{\circ\circ}.$$ ∎

S pomočjo prostih spektraedrov, njihovih polar in projekcij lahko eksplicitno opišemo matrično konveksno ogrinjačo singletona, t. i. matrični ali prosti polieder:

Izrek 15. *Naj bo* $\Omega \in \mathbb{S}_n^g$.

(1) $\text{mat-konv}\{\Omega\} = \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_\Omega}$.

(2) *Zapišimo* $\Omega = \big((\omega_{ij}^\ell)_{i,j=1}^n\big)_{\ell=1,\dots,g} \in \mathbb{S}_n^g$. *Tedaj je* mat-konv$\{\Omega\}$ *enaka*

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big\{ \big(\sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell C_{ij}\big)_{\ell=1,\dots,g} \mid C_{ij} \in M_m(\mathbb{R}), \\ C = (C_{ij})_{i,j=1}^n \succeq 0, \sum_i C_{ii} \preceq I_n \Big\}. \tag{4}$$

Dokaz. Oglejmo si najprej točko (2). Po zgledu 3(a) je $X \in (\text{mat-konv}\{\Omega\})(m)$ natanko takrat, ko velja

$$X = V^t (I_\mu \otimes \Omega) V \tag{5}$$

za neki $\mu \in \mathbb{N}$ in $n\mu \times m$ skrčitev V. Vešči bralec bo na desni strani (5) prepoznal Choi-Krausov zapis povsem pozitivne preslikave. Linearna preslikava τ med končnorazsežnimi podprostori realnih simetričnih matrik je povsem pozitivna natanko tedaj, ko je oblike

$$\tau(x) = \sum_{j=1}^{\mu} V_j^t x V_j = V^t (I_\mu \otimes x) V$$

za matrike (ustrezne velikosti) V_j [14, Proposition 4.7]. Tukaj smo z V označili stolpec $(V_1, \dots, V_\mu)$. V našem primeru velja še $\sum_j V_j^t V_j \preceq I$, saj je V v (5) skrčitev. Tako vidimo, da je g-terica X element $(\text{mat-konv}\{\Omega\})(m)$ takrat in le takrat, ko je za vsak i matrika X_i slika $\tau(\Omega_i)$ povsem pozitivne preslikave $\tau : \text{Lin}\{I, \Omega_1, \dots, \Omega_g\} \to \mathbb{S}_m$, ki pošlje I v skrčitev. Po Arvesonovem razširitvenem izreku [14, Theorem 6.2] lahko τ razširimo do povsem pozitivne preslikave $\hat\tau : M_d(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{R})$. Sedaj pa uporabimo Choijevo matriko [14, Theorem 3.14]. Preslikava $\hat\tau : M_d(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{R})$ je povsem pozitivna natanko takrat, ko je njena Choijeva matrika

$$C := (C_{ij})_{i,j=1}^n \succeq 0,$$

kjer je

$$C_{ij} = \hat\tau(E_{ij}).$$

Ker je

$$\hat{\tau}(\Omega_\ell) = \sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell \hat{\tau}(E_{ij}) = \sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell C_{ij},$$

leži X v množici (4). S tem je točka (2) dokazana. Ugotovimo lahko tudi, da je množica mat-konv$\{\Omega\}$ zaprta, celo kompaktna, saj je slika kompaktne množice po (4).

Posvetimo se sedaj točki (1). Najprej dokažimo inkluzijo ($\subset$). Vzemimo poljuben $A = V^t(I \otimes \Omega)V \in$ mat-konv$\{\Omega\}$. Trdimo, da je $A \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}^\circ$. Za vsak $X \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}$ velja

$$\begin{aligned} \Lambda_A(X) \overset{u}{\cong} \Lambda_X(A) = \Lambda_X\big(V^t(I \otimes \Omega)V\big) &\succeq (V \otimes I)^t \Lambda_X(\Omega)(V \otimes I) \\ = (V \otimes I)^t P^t \Lambda_\Omega(X) P (V \otimes I) &\succeq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

kjer smo z $\overset{u}{\cong}$ označili ortogonalno ekvivalenco, P pa je ortogonalna matrika, za katero velja $P^t \Lambda_\Omega(X) P = \Lambda_X(\Omega)$. Pri tem prva neenakost v (6) sledi z enakim računom kot v zgledu 3(d). Torej je $A \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}^\circ$.

Za obratno inkluzijo bomo uporabili matrični Hahn-Banachov izrek 11. Denimo, da $X \notin$ mat-konv$\{\Omega\}$. Potem obstaja matrični šop Λ_A, za katerega velja

$$\Lambda_A|_{\text{mat-konv}\{\Omega\}} \succeq 0, \quad \Lambda_A(X) \not\succeq 0.$$

Prva neenakost je ekvivalentna $\Lambda_A(\Omega) \succeq 0$ in s tem $\Lambda_\Omega(A) \succeq 0$. V posebnem $A \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}$. Hkrati pa velja

$$\Lambda_X(A) \overset{u}{\cong} \Lambda_A(X) \not\succeq 0,$$

torej $X \notin \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}^\circ$, kar smo želeli dokazati. ■

Razred prostih spektraedrov ni zaprt za polare; je pa polara spektraedra projekcija spektraedra po izreku 15. Izkaže se, da je slednji razred zaprt za polare [8].

Uporaba Hahn-Banachovega izreka

V tem razdelku si oglejmo presenetljivo uporabo izreka 11. Opisali bomo, kdaj za enična matrična šopa Λ_A in Λ_B velja $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Ekvivalentno, $\Lambda_B|_{\mathcal{D}_{\Lambda_A}} \succeq 0$.

Posledica 16 (Linearni Positivstellensatz [7]). *Naj bo $A \in \mathbb{S}_d^g$ in $B \in \mathbb{S}_e^g$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$;

(ii) $B \in \text{mat-konv}\{A\}$, *tj. obstaja* $\mu \in \mathbb{N}$ *in skrčitev* V, *da velja*

$$B = V^t(I_\mu \otimes A)V.$$

Dokaz. Uporabimo izrek 15, ki nam poda naslednjo verigo ekvivalenc:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_A} \supseteq \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_B} \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{mat-konv}\{A\} \supseteq \text{mat-konv}\{B\} \quad \Longleftrightarrow \quad B \in \text{mat-konv}\{A\}. \end{aligned}$$ ■

Omenimo, da v točki (ii) posledice 16 lahko postavimo meje na μ. Brez škode za splošnost lahko namreč zahtevamo $\mu \le de$. Dokaz tega ni prezapleten, a uporabi teorijo povsem pozitivnih preslikav in ga zato izpuščamo. Bralec lahko podrobnosti najde v [7]. Posledica ima vedno preprosto interpretacijo v jeziku povsem pozitivnih preslikav: $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$ natanko takrat, ko obstaja povsem pozitivna preslikava, ki pošlje $A_i \mapsto B_i$ in slika I v skrčitev.

Zgled 17. Vrnimo se k zgledu 3(e). Pokažimo, da velja $\mathcal{D}_\Gamma \subseteq \mathcal{D}_\Delta$. Definirajmo

$$V_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$2\Delta(x_1, x_2) = V_1^t \Gamma(x_1, x_2) V_1 + V_2^t \Gamma(x_1, x_2) V_2,$$

kar s pomočjo posledice 16 da iskani zaključek.

Nadaljnje teme

Prispevek sklenemo s kratko diskusijo oz. kažipotom za nadaljnje teme.

Gleichstellensatz

Naravno vprašanje je, kdaj dva matrična šopa določata enak prost spektraeder, tj. $\mathcal{D}_{\Lambda_A} = \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Najprej opazimo, da je to vprašanje nekako ekvivalentno vprašanju obstoja vložitve med spektraedroma:

$$\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}_{\Lambda_{A \oplus B}} = \mathcal{D}_{\Lambda_A}.$$

Rečemo, da je matrični šop Λ_A **minimalen**, če za vse terice matrik B, ki so manjše velikosti od A, velja $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \neq \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Z nekaj truda je mogoče dokazati, da je dovolj, če minimalnost preverjamo le za »podšope« Λ_A. Tukaj podšop označuje skrčitev matričnega šopa Λ_A na skupen invariantni podprostor za A.

Izrek 18 (Linearni Gleichstellensatz [7]). *Naj bosta $A \in \mathbb{S}_d^g$ in $B \in \mathbb{S}_e^g$. Predpostavimo, da sta matrična šopa Λ_A in Λ_B minimalna. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{D}_{\Lambda_A} = \mathcal{D}_{\Lambda_B}$;

(ii) $d = e$ *in obstaja ortogonalna matrika* $U \in M_d(\mathbb{R})$, *za katero velja*

$$B = U^t A U.$$

Izrek 18 poda geometrijsko karakterizacijo teric matrik glede na ortogonalno konjugiranje. Dokaz tega izreka uporabi Arvesonovo nekomutativno Choquetjevo teorijo [1, 2] in ga bomo izpustili. Bralec ga lahko najde v [7].

Na tem mestu omenimo še algebraično karakterizacijo teric matrik glede na ortogonalno konjugiranje. Procesijev izrek [15] pove, da sta g-terici $A_1, \dots, A_g \in M_d(\mathbb{R})$ in $B_1, \dots, B_g \in M_d(\mathbb{R})$ ortogonalno ekvivalentni natanko takrat, ko velja

$$\operatorname{sled} w(A, A^t) = \operatorname{sled} w(B, B^t)$$

za vse besede w v x, x^t dolžine d^2.

Konveksni Positivstellensatz

Posledica 16 opiše matrične šope Λ_B, ki so pozitivno semidefinitni na spektraedru $\mathcal{D}_{\Lambda_A}$. V tem smislu gre za tipičen izrek iz realne algebraične geometrije [4], ki se ukvarja s polinomskimi neenakosti. Zanimiva je tudi naslednja posplošitev na nekomutativne polinome p, ki so pozitivno semidefinitni na prostem spektraedru $\mathcal{D}_{\Lambda_A}$.

Izrek 19 (Konveksni Positivstellensatz [6]). *Naj bo p nekomutativen matrični polinom in Λ enični matrični šop. Potem je $p|_{\mathcal{D}_\Lambda} \succeq 0$ tedaj in le tedaj, ko je*

$$p = h^t h + \sum f_j^t \Lambda f_j \tag{7}$$

za matrične polinome (ne nujno kvadratne) h, f_j. Če je stopnja p kvečjemu $2r+1$, potem je v (7) stopnja h kvečjemu $r+1$, stopnje f_j pa so vse omejene z r.

Izrek 19 je »perfekten« Positivstellensatz, saj potrebuje le nenegativnost, certifikat (7) ima optimalne meje na stopnje, možno pa je izpeljati tudi meje na velikost matrik, ki jih potrebujemo za $p|_{\mathcal{D}_\Lambda} \succeq 0$. Hkrati lahko izrek razumemo kot nelinearno algebraično posplošitev povsem pozitivnih preslikav. Dokaz [6] tega izreka je povsem drugačen od dokaza posledice 16, ki smo ga predstavili zgoraj. Sloni namreč na separaciji konveksnih množic in Gelfand-Naimark-Segalovi konstrukciji ter reši nekomutativen problem momentov.

C*-konveksnost

Matrični konveksnosti soroden pojem najdemo tudi v kontekstu C*-algeber. Tam govorimo o C*-konveksnih množicah [12, 11].

LITERATURA

[1] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras*, Acta Math. **123** (1969), 141–224.

[2] W. B. Arveson, *The noncommutative Choquet boundary*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 1065–1084.

[3] A. Barvinok, *A course in convexity*, Amer. Math. Soc., 2002.

[4] J. Bochnack, M. Coste in M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**, Springer, 1998.

[5] E. G. Effros in S. Winkler, *Matrix convexity: operator analogues of the bipolar and Hahn-Banach theorems*, J. Funct. Anal. **144** (1997), 117–152.

[6] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The convex Positivstellensatz in a free algebra*, Adv. Math. **231** (2012), 516–534.

[7] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The matricial relaxation of a linear matrix inequality*, Math. Program. **138** (2013), 401–445.

[8] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The Tracial Hahn-Banach Theorem, Polar Duals, Matrix Convex Sets, and Projections of Free Spectrahedra*, sprejeto v objavo v J. Eur. Math. Soc., `http://arxiv.org/abs/1407.8198`, ogled: 1. 8. 2016.

[9] J. W. Helton in S. McCullough, *Every free basic convex semi-algebraic set has an LMI representation*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), 979–1013.

[10] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi in V. Vinnikov, *Foundations of free noncommutative function theory*, Amer. Math. Soc., 2014.

[11] B. Magajna, *On C^*-extreme points*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 771–780.

[12] P. B. Morenz, *The structure of C^*-convex sets*, Canad. J. Math. **46** (1994), 1007–1026.

[13] Y. Nesterov in A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, 1994.

[14] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[15] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Adv. Math. **19** (1976), 306–381.

[16] L. Vandenberghe in S. Boyd, *Semidefinite programming*, SIAM Review **38** (1996), 49–95.

[17] D.-V. Voiculescu, *Free analysis questions II: The Grassmannian completion and the series expansions at the origin*, J. reine angew. Math. **645** (2010), 155–236.

[18] G. Wittstock, *On matrix order and convexity*, North-Holland Mathematics Studies **90** (1984), 175–188.