

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2020, letnik 67, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2020 DMFA Slovenije – 2132

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

O PREUREDITVAH VRST S KOMPLEKSNIMI ČLENI

ALEKSANDER SIMONIČ

School of Science

The University of New South Wales (Canberra)

Math. Subj. Class. (2010): 40A05

Lévy–Steinitzov izrek za pogojno konvergentne vrste s kompleksnimi členi pravi, da je množica vsot, ki jih dobimo po vseh preureditvah, bodisi premica bodisi kompleksna ravnina. V članku predstavimo podroben dokaz tega izreka.

ON REARRANGEMENTS OF INFINITE SERIES WITH COMPLEX TERMS

The Lévy–Steinitz theorem for conditionally convergent series with complex terms says that the set of sums we obtain after all rearrangements is either a line or the complex plane. In the article we present a detailed proof of this theorem.

Uvod

Spomnimo se, da je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ s kompleksnimi členi pogojno konvergentna, če ni absolutno konvergentna, tj. vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergira. Absolutno konvergentne vrste so konvergentne, toda obratno ni vedno res. Priljubljeni primer je *alternirajoča harmonična vrsta*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2. \quad (1)$$

Preureditev členov absolutno konvergentne vrste ne spremeni njene vsote. Formalno definiramo preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kot vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$, kjer je $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektivna preslikava, tj. π je permutacija množice \mathbb{N} . Preureditev pogojno konvergentne vrste pa lahko spremeni njeno vsoto. Ponazorimo to z alternirajočo harmonično vrsto. Vzemimo zaporedoma en pozitivni člen in dva negativna člena:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pri izračunu smo člene razdelili na skupine s tremi členi in potem uporabili enakost (1). Očitno je vsota preurejene vrste različna od $\log 2$.

Osrednji rezultat o preureditvah pogojno konvergentnih vrst z *realnimi* členi je zajet v naslednjem izreku.

Izrek 1. *Vsako pogojno konvergentno vrsto z realnimi členi lahko preuredimo v konvergentno vrsto s poljubno vsoto.*

Bernhard Riemann (1826–1866) je v razpravi o razvoju funkcij v trigonometrijske vrste¹ zapisal skico dokaza izreka 1 ter omenil, da je to opazil že Dirichlet v članku iz leta 1829, glej [8, str. 226]. Kakorkoli, danes je rezultat poznan kot *Riemannov preureditveni izrek*. Ideja dokaza je izjemno preprosta. Najprej opazimo, da vrsti, ki ju sestavimo iz pozitivnih in negativnih členov prvotne vrste, divergirata. To omogoča, da z dodajanjem pozitivnih členov vedno presežemo poljubno število, medtem ko z dodajanjem negativnih členov vedno pridemo pod to število. Ker zaporedje členov v vrsti konvergira proti nič, lahko s takim postopkom dosežemo, da preurejena vrsta konvergira proti želeni vrednosti. Kasneje bomo podali dokaz posplošitve tega izreka (posledica 5), za običajni dokaz glej npr. [3, str. 318–320].

Izrek 1 obravnava izključno vrste z realnimi členi. Naj bo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje kompleksnih števil in

$$\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} : \pi \text{ je permutacija } \mathbb{N} \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} \text{ konvergira} \right\} \subseteq \mathbb{C} \quad (2)$$

množica vsot vseh konvergentnih preurejenih vrst. Lahko je prazna, saj ne obstaja preureditev divergentne vrste s pozitivnimi členi v konvergentno vrsto. Absolutno konvergentne vrste pokažejo, da je ta množica lahko le točka, medtem ko je po izreku 1 lahko tudi premica. Naslednji primer pa pokaže, da je množica (2) lahko kar cela kompleksna ravnina.

Primer 2. Vzemimo pogojno konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{n\pi}{2}i\right).$$

Označimo z z_n njene člene. Zaporedje $\{z_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je sestavljeno iz povsem imaginarnih števil, medtem ko je zaporedje $\{z_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ realno. Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$ sta pogojno konvergentni. Naj bosta a in b poljubni realni števili. Po izreku 1 obstajata permutacija π_1 množice lihih števil in permutacija π_2 množice sodih števil, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi_1(2n-1)} = ib$ in $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi_2(2n)} = a$. Torej obstaja permutacija π množice \mathbb{N} , da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = a + ib$. S tem imamo $\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{C}$.

¹ *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlichlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol. 13, 1854. To je bila Riemannova habilitacijska razprava.

Ali obstaja kakšno zaporedje kompleksnih števil, da je množica (2) še kaj drugega kot le prej naštetih štirje primeri? Odgovor je ne!

Izrek 3. *Naj bo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje kompleksnih števil. Množica $\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$ je bodisi prazna bodisi točka bodisi premica bodisi kompleksna ravnina.*

Z drugimi besedami: množica vsot, ki jih dobimo po vseh preureditvah pogojno konvergentne vrste s kompleksnimi členi, je bodisi premica v kompleksni ravnini bodisi cela kompleksna ravnina.

Izrek 3 je prvi dokazal **Paul Lévy** (1886–1971) leta 1905 v članku [4], ko je bil še dodiplomski študent na politehniški šoli v Parizu. Lévy je v resnici obravnaval preureditve vrst s členi v končno razsežnem evklidskem prostoru, kjer se rezultat glasi, da je \mathcal{P} bodisi prazna množica bodisi premik linearnega podprostora. **Ernst Steinitz** (1871–1928) je na pobudo E. Landaua podrobno naštudiral Lévyjev članek in v njem našel številne pomanjkljivosti, še posebej pri večrazsežnem primeru, ter v seriji člankov [10, 11, 12] med drugim objavil povsem neodvisen dokaz tega. Groß je iz člankov izluščil bistvene prijeme ter v [1] objavil poenostavljen dokaz. Steinitz–Großov pristop je predstavljen v [7]. Neß je v [5] podal drugačen dokaz izreka 3 z uporabo zanimive posplošitve Riemannovega preureditvenega izreka, glej izrek 4 in posledico 5 v naslednjem razdelku. Ta prispevek bo sledil tej poti.

Morda je zanimivo dejstvo, da kljub naravnosti in starosti izreka 3 dokaz ni vsebovan v Knoppovi monografiji [3, str. 398]. Prav tako rezultat še zdaleč ni tako prepoznaven kot izrek 1. Najverjetneje je glavni razlog relativno zapleten dokaz. Namen tega prispevka je predstaviti pregledni dokaz Lévy–Steinitzovega izreka za vrste s kompleksnimi členi ter ga morda s tem približati bralcu, ki se je pravkar seznanil z Riemannovim preureditvenim izrekom. Za druge rezultate na področju preureditev neskončnih vrst predlagamo še pregledni članek [2].

Posplošitev Riemannovega preureditvenega izreka

Znameniti poljski matematik **Wacław Sierpiński** (1882–1969) je v [9] posplošil izrek 1 na preureditve, ki pustijo pozitivne ali negativne člene vrste na svojem mestu, odvisno od tega, ali je zelena vsota večja ali manjša od vsote dane vrste. Ključna metoda v dokazu je naslednji izrek, ki ga dokažemo podobno kot v [5].

Izrek 4. *Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako zaporedje pozitivnih realnih števil z limito 0, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. Vzemimo $d > 0$. Potem je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{\pi(n)}) = d$$

za neko permutacijo π množice \mathbb{N} .

Dokaz. Naj bo $\{a_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tako podzaporedje zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ konvergira. To lahko vedno dosežemo npr. s pogojem $a_{\lambda_n} \leq 2^{-n}$. Označimo z a_{μ_n} preostale člene v $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zapisane v enakem vrstnem redu. Tvorimo novo zaporedje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je $b_{\lambda_n} = 0$ in $b_{\mu_n} = a_{\mu_n}$. Velja

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_k = \sum_{k=1}^{\lambda_n} b_k + \sum_{k=1}^n a_{\lambda_k}$$

za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_k$ navzgor neomejeno, zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^n a_{\lambda_k}$ pa konvergentno, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira. Za $N \in \mathbb{N}$ definirajmo $D_N := -d + \sum_{n=1}^N (b_n - c_n)$, kjer bomo določili člene zaporedja $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ z naslednjim algoritmom.

Postavimo $c_1 = 0$ in $\mathcal{N} = \emptyset$ ter za vsak $k \geq 1$ ponavljamo naslednje korake:

- (1) Če je $D_k \leq 0$, potem je $c_{k+1} = 0$;
- (2) Če je $D_k > 0$, potem:

(2.1) če je $b_{k+1} = a_{\mu_m}$, potem vzamemo $c_{k+1} = b_{k+1}$ in \mathcal{N} nadomestimo z $\mathcal{N} \cup \{m\}$;

(2.2) če je $b_{k+1} = 0$, potem vzamemo $c_{k+1} = a_{\mu_l}$ za

$$l = \begin{cases} \min \left(\bigcup_{j=1}^{\max(\mathcal{N})} \{j\} \setminus \mathcal{N} \right), & \mathcal{N} \neq \emptyset, \\ 1, & \mathcal{N} = \emptyset \end{cases}$$

in \mathcal{N} nadomestimo z $\mathcal{N} \cup \{l\}$.

Najprej se prepričajmo, da je vsak korak v algoritmu izvedljiv. Edini problem bi lahko nastal pri koraku (2.2), saj bi lahko bila množica v $\min \{\cdot\}$ prazna. Toda v tem primeru bi bili vsi neničelni člene zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^k$ že vsebovani v $\{c_n\}_{n=1}^k$, od koder bi sledilo $D_k < 0$, kar pa v tem koraku ni mogoče.

Naj bo $D_k \leq 0$. Potem je $D_{k+1} = D_k$ natanko tedaj, ko je $b_{k+1} = 0$, sicer imamo $D_{k+1} > D_k$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, po končnem številu ponovitev koraka (1) vedno pridemo do koraka (2). Recimo, da je k_1 najmanjše tako število. Potem obstaja $l_1 \in \mathbb{N}$, da je

$$D_k \leq \dots \leq D_{k+k_1-1} \leq 0 < D_{k+k_1} \leq a_{\mu_{l_1}}.$$

Naj bo $D_k > 0$. Opazimo, da ponavljanje koraka (2.1) ne spremeni vsote D_N , toda korak (2.2) jo zmanjša za a_{μ_l} . Ponovno nam divergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zagotavlja, da po končnem številu ponovitev koraka (2) vedno

pridemo do koraka (1). Recimo, da je k_2 najmanjše tako število. Potem obstaja tak $l_2 \in \mathbb{N}$, da je

$$D_k \geq \dots \geq D_{k+k_2-1} > 0 \geq D_{k+k_2} \geq -a_{\mu_2}.$$

Po prejšnjih dveh odstavkih obstajajo strogo naraščajoča in neomejena zaporedja $\{k_j\}_{j=1}^\infty$, $\{l_{1,j}\}_{j=1}^\infty$ in $\{l_{2,j}\}_{j=1}^\infty$ naravnih števil, da za vse $N \in [k_j, k_{j+1}] \cap \mathbb{N}$ in $j \in \mathbb{N}$ velja

$$-a_{\mu_{l_2,j}} \leq D_N \leq a_{\mu_{1,j}}.$$

Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to dokazuje $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N = 0$ oz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = d. \quad (3)$$

Določiti moramo še ustrezno preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vsak neničelni člen zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ se pojavi natanko enkrat v $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ ter obratno. Pokazali bomo, kako nadomestiti ničelne člene prejšnjih zaporedij s členi iz $\{a_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$. Vemo, da je j element množice $\mathcal{L} := \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ natanko tedaj, ko je $b_j = 0$. Recimo, da je za tak $j = \lambda_n$ tudi $c_j = 0$. Potem nadomestimo b_j in c_j z a_{λ_n} . Če pa $c_j \neq 0$, imamo $c_j = a_{\mu_l}$, kjer je μ_l kot v koraku (2.2). Tedaj velja $c_{\mu_l} = 0$. Zato nadomestimo b_j in c_{μ_l} z a_{λ_n} . S takimi nadomestitvami iz zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ dobimo prvotno zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, zaporedje $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ pa postane $\{a_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty$ za neko permutacijo π množice \mathbb{N} . Naj bo $\mathbb{N}_{\leq m} := \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$. Tedaj imamo

$$\sum_{n=1}^m (a_n - a_{\pi(n)}) = \sum_{n=1}^m (b_n - c_n) + \sum_{n \in \mathcal{L}_m} a_n - \sum_{n \in \mathcal{L}'_m} a_n,$$

kjer je $\mathcal{L}_m := \mathcal{L} \cap \mathbb{N}_{\leq m}$ in $\mathcal{L}'_m := \mathcal{L} \cap \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}_{\leq m}\}$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_{\lambda_n}$ absolutno konvergentna, sta v limiti, ko pošljemo m v neskončno, vsoti zadnjih vrst v zgornji enakosti enaki. Enačba (3) s tem zaključuje dokaz. ■

Posledica 5. *Imejmo pogojno konvergentno vrsto z realnimi členi in vsoto s ter s_1 in s_2 taki realni števili, da velja $s_1 \leq s \leq s_2$. Potem obstaja preureditev, ki pusti vse negativne člene na svojem mestu in je s_1 vsota preurejene vrste. Obstaja tudi preureditev, ki pusti vse pozitivne člene na svojem mestu in je s_2 vsota preurejene vrste.*

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ pogojno konvergentna vrsta z realnimi členi. Lahko privzamemo $s_1 < s$. Dokazujemo prvi del posledice. Definirajmo množici $\mathcal{N}_1 := \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ in $\mathcal{N}_2 := \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 0\}$. Imamo

$$\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n \in \mathcal{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} a_n - \sum_{n \in \mathcal{N}_2 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} |a_n|.$$

Zaradi pogojne konvergence od tod sledi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathcal{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} a_n = +\infty.$$

Po izreku 4 obstaja permutacija π_1 množice \mathcal{N}_1 , da velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathcal{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} (a_n - a_{\pi_1(n)}) = s - s_1. \quad (4)$$

Naj bo $\pi(n) := \pi_1(n)$ za $n \in \mathcal{N}_1$ ter $\pi(n) := n$ za $n \in \mathcal{N}_2$. S tem je π permutacija množice \mathbb{N} in

$$\sum_{n=1}^m (a_n - a_{\pi(n)}) = \sum_{n \in \mathcal{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} (a_n - a_{\pi_1(n)}).$$

Z upoštevanjem enakosti (4) dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\pi(n)} - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (s_1 - s) + s = s_1.$$

Drugi del posledice dokažemo podobno. ■

Natančnejša oblika Lévy–Steinitzovega izreka za vrste s kompleksnimi členi

Izrek 3 pove, kakšne oblike je lahko množica \mathcal{P} iz (2). Naslednji izrek pa je njegova podrobnejša različica, kjer s tremi paroma disjunktnimi pogoji na člene vrste določimo vse možne oblike množice \mathcal{P} .

Izrek 6. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergentna vrsta s kompleksnimi členi in vsoto s .*

(1) *Če obstaja natanko en $\varphi_0 \in [0, \pi)$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_0}\}$ absolutno konvergira, potem velja*

$$\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{z \in \mathbb{C} : \Re \{(z - s) e^{i\varphi_0}\} = 0\}.$$

(2) Če obstajata različna $\varphi_1 \in [0, \pi)$ in $\varphi_2 \in [0, \pi)$, da vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_1}\}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_2}\}$ absolutno konvergirata, potem velja

$$\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{s\}.$$

(3) Če za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira, potem velja

$$\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{C}.$$

Ker primeri pokrijejo vse možnosti, je izrek 3 vsebovan v tem izreku. Ker je $\Re \{(z-s)e^{i\varphi_0}\} = 0$ natanko tedaj, ko je $z = s + ae^{-i\varphi_0}$, $a \in i \cdot \mathbb{R}$, je množica \mathcal{P} iz primera (1) premica. Podobna klasifikacija s skalarnim produktom obstaja tudi v večrazsežnem primeru, glej [7, str. 350].

Ponazorimo uporabo izreka na primeru realne konvergentne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Naj bo $\varphi \in [0, \pi)$. Potem imamo $|\Re \{a_n e^{i\varphi}\}| = |a_n| \cdot |\cos \varphi|$. Če je vrsta pogojno konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{a_n e^{i\varphi}\}|$ konvergira natanko tedaj, ko je $\varphi = \pi/2$. Torej imamo $\mathcal{P}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{R}$, kar je ravno vsebina Riemannovega preureditvenega izreka. Če pa je vrsta absolutno konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{a_n e^{i\varphi}\}|$ konvergira za vsak φ ter s tem $\mathcal{P}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{s\}$.

Primer 7. Vzemimo pogojno konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i \frac{1}{n} \right).$$

Označimo z z_n njene člene in naj bo $\varphi \in [0, \pi)$. Ker je

$$z_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \exp \left(i \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

je

$$|\Re \{z_n e^{i\varphi}\}| = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \left| \cos \left(\varphi + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right|.$$

Ločimo tri primere: $\varphi \in [0, \pi/2)$, $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ in $\varphi = \pi/2$. Naj bo najprej $\varphi \in [0, \pi/2)$. Potem obstajata $N \in \mathbb{N}$ in $\varepsilon > 0$, da je $\varphi + \arctan(1/\sqrt{n}) \leq \varphi + \varepsilon < \pi/2$ za vse $n \geq N$. Torej je $|\Re \{z_n e^{i\varphi}\}| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\varphi + \varepsilon)$ za $n \geq N$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentna, je po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergentna. Naj bo sedaj $\varphi \in (\pi/2, \pi)$. Potem obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za $n \geq N$ velja $\pi/2 < \varphi < \varphi + \arctan(1/\sqrt{n}) < \pi$ in s tem $|\Re \{z_n e^{i\varphi}\}| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} |\cos \varphi|$. Odtod spet po primerjalnem kriteriju

zaključimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira. V primeru $\varphi = \pi/2$ imamo $|\Re \{z_n e^{i\varphi}\}| = 1/n$, kar so členi divergentne harmonične vrste. Sklepamo, da za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira. Izrek 6 zagotavlja $\mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{C}$.

Izkaže se, da je dokaz izreka 6 v primeru (3) najtežji. Pri tem bo koristno vpeljati in študirati pojem poltraka absolutne divergence.

Poltrak absolutne divergence

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta > 0$ definirajmo množico

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) := \{r e^{i\varphi} : r \in (0, \infty), |\varphi - \alpha| < \beta\}.$$

Za $\beta \in (0, \pi)$ ta množica predstavlja odprt kot v kompleksni ravnini z vrhom v 0, kotom 2β in simetralo $\mathcal{L}(\alpha) := \{r e^{i\alpha} : r \in (0, \infty)\}$. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta. Če obstaja $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, da vrsta

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha_0, \varepsilon)} |z_n|$$

divergira za vsak $\varepsilon > 0$, potem pravimo množici $\mathcal{L}(\alpha_0)$ *poltrak absolutne divergence*.² Seveda je potem za vsak $k \in \mathbb{Z}$ tudi $\mathcal{L}(\alpha_0 + 2k\pi)$ poltrak absolutne divergence.

Za vrsto iz primera 2 so $\mathcal{L}(0)$, $\mathcal{L}(\pi/2)$, $\mathcal{L}(\pi)$ in $\mathcal{L}(3\pi/2)$ vsi poltraki absolutne divergence. Vsaka pogojno konvergentna vrsta z realnimi členi ima natanko dva poltraka absolutne divergence, $\mathcal{L}(0)$ in $\mathcal{L}(\pi)$, kar je res tudi za vrsto iz primera 7, saj za njene člene velja

$$\arg z_n = \begin{cases} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, & 2 \nmid n, \\ -\pi + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, & 2 \mid n. \end{cases}$$

Naslednja lema zagotavlja obstoj poltraka absolutne divergence za vsako pogojno konvergentno vrsto.

Lema 8. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta. Recimo, da obstajata $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta > 0$, da vrsta*

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \beta)} |z_n|$$

divergira. Potem obstaja $\alpha_0 \in [\alpha - \beta, \alpha + \beta]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_0)$ poltrak absolutne divergence.

²Različni avtorji uporabljajo različna imena, npr. »principal direction« v [2], »direction of accumulation« v [6] in »stark Strahl« v [5].

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo $\Lambda := [\alpha - \beta, \alpha + \beta]$. Recimo, da za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja $\varepsilon_\lambda > 0$, da vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\lambda, \varepsilon_\lambda)} z_n$ absolutno konvergira. Potem imamo

$$[\alpha - \beta, \alpha + \beta] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda). \quad (5)$$

Ker je leva množica v (5) kompaktna, obstaja končna podmnožica $\Lambda_0 \subset \Lambda$, da (5) velja tudi v primeru, ko Λ nadomestimo z Λ_0 . S tem imamo

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \beta)} |z_n| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \sum_{z_n \in \mathcal{J}(\lambda, \varepsilon_\lambda)} |z_n| < \infty,$$

kar pa je v nasprotju s predpostavko leme. ■

V nadaljevanju predpostavimo, da je izpolnjen pogoj (3) iz izreka 6, in z uporabo prejšnje leme pokažemo obstoj poltraka absolutne divergence.

Lema 9. *Recimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta in za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira. Potem za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja $\alpha_0 \in [\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_0)$ poltrak absolutne divergence.*

Dokaz. Lahko opazimo, da po predpostavki v lemi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$, saj imamo $\Re \{z_n e^{i\varphi}\} = -\Re \{z_n e^{i(\varphi - \pi)}\}$. Vzemimo $\alpha \in \mathbb{R}$. Opazimo tudi, da je $z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)$ natanko tedaj, ko je $z_n e^{-i\alpha} \in \mathcal{J}(0, \pi/2)$ oz. $\Re \{z_n e^{-i\alpha}\} > 0$. Od tod sledi $\Re \{z_n e^{-i\alpha}\} = -|\Re \{z_n e^{-i\alpha}\}|$ natanko tedaj, ko je $z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)$. Če bi bila vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} |\Re \{z_n e^{-i\alpha}\}|$ konvergentna, bi veljalo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{-i\alpha}\}| = -\Re \{s e^{-i\alpha}\} + 2 \sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} |\Re \{z_n e^{-i\alpha}\}|,$$

kjer je $s := \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. To pa ni mogoče, saj bi bila s tem vrsta na levi strani zgornje enakosti konvergentna. Sklepamo, da vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} |z_n|$ divergira. Trditev sedaj sledi iz leme 8. ■

Trditev 10. *Recimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta in za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira. Potem za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstajata taka $\alpha_1 \in [\alpha - \pi, \alpha]$ in $\alpha_2 \in [\alpha, \alpha + \pi]$, $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$, da sta $\mathcal{L}(\alpha_1)$ in $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltraka absolutne divergence.*

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je množica

$$\mathcal{A} := \{\alpha : \mathcal{L}(\alpha) \text{ je poltrak absolutne divergence}\}$$

zaprta. Vzemimo $\varepsilon > 0$ in $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ naj bo konvergentno zaporedje z limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Potem obstaja $j \in \mathbb{N}$, da je $|\alpha_j - \alpha| < \varepsilon/2$ in vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha_j, \varepsilon/2)} |z_n|$ divergira. Ker pa je $\mathcal{J}(\alpha_j, \varepsilon/2) \subset \mathcal{J}(\alpha, \varepsilon)$, od tod sledi divergenca vrste $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \varepsilon)} |z_n|$ in s tem $\alpha \in \mathcal{A}$.

Če je $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja $\alpha' \in (\alpha, \alpha + \pi]$, da je tudi $\mathcal{L}(\alpha')$ poltrak absolutne divergence. Recimo, da tak α' ne obstaja in definirajmo

$$\mathcal{B} := \{\alpha_0 \in [\alpha + \pi/2, \alpha + 3\pi/2] : \mathcal{L}(\alpha_0) \text{ je poltrak absolutne divergence}\}.$$

Po lemi 9 množica \mathcal{B} ni prazna. Ker je navzdol omejena in zaprta, ima minimum $\hat{\alpha} > \alpha + \pi$. Po lemi 9 obstaja $\alpha'' \in [(\hat{\alpha} + \alpha - \pi)/2, (\hat{\alpha} + \alpha + \pi)/2]$, da je $\mathcal{L}(\alpha'')$ poltrak absolutne divergence. Imamo $\alpha < \alpha'' < \hat{\alpha} \leq \alpha + 3\pi/2$. Sledi $\alpha'' \in \mathcal{B}$ in s tem $\alpha'' \geq \hat{\alpha}$. Ker pa to ni mogoče, predpostavka o neobstoju α' ni pravilna.

Vzemimo $\alpha \in \mathbb{R}$ in definirajmo

$$\mathcal{C} := \{\alpha' \in [\alpha - \pi, \alpha] : \mathcal{L}(\alpha') \text{ je poltrak absolutne divergence}\}.$$

Po lemi 9 množica \mathcal{C} ni prazna. Ker je navzgor omejena in zaprta, ima maksimum α_1 . Če je $\alpha_1 = \alpha$, potem $\alpha_2 = \alpha_1$ zadošča trditvi. V nasprotnem primeru po prejšnjem odstavku obstaja $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_1 + \pi]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltrak absolutne divergence. To nam zagotavlja $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$. Ker po izbiri α_1 velja še $\alpha_2 \in (\alpha, \alpha + \pi]$, je trditev s tem dokazana. ■

Trditev 11. Naj bo $\sum_{n=1}^\infty z_n$ pogojno konvergentna vrsta.

(1) Če je $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja tako podzaporedje $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$, da velja $\Re\{z_{\lambda_n}\} > 0$, vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Re\{z_{\lambda_n}\}$ divergira in vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Im\{z_{\lambda_n}\}$ absolutno konvergira.

(2) Če je $\mathcal{L}(\pi)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja tako podzaporedje $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^\infty$, da velja $\Re\{z_{\mu_n}\} < 0$, vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Re\{z_{\mu_n}\}$ divergira in vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Im\{z_{\mu_n}\}$ absolutno konvergira.

Podzaporedji $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ in $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^\infty$ sta disjunktni.

Dokaz. Dokazujemo trditev (1). Izberimo $\varepsilon \in (0, \pi/3)$. Ker zaporedje $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ konvergira proti 0 in vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(0, \varepsilon)} |z_n|$ divergira, obstaja končno mnogo členov $z_{\lambda_1}, \dots, z_{\lambda_{N_1}}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, da je $\lambda_1 < \dots < \lambda_{N_1}$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{N_1} \subset \mathcal{J}(0, \varepsilon)$ in $1 \leq \sum_{n=1}^{N_1} |z_{\lambda_n}| \leq 2$. Na podoben način lahko vidimo, da obstaja končno mnogo členov $z_{\lambda_{N_1+1}}, \dots, z_{\lambda_{N_2}}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, da je $\lambda_{N_1} < \lambda_{N_1+1} < \dots < \lambda_{N_2}$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=N_1+1}^{N_2} \subset \mathcal{J}(0, \varepsilon/2)$ in $1 \leq \sum_{n=N_1+1}^{N_2} |z_{\lambda_n}| \leq 2$. Na ta način konstruiramo strogo naraščajoči zaporedji $\{N_j\}_{j=0}^\infty \subset$

\mathbb{N}_0 in $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, da je $N_0 = 0$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} \subset \mathcal{J}(0, \varepsilon 2^{-j})$ in $1 \leq \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \leq 2$. Iz prvega pogoja dobimo $\Re\{z_{\lambda_n}\} \geq |z_{\lambda_n}| \cos(\varepsilon 2^{-j})$ in $|\Im\{z_{\lambda_n}\}| \leq |z_{\lambda_n}| \sin(\varepsilon 2^{-j})$ za $n \in \{N_j + 1, \dots, N_{j+1}\}$. Za $m \in \mathbb{N}_0$ sledi

$$\sum_{n=1}^{N_{m+1}} \Re\{z_{\lambda_n}\} \geq \sum_{j=0}^m \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \cos \frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_{j=0}^m \cos \frac{\varepsilon}{2^j} > \frac{m}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Im\{z_{\lambda_n}\}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \sin \frac{\varepsilon}{2^j} \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \sin \frac{\varepsilon}{2^j} < \frac{4\pi}{3},$$

od koder dobimo trditve (1). Dokaz trditve (2) poteka podobno, le da člene z_{μ_n} izbiramo iz $\mathcal{J}(\pi, \varepsilon 2^{-j})$. Pri tem sta tako dobljeni podzaporedji disjunktni. ■

Prejšnji trditvi sta ključni v dokazu primera (3) izreka 6. Najprej opazimo: če je za neko pogojno konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^\infty z_n$ množica $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence, je potem $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence za $\sum_{n=1}^\infty z_n e^{-i\alpha}$. Trditve 10 bo zagotovila obstoj dveh takšnih poltrakov, medtem ko bo trditve 11 po ustreznih rotacijah priskrbel podzaporedja, na katerih bomo lahko z uporabo izreka 4 izvajali ustrezne preureditve.

Na tem mestu dodajmo še: če je za pogojno konvergentno vrsto množica $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$, je pogoj (3) izreka 6 izpolnjen. To sledi iz prejšnje opombe in trditve 11. Primer take vrste je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(2\pi i x n),$$

za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokaz ni kratek in ga bomo zato izpustili, glej [5, str. 41–42].

Dokaz izreka 6

V tem zadnjem razdelku bomo dokazali izrek 6 in s tem tudi Lévy–Steinitzov izrek za vrste s kompleksnimi členi. Dokaz bomo razdelili na tri dele, v skladu s primeri (1)–(3) v izreku 6.

Dokaz za prvi primer

Po predpostavki izreka obstaja natanko en $\varphi_0 \in [0, \pi)$, da vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Re\{z_n e^{i\varphi_0}\}$ absolutno konvergira. Vrsta $\sum_{n=1}^\infty z_n = s$ je v tem primeru pogojno konvergenta, saj bi drugače veljalo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Re\{z_n e^{i\varphi}\}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n e^{i\varphi}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$$

za vsa realna števila φ . S tem je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{i\varphi_0} = s e^{i\varphi_0}$ pogojno konvergentna. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_0}\}$ absolutno konvergira, sledi, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_n e^{i\varphi_0}\}$ pogojno konvergentna vrsta. Vzemimo

$$s' \in \mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : \Re \{(z - s) e^{i\varphi_0}\} = 0\}.$$

Po izreku 1 obstaja permutacija π množice \mathbb{N} , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_{\pi(n)} e^{i\varphi_0}\} = \Im \{s' e^{i\varphi_0}\}.$$

Ker je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_0}\}$ absolutno konvergentna, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_{\pi(n)} e^{i\varphi_0}\} = \Re \{s' e^{i\varphi_0}\} = \Re \{s e^{i\varphi_0}\}. \quad (6)$$

Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = s'$, kar dokazuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$. Če je $s' \in \mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$, potem obstaja permutacija π množice \mathbb{N} , da velja $s' = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{i\varphi_0}\}$ absolutno konvergira, ponovno velja (6) in odtod $s' \in \mathcal{S}$. S tem imamo $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$.

Dokaz za drugi primer

Po predpostavki izreka obstajata različna $\varphi_1 \in [0, \pi)$ in $\varphi_2 \in [0, \pi)$, da vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ absolutno konvergirata, kjer smo definirali

$$\begin{aligned} u_n &:= \Re \{z_n e^{i\varphi_1}\} = \Re \{z_n\} \cos \varphi_1 - \Im \{z_n\} \sin \varphi_1, \\ w_n &:= \Re \{z_n e^{i\varphi_2}\} = \Re \{z_n\} \cos \varphi_2 - \Im \{z_n\} \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Če je $\varphi_2 = 0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n\}$ absolutno konvergentna vrsta. Recimo, da velja $\varphi_2 \neq 0$. Potem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} w_n - u_n \right) = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_2} \sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n\}.$$

Ker je leva stran enakosti absolutno konvergentna, sledi, da je tudi v tem primeru vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n\}$ absolutno konvergentna.

Če je $\varphi_2 = \pi/2$, je $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_n\}$ absolutno konvergentna vrsta. Recimo, da velja $\varphi_2 \neq \pi/2$. Potem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} w_n - u_n \right) = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2} \sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_n\},$$

od koder sledi absolutna konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_n\}$.

Dokazali smo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolutno konvergentna vrsta, torej se po poljubni preureditvi njenih členov vsota ne spremeni.

Dokaz za tretji primer

Po predpostavki izreka za vse $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re \{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira in $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$. Vzemimo $s' \neq s$. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, da velja $s - s' = |s - s'| e^{i\alpha}$. Po trditvi 10 obstajata $\alpha_1 \in [\alpha - \pi, \alpha]$ in $\alpha_2 \in [\alpha, \alpha + \pi]$, da je $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$ ter sta $\mathcal{L}(\alpha_1)$ in $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltraka absolutne divergence. Ločimo primere:

(1) $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$;

(1.1) $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$;

(1.2) $\alpha_1 = \alpha \leq \alpha_2$;

(1.3) $\alpha_1 \leq \alpha = \alpha_2$;

(2) $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$.

Vrsta v primeru 7 pokaže, da se (2) lahko zgodi.

Najprej obravnavajmo primer (1). Če velja (1.1), obstajata pozitivni števili d_1 in d_2 , da je $s - s' = d_1 e^{i\alpha_1} + d_2 e^{i\alpha_2}$. V primeru (1.2) obstaja $d'_1 > 0$, da je $s - s' = d'_1 e^{i\alpha_1}$ ter v primeru (1.3) obstaja $d'_2 > 0$, da je $s - s' = d'_2 e^{i\alpha_2}$. Podali bomo dokaz samo za primer (1.1), saj sta dokaza v primerih (1.2) in (1.3) podobna. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{-i\alpha_1}$ je množica $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence. Po trditvi 11 obstaja podzaporedje $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_{\lambda_n} e^{-i\alpha_1}\} = +\infty$ in

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Im \{z_{\lambda_n} e^{-i\alpha_1}\}| < \infty \tag{7}$$

Izrek 4 zagotavlja obstoj permutacije π_1 množice $\mathcal{L} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{(z_{\lambda_n} - z_{\pi_1(\lambda_n)}) e^{-i\alpha_1}\} = d_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Im \{(z_{\lambda_n} - z_{\pi_1(\lambda_n)}) e^{-i\alpha_1}\} = 0,$$

kjer ničelnost vsote druge vrste sledi iz (7). Če definiramo $\tilde{\pi}_1(n) := \pi_1(n)$ za $n \in \mathcal{L}$ in $\tilde{\pi}_1(n) := n$ za $n \notin \mathcal{L}$, je $\tilde{\pi}_1$ permutacija množice \mathbb{N} , za katero velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{\tilde{\pi}_1(n)}) = d_1 e^{i\alpha_1}.$$

S podobnim postopkom, le za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tilde{\pi}_1(n)} e^{-i\alpha_2}$ in d_2 , lahko pokažemo obstoj permutacije $\tilde{\pi}_2$ množice \mathbb{N} , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_{\tilde{\pi}_1(n)} - z_{\tilde{\pi}_2(\tilde{\pi}_1(n))}) = d_2 e^{i\alpha_2}.$$

S tem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{\pi(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{\tilde{\pi}_1(n)}) + \sum_{n=1}^{\infty} (z_{\tilde{\pi}_1(n)} - z_{\pi(n)}) = s - s'$$

za $\pi := \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1$. Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = s'$.

Izrek moramo dokazati še za primer (2), torej naj velja $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{-i\alpha_1}$ sta množici $\mathcal{L}(0)$ in $\mathcal{L}(\pi)$ poltraka absolutne divergence. Po trditvi 11 obstajata disjunktni podzaporedji $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^+| < \infty$ ter $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^-| < \infty$, kjer smo definirali $a_n^+ := \Re\{z_{\lambda_n} e^{-i\alpha_1}\}$ in $b_n^+ := \Im\{z_{\lambda_n} e^{-i\alpha_1}\}$ ter $a_n^- := \Re\{z_{\mu_n} e^{-i\alpha_1}\}$ in $b_n^- := \Im\{z_{\mu_n} e^{-i\alpha_1}\}$. Naj bo $\{z_{\nu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ podzaporedje preostalih členov zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, zapisanih v enakem vrstnem redu. Ker je $\Im\{z_n e^{-i\alpha_1}\} = -\Re\{z_n e^{(\pi/2 - \alpha_1)i}\}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |\Re\{z_n e^{i\varphi}\}|$ divergira za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{\pm}| < \infty$, sledi divergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} |\Im\{z_{\nu_n} e^{-i\alpha_1}\}|$. Po izreku 1 zato obstaja permutacija π_1 množice $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-i\alpha_1}\} = \Im\{s' e^{-i\alpha_1}\} - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^+ + b_n^-). \quad (8)$$

Definirajmo $a_n := \Re\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-i\alpha_1}\}$ in $b_n := \Im\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-i\alpha_1}\}$. Za naravni števili n in m , $n \leq m$, definirajmo $A^+(n, m) := \sum_{j=n}^m a_j^+$ in $A^-(n, m) := \sum_{j=n}^m a_j^-$. Ločimo primera, ko je $a_1 \leq \Re\{s' e^{-i\alpha_1}\}$ ali $a_1 > \Re\{s' e^{-i\alpha_1}\}$. Recimo, da velja $a_1 \leq \Re\{s' e^{-i\alpha_1}\}$. Potem izberemo naravna števila $m_1 < m_2 < \dots$ in $k_1 < k_2 < \dots$ v

$$\begin{aligned} & a_1 + A^+(1, m_1) + a_2 + A^-(1, k_1) + a_3 \\ & + A^+(m_1 + 1, m_2) + a_4 + A^-(k_1 + 1, k_2) + a_5 \\ & + \dots \\ & + A^+(m_n + 1, m_{n+1}) + a_{2n+2} + A^-(k_n + 1, k_{n+1}) + a_{2n+3} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

na naslednji način:

(1) $m_1 \geq 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_1^+ := a_1 + A^+(1, m_1) + a_2 > \Re\{s' e^{-i\alpha_1}\};$$

(2) $k_1 \geq 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_1^- := S_1^+ + A^-(1, k_1) + a_3 < \Re\{s' e^{-i\alpha_1}\};$$

(3) $m_2 \geq m_1 + 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_2^+ := S_1^- + A^+(m_1 + 1, m_2) + a_4 > \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\};$$

(4) $k_2 \geq k_1 + 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_2^- := S_2^+ + A^-(k_1 + 1, k_2) + a_5 < \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\};$$

(5) in tako dalje z $m_{n+1} \geq m_n + 1$, $k_{n+1} \geq k_n + 1$ in

$$\begin{aligned} S_{n+1}^+ &:= S_n^- + A^+(m_n + 1, m_{n+1}) + a_{2n+2} > \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\}, \\ S_{n+1}^- &:= S_{n+1}^+ + A^-(k_n + 1, k_{n+1}) + a_{2n+3} < \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\}. \end{aligned}$$

Zgornji koraki so vedno izvedljivi, saj za poljubno naravno število n velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^+(n, m) = +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} A^-(n, m) = -\infty.$$

Pri tem je (9) preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_n e^{-i\alpha_1}\}$. Konstruirali smo tako permutacijo π množice \mathbb{N} , da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \Re \{z_{\pi(j)} e^{-i\alpha_1}\} \leq S_n^+, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \Re \{z_{\pi(j)} e^{-i\alpha_1}\} \geq S_n^-.$$

Velja še

$$\begin{aligned} 0 < S_{n+1}^+ - \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\} &\leq \max \left\{ a_{m_{n+1}}^+ + a_{2n+2}, a_{m_{n+1}}^+ \right\}, \\ \min \left\{ a_{k_{n+1}}^- + a_{2n+3}, a_{k_{n+1}}^- \right\} &\leq S_{n+1}^- - \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\} < 0, \end{aligned}$$

kar zagotavlja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\}$. Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re \{z_{\pi(n)} e^{-i\alpha_1}\} = \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\}.$$

Opazimo, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im \{z_{\pi(n)} e^{-i\alpha_1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \Im \{s'e^{-i\alpha_1}\}.$$

Prva enakost velja, ker smo po predpisu (9) v pogojno konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dodali člene absolutno konvergentnih vrst $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$, medtem ko druga enakost velja zaradi (8). Od tod sklepamo $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = s'$. V primeru $a_1 > \Re \{s'e^{-i\alpha_1}\}$ dokazujemo podobno, zato podrobnosti prepuščamo bralcu. Dokaz izreka 6 je s tem končan.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje Živi Kadunc za prvi komentar in recenzentu za konstruktivne pripombe.

LITERATURA

- [1] W. Groß, *Bedingt konvergente Reihen*, Monatsh. Math. Phys. **28** (1917), 221–237.
- [2] B. Jasek, *Transformations of complex series*, Colloq. Math. **9** (1962), 265–275.
- [3] K. Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
- [4] P. Lévy, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale **4e série**, **5** (1905), 506–511.
- [5] W. Neß, *Über die Umordnung von bedingt konvergenten Reihen*, Math. Z. **42** (1937), 31–50.
- [6] G. Pólya in G. Szegő, *Problems and theorems in analysis. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [7] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 342–351.
- [8] B. Riemann, H. Weber, R. Baker, C. Christenson in H. Orde, *Collected papers*, Heber City, UT: Kendrick Press, 2004.
- [9] W. Sierpiński, *Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes*, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, Série A (1911), 149–158.
- [10] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 128–175.
- [11] *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Fortsetzung)*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 1–40.
- [12] *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Schluß.)*, J. Reine Angew. Math. **146** (1916), 1–52.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

NAVIER-STOKESOVA ENAČBA IN ELASTIČNI TRKI

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 47.10.ad, 47.11.j, 47.32.-y

V prispevku pokažemo, da lahko s sledenjem okroglih ploščic, ki drsijo po gladki plošči in med seboj elastično trkajo, kar dobro rešimo Navier-Stokesovo enačbo v dveh dimenzijah. Tak pristop je tako preprost, da ga lahko brez težav obvladajo tudi srednješolci, ki so večji programiranja. Poleg laminarnega toka brez vrtincev obravnavamo tudi vrtince v vodotokih in vrtinec pri iztekanju vode iz kadi.

NAVIER-STOKES EQUATION AND ELASTIC COLLISIONS

We show that one can quite well solve the Navier-Stokes equation in two dimensions by following discs which slide on a smooth plate and collide elastically. This approach is so simple that it can be easily used by high-school students with some programming skills. Beside laminar flows without eddies we deal with eddies in rivers and bathtub vortex.

Gibanje tekočin obravnavamo z Navier-Stokesovo enačbo. Po postavitvi temeljev matematične analize v 18. stoletju so jo v 19. stoletju dognali znani matematiki. Motiv pa ni bila nuja po opisu gibanja tekočin, temveč odkritje, da je svetloba transverzalno valovanje. Na začetku 19. stoletja so menili, da je svetloba valovanje etra, ki mora biti zato podoben trdni snovi, po kateri se tako valovanje lahko širi. Claude Navier je zapisal enačbo gibanja v trdni snovi, ki si jo je predstavljal kot množico delcev, ki so speti s centralnimi silami. V njej sta edina parametra gostota snovi in njen strižni modul. Augustine-Louis Cauchy jo je dopolnil z upoštevanjem stisljivosti. Simon Denis Poisson je reševal Navierovo enačbo in pokazal, da je poleg transverzalnega valovanja možno tudi longitudinalno valovanje. Za obe je izpeljal izraza za njuno hitrost širjenja. Pri širjenju svetlobe v etru so se morali izogniti longitudinalnemu valovanju, zato so etru pripisovali nenavadne lastnosti. Po njem naj bi se longitudinalni valovi pri visokih frekvencah gibali vse hitreje. Pri nizkih frekvencah pa tak eter naj ne bi nudil odpora, saj se po njem neovirano gibljejo planeti. Navier in Stokes sta po zgledu enačb za gibanje trdnin zapisala enačbo za gibanje tekočin, ki danes nosi njuno ime.

Izpeljava enačbe je prav preprosta. Na majhen delček tekočine delujejo tri sile, in sicer gradient tlaka, teža in viskozna sila. Ko poznamo sile, izrazimo pospešek tega delčka z njimi, uporabimo torej 2. Newtonov zakon in že imamo enačbo napisano, torej: masa krat pospešek je enako vsoti vseh

sil na delček. Zapisano malo bolj matematično:

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}_{gradp} + d\vec{F}_g + d\vec{F}_{visk}.$$

Viskozno silo lahko enolično povežemo s hitrostnim poljem \vec{v} , sila zaradi gradienta tlaka je tudi odvisna od hitrostnega polja, le teža pride v enačbo kot vnaprej dana sila. Tlak v tekočini pa je povezan z njeno stisljivostjo, ki jo pri vodi in tudi drugih kapljevinah navadno zanemarimo, pa tudi pri plinih, če ne gre za velike tlačne razlike v toku in s tem povezane razlike v gostoti plina.

Na levi strani enačbe moramo upoštevati, da opazujemo gibajoči se delček tekočine. Če se postavimo na določeno točko prostora, se zavemo, da tja vseskozi priteka tekočina od drugod, zato je treba odvod na levi strani zapisati takole:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}.$$

Prvi člen na desni spremlja spremembe hitrosti v dani točki, drugi pa poskrbi, da se pospešek res nanaša na izbrani delček tekočine. In prav ta člen dodobra zabeli reševanje Navier-Stokesove enačbe. Enačba ni več linearna, kar zmede tudi še tako izurjene matematike. Prav ta člen predvidi tudi zelo zamotano gibanje tekočine v turbulentnem toku. Brez njega bi bilo gibanje tekočin malce dolgočasno. Precej enačb matematične fizike nima takih osvežujočih členov, zato so rešitve teh enačb v stilu »pa saj sem vedel«. Končna oblika Navier-Stokesove enačbe za tekočine ima tole obliko:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}.$$

Ker se gostota tekočine malo spreminja, mora veljati še tale povezava med tlakom in hitrostnim poljem:

$$p = \kappa \nabla \cdot \vec{v}.$$

Pri majhni stisljivosti tekočine je parameter κ zelo velik in kar dobro velja:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

V malo primerih se jo posreči rešiti v zaključeni obliki, to je z znanimi funkcijami kraja in časa. Skoraj vedno smo vezani na numerično reševanje z računalniki. Pri uporabnih in za industrijo pomembnih primerih moramo poleg zmogljivega računalnika imeti še ustrezne programe, ki so obsežni in terjajo veliko časa, da jih razvijemo. Zato jih v specializiranih ustanovah za velik denar kupijo od priznanih razvijalcev. Za vajo jih razvijajo tudi študenti na tehniških fakultetah, seveda za preproste šolske primere in v

osnovni izvedbi brez zahtevnih grafičnih programov. Tudi na FMF se kdaj pa kdaj študenti lotijo takih nalog pri predmetih, kjer obravnavajo numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Ni upati, da bi se takih nalog lotevali tudi srednješolci, čeprav jim gre programiranje dobro od rok.

Presenetljivo uspešen pa je pristop, ki ga brez težav razumejo tudi ti. Namesto toka tekočine si zamislimo tok togih kroglic, ki se med seboj elastično odbijajo, prav tako tudi od sten cevi, po katerih se pretakajo. Taka zamisel sledi iz kinetične teorije idealnih plinov, kjer molekule pri dani temperaturi elastično trkajo med sabo in se prilagajajo gibanju sten. Poleg neurejenega termičnega gibanja, kjer se vektor hitrosti dane molekule časovno izpovpreči v nič, imajo molekule v gibajočem se plinu tudi makroskopsko hitrost, ki pa ima od nič različno povprečje. Prav tako je pri kroglicah, ki jim sledimo in sedaj predstavljajo delčke tekočine. Neurejeno termično gibanje kroglic, kjer je njihova povprečna hitrost enaka nič, spremlja tudi urejeno gibanje, ki ponazarja njihov, recimo mu, makroskopski tok. S povprečenjem njihovih hitrosti na danem mestu pridemo do hitrostnega polja tega toka. Pri tem si ne belimo glave s tlakom, saj se ta vzpostavi sam od sebe in žene kroglice po toku, pač tako kot pri idealnem plinu, kjer je tlak posledica trkanja molekul na stene. Prav tako si ne delamo skrbi z viskozno silo, saj je idealni plin sam po sebi viskozen. Brez težav vgradimo dodatno viskoznost tako, da ustrezno spremenimo trke, ki potem niso več elastični, saj upoštevajo viskozno trenje med kroglicami. S to možnostjo se tu ne bomo ukvarjali. Vse, kar moramo torej narediti na poti do hitrostnega polja, je slediti kroglicam in na danih mestih povprečevati njihove hitrosti. To pa še ni vse. Pri trku s steno dodamo termični hitrosti kroglice še hitrost gibanja stene. Poskrbeti moramo za smiselno pritekanje kroglic v opazovani del prostora in za njihovo odtekanje. Skratka, ne uide nam poskrbeti za dane robne pogoje naloge.

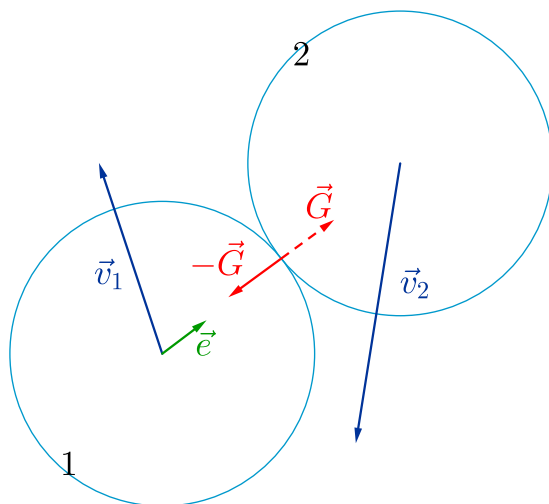
V nadaljevanju se bomo ukvarjali le z dvodimenzionalnimi tokovi, ki so preprostejši in preglednejši od tridimenzionalnih, poleg tega pa so tudi bolj nazorni. Namesto kroglic bomo torej obravnavali ravninsko gibanje kakih sto okroglih ploščic.

Delovni stroj tovrstnega reševanja tokovnih nalog je obravnava elastičnega trka ploščic. Le-ta je preprosta in jo obvlada večina srednješolcev. Vseeno si oglejmo ta stroj.

Na sliki 1 sta ploščici ravno v stiku, enotski vektor, ki povezuje njuni središči, smo označili z \vec{e} . Po trku se obema ploščicama spremeni gibalna količina. Prvi za, denimo, $-G\vec{e}$, pri drugi pa za $G\vec{e}$, pač zaradi ohranitve gibalne količine. Velikost G določimo iz energijskega zakona, torej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m \left(\vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e} \right)^2 .$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo ploščic pred trkom, na desni



Slika 1. Razmere pri elastičnem trku dveh ploščic takoj po trku.

pa po njem. Po krajšem računu sledi:

$$\frac{G}{m} = \vec{e} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

iz tega pa takoj dobimo hitrosti ploščic po trku. Enotski vektor \vec{e} je lahko v poljubni smeri, določiti ga moramo za vsak trk posebej. Pri sledenju ploščic zaznamo trk, ko se središči približata bolj kot na razdaljo premera. Vmes ploščice premikamo glede na njihove hitrosti in čas med zaporednimi koraki.

Sedaj se lotimo nekaj nalog. Najprej bomo ocenili uspešnost naše metode na primerih, kjer so rešitve Navier-Stokesove enačbe natančno znane. Prvi tak primer je Poiseuillov tok po cevi, ki ga obravnavajo v osnovnem univerzitetnem tečaju fizike. Ker obravnavamo le dvodimenzionalne tokove, bomo pač obravnavali stacionarni laminarni tok med dvema vodoravnima ravninama. Navier-Stokesova enačba je v tem primeru preprosta:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

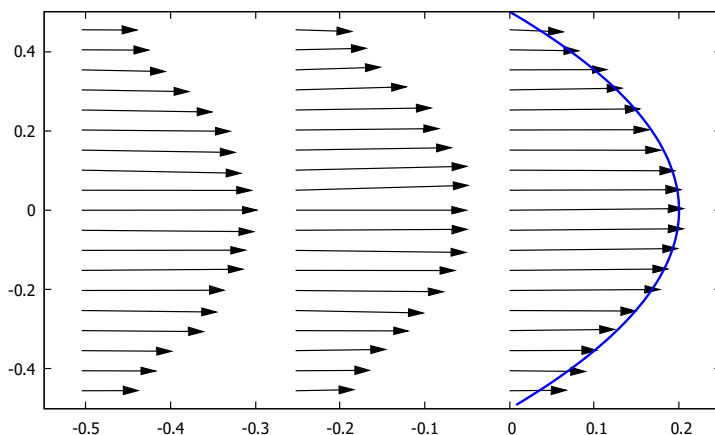
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Skladno s sliko 1 je tok le v smeri osi x , za vektor hitrosti pa velja $\vec{v} = (u(y), 0)^T$, s čimer je enačbi majhne stisljivosti $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ zadoščeno. Tlak se v smeri y ne spreminja, v smeri x pa je njegov gradient konstanten. Leva

stran prve enačbe je namreč odvisna le od y , tlak pa od y ni odvisen, kar pove druga enačba. Če steni mirujeta, je $u(y)$ podan kot:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - ay)$$

Na spodnji plošči je $y = 0$, na zgornji pa $y = a$. To je znani parabolčni hitrostni profil pri Poiseuillovem toku. Tega sedaj primerjamo z dobljenim povprečenjem hitrosti ploščic. Na sliki 2 je razvidno, da je ujemanje dobljenega profila z eksaktnim zelo dobro.



Slika 2. Hitrostno polje pri Poiseuillovem toku med dvema ravninama. Prikazani so trije hitrostni profili vzdolž toka.

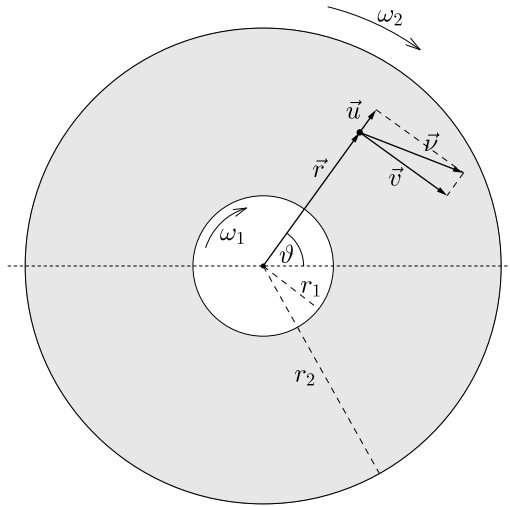
Naslednja, eksaktno rešljiva naloga terja določitev toka med dvema koncentričnima valjema, kjer se valja vrtita okrog skupne osi. Navier-Stokesovo enačbo bomo reševali v cilindričnih koordinatah s hitrostnim poljem $\vec{v} = (u, v)^T$, kjer sta u in v radialni in tangencialni komponenti hitrosti, kot kaže slika 3.

Enačbi za u in v sta [2]:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{uv}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \mu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right).$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0.$$



Slika 3. Radialna in tangencialna komponenta hitrosti pri opisu toka s cilindričnimi koordinatami.

Pri stacionarnem laminarnem toku je $u = 0$, tok je torej le v tangencialni smeri, odvodi po ϑ pa so vsi nič, ker je stacionarno polje od ϑ neodvisno. Zgornje enačbe se zato močno poenostavijo, spet je enačbi za nestisljivost tekočine ustrezno in dobimo:

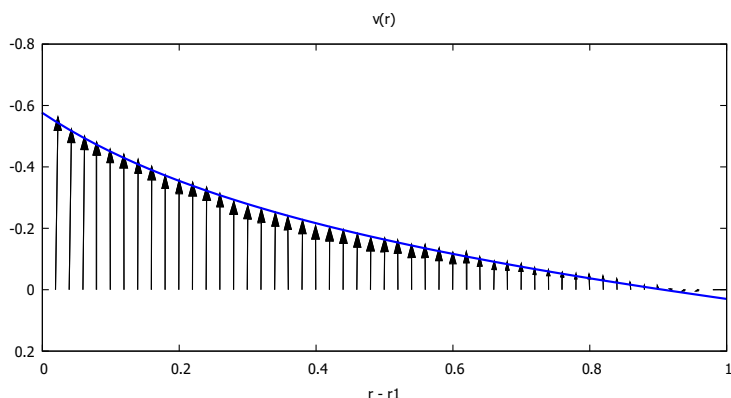
$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = 0.$$

Tangencialna hitrost v je odvisna le od r , zato je druga enačba navadna diferencialna enačba z rešitvama $C_1 r$ in $C_2 \frac{1}{r}$ in splošno rešitvijo:

$$v(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}.$$

Konstanti C_1 in C_2 določimo tako, da dobimo na plaščih valjev predpisani hitrosti. Naj opozorimo, da je rešitev neodvisna od viskoznosti tekočine, kar je za primerjavo med našo rešitvijo in eksaktno še posebej ugodno. Od viskoznosti tekočine je odvisen le čas, v katerem se vzpostavi stacionarno stanje. Pri zelo majhni viskoznosti je ta čas zelo dolg. Prva enačba pa ni več diferencialna in je povsem razumljiva: tlačni gradient v radialni smeri obdrži gibanje izbranega delčka tekočine na krožni poti. Uporabimo jo, če želimo določiti tlak tekočine med valjema.

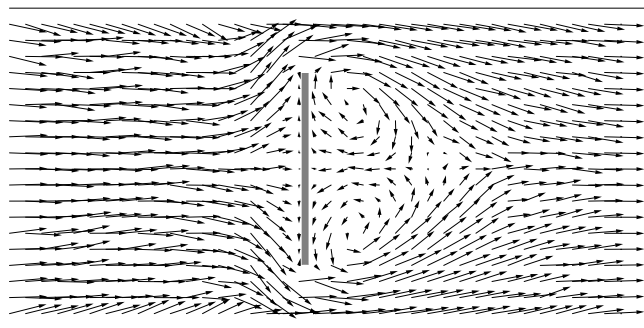


Slika 4. Radialna porazdelitev hitrosti pri toku med dvema valjema, dobljena s povprečjem hitrosti ploščic pri danem radiju.

Na sliki 4 je prikazano povprečje hitrosti \vec{v} ploščic po daljšem času v odvisnosti od radija, kjer povprečje opazujemo. Primerjava z eksaktno rešitvijo pokaže, da je naša metoda zelo uspešna.

Po ovrednotenju pristopa s tema primerjavama se lotimo še dveh nalog. Opazujemo tok med ravninama, ki ga zmotimo z oviro. V tok povprek postavimo ploščo, da lahko teče tok le med ploščo in ravninama. Če opazujemo tak tok v naravi, opazimo za oviro vrtinca. Pojavita se na gladini, tudi ko skozi mirujočo vodo potegnemo ploščat predmet, morda lopatico ali žlico. Na sliki 5 je prikazano polje povprečnih hitrosti ploščic po daljšem času. Jasno sta vidna vrtinca za oviro, ki se pojavita kmalu po zagonu programa in sta postopoma vse bolj izrazita. Hitrostno polje smo primerjali z numerično rešitvijo Navier-Stokesove enačbe. Ujemanje je zelo dobro, kar nas niti ne preseneča več.

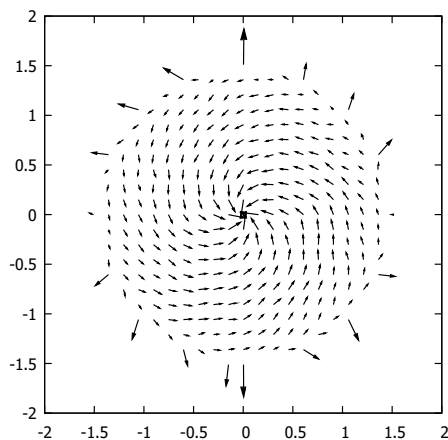
Oglejmo si še zadnji primer. Ko odmašimo odtok v kopalni kadi, začne voda odtekati. Kmalu se nad odtokom pojavi vrtinec, ki gladino močno upogne do skoraj navpične smeri. Večkrat slišimo mit, da je smer vrtenja vode v vrtincu posledica Coriolisove sile, ki se pojavi zaradi vrtenja Zemlje okrog svoje osi. Zato naj bi se na severni polobli voda vrtela v nasprotnem smislu kot na južni polobli. Domiselni domačini, ki so doma blizu ekvatorja, za turiste prirejujejo celo demonstracijo tega mita. Na eni strani ekvatorja se res voda v vrtincu vrte v nasprotni smeri kot na drugi strani. Pri tem sta kadi le nekaj metrov narazen. Čeprav so turisti zadovoljni, pa Coriolisova sila nima znatne vloge pri vrtenju vode. Ta sila ima vpliv le pri zelo obsežnih vremenskih dogajanjih. Vrtinec se pojavi zaradi vrtilne količine, ki jo ima voda pred vstopom v odtok. Zaradi neravnega dna na gibajočo se vodo deluje navor, odvisen od ovire. Dobljena vrtilna količina, čeprav majhna,



Slika 5. Vrtinca za oviro v toku.

blizu odtoka zaradi majhnega polmera vrtinca močno pospeši vodo v njem.

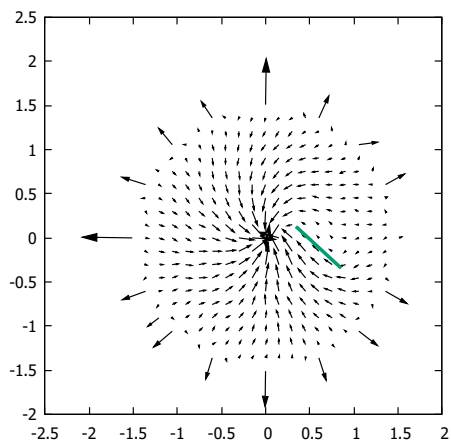
Z metodo trkajočih ploščic smo določili hitrostno polje pri iztekanju vode. Valjasti posodi smo na sredi izrezali odtok. Ploščice, ki so poniknile v odtoku, smo ponovno prestavili na zunanji rob posode. Pri mirujoči posodi je iztekanje in z njim povezano hitrostno polje po pričakovanju povsem radialno, voda ne naredi vrtinca. Pri vrteči se posodi pa je vrtinec lepo viden (glej sliko 6). Vrtinec se pojavi tudi pri mirujoči posodi, če tok naleti na oviro, ki mu z navorom podeli vrtilno količino (glej sliko 7).



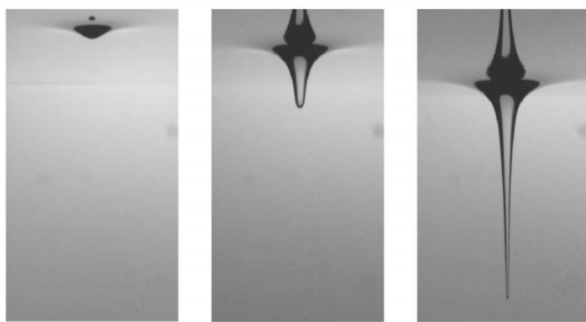
Slika 6. Vrtinčasto iztekanje tekočine iz vrteče se okrogle posode.

Čeprav je pojav vrtinca pri praznjenju kopalne kadi na široko znan, pa natančne fizikalne obravnave dogajanja v vrtincu v literaturi ni bilo zaslediti. Septembra leta 2003 so v reviji *Physical Review Letters* objavili članek

Navier-Stokesova enačba in elastični trki

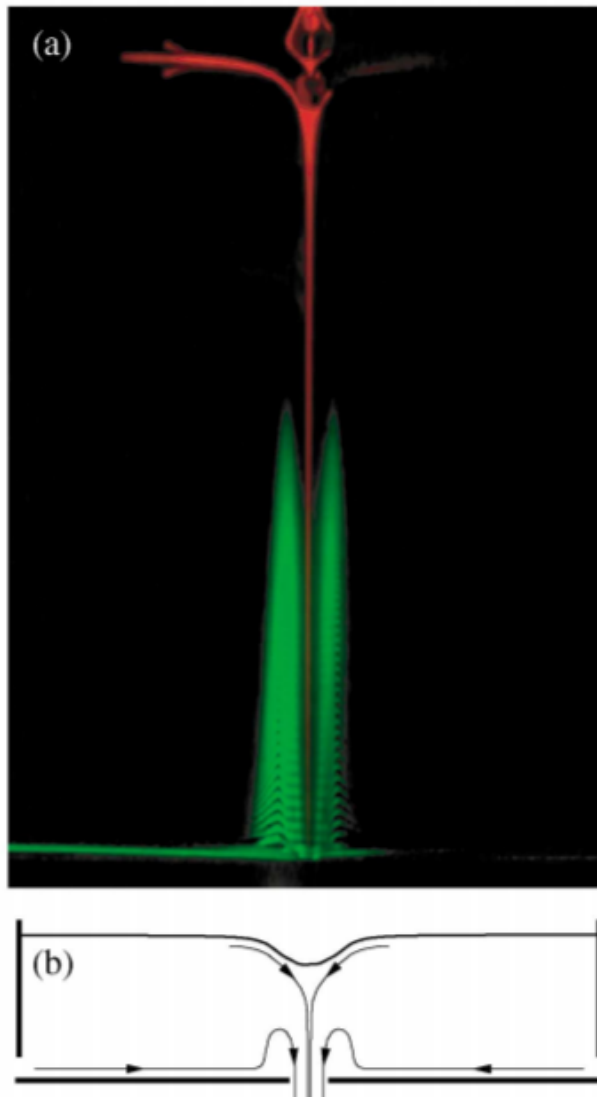


Slika 7. Iztekanje iz mirujoče posode z oviro.



Slika 8. Fotografije vrtnica pri iztekanju iz okrogle vrteče se posode, iz [1].

z naslovom »Anatomy of Bathtub Vortex«, v katerem so s poskusi in računi osvetlili ta pojav. Poskus so naredili z vrtečo se valjasto posodo s sredinskim odtokom na dnu posode. Posoda je bila prirejena tako, da so lahko opazovali obliko vrtnica in hitrostno polje okrog njega. Na sliki 8 vidimo fotografije vrtnica pri različnih kotnih hitrostih posode. Hitrostno polje blizu vrtnica je izredno zapleteno. Prikazali so ga tako, da so na površino vode in na dno kanili fluorescentno barvo, na dno zeleno, na površino pa rdečo. Presenetljive so tokovnice na dnu, ki se v bližini vrtnica dvignejo in nato ukrivijo navzdol (glej sliko 9). Opažanja so se ujemala z izračuni tokovnega polja. Naš pristop seveda ne seže tako daleč, da bi osvetlil podrobnosti v vrtnicu in blizu njega. Za kaj takega bi morali ploščice nadomestiti s kroglicami. O tem pa morda kdaj drugič.



Slika 9. Hitrostno polje v vrtincu in blizu njega je zelo zapleteno. Deli vode na gladini so obarvani rdeče, deli na dnu posode pa zeleno. Pri iztekanju se voda z dna povzpne navzgor, ko je blizu vrtinca. a) fotografija pri iztekanju, b) skica tokovnic; iz [1].

LITERATURA

- [1] A. Andresen, T. Bohr, B. Stenum, J. Juul Rasmussen in B. Lautrup, *Anatomy of a Bathtub Vortex*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 104502–1.
- [2] W. P. Graebel, *Advanced Fluid Mechanics*, Elsevier, 2007.

Občutljivost in specifičnost diagnostičnega testa

Občutljivost in specifičnost

Veliko populacijo $V = a + b + c + d$ pacientov, med katerimi je določen del okužen, testiramo. Testi imajo nekatere pomanjkljivosti. Tako test pri a okuženih potrди okužbo. Pri c okuženih pa test da negativen rezultat – to so *lažno negativni ali napačno negativni*. To imamo ponazorjeno v spodnji tabeli.

— — —	okužen	ni okužen
pozitiven test	a	b
negativen test	c	d

Povzemimo: a je število okuženih s pozitivnim testom, c je število okuženih, a z negativnim testom, torej lažno negativnih. In $a + c$ je število vseh okuženih.

Količnik

$$o = \frac{a}{a + c}$$

je **občutljivost** ali *senzitivnost* testa [4]. To je torej delež pozitivnih (na testu) med resnično okuženimi.

Pri neokuženih je test pri b osebah pozitiven – to so *lažno pozitivni* neokuženi. Pri d neokuženih pa je test pravilno dal negativen rezultat. Količnik

$$s = \frac{d}{b + d}$$

je **specifičnost** testa. To je torej delež negativnih (na testu) med tistimi, ki resnično niso okuženi.

Pomembno je, da vemo oba podatka; en sam je lahko močno zavajajoč. Imejmo populacijo, ki vsebuje tako okužene kot neokužene. Goljufivi test T, ki da vsakič pozitiven rezultat, ima stodontno občutljivost, saj je $c = d = 0$. Ima pa tudi ničelno specifičnost.

Ničvreden test U, ki da vsakič negativen rezultat, ima $a = b = 0$. Ni lažno pozitivnih, zato je specifičnost 100 % – občutljivost pa ničelna.

PCR test za COVID-19 zahteva več ur obdelave v laboratoriju, kjer pomnožujejo genetski material virusa in tako lahko zaznajo virus tudi pri majhnih koncentracijah. Po Wikipediji [8] (vsi podatki so iz januarja 2021) ima povprečno občutljivost okrog 95 %. Če smo bolj podrobni, naj bi bila

občutljivost nekako 70- do 100-odstotna, odvisno od znamke testa in metode odvzema vzorca.

Povprečna specifičnost naj bi bila okrog 99 % (od 92 do 100 odstotkov). Delež lažno pozitivnih med neokuženimi je zelo majhen. V skromnem deležu resnično okuženih pa test neupravičeno kaže odsotnost bolezni. PCR test velja za »zlati standard«: to je trenutno najbolj cenjen test na tržišču. Je eden od tako imenovanih *molekularnih* testov; razvijajo pa tudi nove, drugačne teste te kategorije.

Primer 1. Denimo, da imamo populacijo 10.000 ljudi, med katerimi je dva odstotka, torej 200 ljudi resnično okuženih. Pri občutljivosti 95 % test da pri $a = 190$ okuženih pozitiven rezultat. Deset oseb ($c=10$), torej en promil celotne populacije, je lažno negativnih. Nekateri med temi bodo brezskrbno hodili v službo ali družbo in morda okužili druge. Med 9800 neokuženimi in pri specifičnosti 99 % jih $d = 9702$ testira negativno, $b = 98$ pa lažno pozitivno. Ti zadnji bodo imeli deset dni izolacije in skrbi, čeprav niso okuženi. Nekateri med lažno pozitivnimi bodo morda verjeli, da so brez simptomov preboleli okužbo in da so torej imuni, čeprav to ni res.

V opisanem primeru je $b = 98$ oseb od $a + b = 288$ vseh oseb s pozitivnim testom v resnici brez okužbe. Torej je približno vsak tretji, ki ga je test označil kot okuženega, brez okužbe. Približno dve tretjini tistih s pozitivnim rezultatom pa je res okuženih.

Test je izločil izredno velik delež okuženih in če bodo ti res v karanteni, bo širjenje bolezni bistveno manjše. Velika večina neokuženih bo vsaj začasno pomirjena.

Primer 2. Podatki naj bodo kot zgoraj, le da je 30 odstotkov populacije, torej 3000 oseb okuženih. Pri 95-odstotni občutljivosti nam test pri $c = 150$ ljudeh da lažno negativen rezultat, $a = 2850$ oseb pa dobi pravilno diagnozo. Med 7000 neokuženimi je pri specifičnosti 0,99 en odstotek, torej $b = 70$ lažno pozitivnih, $d = 6930$ oseb pa dobi pravilno negativno diagnozo. Med vsemi ($a + b = 2920$ osebami) s pozitivnim rezultatom je le 70, torej približno 2,4 odstotka, lažno pozitivnih. Torej je med tistimi s pozitivnim testom približno 97,6 % res okuženih. Problem lažno negativnih pa je seveda bistveno večji kot v prejšnjem primeru.

Hitri antigenski testi

Hitri antigenski testi reagirajo na določeno, za virus značilno beljakovino na njegovi površini. Zato mora biti za pozitiven rezultat v vzorcu dovolj virusov. Časovni interval v poteku bolezni, v katerem test zazna virus, je

precej ožji kot pri PCR testu. Tako je občutljivost manjša kot pri PCR testih in je več lažno negativnih. Specifičnost pa naj bi bila enako visoka kot pri PCR testih. Tako lahko hitro identificiramo zelo kužne osebe. Ti testi so veliko cenejši in dajo rezultate že v četrt ali pol ure.

Svetovna zdravstvena organizacija (WHO) priporoča, naj uporabljamo hitre antigenske teste, ki imajo občutljivost vsaj 80 % in specifičnost vsaj 97 %. Evropska ustanova ECDC priporočilo za občutljivost zvišuje na vsaj 90 %. V Franciji gredo korak dalje in priporočajo specifičnost vsaj 99 %.

Problem je, če se pri izbiri testa zanašamo na podatke proizvajalcev. Kot pravi nedavni članek [2] v reviji *The Lancet*, je za izredno začasno odobritev testa v ZDA dovolj že, da producent predloži rezultate testiranja na 30 vzorcih. Preizkus je praktično zmeraj narejen na simptomatskih posameznikih (torej ljudeh s simptomi covid-19), ki so bili pozitivni na PCR testu (torej na osebah z visoko obremenitvijo z virusom). Kateri PCR test je bil to, proizvajalci ne navajajo. Nekateri proizvajalci v navodilih pravijo, da so hitri testi mišljeni le za simptomatske posameznike. Ti testi so novost na tržišču in zato ni veliko neodvisnih preverjanj občutljivosti in specifičnosti. Poleg tega so pri danem testu rezultati precej odvisni od izvedbe.

Raziskovalci z Univerze Oxford so v študiji [11] za hitri antigenski test I kalifornijskega podjetja ugotovili zelo visoko specifičnost: 99,6 %. Med vzorci, ki so bili na PCR testu pozitivni, pa je ta antigenski test v povprečju le 77 % spoznal za pozitivne. Če so teste opravljali laboranti, je bil ta delež nekaj višji (79 %), če priučeno medicinsko osebje, pa 73 %. Če so teste opravljali laiki (kot je denimo pri uporabi testov doma), je vrednost padla pod 58 %.

Kasnejša analiza [9] istega testa I, opravljena med množičnim testiranjem v Liverpoolu, je dala občutljivost 40 % in specifičnost 99,9 %. Med asimptomatskimi osebami z veliko produkcijo virusa je bila občutljivost 66 %.

Ameriška raziskava [5] hitrega antigenskega testa S na študentski populaciji (ki ni ravno odraz celotne populacije) je pokazala naslednje rezultate: na simptomatskih posameznikih: občutljivost 80 %, specifičnost 99 %; na asimptomatskih študentkah in študentih (brez znakov bolezni): občutljivost 41 %, specifičnost 98,4 %.

V francoski študiji [3] za ta isti test S na asimptomatskih osebah navajajo občutljivost 70 % in specifičnost 99 %. V dovoljenju za začasno uporabo testa S so navedeni rezultati iz proizvajalčeve študije: občutljivost 96,7 %, specifičnost 100 %.

Kako se znajti v džungli tako različnih, večkrat nasprotujočih si rezultatov za en in isti test? Kako izbrati dober test? Odgovor so *primerjalne raziskave*, kjer neodvisni znanstveniki več testov uporabijo pod istimi pogoji.

Nemški virologi in infektologi so v preprintu [1] preizkušali sedem anti-genskih testov, večinoma izdelkov velikih znanih podjetij. Pet jih je imelo specifičnost med 98,5 % in 100 %, eden je imel specifičnost 95 % in eden specifičnost 88 %. Test z najnižjo specifičnostjo je bil dobesedno premalo specifičen: zdi se, da je včasih reagiral tudi na viruse gripe in druge podobne viruse. Vendar je bilo s tem mogoče razložiti le pol lažno pozitivnih rezultatov. Namesto občutljivosti so raje merili, kakšne koncentracije virusa lahko test še zazna.

Francoska primerjava [3] desetih (verjetno tam najbolj popularnih) hitrih antigenih testov je pokazala na asimptomatskih posameznikih občutljivost od 30 do 50 odstotkov pri devetih testih. En sam test (S) je tu dosegel vrednost 70 %. Ta test je imel specifičnost 99 %, preostali pa 100 %.

Seznam hitrih antigenih testov, katerih rezultate so nedavno (15. januarja) priznavali pri vstopu v Francijo, je daljši in je na [10]. Med skoraj petdesetimi odobrenimi izdelki je tudi test podjetja Shenzhen Ultra-Diagnostics Biotec. Ta test je kupila naša država. Ni pa bil vključen v gornji primerjalni raziskavi. Kot razumemo, je pri nas večinoma uporabljen na asimptomatskih osebah.

Primer 3. V populaciji $V = 10.000$ asimptomatskih oseb je $x = 10$ %, torej 1000 oseb okuženih. Hitri antigeni test naj ima za to populacijo občutljivost 0,5 in specifičnost 0,99. Med 1000 okuženimi jih test odkrije 500. Preostalih 500 okuženih je lažno negativnih. Med 9000 neokuženimi je en odstotek, torej 90 lažno pozitivnih. Pravilno negativno diagnozo pa dobi 8910 oseb.

Test je torej izločil 500 okuženih in 90 neokuženih posameznikov. Prepustil pa je 500 okuženih.

Hitri antigeni testi spregledajo precejšen delež okuženih – predvsem tiste, pri katerih se bolezen šele razvija. Izločijo pa visok delež (trenutno) zelo kužnih posameznikov. Če tak test ponovimo po nekaj dneh, bomo izločili veliko tistih, pri katerih se je pri prvem testu bolezen šele začela.

V Beli hiši v ZDA so se zanašali na pogoste hitre antigenske teste, a je vseeno prišlo do izbruha bolezni. Treba je pač upoštevati tudi druge ukrepe za preprečevanje okužb.

Presejalni testi

Problem velikega deleža lažno pozitivnih imamo pri *presejalnih testih* za nekatere redke, a resne bolezni. To niso diagnostični testi. Gre za sito, uporabljeno na veliki populaciji, ki naj bi prepustilo kar se da velik delež oseb brez problemov in zadržalo praktično vse s problemom. Tako je preostanek

na situ (to so pozitivni na testu) bistveno manjši od testirane populacije. Na preostanku laže izvedemo dražja, zamudnejša presejanja ali bolj agresivne diagnostične postopke. Udeležencem takih testov je nujno treba pojasniti, da pozitiven presejalni test še ne pomeni diagnoze. (Tudi testiranje celotne populacije s hitrimi testi spada med presejalne teste.)

Eden od presejalnih testov bazira na rentgenskih slikah. Razlike med kakovostjo dela radiologov so lahko precejšnje. Branje komaj vidnih lis na sliki ni enostavno in zahteva veliko pozornosti in izkušenj. Tudi v literaturi se podatki o senzitivnosti in specifičnosti danega testa precej razlikujejo.

Če se trudimo, da ne bi spregledali tudi najmanjše potencialno problematične spremembe, se pravi, povečujemo občutljivost, tvegamo več lažno pozitivnih rezultatov, torej zmanjšanje specifičnosti. Uravnoteženje občutljivosti in specifičnosti je pogosto delikatna naloga.

Primer 4. Privzemimo, da občutljivost in specifičnost presejalnega testa znašata 90 odstotkov, torej $s = o = 0,9$. Denimo, najprej, da je v populaciji delež nediagnosticiranih *problemov* (kar ustreza *okuženim* v prejšnjih primerih) en odstotek. Pri $V = a + b + c + d = 10.000$ testiranih ima le $a + c = 100$ oseb problem. Med njimi bo $a = 90$ dobilo pravo diagnozo, $c = 10$ pa lažno negativen rezultat. Od 9900 neproblematičnih pacientk (pacientov) bi $b = 990$ dobilo lažen pozitiven rezultat, 8910 pa pravilen negativen rezultat. Na situ je od 10.000 oseb ostalo 1080 ljudi. Med njimi jih ima le 90 problem, torej le ena dvanaajstina ali približno 8,3 odstotka. Lažno pozitivnih je enajstkrat toliko, kot je resnično ogroženih. Skozi sito je padlo 10 oseb s problemom in ti za zdaj ne bodo deležni nadaljnje obravnave.

Pozitivna in negativna napovedna vrednost

Iz primerov vidimo, da za uspešnost oziroma uporabnost testa nista pomembni le njegova občutljivost in specifičnost, temveč tudi delež oseb v populaciji, ki imajo problem. Naj bo $V = a + b + c + d$ celotna populacija. Označimo z

$$x = \frac{a + c}{V}$$

delež okuženih (problematičnih) oseb v testu.

Torej je $a + c = xV$ in $b + d = V - xV = (1 - x)V$. Vemo, da je $a = o(a + c) = oxV$ in $d = s(b + d) = s(1 - x)V$. Od tod je $b = b + d - d = (1 - x)V - s(1 - x)V = (x(s - 1) + 1 - s)V$ in $c = a + c - a = xV - oxV = (x - ox)V$.

Vpeljali bomo dve novi merili. To sta *pozitivna napovedna vrednost* in *negativna napovedna vrednost*. Obe ležita na intervalu od 0 do 1 in sta močno odvisni od deleža x okuženih (problematičnih) oseb.

Pozitivna napovedna vrednost ali *preciznost* p testa je za našo tabelo enaka

$$p = \frac{a}{a + b}.$$

Število okuženih s pozitivnim testom delimo s številom vseh, ki imajo pozitiven test. Po gornjih računih je

$$p(x) = \frac{ox}{(s + o - 1)x + 1 - s}.$$

Tako je p ulomljena linearna funkcija spremenljivke x . Pri fiksni občutljivosti o in specifičnosti s je p močno odvisen od deleža okuženih, saj je $p(0) = 0$, $p(1) = 1$.

Pri presejalnih testih je delež x problematičnih oseb v populaciji blizu 0. Ker je $p(0) = 0$, je pozitivna napovedna vrednost $p(x)$ majhna: na situ ostane preveč oseb. To je velik problem tako za paciente (pacientke) kot za javno zdravstvo. Če so za napačne rezultate odgovorne slučajne napake (šum), pomaga ponovitev presejalnega testa. Recimo, posamezna dodatna digitalna rentgenska slika je glede izpostavljenosti sevanju malenkost v primerjavi z računalniško tomografijo (CT), ki je ekvivalent nekaj sto posameznim slikam. Mogoče so dodatne nenevarne preiskave, kot je ultrazvok. Včasih pomaga, če originalno sliko neodvisno pregledata dva strokovnjaka, ki ob nestrinjanju pokličeta še tretjega. Pomembno je, da zmanjšamo število nadaljnjih bolj agresivnih diagnostičnih postopkov.

Negativna napovedna vrednost n testa za našo tabelo je število neokuženih z negativnim testom deljeno s številom vseh, ki imajo negativen test:

$$n = \frac{d}{c + d}.$$

Ker je $c = (x - ox)V$ in $d = s(1 - x)V$, je

$$n(x) = \frac{s(1 - x)}{s - (s + o - 1)x}.$$

Vidimo: $n(0) = 1$, $n(1) = 0$. Če je delež x problematičnih (okuženih) majhen, pričakujemo, da bo $n(x)$ blizu 1 in torej negativna napovedna vrednost visoka.

Oglejmo si še enkrat primer 1. Pozitivno napovedno vrednost smo že izračunali: $p = 190/288 \approx 66\%$. To odraža dejstvo, ki smo ga že povedali: med pozitivno testiranimi je približno dve tretjini res okuženih.

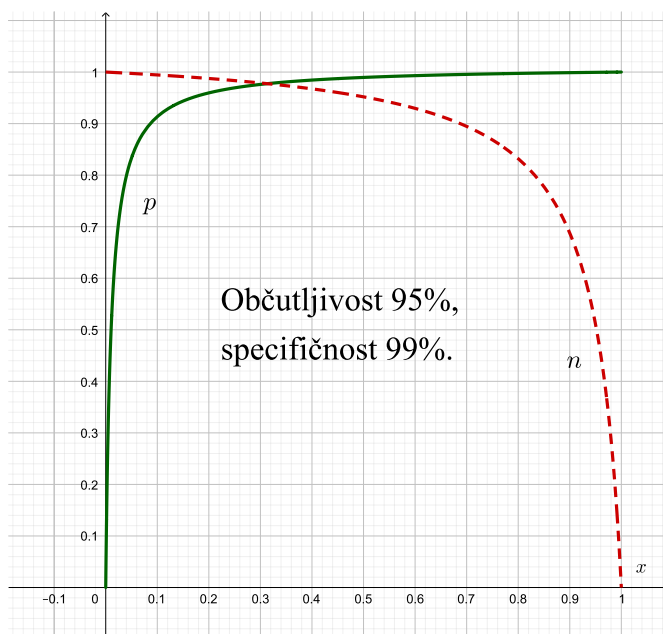
Med 9712 osebami z negativnim testom je 9702 res neokuženih, torej je negativna napovedna vrednost izredno visoka: $n \approx 99,9\%$. Za posameznika je pri negativnem testu možnost okužbe skoraj izključena.

Občutljivost in specifičnost diagnostičnega testa

V primeru 2 je pri isti občutljivosti in isti specifičnosti kot v prvem primeru: $p = 2850/(2850 + 70) \approx 97,6 \%$. Tolikšen delež je res okuženih med vsemi, ki so bili na testu pozitivni. Pozitivna napovedna vrednost je zdaj visoka. Pozitiven rezultat na testu skoraj gotovo pomeni okužbo.

Med 7080 osebami z negativnim testom je 6930 res neokuženih, torej je negativna napovedna vrednost prav tako visoka: $n \approx 98 \%$.

Na sliki 1 imamo grafa za pozitivno in negativno napovedno vrednost (črtkano) pri $o = 0,95$, $s = 0,99$.



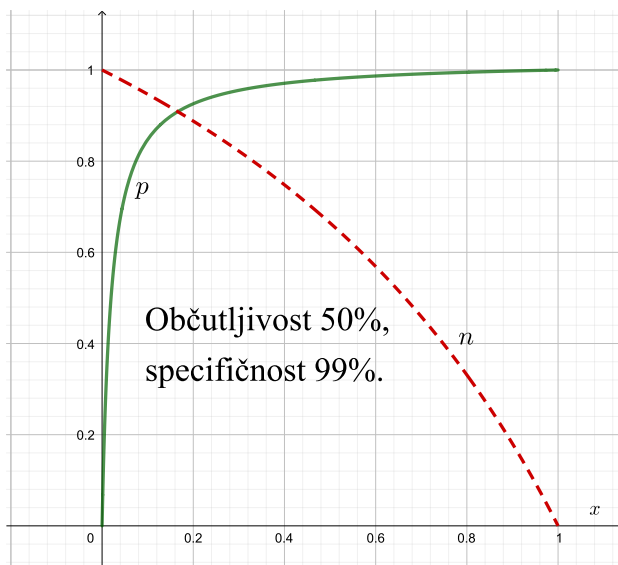
Slika 1. Pozitivna in negativna napovedna vrednost za $o = 0,95$, $s = 0,99$.

V primeru 3 (antigenski test) je med 590 osebami s pozitivnim testom 500 res okuženih, torej je pozitivna napovedna vrednost $500/590 \approx 85 \%$.

Med 9410 ljudmi z negativnim testom je 8910 res neokuženih, zato je negativna napovedna vrednost $8910/9410 \approx 95 \%$.

V našem primeru je bilo med 10.000 testi 590 pozitivnih, torej slabih 6 odstotkov. Delež okuženih v testirani populaciji pa je višji in znaša 10 odstotkov. Tudi to ilustrira pomanjkljivosti testa.

Na sliki 2 sta grafa za pozitivno in negativno napovedno vrednost (črtkano) pri $o = 0,5$, $s = 0,99$.



Slika 2. Pozitivna in negativna napovedna vrednost za $o = 0,5$, $s = 0,99$.

V četrtem primeru (presejalni test) smo že izračunali, da je pozitivna napovedna vrednost zelo nizka in enaka $1/12 \approx 8,3$ %. Kljub temu bi lahko rekli, da je test opravil svojo nalogo: populacija, ki gre v nadaljnjo obravnavo, je približno ena devetina prvotne.

Negativna napovedna vrednost pa je izredno visoka in enaka $8910/8920 \approx 99,9$ %. To pač pomeni, da si pri negativnem testu lahko oddahnemo: verjetnost, da imamo problem, je izredno majhna.

Če v četrtem primeru povečamo vrednost za x na 5 odstotkov, je pozitivna napovedna vrednost enaka $450/(450 + 950) \approx 32$ %. V tem primeru ima približno vsaka tretja oseba s pozitivnim testom res problem. Pozitivna napovedna vrednost je zdaj mnogo boljša. Negativna napovedna vrednost je enaka $8550/(8550 + 50) \approx 99,4$ % in tako še vedno izredno visoka.

Naloga. V raziskavi [7] je bilo testiranih 122 oseb. Izračunali so, da je bila občutljivost testa 97 %, specifičnost 64,5 %, pozitivna napovedna vrednost 89 %. Približno koliko oseb je v resnici imelo problem?

Pisanje tega prispevka je spodbudilo branje odlične poljudne knjige *The Maths of Life and Death, Why Maths Is (Almost) Everything* [6]. Napisal jo je Kit Yates, profesor in eden od direktorjev Centra za matematično biologijo

na Univerzi v angleškem mestu Bath. Čeprav je knjiga izšla pred sedanjo pandemijo, je njena vsebina še kako relevantna v današnjih razmerah in nam je bila za vzor, skupaj s predavanji [4] profesorice dr. Maje Petek Šter. Z veseljem smo uporabili pripombe obeh recenzentov.

(Rešitev naloge: 91–92.)

LITERATURA

- [1] V. C. Corman et al., *Comparison of seven commercial SARS-CoV-2 rapid Point-of-Care Antigen 1 tests*, preprint, 2020, dostopno na www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.11.12.20230292v1.full.pdf, ogled 25. 1. 2021.
- [2] M. C. Fitzpatrick et al., *Buyer beware: inflated claims of sensitivity for rapid COVID-19 tests*, *The Lancet* 397(10268) (2021) 24–25, dostopno na www.thelancet.com/action/showPdf?pii=S0140-6736, ogled 25. 1. 2021.
- [3] S. Fourati et al., *Évaluation de la performance diagnostique de neuf tests rapides antigéniques COVID-19*, Assistance publique – Hôpitaux de Paris, 2020, dostopno na www.aphp.fr/contenu/evaluation-de-la-performance-diagnostique-de-neuf-tests-rapides-antigeniques-covid-19, ogled 25. 1. 2021.
- [4] M. Petek Šter, *Interpretacija rezultatov statističnih testov*, Praktična statistika, Medicinska fakulteta, Ljubljana, februar–marec 2016, dostopno na www.mf.uni-lj.si/application/files/9315/3842/0966/EBM_petek_2.pdf, ogled 25. 1. 2021.
- [5] I. W. Pray et al., *Performance of an Antigen-Based Test for Asymptomatic and Symptomatic SARS-CoV-2 Testing at Two University Campuses – Wisconsin*, 2020, CDC Morbidity and mortality weekly report, 1. jan 2021 / 69(5152); 1642–1647, dostopno na www.cdc.gov/mmwr/volumes/69/wr/mm695152a3.htm, ogled 25. 1. 2021.
- [6] K. Yates, *The Maths of Life and Death, Why Maths Is (Almost) Everything*, Quercus, London, 2019.
- [7] M. Zeeshan et al., *Diagnostic Accuracy of Digital Mammography in the Detection of Breast Cancer*, *Cureus* 10(4), 2018, dostopno na www.researchgate.net/publication/324312923_Diagnostic_Accuracy_of_Digital_Mammography_in_the_Detection_of_Breast_Cancer, ogled 25. 1. 2021.
- [8] *COVID-19 testing*, Wikipedia, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_testing, ogled 25. 1. 2021.
- [9] *Expert reaction to Interim Evaluation Report from the Liverpool Covid-19 Community Testing Pilot*, Science Media Centre, 2020, dostopno na www.sciencemediacentre.org/expert-reaction-to-interim-evaluation-report-from-the-liverpool-covid-19-community-testing-pilot/, ogled 25. 1. 2021.
- [10] *List of antigen tests authorized for entry to France from UK*, dostopno na uk.ambafrance.org/List-of-antigen-tests-authorized-for-entry-to-France-from-UK-29434, ogled 25. 1. 2021.
- [11] *Preliminary report from the Joint PHE Porton Down and University of Oxford SARS-CoV-2 test development and validation cell: Rapid evaluation of Lateral Flow Viral Antigen detection devices (LFDs) for mass community testing*, dostopno na www.ox.ac.uk/sites/files/oxford/media_wysiwyg/UK%20evaluation_PHE%20Porton%20Down%20%20University%20of%20Oxford_final.pdf, ogled 25. 1. 2021.

Peter Legiša

Bojan Mohar je postal član Royal Society of Canada

Bojan Mohar je bil izvoljen v *Royal Society of Canada*. Ta ustanova ima tri oddelke. Profesor Mohar je postal član *Akademije znanosti*, ki je letos medse sprejela dva matematika.



Kratka obrazložitev pravi:

Bojan Mohar – Oddelek za matematiko na Univerzi Simon Fraser, je v svetovnem merilu vodilni teoretik na področju teorije grafov in je dal globoke prispevke k osrednjim področjem v diskretni matematiki. Njegovi globoki in fundamentalni rezultati predstavljajo napredek v algebraični, strukturni in topološki teoriji grafov in so vplivali na teoretično računalništvo, matematično kemijo in druga polja. Njegovo delo je spremenilo teorijo grafov in zanj je dobil Eulerjevo medaljo (ki mu jo je podelil *Institute of Combinatorics and its Applications*) ter nagrado *John L. Synge Award*, ki mu jo je dala prav *Royal Society of Canada*. Za svoje zasluge je postal *AMS Fellow*, *SIAM Fellow* in *Canada Research Chair*.

Tu je *AMS American Mathematical Society*, *SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics*. Zadnja pozicija pa profesorju Moharju prinaša radodarno podporo pri raziskovalnem delu. O tem smo že poročali v Obzorniku.

Profesor Mohar vzdržuje tesne stike s slovensko matematiko.

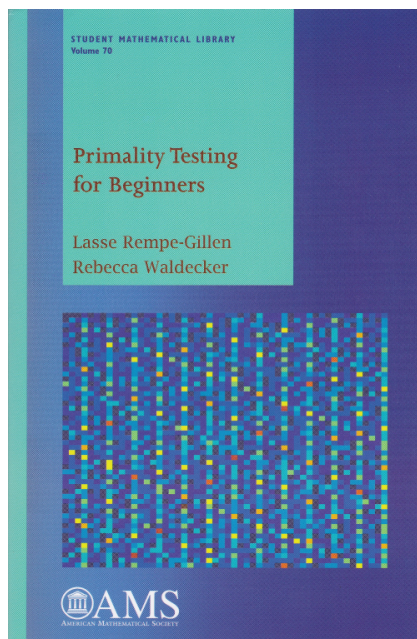
Peter Legiša

NOVE KNJIGE

L. Rempe-Gillen, R. Waldecker, Primality testing for beginners, Student Mathematical Library Vol. 70, American Mathematical Society, 2014, 244 strani.

S praštevilci se srečamo že zelo zgodaj. Učimo se, da lahko poljubno naravno število, različno od ena, zapišemo kot produkt potenc praštevil. Torej so praštevila osnovni gradnik naravnih števil, in po tej svoji lastnosti so tudi dobila ime. Pri iskanju prafaktorjev danega števila kaj hitro ugotovimo, da na vprašanje, ali je neko število praštevilo, ne znamo vedno enostavno odgovoriti. Problem poiškati algoritem, ki bi v polinomskem času glede na število znakov v zapisu danega števila (učinkovit algoritem) pri enakem številu vedno podal enak odgovor (determinističen algoritem), ali je število res praštevilo, je dolgo časa mučil matematike. Že v 70. letih so obstajali nedeterministični algoritmi, ki testirajo praštevilskost z visoko verjetnostjo pravilnega odgovora. Leta 2002 pa so Agrawal, Kayal in Saxena odkrili učinkovit in determinističen test praštevilskosti, ki je danes znan kot *AKS algoritem*. Najava rezultata je kmalu pritegnila veliko pozornosti, objava v prestižni reviji *Annals of Mathematics* pa je sledila dve leti kasneje. Osrednji namen knjige je predstaviti natanko tiste koncepte, ki so potrebni za razumevanje smisla in dokaza omenjenega rezultata, pri čemer se predpostavlja poznavanje le srednješolske matematike. Iz predgovora je mogoče razbrati, da je knjiga nastala po predavanjih avtorjev na nemški poletni akademiji za srednješolce leta 2005. Povod za izvedbo takih predavanj je bila izjemna dostopnost do tako pomembnega in lepega dosežka, kar je v matematiki prava redkost.

Knjiga je namenjena predvsem mladim matematikom in bolj amaterskim entuziastom z matematično žilico, ki želijo podrobneje spoznati paradigmo



in prakso modernega matematičnega raziskovanja, v katerem poleg dobrega poznavanja teorije igrajo (že pri samem oblikovanju hipotez, kot tudi pri njihovem testiranju in dokazovanju) nepogrešljivo vlogo tudi računalniki, algoritmi in eksperimentiranje, podobno eksperimentiranju v drugih znanostih. Toda to nikakor ne pomeni, da knjiga ni zanimiva tudi za bolj izkušene matematike.

Knjiga je napisana in oblikovana zelo pregledno, z algoritmi v okvirčkih, ter z definicijami in izreki na osončenih poljih. V uvodu je poleg privlačnega opisa celotne vsebine pojasnjen tudi koncept matematičnega dokaza, razložen pa je tudi pomen definicij, lem in izrekov. Prav tako so opisani pogosti simboli in pojmi, ki so stavljeni krepko. Vsi algoritmi so zapisani v preprosti psevdokodi, kar olajša branje programiranja neveščemu bralcu. Knjiga je razdeljena na dva dela, *Osnove* in *AKS algoritem*. Sledita dodatka, namenjena odprtim problemom in rešitvam pomembnejših nalog, prav tako seznam literature in uporabljenih simbolov ter stvarno kazalo. Skoraj vsako poglavje se zaključí z navedbo in kratkim opisom dodatne literature. Večina podpoglavij na koncu vsebuje naloge, ki pomagajo pri utrjevanju in razumevanju snovi iz pripadajočega podpoglavja ter poudarjajo lastno aktivnost bralca (angl. learning by doing). Pogosto nalogam sledi še razdelek z dodatnimi napotitvami na ustrezno literaturo in zgodovinskimi pojasnili ter zahtevnejšimi nalogami.

Na kratko preglejmo vsebino knjige. Prvi del, *Osnove*, vsebuje štiri poglavja. Prvo obravnava osnovne lastnosti naravnih števil in praštevil. Spoznamo princip matematične indukcije, pojem deljivosti, osnovni izrek aritmetike, Evklidov algoritem in Eratostenovo rešeto. Že res, da je Eratostenovo rešeto determinističen algoritem za odločitveni problem PRAŠTEVILSKOST (angl. PRIMES), ki naj z da ali ne odgovori na vprašanje, ali je dano število n praštevilo. Toda ta algoritem je daleč od učinkovitega, saj je njegova časovna zahtevnost polinomska v n , ne pa tudi v $\log n$.

Drugo poglavje je namenjeno algoritmom in računski zahtevnosti. Že uvodne besede nakazujejo, da na preprosto vprašanje, kaj je algoritem, ni lahko najti dobrega odgovora. Za ponazoritev pojma algoritem avtorja posrečeno navedeta algoritma za peko palačink ter za pisanje kriminalnih uspešnic, nato pa v obliki algoritma zapišeta še znano Collatzovo funkcijo, ki sodo število n zamenja z $n/2$, liho število n pa s $3n + 1$. Mimogrede

je predstavljena še slavna in nedokazana Collatzova domneva, ki pravi, da se ta postopek vselej konča s številom 1. V nadaljevanju sta definirana in s kopico primerov ilustrirana razreda **P** in **NP**, poglavje pa se zaključi z definicijama nedeterminističnih algoritmov tipov Monte Carlo in Las Vegas, ki spadata v razred verjetnostnih algoritmov. Metoda Monte Carlo daje pravilne rezultate le z določeno verjetnostjo, metoda Las Vegas pa vselej daje pravilen rezultat, toda njen računski čas je lahko neomejen. Cilj knjige je dokaz trditve PRAŠTEVILSKOST \in **P**.

Tretje poglavje je jedro knjige, saj tu spoznamo pojme in orodja iz teorije števil, na katerih temeljijo vsi moderni testi praštevilskega. Najpomembnejša rezultata sta *mali Fermatov izrek* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ki velja za vsako celo število a tuje praštevilu p , in Eulerjeva posplošitev $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ za $n \geq 2$, kjer je $D(a, n) = 1$, $\varphi(n)$ pa je število tistih elementov množice $\{1, \dots, n-1\}$, ki so tuja številu n . S tem je povezan tudi *red števila a po modulu n* z oznako $\text{ord}_a(n)$, ki je definiran kot najmanjši tak eksponent $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja $a^k \equiv 1 \pmod{n}$. Izrek lahko uporabimo za naslednji *Fermatov test*. Naključno izberimo a iz množice $\{1, \dots, n-1\}$. Če je $D(a, n) \neq 1$, odgovorimo » n je sestavljeno število«. V nasprotnem izračunamo a^{n-1} po modulu n , za kar obstaja učinkovit algoritem. Če dobljeno število ni 1, ponovno odgovorimo » n je sestavljeno število«, v nasprotnem pa » n je morda praštevilo«. Mali Fermatov izrek zagotavlja, da v primeru praštevila n algoritem vrne rezultat » n je morda praštevilo«, toda to se lahko zgodi tudi za sestavljena števila n , npr. za $n = 15$ in $a = 11$. Taka števila n se imenujejo *pseudopraštevila glede na osnovo a* . Izkaže se, da je število tistih osnov, za katera je n pseudopraštevilo, lahko $\varphi(n)$ ali pa največ $\varphi(n)/2$. Če bi vedno veljalo le slednje, bi bil Fermatov test učinkovit algoritem tipa Monte Carlo (**RP**) za odločitveni problem SESTAVLJENOST (ang. COMPOSITES). Žal pa obstajajo *Carmichaelova števila*, ki so pseudopraštevila glede na vsako možno bazo. Prvo tako število je 561. Vseeno lahko Fermatov test popravimo do verjetnostnega algoritma. Gary L. Miller je leta 1976 dokazal posebno verzijo malega Fermatovega izreka, ki ga je štiri leta kasneje Michael O. Rabin uporabil pri konstrukciji *Miller-Rabinovega algoritma*, ki dokazuje pripadnost problema SESTAVLJENOST razredu **RP**. V knjigi je pravilnost delovanja algoritma dokazana v četrtem poglavju, kjer pred tem spoznamo še osnove kriptografije in RSA metode šifriranja, najpomembnej-

šega primera kriptografije z javnim ključem. Pri tej metodi odločilno vlogo igrajo javno znana števila, ki so produkt dveh velikih in naključno generiranih praštevil, skriti tudi uporabnikoma RSA šifriranja. Varnost metode temelji na principu, da je bistveno lažje ugotoviti, da je neko število sestavljeno, kot pa ga faktorizirati. Prvi del odlično opravi Miller-Rabinov algoritem, ki je popularen tudi zaradi svoje hitrosti. Čeprav sta računski zahtevnosti AKS in Miller-Rabinovega algoritma enaki, je njuna hitrost na konkretnih primerih težko primerljiva. Učinkovitost izbora naključnega praštevila zagotavlja šibka verzija praštevilskega izreka $x \ll \pi(x) \log x$, ki je v knjigi dokazana pred Miller-Rabinovim algoritmom. Do sedaj še nikomur ni uspelo najti učinkovitega algoritma, ki bi podal faktorizacijo poljubnega števila, in splošno prepričanje je, da tak algoritem ne obstaja. Bi se pa to z iznajdbo delujočega kvantnega računalnika spremenilo, saj taki kvantni algoritmi obstajajo.

Drugi del knjige ima tri poglavja in je namenjen AKS algoritmu. V prvem poglavju izvemo, da prava pot k determinističnemu testu praštevilstva pelje preko polinomske različice malega Fermatovega izreka: za praštevilo p velja $(P(X))^p \equiv P(X^p) \pmod{p}$, kjer je $P(X)$ celoštevilski polinom. Osnovne lastnosti polinomske modularne aritmetike se obravnavajo že v zadnjih dveh podpoglavjih tretjega poglavja v prvem delu knjige. Toda take kongruence še niso dovolj, potrebno je študirati

$$(P(X))^n \equiv P(X^n) \pmod{n, Q},$$

kjer je tudi Q celoštevilski polinom. Ta zapis pomeni, da pri deljenju leve in desne strani s Q dobimo enak ostanek po modulu n . Posledica Fermatovega izreka je, da če za neka polinoma P in Q kongruenca ne velja, je n sestavljeno število. Obratno ni vedno res, kot kaže primer $(X - 1)^{24} \equiv X^{24} - 1 \pmod{24, X^2 - 1}$, ki je bralcu prepuščen v samostojno reševanje. Vprašanje je, ali obstajata taki majhni množici polinomov P in Q , za katere veljavnost pripadajočih kongruenc implicira praštevilstva števila n . Agrawal, Kayal in Saxena so dokazali, da takšni množici obstajata. Koraki njihovega algoritma so presenetljivo enostavni, toda preverba učinkovitosti delovanja je bistveno težja. V prvem koraku preverimo, ali je n popolna potenca, za kar obstaja učinkovit algoritem. Če je odgovor negativen, se v drugem koraku z r sprehodimo po naravnih številih na naslednji način. Najprej se

z Eratostenovim rešetom prepričamo, da je r praštevilo. Če velja $r < n$ in r deli n , odgovorimo » n ni praštevilo«. Če je $r \geq n$, odgovorimo » n je praštevilo«. Če ne velja nič od tega, izračunamo $\text{ord}_r(n)$. Drugi korak ponavljamo, dokler ne dobimo enega od gornjih dveh odgovorov ali dokler ne velja $\text{ord}_r(n) > (2 \log_2 n)^2$. Če se zgodi slednje, začnemo z izvajanjem tretjega koraka, kjer preverjamo veljavnost kongruence

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{n, X^r - 1}$$

za vsak $a \in \{1, \dots, r\}$. Če katera od kongruenc ni izpolnjena, odgovorimo » n ni praštevilo«, sicer pa » n je praštevilo«. Seveda se porajata ključni vprašanji, ali pravilnost vseh kongruenc res zagotavlja praštevilstvo števila n , in ali lahko vedno učinkovito poiščemo tak r , pri čemer mora njegova velikost naraščati kvečjemu polinomsko v $\log n$. Na prvo vprašanje odgovori osrednji izrek Agrawala, Kayala in Saxena, ki je dokazan v drugem poglavju. Zahtevane lastnosti števila r so dokazane v zadnjem poglavju knjige, kjer je pravilnost delovanja AKS algoritma pregledno dokazana po korakih. V zaključku sledijo še diskusije o hitrosti algoritma, nekaterih odvečnih omejitvah in nadaljnjem razvoju.

Knjigo, ki daje celovit pregled vsega, kar je potrebno za razumevanje AKS algoritma, zaokrožajo nekateri izreki in odprti problemi s področja teorije števil in reference za nadaljnji študij. Mnogi slavni odprti problemi iz teorije števil so navdihnili tudi popularne knjige, kot je npr. Doxiadisova *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*. Vsem, ki jih zanimajo praštevila in odprti problemi v zvezi z njimi ter odkrivanje zelo velikih praštevil, avtorja svetujeta ogled spletne strani *The Prime Pages*, dostopne na <https://primes.utm.edu/>.

Knjiga izpolnjuje uvodne obljube in ponuja številne priložnosti za njeno uporabo. Na gimnazijskem matematičnem krožku bi se jo lahko predelalo v enem letu, program bi bilo mogoče izvesti tudi v obliki delavnic in projektov na kakšnem od matematičnih taborov. Ker je vsebina knjige na stičišču elementarne in računske teorije števil, je vsebina zagotovo zanimiva za nadarjene dijake. Vsekakor imamo pred seboj odlično napisano strokovno matematično knjigo.

Jurij Kovič in Aleksander Simonič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2020

Letnik 67, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
O preureditvah vrst s kompleksnimi členi (Aleksander Simonič)	161–176
Navier-Stokesova enačba in elastični trki (Andrej Likar)	177–186
Zanimivosti	
Občutljivost in specifičnost diagnostičnega testa (Peter Legiša)	187–195
Vesti	
Bojan Mohar je postal član Royal Society of Canada (Peter Legiša)	196
Nove knjige	
L. Rempe-Gillen, R. Waldecker, Primality testing for beginners (Jurij Kovič in Aleksander Simonič)	197–XIX

CONTENTS

Articles	Pages
On rearrangements of infinite series with complex terms (Aleksander Simonič)	161–176
Navier-Stokes equation and elastic collisions (Andrej Likar)	177–186
Miscellanea	187–195
News	196
New books	197–XIX

Na naslovnici: Tok tekočine težko izračunamo, obstajajo pa modeli, ki omogočajo dovolj natančne računalniške simulacije. Foto: Aleš Mohorič