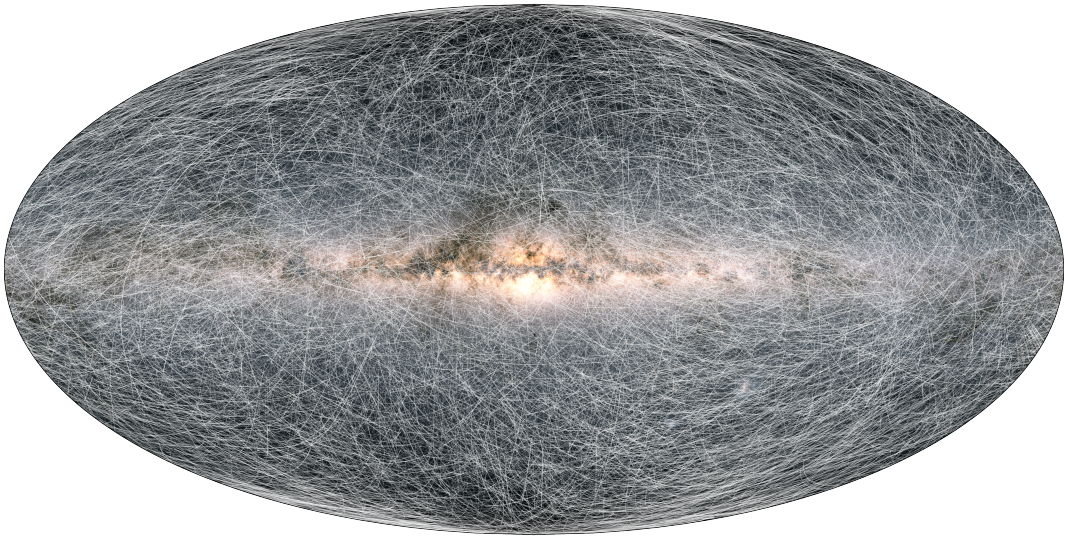
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2026
Letnik 73
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 73 • ŠT. 2 • STR. 41–80 • SEPTEMBER 2026

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2026, letnik 73, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Uredniški odbor: Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2026 DMFA Slovenije
Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

DISKRETNA MATEMATIKA PRI NAS: ZAČETKI

TOMAŽ PISANSKI[1,2,3]

[1]FAMNIT, Univerza na Primorskem, Koper
[2]IAM, Univerza na Primorskem, Koper
[3]OTR, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Math. Subj. Class. (2010): Primarno 01A60; Sekundarno 05-03

V prispevku iz svojega zornega kota obravnavamo začetke in razvoj diskretne matematike in teoretičnega računalništva, predvsem pa teorije grafov v Sloveniji. V prvem delu poskušamo opredeliti pojem diskretne matematike, ki se je pojavil sredi dvajsetega stoletja, korenine pa ima v veliko starejši razvedrilni matematiki. Na kratko orišemo nekatere spremembe pri matematiki v Sloveniji ob izteku Plemljevega obdobja.

Omenjeno temo je odlično prikazal že *Vlado Batagelj* v dveh prispevkih: *Razvoj diskretne matematike v Sloveniji*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike 18 (145–179), Slovenska matica 2024 in *Diskretna matematika in računalništvo (ter analiza podatkov)* v Sto let matematike in fizike na Univerzi v Ljubljani (171–185), Univerza v Ljubljani FMF, 2020. Leta 2011 je *Boštjan Kuzman* pripravil razstavo *Oris razvoja teorije grafov v Sloveniji* z dvojezičnim katalogom *Mejniki*.

DISCRETE MATHEMATICS IN SLOVENIA: THE BEGINNINGS

In this paper, we discuss, from a personal perspective, the beginnings and development of discrete mathematics and theoretical computer science in Slovenia, with particular emphasis on graph theory. In the first part, we attempt to define the concept of discrete mathematics, which emerged in the middle of the twentieth century but has its roots in a much older recreational mathematics. We briefly outline some of the changes in mathematics in Slovenia toward the end of the Plemelj era.

This topic has already been thoroughly discussed by *Vlado Batagelj* in two contributions: *Razvoj diskretne matematike v Sloveniji*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike 18 (145-179), Slovenska matica, 2024, and *Diskretna matematika in računalništvo (ter analiza podatkov)* in Sto let matematike in fizike na Univerzi v Ljubljani (171–185), University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, 2020. In 2011, *Boštjan Kuzman* prepared the exhibition *Oris razvoja teorije grafov v Sloveniji*, accompanied by the bilingual catalogue *Mejniki*.

1. Diskretna matematika, kombinatorika, grafi

Preden poskušamo opredeliti pojem diskretne matematike, poglejmo, kaj Slovar slovenskega knjižnega jezika pravi o pojmu 'diskreten'. Tam piše, da obstajata dve besedi, ki se pišeta in izgovarjata enako, torej sta homonima. Beseda diskreten$^{(1)}$ ima dva pomena: (a) – ki ne govori o kočljivih, zaupnih stvareh; (b) – ki s svojim videzom, značilnostmi ne izstopa; nevsiljiv, nevpadljiv. Skoraj nasproten pa je drugi pomen besede diskreten$^{(2)}$ – ločen

drug od drugega. V angleščini je to bolj jasno, saj se besedi pišeta in izgovarjata drugače. Beseda diskreten(1) se prevaja kot discreet, medtem ko je prevod besede diskreten(2) discrete. V matematiki uporabljamo le besedo diskreten(2) in jo najdemo v različnih vejah matematike: diskretna topologija, diskretna metrika, diskreten prostor, diskretna slučajna spremenljivka, diskretna porazdelitev, diskretna množica itd.

Besedna zveza 'diskretna matematika' se pojavi sorazmerno pozno. Pred tem so poskušali to področje zamejiti s pojmom 'končna matematika' uporabljenim v univerzitetnem učbeniku iz leta 1957 [8], ki pa je namenjen širši populaciji študentov in obljublja uporabe v biologiji in družboslovju. Leta 1971 je že začela izhajati revija z naslovom Discrete Mathematics, ki izhaja še dandanes in je v njej objavljalo in objavlja veliko število slovenskih matematikov. Kaj natančno sodi v diskretno matematiko in kaj ne, je stvar individualne presoje. Gotovo ima pri tem odnos do neskončnosti pomembno vlogo. Znano je, da obstajata dve bistveno različni neskončnosti: števna in neštevna (slednjih je sicer več vrst). Nekateri menijo, da diskretna matematika obravnava množice, ki so končne ali števno neskončne, medtem ko klasična matematika obravnava predvsem neštevne množice. Drugi pravijo, da diskretna matematika priznava le potencialno neskončnost, ne priznava pa aktualne neskončnosti. Čeprav se je pojem diskretne matematike uveljavil šele v dvajsetem stoletju, so nekatera področja, ki jih danes uvrščamo vanjo, veliko starejša. Med njimi je predvsem kombinatorika, ki seveda obsega veliko več kot le permutacije, variacije in kombinacije, ki smo jih spoznali v srednji šoli.

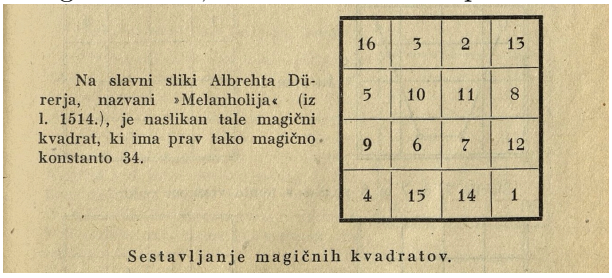
Običajno postavljamo nasproti diskretni matematiki tako imenovano 'zvezno' matematiko oziroma klasično ali osrednjo matematiko, ki temelji predvsem na pojmu zveznosti in odvedljivosti funkcij, na integralih in odvodih ter na diferencialnih enačbah. V klasični srednješolski matematiki bi med aritmetiko, analizo, algebro in geometrijo v diskretno matematiko strpali le elementarno teorijo števil in kombinatoriko. Zanimivo je, da MSC Ameriškega matematičnega društva pojma diskretne matematike ne pozna. Pozna pa kombinatoriko (05) in teorijo grafov (05C) kot njen del in vključuje "diskretna" področja in podpodročja, kot so (03), (06), (11), (13M), (20D), (52), (68), (91) in (94). Tudi beseda graf nastopa v matematiki z dvema popolnoma različnima pomenoma. Graf funkcije je znan v klasični matematiki, graf kot struktura vozlišč in povezav pa v diskretni. V šali bi lahko rekli: če želimo hitro ločiti diskretnega matematika od zveznega, ga moramo vprašati, kaj je graf. Če nam začne risati krivulje in ploskve, gotovo ni diskretni matematik.

Poenostavljeno bi se lahko reklo, da je glavna uporaba 'zvezne' matematike v fiziki, medtem ko je glavna uporaba diskretne matematike v računalništvu. Še en pogled: 'zvezna' matematika temelji v analognem svetu, medtem ko diskretna matematika živi v digitalnem svetu. Zato so tudi

vprašanja, ki jih naslavlja diskretna matematika, predvsem kombinatorika, v svojem bistvu drugačna od problemov klasične matematike. Medtem ko klasična matematika gradi teorije in je v tem smislu analitična, diskretna matematika razvija za vsak nov problem novo metodo oziroma konstrukcijo in je v svojem bistvu sintetična. Zato ni čudno, da je bliže tistim, ki jih v matematiko pripeljejo tekmovanja z željo, da bi reševali vedno nove in težje naloge. Še najbolje je, če si diskretno matematiko predstavljamo kot vidik matematike. Na isti matematični pojem lahko pogledamo iz osrednje ali diskretne zorne točke. Npr. na grupo lahko gledamo algebrajsko, lahko pa jo prek Cayleyevega grafa obravnavamo s stališča teorije grafov. Tudi v geometriji so poliedri lahko telesa s kontinuum točkami, medtem ko je bil diskretni problem obstoja petih pravilnih teles znan že Evklidu.

1.1 Razvedrilna matematika

Še v dvajsetem stoletju se je diskretne matematike držal slab prizvok. Izrek 'Kombinatorika je kloaka topologije', ki ga nekateri pripisujejo britanskemu topologu J.H.C. Whiteheadu [3], velja dandanes med matematiki za prijateljsko zbadljivko. Dejstvo je, da ima diskretna matematika korenine v starodavni *razvedrilni matematiki*. Slednjo pa povezujejo bolj z rokohitrstvom kot z globokim premišljevanjem. Tako bi tudi ostalo, če ne bi človeštvo z bliskovitim razvojem računalništva prešlo v drugi polovici dvajsetega stoletja iz analognega v digitalni svet, v katerem so izzivi predvsem diskretni.



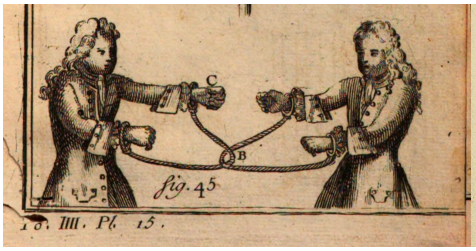
Na slavni sliki Albrehta Dürerja, nazvani »Melanholija« (iz l. 1514.), je naslikan tale magični kvadrat, ki ima prav tako magično konstanto 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sestavljanje magičnih kvadratov.

Skoraj neverjetno je, da so sredi druge svetovne vojne, leta 1942 pri Konzorciju 'Slovenca' izšle tri knjige Nika (Miklavža) Kureta 'Veselja dom', [11]. V vsaki od njih najdemo med drugim tudi razvedrilno matematiko. V prvi knjigi je npr. več strani posvečenih konstrukciji magičnih kvadratov, ki imajo pomembno vlogo v kombinatoriki.

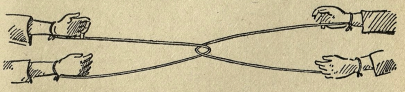
Pomembna zgodnja obširna obravnava razvedrilne matematike v knjižni obliki je nastala ob koncu sedemnajstega stoletja. To je delo *Récréations Mathématiques et Physiques*, ki ga je napisal Jacques Ozanam in v njem zbral širok izbor tedanjega znanja na tem področju. Prvič je bilo izdano leta 1694 v dveh zvezkih; poznejše razširjene izdaje so izšle tudi v štirih zvezkih.



Dva zvezanca rešiti.

(Dve dolgi vrvici.)

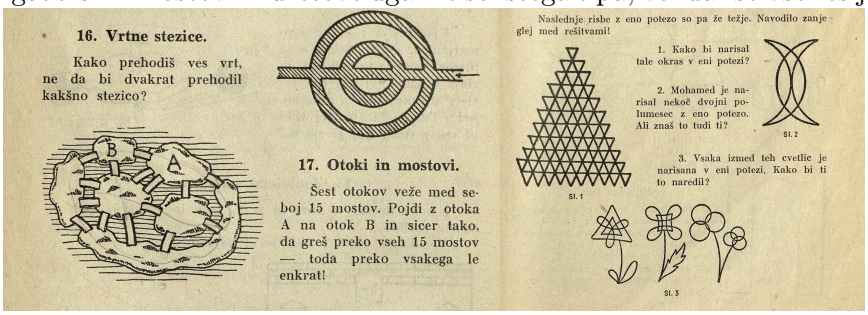
Priveži en konec vrvice okoli zapestja desnice, drugi konec okoli zapestja levice nekoga izmed družbe. Enako dolgo vrvico



navežeš prav tako drugemu na obe roki, samo da spelješ to vrvico čez prvo (glej sliko). Naloga se glasi: Zvezanca naj se rešita, ne da bi vrvici odvezala ali celo prerezala!

Na primeru topološkega problema zvezancev vidimo, da se je Kuret v veliki meri zgledoval po Ozanamu, morda pa še po kakšnem kasnejšem piscu razvedrilne matematike, kakršni so Ahrens, Loyd, Dudeney, Perelman ... Ozanam pa je nabral uganke pri starejših piscih, kot so bili Alcuin, Fibonacci ... Naši generaciji sta bolj znana Gardner in Smullyan. Tradicijo razvedrilne matematike na naših tleh zelo uspešno nadaljuje Izidor Hafner.

Nekatere naloge v Kuretovi knjigi segajo tudi v teorijo grafov. Kot vemo, za začetnika teorije grafov velja Leonhard Euler [6] z nerešljivo uganko königsberških mostov. Kuretove uganke so istega tipa, vendar so vse rešljive.



16. Vrtne stezice.

Kako prehodiš ves vrt, ne da bi dvakrat prehodil kakšno stezico?

17. Otoki in mostovi.

Šest otokov veže med seboj 15 mostov. Pojdi z otoka A na otok B in sicer tako, da greš preko vseh 15 mostov — toda preko vsakega le enkrat!

Naslednje risbe z eno potezo so pa že težje. Navodilo zanje glej med rešitvami!

1. Kako bi narisal tale okras v eni potezi?

Sl. 1

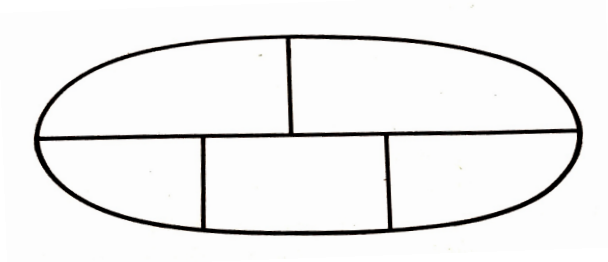
2. Mohamed je narisal nekoč dvojni polumesec z eno potezo. Ali znaš to tudi ti?

Sl. 2

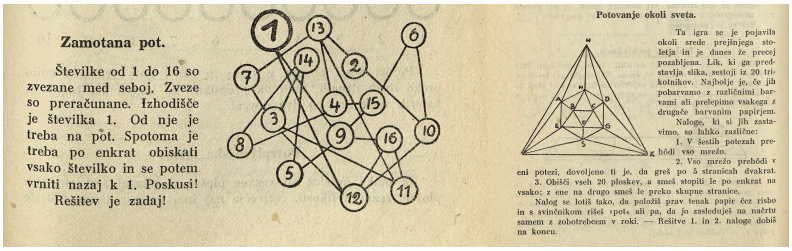
3. Vsaka izmed teh cvetlic je narisana v eni potezi. Kako bi ti to naredil?

Sl. 3

Celo Josip Plemelj je še pred prvo svetovno vojno za šalo postavil problem risanja grafa s tremi potezami, ki pa nima rešitve, saj so za tisti graf potrebne štiri poteze. O tem piše Ivan Vidav [26].



V Kuretovem Veselja domu najdemo tudi *Hamiltonov problem*, za katerega zdaj vemo, da je NP-poln.



Zamotana pot.

Številke od 1 do 16 so zvezane med seboj. Zveze so preračunane. Izhodišče je številka 1. Od nje je treba na pot. Spotoma je treba po enkrat obiskati vsako številko in se potem vrniti nazaj k 1. Poskusi! Rešitev je zadaj!

Potovanje okoli sveta.

Ta igra se je pojavila okoli sredе prejšnjega stoletja in je danes že precej pozabljena. Lik, ki ga predstavlja slika, sestoji iz 20 trikotnikov. Najbolje je, če jih pobarvamo z različnimi barvami ali prelepimo vsakega z drugače barvanim papirjem.

Naloge, ki si jih zastavimo, so lahko različne:

1. V kolih potezah prehodi vso mrežo.

2. Vso mrežo prehodi v eni potezi, dovoljeno ti je, da greš po 5 stranicah dvakrat.

3. Obiščі vseh 20 ploskev, a smeš stopiti le po enkrat na vsako; z ene na drugo smeš le preko skupne stranice.

Nalog se lotiš tako, da položiš prav tenak papir čez risbo in s svinčnikom riseš »pot« ali pa, da jo zasleduješ na načrtu samem z zobotrebcem v roki. — Rešitve 1. in 2. naloge dobiš na koncu.

V razvedrilno matematiko sodi tudi *problem hanojskih stolpov*, ki ga je leta 1883 zasnoval francoski matematik Édouard Lucas [15] in ga pospremil z legendo o njegovem starodavnem izvoru.



Muhasto prekladanje.

Slika ti kaže, kaj moraš narediti. Iz lepenke izreži štiri ploščice, ki so druga manjša od druge. Najmanjša naj bo črna, naslednja bela, tretja modra in največja rdeča. Vse štiri ploščice postavi na kupček, tako da je najmanjša na vrhu. Na papir si zariši tri polja, polje a, b in c.

Naloga se glasi: Kupček prenesi s polja a na polje c in sicer pod pogojem, da preložiš vsakokrat le po eno ploščico in da deneš vedno le manjšo ploščico na večjo — razen če dobi kakšna ploščica med prekladanjem mesto sama zase. Po petnajstih prekladanjih naj stoji kupček v prvotnem redu na polju c. — Rešitev glej zadaj!

Ta na videz dolgočasni proces prelaganja ploščic vsebuje nenavaden zasuk, saj znana optimalna rešitev za poljubno število ploščic in tri stolpce nima preproste posplošitve na več stolpcev. Za štiri stolpce jo je šele nedavno dobil Bousch, ki je leta 2014 dokazal optimalnost Frame–Stewartovega števila premikov [2]. Izkazalo se je, da so se tudi slovenski matematiki globoko zakopali v ta problem in so leta 2013 objavili monografijo: A.M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr; *The Tower of Hanoi–Myths and Maths* (glej [7]). Problemi, povezani s hanojskimi stolpi, sodijo zaradi svoje algoritmične narave na stičišče diskretne matematike in teoretičnega računalništva.

Še en algoritmični problem je *beg iz labirinta* oziroma kakor pravi Kuret, iz blodnjaka. Ta problem še bolj sodi na področje računalniške matematike.



XII. Samotarske igre 647

Okrogel blodnjak.

Z zobotrebcem v roki si pokaži pot iz tegale blodnjaka. Lahko storiš tudi tako, da položiš prav prosojen papir na blodnjak in rišeš s svinčnikom pot iz njega.

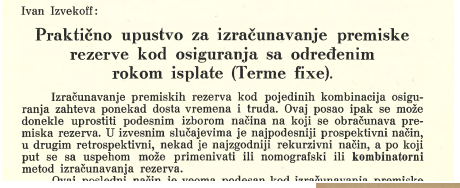
Če rišeš po prosojnem papirju pravo pot s svinčnikom, bo nastala slika neke živali!

Rešitev je zadaj!

• V letih 1937–1940 v Ljubljani izhaja znanstvena in strokovna revija *Glasnik udruženja aktuara Kraljevine Jugoslavije.* Revijo, ki je objavljala tudi prispevke iz matematike v slovenščini, dobro desetletje pred OMF, izdaja in ureja Ivo Lah. Že v prvem letniku izide prispevek s preprostim algoritmom za računanje premijskih rezerv. Med drugim prikaže sliko računala, ki algoritem izvaja.

Tudi kasneje so se v Sloveniji pojavili sporadični prispevki iz diskretne in računalniške matematike:

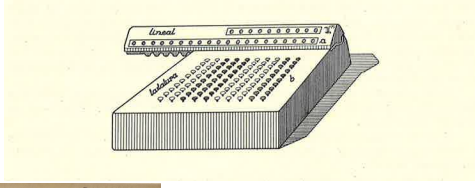
• 1951 začne izhajati Obzornik za matematiko in fiziko (OMF). Bralce seznanja z različnimi področji sodobne matematike. Poroča o rezultatih srednješolskih tekmovanj. Že v prvi številki prinese prispevek o računalnikih.

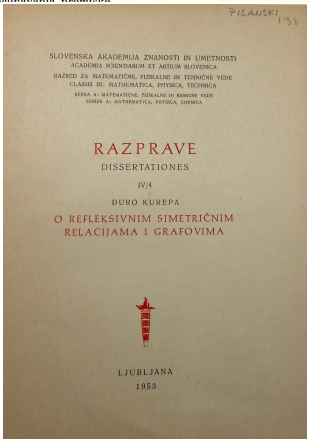


Ivan Izvekoff:

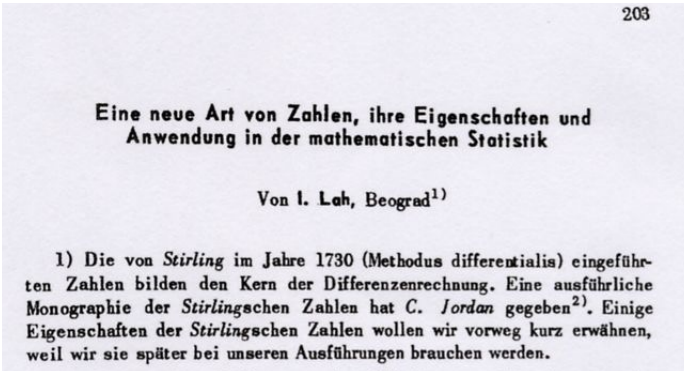
Praktično upustvo za izračunavanje premiske rezerve kod osiguranja sa određenim rokom isplate (Terme fixe).

Izračunavanje premiskih rezerva kod pojedinih kombinacija osiguranja zahteva ponekad dosta vremena i truda. Ovaj posao ipak se može donekle uprostiti podesnim izborom načina na koji se obračunava premiska rezerva. U izvesnim slučajevima je najpodesniji prospektivni način, u drugim retrospektivni, nekad je najzgodniji rekurzivni način, a po koji put se sa uspehom može primenivati ili nomografski ili **kombinatorni** metod izračunavanja rezerva.





• 1953 Plemljev prijatelj Đuro Kurepa objavi prispevek o grafih pri SAZU [10].



203

Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik

Von I. Lah, Beograd[1)]

1) Die von *Stirling* im Jahre 1730 (Methodus differentialis) eingeführten Zahlen bilden den Kern der Differenzenrechnung. Eine ausführliche Monographie der *Stirling*schen Zahlen hat *C. Jordan* gegeben[2)]. Einige Eigenschaften der *Stirling*schen Zahlen wollen wir vorweg kurz erwähnen, weil wir sie später bei unseren Ausführungen brauchen werden.

• 1954 Ivo Lah odkrije za kombinatoriko pomembna števila in članek o njih objavi v angleščini [12], naslednje leto pa še v nemščini [13]. John Riordan zanje že leta 1958 uporabi poimenovanje *unsigned Lah numbers* [20, str. 43–44]. V Sloveniji pa šele leta 2002 postane širše znano, da je avtor teh števil slovenski matematik Ivo Lah [18].

• 1962 dodiplomski študent tehniške matematike Jože Vrabec piše o končnih avtomatih v OMF [27].

• 1967 podiplomski študent topologije v Zagrebu Jože Vrabec piše o grafih v dveh zaporednih številkah OMF [28, 29].

• 1970 in v letniku 1971/1972 v Proteusu članka o grafih objavi Alojzij Vadnal [23, 24].

• Leta 1972/1973 Jože Vrabec (po avtorjevem spominu) na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani na povabilo Alojzija Vadnala predava podiplomski celoletni predmet Teorija grafov.

2. Zgodovina sodobne matematike v Sloveniji

2.1 Josip Plemelj

Josip Plemelj (1873–1967) je dolga leta določal slovensko matematiko. Na univerzo je prišel ob njenem nastanku po prvi svetovni vojni ob zatonu svoje kratke, a bleščeče znanstvene kariere, ki je kulminirala v prvem desetletju dvajsetega stoletja. Plemelj je v Ljubljano pripeljal vrhunsko matematiko devetnajstega stoletja. Žal pa se zdi, da do uporabne in sodobne matematike ni imel pozitivnega odnosa. Sodobne matematike ni spremljal, kaj šele, da bi jo razvijal. Pri njem sta doktorirala le Anton Vakselj (1899–1987) in Ivan Vidav (1918–2015). Ob Vaksljevem doktoratu je bil Plemelj star že 49, ob Vidavovem pa 67 let. Ko ga je (po pripovedovanju Antona Suhadolca) za mentorstvo prosil France Križanič, je bil Plemelj star že čez 80 let in je mentorstvo odklonil. Zato je Križanič doktoriral pri Vidavu.

Prvi štirje doktorati iz matematike na Univerzi v Ljubljani — po eden v vsakem desetletju (po značaju so bili zelo različni):

Štev.	Doktorand	Fakulteta	Leto	Mentor
1	Anton Vakselj	FF	1923	Plemelj
2	Alojzij Vadnal	FF	1939	Zupančič
3	Ivan Vidav	FF	1941	Plemelj
4	France Križanič	PMFF	1955	Vidav

2.2 Ivan Vidav

Ivan Vidav je v petdesetih letih prevzel krmilo slovenske matematike. Leta 1959 začnejo izhajati knjige v knjižnici Sigma. Leta 1960 je bil ustanovljen IMFM. Istega leta izide knjiga 'Elektronski aritmetični računalniki', ki jo je po obisku SZ napisal France Križanič. Prišlo je do vpeljave neklasičnih tem v matematiko. Alojzij Vadnal je postal pionir operacijskih raziskav pri nas. Piše o verjetnostnem računu, linearnem programiranju, dinamičnem programiranju, diferenčnih enačbah itd. Josip Grasselli je pisal knjige o teoriji števil. Rajko Jamnik se je posvetil verjetnostnemu računu, statistiki, pa tudi teoriji informacij in teoriji iger. Niko Prijatelj je napisal knjigo o matematični logiki in trilogijo o matematičnih strukturah. Plemlja so oktobra 1950 brezuspešno poskušali upokojiti [17, str. 269]. Kot profesor Univerze v Ljubljani je predaval do leta 1957 [25, str. 75], nato pa se je kot raziskovalec zaposlil na SAZU. Upokojil pa se je pri 92 letih leta 1965.

Tudi pri doktoratih v šestdesetih letih so bistvene razlike med prvimi tremi in zadnjim. Jamnik, Prijatelj in Grasselli so bili skupaj z Milanom Zieglerjem srednješolski profesorji, ki jih je Vidav povabil na univerzo in so pri njem, razen Zieglerja, doktorirali v zrelih letih. Glede na to, da je tudi Križanič videl svoje poslanstvo predvsem v prenašanju tujega znanja k nam, je imel Vidav v tedanji slovenski univerzitetni matematiki osrednjo raziskovalno vlogo. Anton Suhadolc je bil po dolgem času prvi študent matematike, ki se je po študiju razvil v matematika - znanstvenika. Sledi mu Zvonimir Bohte, ki še pred doktoratom, leta 1964 za Sigmo napiše knjigo Numerično reševanje enačb.

Štev.	Doktorand	Fakulteta	Leto	Mentor
5	Rajko Jamnik	FNT	1961	Vidav
6	Niko Prijatelj	FNT	1961	Vidav
7	Josip Grasselli	FNT	1961	Vidav
8	Anton Suhadolc	FNT	1964	Vidav

2.3 Matematični strukturalizem – Bourbaki

Matematik Niko Prijatelj je bil ljubitelj filozofije matematike. Spoznal sem ga, ko sem v prvi gimnaziji hodil na njegova večerna predavanja srednješolcem. Po vsakem predavanju iz logike in množic se nas je nekaj nabralo okoli

table in gnjavili smo ga s svojimi vprašanji. Ko nam je dokazal, da množica vseh množic ne obstaja, sem bil čisto prevzet. Ko pa nam je povedal, da ni znano, ali med močjo naravnih in močjo realnih števil obstaja še kakšno kardinalno število (hipoteza kontinuuma - HC oziroma prvi Hilbertov problem), mu skoraj nismo verjeli. Ko pa smo malo kasneje izvedeli, da je ravno tisto leto (1963) Paul Cohen končal dokaz neodvisnosti HC od drugih aksiomov ZF teorije množic, smo bili v transu. Glede na to, da so množice osnove matematike, obstajata torej dve matematiki. V eni HC velja, v drugi pa ne. Šele takrat sem spoznal, da je matematika živa, da se dogaja zdaj. Seveda smo slišali, da je v geometriji tudi Evklidov peti postulat o vzporednicah neodvisen aksiom. Da pa je teorija množic tako izmuzljiva in si z intuitivno sliko ne moremo pomagati, je bilo zame frapantno spoznanje. Podobno se je pokazalo z aksiomom izbire. Nekaj, kar bi se moralo po vsej logiki preprosto dokazati, je bilo neodvisen aksiom! Ne samo, da je bila matematika živa. Celo osnove matematike niso bile tako trdne, kot smo mislili.

Bistvo strukturalizma je v tem, da je pomembno proučevati objekte ne same zase, ampak v relaciji do drugih objektov. Strukturalizem se je pojavil na vseh področjih človekovega udejstvovanja, tudi v matematiki oziroma filozofiji matematike. Antropolog *Claude Lévi-Strauss* velja za enega od utemeljiteljev strukturalizma oziroma strukturalistične šole mišljenja.

Med drugo svetovno vojno sta se Claude Lévi-Strauss in *André Weil* srečala v New Yorku [19, str. 233]. Lévi-Strauss je tam leta 1943 začel pripravljati delo o prepovedi incesta, ki je pozneje dobilo naslov *Les Structures élémentaires de la parenté* [4, str. 58, op. 37]; v knjižni obliki je izšlo leta 1949 [14]. Weil, eden od ustanovnih članov skupine Bourbaki, je zanj napisal matematični dodatek, v katerem je nekatere sisteme zakonskih pravil obravnaval z algebro in teorijo permutacijskih grup [30].

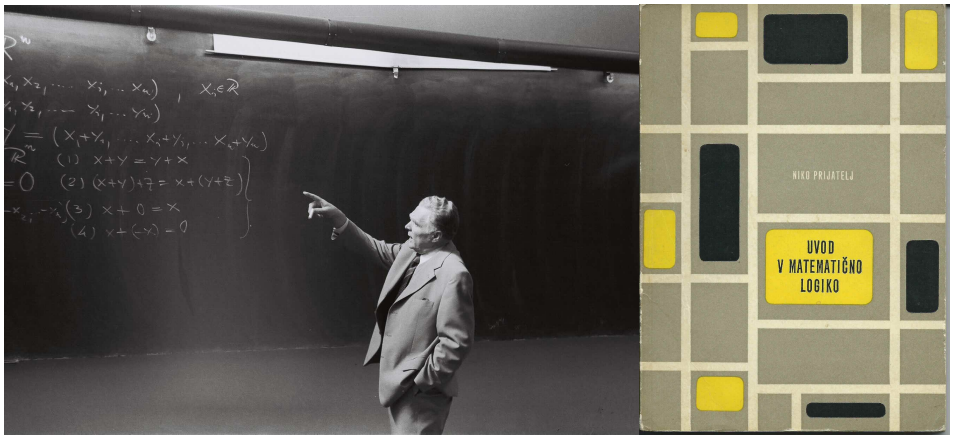
Skupina Bourbaki je želela napisati enovito matematiko na novo, tako da bi temeljila na strukturiranih množicah [1, 5]. Zato je eden ključnih utemeljiteljev *matematičnega strukturalizma* kot šole filozofije matematike. Vsa matematika temelji na množicah. Veje matematike pa se ločijo zgolj po strukturah, ki jih nadenemo na množico. Klasični pogled na matematiko je drugačen: aritmetika obravnava števila, geometrija pa točke, premice itd.

2.4 Niko Prijatelj

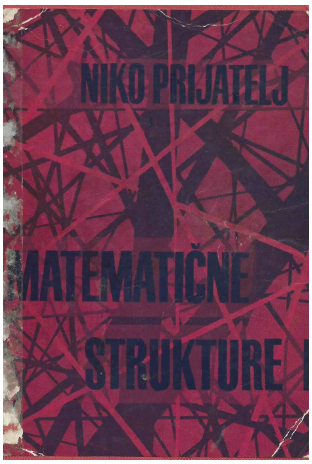
Leta 2023 je v OMF (70, št. 1) *Peter Legiša* izvrstno opisal življenje in delo *Nika Prijatelja*. Zato naj na tem mestu samo navedem nekaj dejstev. Leta 1946 diplomira in se zaposli kot srednješolski profesor. V OMF objavi več člankov. Prizadeva si za dvig kvalitete in posodabljanje matematike v srednji šoli. Leta 1957 se zaposli kot asistent na univerzi. Plemelj se istega leta upokoji kot univerzitetni profesor (in se zaposli kot raziskovalec na SAZU). Leta 1961 Prijatelj doktorira.

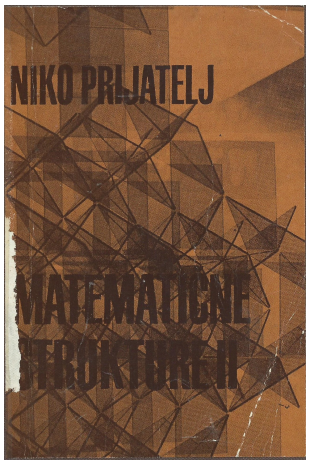
Še pred doktoratom je v Slovenijo pripeljal strukturalizem. S strukturalizmom in z Bourbakijem se je seznanil konec petdesetih let na polletnem obisku Pariza, ko je bil že formiran matematik pri 37–38 letih. Ko je po vrnitvi domov navdušen pripovedoval o novostih, ki jih je spoznal na Inštitutu Henri Poincaré, je razočaran ugotovil, da v Sloveniji zaostajamo za svetom skoraj pol stoletja. Kasneje mi je nekajkrat omenil, kako presenečen je bil, da je Vidav vse te stvari že poznal, le nikoli mu ni o tem pripovedoval. Kaj je hotel s tem povedati, takrat nisem razumel. Šele ko sem pred kratkim vzel v roke knjigo Rešeni in nerešeni problemi matematike, ki jo je Vidav objavil leta 1959 kot prvo knjigo zbirke Sigma, sem opazil, da je v njej opisal takrat še nerešeni problem kontinuuma.

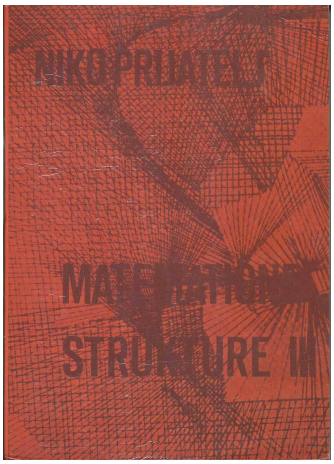
Prijatelj je nemudoma objavil članek o Bourbakiju (Nicolas Bourbaki, OMF (7, št. 4, 1960, str. 145–150)) in pripravil pogumen načrt, da sodobno matematiko prenese v Slovenijo, med mlade: študente nižjih letnikov in srednješolce kar v zbirki Sigma. Ko sem ga kot gimnazijec poslušal v šolskem letu 1963/64, nisem niti slutil, da se loteva tega velikega projekta.



Takrat je bila na voljo le njegova knjižica *Uvod v matematično logiko* (1960). Ko pa smo končali s predavanji, je izšla njegova knjiga o množicah, prva iz trilogije *Matematične strukture*, ki jo sestavljajo Matematične strukture I - Množice, relacije, funkcije (1964), Matematične strukture II - Operacije (1967), Matematične strukture III - Okolice (1972). Lahko bi rekli, da gre pri tedanjem matematičnem strukturalizmu za pristop v duhu univerzalne algebre.

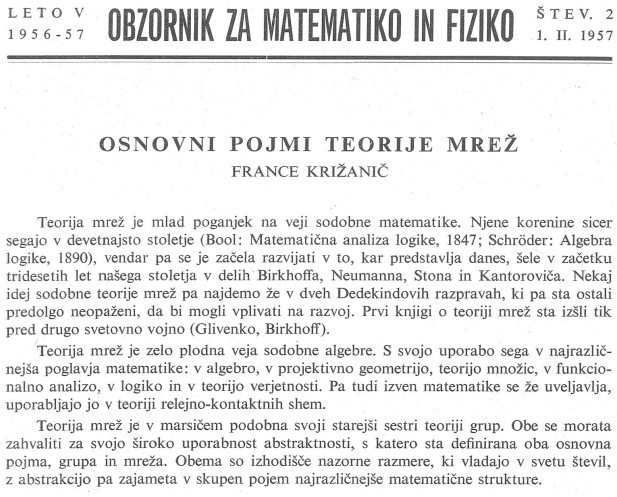






2.5 France Križanič

Ta pristop je pokazal že nekaj let prej France Križanič v svojem članku o mrežah, ki je najbrž prvi prispevek v duhu matematičnega strukturalizma pri nas.



LETO V 1956-57 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 2 1. II. 1957

OSNOVNI POJMI TEORIJE MREŽ

FRANCE KRIŽANIČ

Teorija mrež je mlad poganjek na veji sodobne matematike. Njene korenine sicer segajo v devetnajsto stoletje (Bool: Matematična analiza logike, 1847; Schröder: Algebra logike, 1890), vendar pa se je začela razvijati v to, kar predstavlja danes, šele v začetku tridesetih let našega stoletja v delih Birkhoffa, Neumanna, Stona in Kantoroviča. Nekaj idej sodobne teorije mrež pa najdemo že v dveh Dedekindovih razpravah, ki pa sta ostali predolgo neopaženi, da bi mogli vplivati na razvoj. Prvi knjigi o teoriji mrež sta izšli tik pred drugo svetovno vojno (Glivenko, Birkhoff).

Teorija mrež je zelo plodna veja sodobne algebre. S svojo uporabo sega v najrazličnejša poglavja matematike: v algebro, v projektivno geometrijo, teorijo množic, v funkcionalno analizo, v logiko in v teorijo verjetnosti. Pa tudi izven matematike se že uveljavlja, uporabljajo jo v teoriji relejno-kontaktnih shem.

Teorija mrež je v marsičem podobna svoji starejši sestri teoriji grup. Obe se morata zahvaliti za svojo široko uporabnost abstraktnosti, s katero sta definirana oba osnovna pojma, grupa in mreža. Obema so izhodišče nazorne razmere, ki vladajo v svetu števil, z abstrakcijo pa zajameta v skupen pojem najrazličnejše matematične strukture.

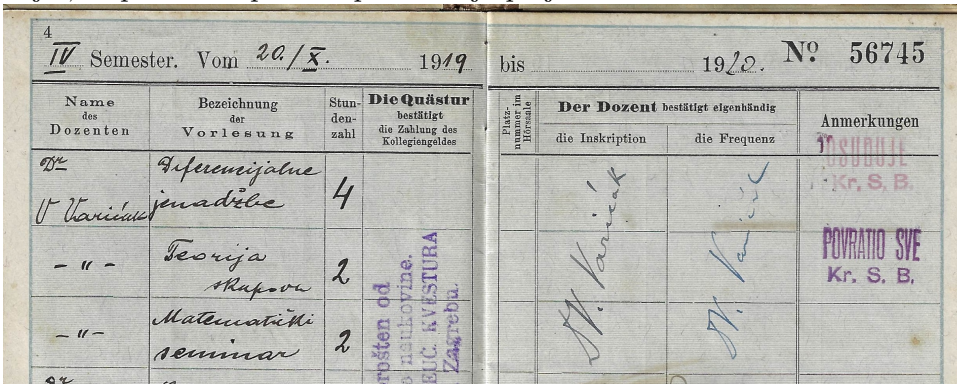


• F. Križanič: Osnovni pojmi teorije mrež, OMF 1957.

Tako kot Niko Prijatelj se je tudi France Križanič zavzemal za posodobitev pouka matematike na vseh ravneh, predvsem pa v srednjih šolah. O tem ni pisal samo v OMF, ampak se je lotil pisanja srednješolskih učbenikov. Prvo serijo učbenikov (Aritmetika, Analiza in Algebra) je napisal v letih 1963–1964 in v srednješolsko matematiko pri nas vnesel več novih vsebin. Drugo serijo učbenikov (Matematika) pa je napisal v letih usmerjenega izobraževanja približno 20 let pozneje, med 1981–1985. Že poskusni učbenik

je bil deležen silovitih kritik, žal tudi v dnevnem časopisju, kar je polemiko iz strokovne ravni razširilo na dnevno-politično raven. Sprožilca, ki je bilo neko pismo bralca, še nisem uspel najti. V dokumentaciji časopisa Delo pa sem dobil podatke o Križaničevi duhoviti in pikri obrambi: [16, 9]. Vmes je izšlo še poročilo [22], ki govori o spremembi učnih načrtov, na katerih so temeljili Križaničevi revolucionarni učbeniki.

Zanimivo je, da leta 1967, ko je naša generacija vpisala študij tehniške matematike, predmeta 'Teorija množic' še ni bilo na voljo, medtem ko je na primer Ivo Lah, ki je študiral matematiko v Zagrebu takoj po prvi svetovni vojni, ta predmet vpisal že pol stoletja prej.


4

IV Semester. Vom 20/X. 1919 bis 1920. No 56745

Name des Dozenten	Bezeichnung der Vorlesung	Stundenzahl	Die Quästur bestätigt die Zahlung des Kollegiengeldes	Platznummer im Hörsale	Der Dozent bestätigt eigenhändig die Inskription	Der Dozent bestätigt eigenhändig die Frequenz	Anmerkungen
Dr. V. Varičak	Diferencijalne jednadžbe	4			M. Varičak	M. Varičak	OSLOBOĐEN Kr. S. B.
- " -	Teorija skupova	2					POVRATIO SVE Kr. S. B.
- " -	Matematički seminar	2					

Po drugi strani pa je bila po zgledu bourbakistov pri nas klasična geometrija v programu pedagoške, ne pa tudi tehniške matematike z argumentom, da za tehnike zadošča vektorski pristop. Le malo kasneje se je poudarek s teorije množic kot osnov matematike prenesel na teorijo kategorij. Kategorije in funktorje je slovenskim matematikom predstavil v OMF Ivan Vidav že leta 1964.

3. Tekmovanja

Sredi šestdesetih let se pojavi na vratih univerze naša generacija. Društvo matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) je bilo ustanovljeno leta 1949. Že kmalu po ustanovitvi začne izdajati OMF in DMFA je organiziralo prvo tekmovanje iz matematike za srednješolce. Na njem sta bila zelo uspešna Mitja Rosina in Anton Suhadolc. Potem je prišlo do nekajletne prekinitve. Kasneje med uspešnimi tekmovalci najdemo med drugim Jožeta Vrabca in Egona Zakrajška. Tekmovanja so bila poleg založniške dejavnosti in predavanj za srednješolce nedvomno odlična poteza, namenjena popularizaciji matematike med mladimi. Predavanja so najprej potekala na univerzi, nato pa so se razširila po srednjih šolah v Sloveniji. Poleg republiških so začeli organizirati tudi zvezna tekmovanja in leta 1963 je Jugoslavija prvič poslala svojo ekipo na mednarodno matematično olimpijado, ki je potekala v

Wrocławu. To je bila prva priložnost za slovenske mlade matematike, da se izkažejo tudi na mednarodnem parketu. In so se imenitno izkazali. France Dacar je prejel zlato, Peter Petek pa srebrno medaljo. Dacar, ki je bil takrat študent drugega letnika srednje tehniške šole, je tekmoval za tretji letnik, sicer ne bi mogel na zvezno tekmovanje. Po izvrstnem uspehu na olimpijadi pa je preskočil dva razreda in se vpisal na študij matematike.

Privlačevale so nas predvsem nestandardne naloge. To so naloge, ki zahtevajo od reševalca inovativen preblisk in jih ni mogoče rešiti le s slepo uporabo šolske matematike. Pogosto so na tekmovanjih ravno nestandardne naloge odločale o zmagovalcih. Nanje so nas pripravljali na pripravah v Beogradu. Po eni strani smo bili prežeti s tekmovalnimi nalogami, z logiko in osnovami matematike, po drugi strani pa smo slutili, da se čas analognega sveta izteka. Kmalu so nas starejši kolegi, takrat že študentje, prepričevali, da nam tudi poznavanje višje matematike ne bo pomagalo pri reševanju nestandardnih nalog, ki so običajno zahtevale kombinatorično in logično razmišljanje.

Ko sva z Vladimirjem Batageljem leta 1967 končala srednješolsko tekmovalno pot, smo se Dacar, Batagelj in jaz nekega dne srečali v kavarni Nebotičnik, da se dogovorimo, kako naprej. Sklenili smo, da organiziramo klub mladih matematikov, v katerem bomo lahko nadaljevali s samostojnim delom in spoznavanjem 'moderne' matematike.

Zahvala. Zahvaljujem se vsem, ki so mi pomagali pri pripravi tega prispevka, predvsem *Boštjanu Kuzmanu, Vladimirju Batagelju* za podatke, pregled ter nasvete, *Marku Razpetu* in *Petru Legiši* pa še za fotografije. Delo je bilo deležno podpore ARIS (raziskovalni program P1-0294 in raziskovalni projekti J1-4351, J5-4596, BI-HR/23-24-012).

LITERATURA

[1] N. Bourbaki, *The architecture of mathematics*, Amer. Math. Monthly **57** (1950), št. 4, 221–232.

[2] T. Bousch, *La quatrième tour de Hanoï*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **21** (2014), št. 5, 895–912.

[3] P. J. Cameron, *Aftermath: A personal view of combinatorics*, v: R. J. Wilson in J. J. Watkins (ur.), *Combinatorics: Ancient and Modern*, Oxford University Press, Oxford, 2013, 355–366.

[4] J. A. Cavignac, *L'américanisme français au début du XXème siècle: projets politiques, muséologie et terrains brésiliens*, Vibrant: Virtual Brazilian Anthropology **9** (2012), št. 1, 24–81.

[5] L. Corry, *Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure*, Synthese **92** (1992), št. 3, 315–348.

[6] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae **8** (1741), 128–140.

[7] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi—Myths and Maths*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[8] J. G. Kemeny, J. L. Snell in G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1957.

[9] F. Križanič, *Pogovarjam se*, Naši razgledi, 12. 6. 1981.

[10] Đ. Kurepa, *O refleksivnim simetričnim relacijama i grafovima*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1953.

[11] N. Kuret, *Veselja dom*, Konzorcij Slovenca, Ljubljana, 1942.

[12] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses **9** (1954), 7–15.

[13] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitt.-Bl. Math. Statistik **7** (1955), 203–212.

[14] C. Lévi-Strauss, *Les structures élémentaires de la parenté*, Presses universitaires de France, Paris, 1949.

[15] É. Lucas, *La Tour d'Hanoï, véritable casse-tête annamite*, P. Bousrez, Tours, 1883. Objavljeno pod psevdonimom N. Claus.

[16] B. Nešović, *Nova matematika 1 je razprodana uspešnica*, Delo, 11. 12. 1980.

[17] Ž. Oset, *Starostno upokojevanje univerzitetnih profesorjev: od ustanovitve Univerze v Ljubljani do ZUJFA*, v: M. Šorn (ur.), *Starost – izzivi historičnega raziskovanja*, Vpogledi, št. 18, Inštitut za novejšo zgodovino, Ljubljana, 2017, 267–278.

[18] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The Lah identity and the Argonauts*, Pi Mu Epsilon J. **11** (2002), št. 7, 385–386.

[19] J. V. Rauff, *The algebra of marriage: An episode in applied group theory*, BSHM Bull. **31** (2016), št. 3, 230–244.

[20] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1958.

[21] Slovenska akademija znanosti in umetnosti, *Letopis Slovenske akademije znanosti in umetnosti*, zv. 16, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1966. Letopis za leto 1965.

[22] J. Svetina, *Zahtevnost matematike bo nekoliko zmanjšana*, Delo, 12. 5. 1981.

[23] A. Vadnal, *Reševanje ugank z grafi*, Proteus **32** (1970), št. 5, 190–193.

[24] A. Vadnal, *Grafi in grafska števila*, Proteus **34** (1971/72), št. 9, 430–432.

[25] I. Vidav, *Josip Plemelj*, v: M. Kos (ur.), *Letopis Slovenske akademije znanosti in umetnosti*, zv. 18, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1968, Letopis za leto 1967, 73–78.

[26] I. Vidav, *Josip Plemelj: ob dvajsetletnici smrti*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1987.

[27] J. Vrabec, *Osnovni pojmi abstraktne teorije avtomatov*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962), št. 4, 158–168.

[28] J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov I*, Obzornik mat. fiz. **14** (1967), št. 2, 58–71.

[29] J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov II*, Obzornik mat. fiz. **14** (1967), št. 3–4, 107–120.

[30] A. Weil, *Sur l'étude algébrique de certains types de lois de mariage (système Murngin)*, v: *Les structures élémentaires de la parenté*, Presses universitaires de France, Paris, 1949, dodatek k prvemu delu, 278–285.

OORTOVE KONSTANTE

VID KAVČIČ[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: Galaksija, Oortove konstante

V članku obravnavamo vrtenje Galaksije ter z njim povezane Oortove enačbe in Oortove konstante. Izpeljavo Oortovih konstant A in B za osnosimetrični disk nadgradimo še z izpeljavo za primer neosnosimetričnega diska, kjer namesto dveh nastopajo štiri Oortove konstante A, B, C in K. Nadalje se posvetimo trenutnim izmerjenim vrednostim Oortovih konstant ter vse skupaj zaokrožimo s pregledom primerov, v katerih jih lahko praktično uporabimo – z njimi lahko na primer izračunamo kotno hitrost kroženja Sonca okoli središča Galaksije in masno gostoto snovi v Sončevi okolici. Na koncu meritve Oortovih konstant povežemo še z rotacijsko krivuljo Galaksije ter jih komentiramo v zvezi s prisotnostjo temne snovi v Galaksiji.

OORT CONSTANTS

In this article, we discuss the rotation of the Galaxy and the related Oort equations and Oort constants. We derive the Oort constants A and B for an axisymmetric disk and extend the derivation to the case of a non-axisymmetric disk, where instead of two, there are four Oort constants A, B, C, and K. We also look at the current measured values of the Oort constants and wrap everything up with a review of cases where they can be practically used—for example, to calculate the angular velocity of the Sun orbiting the center of the Galaxy and the mass density of matter in the Sun's neighborhood. Finally, we connect the measurements of the Oort constants with the Galaxy's rotation curve and comment on them in relation to the presence of dark matter in the Galaxy.

1. Uvod

Galaksije so gravitacijsko vezani sistemi, v katerih sta struktura in dinamika določeni s porazdelitvijo mase – ker skoraj 90 % mase v Galaksiji ni neposredno vidne, jo lahko proučujemo le posredno z opazovanji gibanja zvezd in plina [5].

Ključen korak na področju meritev vrtenja Galaksije je naredil nizozemski astronom Jan Hendrik Oort (1900–1992), ki je v svojem članku [8] opazovane hitrosti zvezd v Sončevi okolici opisal z dvema parametroma, ki ju danes imenujemo Oortovi konstanti A in B. Oort je z opazovanji potrdil teorijo Bertila Lindblada o diferencialnem vrtenju Galaksije [7, 8].

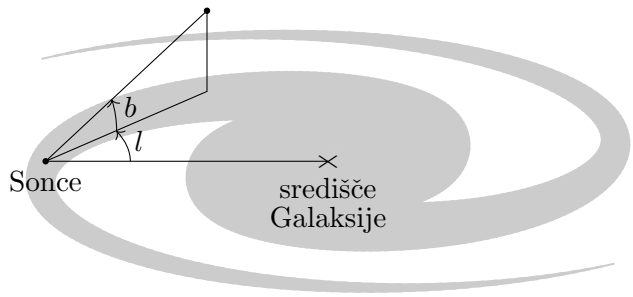
V članku bomo najprej predstavili osnovni opis vrtenja Galaksije in izpeljali Oortovi konstanti za primer osno simetričnega diska, nato pa bomo Oortove konstante izrazili še za primer diska, ki ni osno simetričen. V sklepnem delu bomo razpravljali o sodobnih meritvah konstant ter o njihovem pomenu za proučevanje lastnosti Galaksije.

2. Diferencialno vrtenje galaktičnega diska

Galaktični disk se ne vrti kot togo telo, temveč se različni deli Galaksije okoli njenega središča gibljejo z različnimi kotnimi hitrostmi. Takemu vrtenju pravimo **diferencialno vrtenje**. Učinek diferencialnega vrtenja je treba upoštevati tudi pri samih meritvah hitrosti teles v Galaksiji. Dejstvo je namreč, da Osončje ne miruje, temveč kroži okoli središča Galaksije.

2.1 Galaktični koordinatni sistem

Pri obravnavi merjenja hitrosti zvezd v Galaksiji bomo uporabili **galaktični koordinatni sistem** (slika 1). Izhodišče galaktičnega koordinatnega sistema je smer proti središču Galaksije, ki se za opazovalca na Zemlji nahaja v ozvezdju Strelec. Z **galaktično dolžino** l označujemo kot med smerjo proti središču Galaksije in projekcijo smeri proti zvezdi na ravnino galaktičnega diska, z **galaktično širino** b pa kot med ravnino galaktičnega diska in smerjo proti zvezdi. V članku se bomo osredotočili zlasti na zvezde, ki ležijo v ravnini galaktičnega diska, za katere torej velja $b \approx 0°$.



Slika 1. V galaktičnem koordinatnem sistemu položaj zvezde opišemo z galaktično dolžino l in galaktično širino b. Skica: Žan Arsov.

2.2 Meritve hitrosti zvezd

Temeljno vprašanje je, kako sploh izmerimo hitrost zvezde v Galaksiji. Dejstvo je namreč, da so kakršne koli meritve, ki jih naredimo na Zemlji, že v osnovi nekoliko pristranske, saj se tudi Osončje giblje okoli središča Galaksije.

Zaradi tega se za zdaj omejimo zgolj na meritve relativne hitrosti v' zvezde glede na Sonce, misel na hitrost zvezde glede na središče Galaksije pa za nekaj časa odložimo na stran. Pred tem komentirajmo še, da se v resnici tudi Zemlja oziroma satelit Gaia, ki opravlja meritve, giblje okoli Sonca s hitrostjo približno $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, kar precej presega natančnost meritev v'. Ker

pa je gibanje Zemlje okoli Sonca zelo predvidljivo, se njegov prispevek pri obdelavi podatkov sistematično odšteje, izmerjene hitrosti pa se preračunajo na težiščni sistem Osončja.

Podobne narave je vprašanje gibanja težišča Osončja okoli središča Galaksije, ki ga bomo obravnavali v nadaljevnaju. Relativno hitrost v' zvezde glede na opazovalko_ca, ki miruje v težišču Osončja, razstavimo na radialno v'_{r} in tangentno v'_{t} komponento (slika 2).

Relativno **radialno hitrost** v'_{r} zvezde izračunamo na podlagi meritev premika spektralnih črt v spektru zvezde, ki je posledica **Dopplerjevega pojava**. Če spektralno črto, ki se v laboratoriju nahaja pri valovni dolžini λ_0, v spektru opazovane zvezde izmerimo pri valovni dolžini λ, lahko relativno radialno hitrost v'_{r} izračunamo z znano enačbo

$$v'_{\mathrm{r}} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\, c, \tag{1}$$

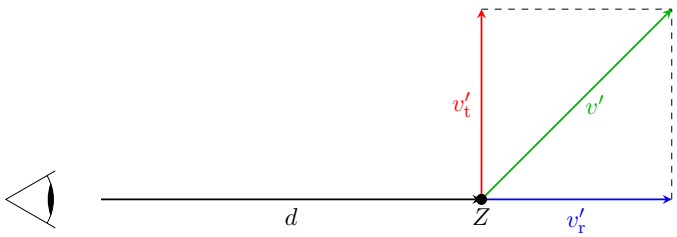
kjer je c hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Relativno **tangentno hitrost** v'_{t} zvezde izračunamo na podlagi astrometričnih meritev **lastnega gibanja**. Lastno gibanje μ nam pove, za kolikšen kot se zvezda premakne na nebesni sferi v določenem času, in ga običajno podajamo v enotah ["/leto]. S tem v zvezi lahko tangentno komponento relativne hitrosti v'_{t} izrazimo kot

$$v'_{\mathrm{t}} = \mu d, \tag{2}$$

kjer je d oddaljenost zvezde od Sonca. Celotno relativno hitrost v' zvezde glede na opazovalca v Osončju tako izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$v' = \sqrt{v'^2_{\mathrm{r}} + v'^2_{\mathrm{t}}}. \tag{3}$$

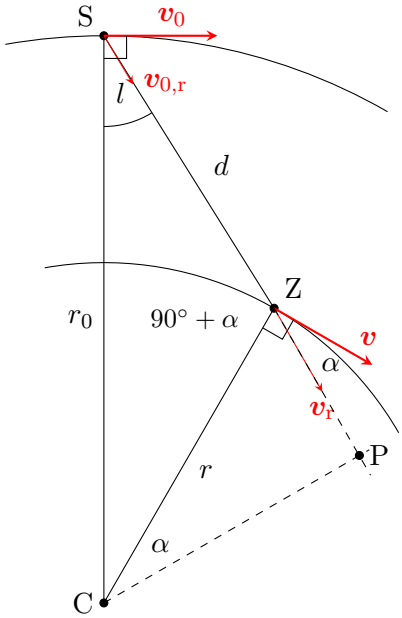


Slika 2. Relativno hitrost v' zvezde glede na opazovalca lahko zapišemo kot vektorsko vsoto radialne komponente v'_{r}, ki jo izračunamo na podlagi meritev Dopplerjevega premika spektralnih črt, in tangentno komponento v'_{t}, ki jo izračunamo na podlagi meritev lastnega gibanja μ.

2.3 Radialna in tangentna hitrost zvezd v Galaksiji

V prejšnjem razdelku smo na kratko orisali, kako izmerimo relativno radialno in tangentno hitrost zvezd v disku Galaksije. V nadaljevanju bomo te meritve povezali z nekaterimi osnovnimi parametri, kot sta hitrost v_0 kroženja Sonca okoli središča Galaksije in oddaljenost r_0 od njega.

Predpostavimo, da se zvezde okoli središča Galaksije C gibljejo po krožnih tirnicah. Zamislimo si zvezdo Z, ki jo opazujemo na galaktični dolžini l in se nahaja na razdalji d od Sonca S. Zvezda okoli središča Galaksije kroži s hitrostjo $\boldsymbol{v}$ po krožnici s polmerom r, kot je prikazano na sliki 3.



Slika 3. Zvezda Z z galaktično širino l, ki kroži okoli središča Galaksije C, se glede na Sonce S giblje z radialno hitrostjo v_r', ki je razlika projekcij v_r in $v_{0,\mathrm{r}}$ hitrosti kroženja zvezde in Sonca na opazovalčevo smer pogleda.

Relativna radialna hitrost v_r' zvezde glede na Sonce je potemtakem enaka razliki med projekcijama hitrosti kroženja zvezde in Sonca na smer pogleda opazovalca. Za potrebe te izpeljave označimo z α kot med smerjo pogleda in vektorjem hitrosti $\boldsymbol{v}$ zvezde. Potem velja

$$v_\mathrm{r} = v\cos\alpha \qquad \text{in} \qquad v_{0,\mathrm{r}} = v_0 \sin l.$$

Za relativno radialno hitrost zvezde glede na Sonce tako zapišemo

$$v_\mathrm{r}' = v_\mathrm{r} - v_{0,\mathrm{r}} = v\cos\alpha - v_0 \sin l. \tag{4}$$

S skice razberemo, da je $\sphericalangle SZC = 90^\circ + \alpha$, in za trikotnik SZC zapišemo sinusni izrek:

$$\frac{\sin(\alpha + 90^\circ)}{r_0} = \frac{\sin l}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{r_0}{r}\sin l. \tag{5}$$

S tem lahko opazovano radialno hitrost zvezde glede na Sonce naposled izrazimo kot

$$v'_\mathrm{r} = r_0\left(\frac{v}{r} - \frac{v_0}{r_0}\right)\sin l. \tag{6}$$

Če označimo kotno hitrost zvezde z $\omega = v/r$ in Sončevo z $\omega_0 = v_0/r_0$, lahko enačbo prepišemo v še nekoliko elegantnejšo obliko:

$$v'_\mathrm{r} = r_0(\omega - \omega_0)\sin l. \tag{7}$$

Enačbo ovrednotimo, tako da preverimo, kaj se zgodi v posebnih primerih. Če je $\omega = \omega_0$, je $v'_\mathrm{r} = 0$ ne glede na galaktično dolžino l. Če je $l = 0^\circ$ ali $l = 180^\circ$, je $v_\mathrm{r} = 0$ ne glede na kotno hitrost zvezde, kar je smiselno, saj se zvezda v tem primeru giblje pravokotno na smer pogleda in zato radialne hitrosti ne bi smeli izmeriti.

Podobno izpeljemo še izraz za opazovano tangentno hitrost. Relativna tangentno hitrost v'_t zvezde glede na Sonce je enaka razliki med projekcijama hitrosti kroženja zvezde in Sonca na smer pravokotno na smer pogleda. Izrazimo

$$v_\mathrm{t} = v\sin\alpha \qquad \text{in} \qquad v_{0,\mathrm{t}} = v_0\cos l$$

in za relativno tangentno hitrost zvezde glede na Sonce zapišemo

$$v'_\mathrm{t} = v\sin\alpha - v_0\cos l = r\omega\sin\alpha - r_0\omega_0\cos l.$$

Iz trikotnika CPZ razberemo

$$r\sin\alpha = r_0\cos l - d$$

in s tem pridelamo končni izraz

$$v'_\mathrm{t} = r_0(\omega - \omega_0)\cos l - \omega d. \tag{8}$$

V posebnem primeru $\omega = \omega_0$ je $v'_\mathrm{t} = -\omega d$, podoben rezultat dajeta tudi posebna primera $l = 90^\circ$ oziroma $l = 270^\circ$, kjer je prav tako $v'_\mathrm{t} = -\omega d$.

3. Oortovi enačbi in definicija Oortovih konstant

3.1 Oortovi enačbi za osnosimetrični disk

Oort je izpeljavo v svojem članku utemeljil na predpostavki, da je v Sončevi okolici razlika med kotnima hitrostma kroženja zvezd in Sonca zelo majhna. Predpostavil je tudi, da je disk Galaksije osno simetričen, kar pomeni, da je kotna hitrost $\omega(r)$ kroženja zvezd odvisna samo od njihove oddaljenosti od središča Galaksije [6].

Pri obravnavi gibanja zvezd v Sončevi okolici, za katere velja $d \ll r_0$, lahko kotno hitrost $\omega(r)$ zvezde razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli $r = r_0$ in v prvem približku obdržimo le prvi člen. S tem dobimo

$$\omega - \omega_0 \approx \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} (r - r_0).$$

Spomnimo se, da je $\omega = v/r$ in $v(r_0) = v_0$. Za razliko kotnih hitrosti tako velja

$$\omega - \omega_0 \approx \frac{1}{r_0^2} \left(r_0 \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} - v_0 \right) (r - r_0), \tag{9}$$

S skice na sliki 3 opazimo, da lahko oddaljenost zvezde od središča Galaksije v tem primeru izrazimo s približkom

$$r \approx r_0 - d\cos l \tag{10}$$

in zato za razliko kotnih hitrosti dobimo

$$\omega - \omega_0 \approx \frac{1}{r_0^2} \left(r_0 \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} - v_0 \right) (-d\cos l). \tag{11}$$

S tem lahko izraz (7) za radialno hitrost zapišemo kot

$$v_\mathrm{r}' \approx \left(\frac{v_0}{r_0} - \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} \right) d\cos l \sin l.$$

V zadnjih vzdihljajih izpeljave se spomnimo še trigonometričnega obrazca $\sin 2l = 2\sin l \cos l$ in sklenimo, da lahko radialno hitrost zvezde v Sončevi okolici izrazimo kot

$$v_\mathrm{r}' \approx Ad \sin 2l, \tag{12}$$

kjer smo z A označili **prvo Oortovo konstanto**:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} - \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} \right). \tag{13}$$

Posebej komentirajmo, da je ta količina res konstanta, ker je odvisna samo od vrednosti v_0, r_0 in $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r|_{r=r_0}$ na mestu Sonca.

Radialno hitrost zvezde v Sončevi okolici smo s tem izrazili z njeno oddaljenostjo od Sonca in galaktično dolžino.

Nekaj podobnega lahko postorimo tudi za tangentno komponento hitrosti. V enačbi (8) razliko kotnih hitrosti $\omega - \omega_0$ nadomestimo z izrazom (11), pri tem pa upoštevamo še približek $\omega d \approx \omega_0 d$. S tem dobimo

$$v'_{\mathrm{t}} \approx \left(\frac{v_0}{r_0} - \left. \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right|_{r=r_0} \right) d \cos^2 l - \omega_0 d.$$

Spomnimo se trigonometrične zveze $2\cos^2 l = 1 + \cos 2l$. Od tod sledi še izraz za tangentno hitrost

$$v'_{\mathrm{t}} \approx Ad \cos 2l + Bd, \tag{14}$$

kjer smo z B označili **drugo Oortovo konstanto**:

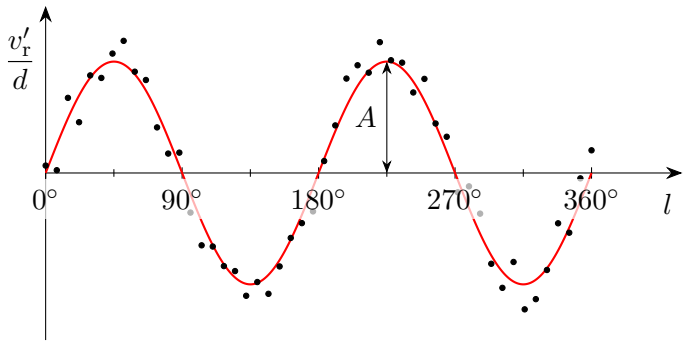
$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} + \left. \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right|_{r=r_0} \right). \tag{15}$$

Izraz za lastno gibanje μ s tem prepišemo v

$$\mu = \frac{v'_{\mathrm{t}}}{d} \approx A \cos 2l + B. \tag{16}$$

Enačba (12) kaže, da morajo radialne hitrosti zvezd na enaki razdalji od Sonca kot funkcija galaktične dolžine slediti sinusni odvisnosti, kar potrjujejo tudi opazovanja (slika 4). Podobno tudi lastna gibanja zvezd kažejo kosinusno odvisnost: amplituda teh sprememb je določena z Oortovo konstanto A, medtem ko povprečna vrednost ustreza konstanti B. Od tod je jasno, da za določitev vrednosti Oortovih konstant zadostujejo meritve relativnih tangentnih hitrosti (slika 5).

Oortovi konstanti A in B tako neposredno opisujeta lokalne lastnosti vrtenja Galaksije. Njuna velika prednost je, da ju lahko določimo zgolj iz opazovanj radialnih hitrosti in lastnih gibanj bližnjih zvezd, pri tem pa nam ni treba poznati zgradbe in dinamike celotne Galaksije. Omeniti je treba, da v izrazu (12) za relativno radialno hitrost v'_{r} razdalja nastopa eksplicitno, zato jo moramo poznati, da iz meritev izluščimo A. V izrazu (16) za lastno gibanje μ pa se odvisnost od d izgubi, zato lahko A in B določimo zgolj iz izmerjenih lastnih gibanj, ne da bi poznali oddaljenosti do posameznih zvezd.



Slika 4. Relativna radialna hitrost v'_r zvezd v Sončevi okolici v odvisnosti od galaktične dolžine l. Amplituda sinusne krivulje ponazarja Oortovo konstanto A. Podatki so simulirani in služijo zgolj za grafično ponazoritev pričakovane odvisnosti. Skica: Žan Arsov.

Znameniti Oortovi konstanti sta svoje mesto našli na steni stavbe nasproti observatorija v Leidnu (slika 6), na katerem je delal Oort, med letoma 1945 in 1970 pa je bil tudi direktor tega observatorija. Razen konstant je Oort skupaj s študentom H. van de Hulstom napovedal 21-centimetrsko črto nevtralnega vodika. Poleg tega je pokazal še, da kometi izvirajo iz oddaljenega oblaka, ki obdaja Sonce na razdalji približno 0,1 pc in ga danes nizozemskemu astronomu v čast imenujemo Oortov oblak.

3.2 Oortove enačbe za disk, ki ni osno simetričen

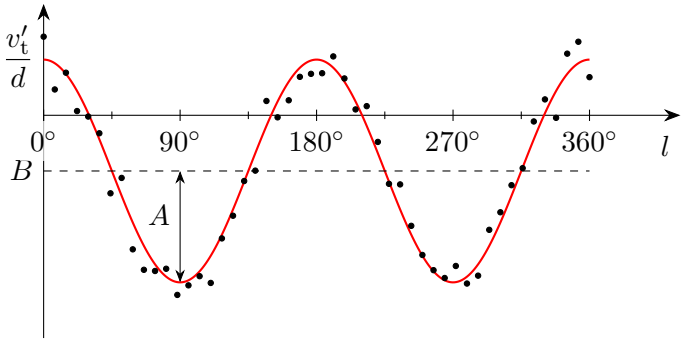
V prejšnjem razdelku smo pri izpeljavi sledili Oortovim stopinjam in Galaksijo obravnavali kot osno simetrični disk. Tako obravnavo lahko preprosto posplošimo na primer diska, ki ni osno simetričen, pri čemer bomo sledili [9].

Vsaki točki $\boldsymbol{x}$ v Galaksiji pripišemo hitrost $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$, kjer smo z v_x označili komponento hitrosti v smeri proti središču Galaksije, z v_y pa komponento hitrosti v smeri vrtenja Galaksije. Pri tem predpodstavljamo, da se tirnice posameznih zvezd ne sekajo. Povprečno hitrost $\boldsymbol{v}$ v točki $\boldsymbol{x}$ v Galaksiji glede na opazovalca v Osončju razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli $\boldsymbol{x} = 0$, tj. okoli Sonca, in dobimo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{x} + O(\boldsymbol{x}^2), \tag{17}$$

pri čemer je $\boldsymbol{v}_0$ hitrost Sonca in

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=0} = \begin{pmatrix} K + C & A - B \\ A + B & K - C, \end{pmatrix}. \tag{18}$$



Slika 5. Relativna tangentna hitrost v'_t zvezd v Sončevi okolici v odvisnosti od galaktične dolžine l. Na grafu je kosinusna krivulja z amplitudo, določeno z Oortovo konstanto A, ki je glede na vodoravnico zamaknjena za vrednost Oortove konstante B. Podatki so simulirani in služijo zgolj za grafično ponazoritev pričakovane odvisnosti. Skica: Žan Arsov.

Z A, B, C in K smo označili štiri Oortove konstante, ki opisujejo lokalno hitrostno polje zvezd v okolici Sonca in podajajo informacije o dinamiki Galaksije. Konstanti A in B imata enak pomen kot v osno simetričnem primeru, medtem ko C in K pojasnjujeta odstopanja od osno simetrične rotacije.

Za zvezdo z galaktično dolžino l, ki se nahaja na razdalji r od Sonca, izrazimo radialno hitrost

$$v'_r = v_x \cos l + v_y \sin l \tag{19}$$

in tangentno komponento hitrosti

$$v'_t = -v_x \sin l + v_y \cos l. \tag{20}$$

Če upoštevamo še $\boldsymbol{x} = r(\cos l, \sin l)$, na podlagi enačb (17), (19) in (20) dobimo

$$v'_r \approx Kr + Ar \sin 2l + Cr \cos 2l, \tag{21}$$

in

$$v'_t \approx Br + Ar \cos 2l - Cr \sin 2l. \tag{22}$$

Enačbi ovrednotimo, tako da preverimo, kaj se zgodi v posebnem primeru osno simetričnega diska. Takrat je $C = 0$ in $K = 0$ ter se dobljeni enačbi za radialno in tangentno hitrost popolnoma skladata z enačbama (7) in (8), ki smo ju izpeljali v prejšnjem razdelku.



Slika 6. Oortovi konstanti A in B na steni zraven observatorija v Leidnu. Vir fotografije: [11].

Oortove konstante lahko izrazimo tudi v valjnih koordinatah (R, φ) s Soncem pri $(R_0, 0)$ [9]. Velja

$$2A = \frac{v_\varphi}{r} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{R}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \tag{23a}$$

$$2B = -\frac{v_\varphi}{r} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \tag{23b}$$

$$2C = -\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \tag{23c}$$

$$2K = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \tag{23d}$$

pri čemer smo z v_φ označili tangentno komponento hitrosti kroženja, z v_r pa radialno komponento hitrosti. V primeru osno simetričnega diska je $\partial v_\mathrm{r}/\partial\varphi = 0$ in $v_\mathrm{r} = 0$, saj zvezde samo krožijo okoli središča Galaksije po krožnicah. Od tod hitro vidimo, da je v tem primeru $C = 0$ in $K = 0$, hkrati pa se izraza za Oortovi konstanti A in B poenostavita v enačbi (13) in (15), ki smo ju izpeljali v prejšnjem razdelku.

4. Meritve Oortovih konstant in njihov pomen

4.1 Meritve Oortovih konstant

Oort je v svojem članku [8] za vrednost prve Oortove konstante zabeležil

$$A = (31{,}0 \pm 3{,}7)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

Vrednosti konstante B ni eksplicitno navedel, vendar lahko na podlagi njegovega zaključka, da je rotacijska krivulja Galaksije približno Keplerjevega tipa, sklepamo, da bi dobil vrednost okoli $B = -10\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$. Te vrednosti odstopajo od sodobnih vrednosti. Leta 1964 je IAU sprejel priporočilo, da se za standardni vrednosti Oortovih konstant vzame

$$A = 15\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}} \qquad \text{in} \qquad B = -10\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}},$$

kar je bilo v skladu z meritvami iz tistega časa. Na podlagi podatkov satelita Hipparcos Evropske vesoljske agencije ESA so leta 1997 izmerili vrednosti

$$A = (14{,}82 \pm 0{,}84)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}} \qquad \text{in} \qquad B = (-12{,}37 \pm 0{,}64)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

Sodobne vretnosti Oortovih konstant, ki temeljijo na podatkih misije *Gaia* [2, 4, 10] agencije ESA, so

$$A = (15{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \quad B = (-11{,}9 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}},$$

$$C = (-3{,}1 \pm 0{,}5)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \quad K = (-1{,}3 \pm 1{,}0)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

Neničelni vrednosti konstant C in K nakazujeta prisotnost odklonov od idealne osnosimetrične rotacije. Ti odkloni so posledica struktur, kot so spiralni rokavi, prečka ali lokalne tokovne motnje v zvezdnem disku.

V nadaljevanju bomo pokazali, kaj vse lahko na podlagi sodobnih vrednosti Oortovih konstant povemo o zgradbi in vrtenju Galaksije.

4.2 Lastnosti rotacijske krivulje v Sončevi okolici

Prva sijajna posledica meritev Oortovih konstant je, da lahko na podlagi njunih vrednosti izračunamo kotno hitrost kroženja Sonca okoli središča Galaksije. Če namreč odštejemo izraza (13) in (15) za Oortovi konstanti, dobimo

$$A - B = \frac{v_0}{r_0} = \omega_0 \approx 27{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \tag{24}$$

pri čemer smo z ω_0 zaznamovali kotno hitrost kroženja Sonca okoli središča Galaksije. Povzemimo, da lahko na podlagi meritev Oortovih konstant

izračunamo kotno hitrost kroženja Sonca okoli središča Galaksije, ne da bi morali poznati oddaljenost r_0 do središča ali dejansko hitrost kroženja v_0.

Oddaljenost r_0 Sonca do središča Galaksije lahko izmerimo na več različnih načinov. Ena izmed možnosti je, da jo izmerimo na podlagi gibanja zvezd v bližni supermasivne črne luknje v osrčju Galaksije. Pri tem moramo spremljati tako astrometrične meritve kotnega položaja zvezd na nebu kot tudi spektroskopske meritve radialnih hitrosti. Omenimo še drugi način, s katerim je oddaljenost središča Galaksije izmeril že Harlow Shapley v začetku 20. stoletja. Shapley je opazoval porazdelitev in svetlost kroglastih kopic. Na podlagi tega je določil, da se središče Galaksije nahaja v smeri ozvezdja Strelca, in njegovo oddaljenost ocenil na približno 15 kpc. Sodobne ocene, ki temeljijo na natančnejših meritvah, pa kažejo, da je ta oddaljenost manjša, in sicer okoli 8,2 kpc. To se sklada z meritvijo na podlagi opazovanj zvezd v bližini supermasivne črne luknje Strelec A*.

Ker torej $r_0 = 8{,}2\,\mathrm{kpc}$ poznamo iz neodvisnih meritev, lahko na podlagi Oortovih konstant izračunamo hitrost v_0 kroženja Sonca okoli središča Galaksije. Dobimo

$$v_0 = \omega_0 r_0 = (A - B) r_0 = 220\,\mathrm{km\,s^{-1}}. \tag{25}$$

S tem nam Oortove konstante služijo za kalibracijo rotacijske krivulje Galaksije, o kateri bomo več spregovorili v nadaljevanju.

Ugotovili smo torej, da lahko na podlagi razlike Oortovih konstant izračunamo kotno hitrost kroženja Sonca okoli središča Galaksije. Preverimo, kaj nam pove vsota Oortovih konstant. Če izraza (13) in (15) seštejemo, sledi

$$A + B = -\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} \approx 3{,}4\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \tag{26}$$

kar pomeni, da vsota Oortovih konstant predstavlja vrednost lokalnega gradienta rotacijske hitrosti. V konkretnem primeru vidimo, da je vrednost tega gradienta razmeroma majhna. To pomeni, da je rotacijska krivulja Galaksije v okolici Sonca približno ravna, kar je ena ključnih opazovalnih lastnosti in pomemben znak za prisotnost temne snovi [1]. Na podlagi meritev Oortovih konstant lahko proučujemo modele porazdelitev mase v Galaksiji in prispevek temne snovi k skupni masi Galaksije.

4.3 Gostota v Sončevi okolici

Na podlagi meritev Oortovih konstant lahko ocenimo tudi vrednost lokalne masne gostote ρ_0 v Sončevi okolici. Za osno simetričen gravitacijski potencial $\Phi(R, z)$ velja Poissonova enačba

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \tag{27}$$

V ravnini Galaksije ($z = 0$) v Sončevi okolici za zdaj zanemarimo odvisnost od koordinate z, zato ostane le radialni del Laplaceovega operatorja:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\rho_0.$$

Ker je hitrost v kroženja povezana s potencialom prek zveze

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{v^2}{r},$$

dobimo

$$-\frac{1}{r}\cdot 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 4\pi G\rho_0,$$

oziroma

$$\rho_0 = -\frac{1}{2\pi G}\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

Na podlagi izrazov (24) in (26) lahko izrazimo v/r in $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ z Oortovima konstantama:

$$\frac{v}{r}\left(-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = (A-B)(A+B) = A^2 - B^2,$$

iz česar za masno gostoto v Sončevi okolici dobimo

$$\rho_0 = \frac{A^2 - B^2}{2\pi G} \approx 0{,}0034\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}, \tag{28}$$

pri čemer smo z $\mathrm{M}_\odot$ označili maso Sonca. Druge neodvisne ocene gostote v Sončevi okolici, ki temeljijo na opazovanjih vertikalnih nihanj zvezd, dajejo rezultat $\rho_0 \sim 0{,}1\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$, kar pomeni, da smo z zgornjim izračunom gostoto bistveno podcenili. Poudarimo naj, da smo pri izpeljavi zanemarili vertikalni prispevek potenciala, v splošnem [15] namreč velja

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right|_{(r_0,0)} = 4\pi G\rho_0 - 2\left(A^2 - B^2\right). \tag{29}$$

4.4 Epiciklična frekvenca

Zaradi gravitacijskih motenj in nehomogenosti gravitacijskega potenciala Galaksije se zvezde v resnici ne gibljejo po krožnih tirnicah, temveč njihove tirnice od teh krožnic nekoliko odstopajo. Tako zvezde v času enega obhoda nekoliko nihajo v radialni smeri, kar opisuje tako imenovana **epiciklična frekvenca** κ. Zavzete bralce lahko presenetimo z odlično novico, da lahko tudi epiciklično frekvenco izrazimo z Oortovimi konstantami!

Znova predpostavimo, da je disk osnosimetričen in da za gravitacijski potencial velja $\Phi(r,z) = \Phi(r,-z)$. Zapišimo enačbe gibanja v valjnih koordinatah:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\partial_r \Phi, \tag{30a}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \tag{30b}$$

$$\ddot{z} = -\partial_z \Phi. \tag{30c}$$

Iz druge enačbe sledi, da je specifična vrtilna količina $l \equiv r^2\dot{\varphi}$ v tem primeru konstanta gibanja. S tem v zvezi lahko definiramo efektivni potencial

$$\Phi_{\mathrm{ef}}(r,z) = \Phi(r,z) + \frac{l^2}{2r^2} \tag{31}$$

in s tem enačbe gibanja prepišemo v

$$\ddot{r} = -\partial_r \Phi_{\mathrm{ef}}, \tag{32a}$$

$$\ddot{z} = -\partial_z \Phi_{\mathrm{ef}}. \tag{32b}$$

Gibanje bomo obravnavali v okviru teorije motnje. Označimo motnjo z $\delta\boldsymbol{r} = \Delta r \boldsymbol{e}_r + \delta z \boldsymbol{e}_z$. Potem imamo

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \delta\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\Phi_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}) \approx -\nabla\Phi_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r}) - \partial_r^2\Phi_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r})\delta r - \partial_z^2\Phi_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r})\delta z.$$

Torej je

$$\delta\ddot{r} = -\partial_r^2\Phi_{\mathrm{ef}}\delta r = -\omega_r^2\delta r$$
$$\delta\ddot{z} = -\partial_z^2\Phi_{\mathrm{ef}}\delta z = -\omega_z^2\delta z$$

Označimo

$$\kappa^2 = \omega_r^2 = \partial_r^2\Phi_{\mathrm{ef}} = \partial_r^2\Phi + \frac{3l^2}{r^4}.$$

Za krožno tirnico velja $l^2 = r^3\partial_r\Phi$, zato imamo v tem primeru

$$\kappa^2 = \partial_r^2\Phi + \frac{3}{r}\partial_r\Phi.$$

Za kotno hitrost kroženja na krožni tirnici velja $\omega^2 = \partial_r\Phi/r$, iz česar naposled izrazimo

$$\kappa^2 = 4\omega^2 + 2r\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = 2\omega\left(2\omega + r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right).$$

V enačbi prepoznamo definicijo druge Oortove konstante B

$$B = -\left(\omega + \frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right), \tag{33}$$

le da je tukaj izražena s kotno hitrostjo kroženja ω namesto s hitrostjo kroženja v. S tem lahko epiciklično frekvenco za zvezde v Sončevi okolici zapišemo kot

$$\kappa^2 = -4B\omega = -4B(A - B). \tag{34}$$

Za zvezdo v Sončevi okolici ($\omega = \omega_0$) bi dobili $\kappa = 37\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$, kar ustreza periodi $P = 2\pi/\kappa = 170 \cdot 10^6$ let. Primerjamo z obhodnim časom kroženja Sonca okoli središča Galaksije, $P_0 = 220 \cdot 10^6$ let [6]. To pomeni, da zvezde v Sončevi okolici med enim obhodom okoli središča Galaksije naredijo približno 1,3 nihaja v radialni smeri. Zato se njegova tirnica v inercialnem opazovalnem sistemu ne zapre sama vase, temveč tvori rozeti podobno krivuljo, ki se imenuje **epiciklična tirnica** [15].

4.5 Oblika rotacijske krivulje

Rotacijske krivulje galaksij opisujejo, kako se krožna hitrost $v(r)$ zvezd in plina spreminja z razdaljo R od galaktičnega središča. V grobem ločimo tri preproste oblike rotacijskih krivulj, to so rotacija togega telesa, Keplerjeva krivulja in ravna rotacijska krivulja. Oglejmo si jih podobneje.

1. **Rotacijska krivulja togega telesa.** Prva zamisel za modeliranje rotacijske krivulje Galaksije je bila, da se Galaksija vrti kot togo telo. Pri vrtenju togega telesa je kotna hitrost ω za vse točke enaka, kar pomeni, da se krožna hitrost v povečuje linearno z razdaljo r od središča. Od tod lahko sklenemo, da za rotacijsko krivuljo togega telesa velja

   $$v(r) = \omega r \propto r. \tag{35}$$

   Če to vrtenje togega telesa uporabimo za interpretacijo rotacijske krivulje Galaksije, bi bil $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r = v/r$. Vstavimo to v enačbi (13) in (15) in za Oortovi konstanti dobimo

   $$A = 0, \qquad B = -\frac{v_0}{r_0} \approx -27{,}5\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

2. **Keplerjeva krivulja** ustreza modelu Galaksije, v katerem je večina mase zbrane v središču. V tem primeru hitrost kroženja zvezd pada z razdaljo:

   $$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto r^{-1/2}. \tag{36}$$

Če bi bila rotacijska krivulja Galaksije popolnoma Keplerjevega tipa, bi bilo $v \propto r^{-1/2}$ in zato bi bil odvod $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r = -v/(2r)$. Vstavimo to v enačbi (13) in (15) in za Oortovi konstanti dobimo

$$A = \frac{3}{4}\frac{v_0}{r_0} \approx 20{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \qquad B = -\frac{1}{4}\frac{v_0}{r_0} \approx -6{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

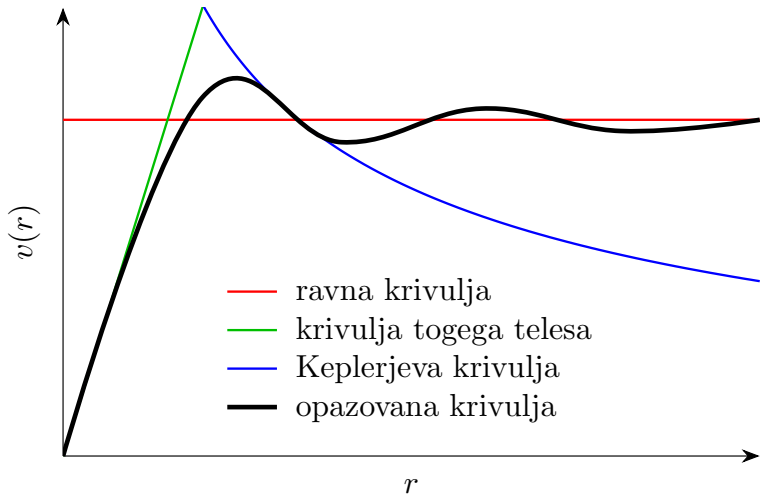
3. **Ravna rotacijska krivulja** je po svoje najbolj preprosta – v tem primeru je hitrost kroženja preprosto neodvisna od razdalje od središča kroženja. Velja

$$v(r) = v_0 = \mathrm{konst.} \tag{37}$$

Če je rotacijska krivulja ravna, potem je $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r = 0$. V tem primeru za Oortovi konstanti dobimo

$$A = \frac{1}{2}\frac{v_0}{r_0} \approx 13{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}},\ B = -A = -\frac{1}{2}\frac{v_0}{r_0} \approx -13{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}.$$

Na podlagi Oortovih konstant lahko naredimo lokalno rekonstrukcijo oblike rotacijske krivulje naše Galaksije. Izmerjeni vrednosti Oortovih konstant A in B sta blizu napovedi za ravno rotacijsko krivuljo ($A \approx |B|$). To pomeni, da je hitrost kroženja v tem območju približno konstantna.



Slika 7. Rotacijska krivulja. Prikazana je krožna hitrost $v(r)$ kot funkcija galaktičnega radija r. V notranjosti Galaksije (do približno 2–3 kpc) hitrost hitro narašča, kar ustreza rotaciji togega telesa. V zunanjem disku (od približno 3 kpc naprej) pa je krivulja skoraj ravna, kar nakazuje na prisotnost temne snovi. Skica: Žan Arsov.

Dejansko rotacijsko krivuljo Galaksije lahko opišemo s kombinacijo več režimov. V notranjosti se Galaksija približno vrti kot togo telo, v zunanjem delu diska pa je krivulja skoraj ravna (slika 7).

Tak rezultat je ključnega pomena! Če bi bila vsa masa Galaksije zbrana v središču, bi hitrost kroženja daleč od središča padala sorazmerno z $1/\sqrt{r}$. Ker pa je masa Galaksije porazdeljena po celotnem disku, natančna oblika pričakovane rotacijske krivulje ni tako preprosta, temveč je odvisna od porazdelitve vidne (barionske) snovi. Kljub temu opazovanja kažejo, da je rotacijska krivulja Galaksije od približno 3 kpc naprej bistveno bolj ravna, kot bi pričakovali celo ob upoštevanju porazdelitve vse vidne snovi. Odstopanje, ki ga je prva sistematično raziskovala Vera Rubin, danes razlagamo z obstojem temne snovi.

5. Sklep

V članku smo pokazali, da lahko na podlagi Oortovih konstant opišemo osnovne značilnosti vrtenja galaktičnega diska, ne da bi poznali njegovo celotno strukturo. Rezultati kažejo, da se disk Galaksije vrti diferencialno in da je rotacijska krivulja v bližini Sonca približno ravna, kar neposredno nakazuje, da masa Galaksije ni zbrana v njenem središču, kar vidimo tudi z opazovanji zvezd oziroma vidne snovi.

S sodobnimi podatki misije *Gaia* dobimo značilne vrednosti Oortovih konstant: $A \approx (15{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$ in $B \approx (-11{,}9 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$. Na podlagi teh meritev smo ocenili kotno hitrost kroženja $\omega_0 \approx 27{,}2\,\mathrm{km/s\,kpc}$ in nato še hitrost kroženja Sonca $v_0 \approx 220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ okoli središča Galaksije ter lokalno masno gostoto $\rho_0 \sim 0{,}0034\,\mathrm{M_\odot\,pc^{-3}}$ in epiciklično frekvenco $\kappa \approx 37\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$.

Neničelni vrednosti konstant C in K nakazujeta odstopanja od osne simetrije, ki razkrivajo strukture, kot so na primer spiralni rokavi in prečka Galaksije. Oortove konstante tako predstavljajo enega prvih in najpomembnejših dokazov za obstoj temne snovi ter omogočajo povezavo opazovanj zvezd v Sončevi okolici z rotacijsko krivuljo Galaksije, porazdelitvijo mase in gravitacijskim potencialom diska.

V sklepnem delu bi se želel zahvaliti Dunji Fabjan za pregled in Žanu Arsovu za pomoč pri grafični opremi članka.

LITERATURA

[1] Bovy, J. (2017). *Galactic rotation in Gaia DR1: First confident measurements of non-axisymmetric Oort constants C and K.* arXiv:1610.07610. Dostopno na `https://arxiv.org/abs/1610.07610`.

[2] Gaia Collaboration, Brown, A. G. A., Vallenari, A., Prusti, T., de Bruijne, J. H. J., Babusiaux, C., & Bailer-Jones, C. A. L., et al. (2018). *Gaia Data Release 2: Mapping the Milky Way kinematics.* Astronomy & Astrophysics, 616, A11. Dostopno na `https://doi.org/10.1051/0004-6361/201832727`.

[3] Guštin, Andrej; Fabjan, Dunja; Kavčič, Vid; Bukovšek, Simon. *Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024: teorija in rešene naloge za srednje šole.* Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko, 2024.

[4] Guo, S., & Qi, Z. (2023). *Oort constants and local stellar kinematics from GCNS.* Universe, 9(6), 252. Dostopno na `https://www.mdpi.com/2218-1997/9/6/252`.

[5] Kapteyn, J. C., & van Rhijn, P. J. (1920). *The distribution of stars in space.* Publications of the Kapteyn Astronomical Laboratory.

[6] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2017). *Fundamental Astronomy* (6th ed.). Springer, Berlin Heidelberg. `https://doi.org/10.1007/978-3-662-53045-0`.

[7] Lindblad, B. (1930). *On the rotation of the Galaxy.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 90, 592–602.

[8] Oort, J. H. (1927). *Observational evidence confirming Lindblad's hypothesis of a rotation of the galactic system.* Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 3, 275–282. Dostopno na `http://adsabs.harvard.edu/abs/1927BAN.....3..275O`.

[9] Olling, R. P., & Dehnen, W. (2003). *The local stellar kinematics and Oort constants from Hipparcos.* Astrophysical Journal, 599(1), 275–296. Dostopno na `http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...599..275O`.

[10] Wang, F., Wang, H.-W., & Huang, Y. (2021). *Local stellar kinematics and Oort constants from the LAMOST A-type stars using a non-axisymmetric model.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 504(1), 199–207. Dostopno na `https://academic.oup.com/mnras/article/504/1/199/6188377`.

[11] Muurformules, *Muurformules*. Dostopno na: `https://muurformules.nl/` (Dostopano: 7. maj 2026).

[12] Wikipedia contributors, *Oort constants*, Wikipedia, The Free Encyclopedia. Dostopno na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Oort_constants` (Dostopano: 7. maj 2026).

[13] Wikipedia contributors, *Epicyclic frequency*, Wikipedia, The Free Encyclopedia. Dostopno na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Epicyclic_frequency` (Dostopano: 7. maj 2026).

[14] J. I. Read, *The Local Dark Matter Density.* arXiv:1404.1938 [astro-ph.GA], 2014. Dostopno na: `https://arxiv.org/abs/1404.1938` (Dostopano: 7. maj 2026).

[15] Binney, J., & Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics* (2nd ed.). Princeton University Press, Princeton, NJ. ISBN 978-0-691-13026-2.

VESTI

Nagrada Ivana Vidava

Prvi prejemnik nagrade Ivana Vidava za matematike na začetku kariere je Kenny Bešter Štorgel za svoj prispevek pri delu "Treewidth vs clique number". Nagrado je ustanovilo društvo DMFA Slovenije leta 2025 na predlog Odbora za matematiko pri DMFA Slovenije. Podeljuje se vsaka tri leta za izjemne dosežke mladih doktorjev matematike, ki so znaten delež svojega raziskovalnega dela opravili v Sloveniji.

Na predlog Odbora za matematiko je upravni odbor DMFA potrdil strokovno komisijo v sestavi prof. dr. Sergio Cabello Justo, prof. dr. Aleksey Kostenko in prof. dr. Marjeta Kramar Fijavž. Komisija je prejela štiri nominacije.

Utemeljitev komisije

Člani komisije smo soglasno sklenili, da je Kenny Bešter Štorgel najmočnejši kandidat. Serija člankov Bešter Štorgla v sodelovanju s C. Dallardom in M. Milaničem, "Treewidth vs. Clique Number, I—III", je navdušujoč dosežek. Drevesna širina (angl. "treewidth") je parameter grafa, ki v grobem meri, kako blizu je dani graf drevesu.

V tem delu so avtorji začeli s študijem družin grafov, za katere je prisotnost velike klike ne le zadosten, temveč tudi nujen pogoj za veliko drevesno širino. Zanimivost in pomembnost teh raziskav je v tem, da lahko omejenost drevesne širine bistveno vpliva na nekatere algoritme, to je, nekatere NP-težke probleme za te razrede grafov dejansko lahko rešimo v polinomskem času. Za splošnejši pogoj omejenosti drevesne širine z neko funkcijo kličnega števila pa je o algoritmični uporabi veliko manj znanega.

Naj poudarimo, da so avtorji sami že obravnavali tudi ta vidik in za več pomembnih algoritmičnih problemov pokazali, da je to res možno (npr. za problem k-klike, problem seznamskega k-barvanja, če jih navedemo le nekaj), ter postavili tudi več zanimivih domnev.

Kvaliteto te serije člankov potrjujejo tudi naslednja dejstva. Del I je bil objavljen v reviji SIAM Journal of Discrete Mathematics, medtem ko sta se Dela II in III pojavila v reviji Journal of Combinatorial Theory, Series B, ki velja za eno najpomembnejših in najbolj selektivnih revij, specializiranih za teorijo grafov.

Še pomembnejši pa je vpliv teh člankov na aktualne raziskave. Naj omenimo, da so medtem nekatere tu zastavljene probleme in domneve že

obravnavali ugledni raziskovalci (npr. M. Chudnovsky s sodelavci). Posvetovali smo se tudi z dvema zunanjima ekspertoma, ki sta oba potrdila, da so ti članki izjemno kvalitetni.

Jasna Prezelj

1. C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, Treewidth versus clique number. I. Graph classes with a forbidden structure, SIAM J. Discrete Math. 35 (4) (2021) 2618–2646.

2. C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, Treewidth versus clique number. II. Graph classes with a forbidden structure, Journal of Combinatorial Theory, Series B 164 (2024) 404–442.

3. C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, Treewidth versus clique number. III. Tree-independence number of graphs with a forbidden structure. Journal of Combinatorial Theory, Series B 167 (2024) 338–391.

Kenny Bešter Štorgel – nagrada Ivana Vidava 2026

Kenny Bešter Štorgel je prejemnik nagrade Ivana Vidava DMFA Slovenije za matematike na začetku kariere, in sicer za prispevek pri seriji treh člankov o drevesni širini in kličnem številu, "Treewidth versus clique number", [1, 2, 3]. Članki sodijo na področje teorije grafov. Pri tem je *graf* definiran kot urejen par $G = (V, E)$, ki sestoji iz končne množice V *točk* in množice E dvoelementnih podmnožic množice V, imenovanih *povezave*. Točki, ki tvorita povezavo $\{u, v\}$, sta *sosednji* in sta *krajišči* povezave $\{u, v\}$.

Serija člankov obravnava različne *invariante* grafov, tj. preslikave, ki vsak graf preslikajo v neko (običajno številsko) množico in ne razlikujejo med izomorfnimi grafi. Tri invariante, ki so za serijo člankov ključnega pomena, so klično število, neodvisnostno število in drevesna širina. *Klično število* grafa G je označeno z $\omega(G)$ in definirano kot največja moč množice paroma sosednjih točk grafa G. Podobno je *neodvisnostno število* grafa G definirano kot največja moč množice paroma nesosednjih točk grafa G. Definicija drevesne širine je malce bolj zapletena in temelji na konceptu drevesnih dekompozicij. *Drevesna dekompozicija* grafa $G = (V, E)$ je poljubno drevo T, opremljeno z *vrečami*, tj. takimi podmnožicami $X_t \subseteq V$ množice točk grafa G, po eno za vsako točko t drevesa T, da sta krajišči vsake povezave grafa G vsebovani v neki vreči in za vsako točko $v \in V$ grafa G velja, da množica vseh točk t drevesa T, za katere vreča X_t vsebuje v, inducira neprazno poddrevo drevesa T. *Širina* drevesne dekompozicije je za ena zmanjšana največja moč vreče, *drevesna širina* grafa G, z oznako $\mathsf{tw}(G)$



Slika 1. Dr. Kenny Bešter Štorgel, prejemnik prve nagrade Ivana Vidava DMFA Slovenije za matematike na začetku kariere. Foto: Marcela Bešter Štorgel.

(iz angl. *treewidth*), pa je definirana kot najmanjša možna širina drevesne dekompozicije grafa G.

Drevesna širina igra pomembno vlogo v strukturni teoriji grafov, zlasti v teoriji grafovskih minorjev Robertsona in Seymourja (glej npr. [4]). Izjemnega pomena je tudi za razvoj učinkovitih algoritmov za NP-težke odločitvene in optimizacijske probleme na razredih grafov, v katerih je drevesna širina omejena z neko konstanto. Pri tem je treba izpostaviti *Courcelleov izrek* [5]: vsako lastnost grafa, ki jo je mogoče definirati v monadični logiki grafov drugega reda, je na grafih omejene drevesne širine mogoče odločiti v linearnem času.

Grafi z velikim kličnim številom imajo veliko drevesno širino. Serija člankov [1, 2, 3] proučuje posplošitev grafov omejene drevesne širine, in sicer tako imenovane (tw, ω)-*omejene* razrede grafov, tj. razrede grafov, v katerih omejeno klično število ni zgolj potreben, pač pa tudi zadosten pogoj za omejeno drevesno širino, in sicer ne samo za graf, pač pa tudi za vse njegove inducirane podgrafe.

V članku [3] je obravnavanih šest relacij vsebovanosti grafov: minor, topološki minor, podgraf, induciran minor, induciran topološki minor in induciran podgraf. Za vsako od njih je podana karakterizacija grafov H, za katere velja, da je razred grafov, ki ne vsebujejo grafa H glede na dano relacijo, (tw, ω)-omejen. Izpeljanih je tudi nekaj algoritmičnih uporab (tw, ω)-omejenosti, med drugim za problem k-klike in problem seznamskega

k-barvanja.

V članku [2] je vpeljana invarianta grafov, imenovana *drevesno neodvisnostno število*, ki je definirana podobno kot drevesna širina, le da se namesto širine drevesne dekompozicije obravnava največje neodvisnostno število podgrafov, induciranih z neko vrečo.[1] Z uporabo Ramseyjevega izreka [8] je pokazano, da je omejeno drevesno neodvisnostno število zadosten pogoj za (tw, ω)-omejenost. Prek novih strukturnih dognanj so za grafe z omejenim drevesnim neodvisnostnim številom izpeljani polinomski algoritmi za številne posplošitve problema *največje neodvisne množice* (tj. problem izračuna neodvisnostnega števila danega grafa).

Glavni rezultat članka [1] je vzporeden z zgoraj omenjenim rezultatom iz članka [3]: za šest relacij vsebovanosti grafov so podane karakterizacije grafov H, za katere velja, da ima razred grafov, ki ne vsebujejo grafa H glede na dano relacijo, omejeno drevesno neodvisnostno število. Dobljene karakterizacije sovpadajo s tistimi za (tw, ω)-omejenost in avtorji so postavili domnevo, da je (tw, ω)-omejenost tudi na splošno ne samo potreben, ampak tudi zadosten pogoj za omejeno drevesno neodvisnostno število. Domnevo sta pred kratkim ovrgla Chudnovsky in Trotignon [7], kar predstavlja nov izziv za razumevanje (tw, ω)-omejenosti, vključno s še vedno odprtim vprašanjem, ali (tw, ω)-omejenost implicira obstoj polinomskega algoritma za problem največje neodvisne množice.

Martin Milanič[2]*, FAMNIT in IAM, Univerza na Primorskem*

LITERATURA

[1] C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, *Treewidth versus clique number. III. Tree-independence number of graphs with a forbidden structure*, J. Combin. Theory Ser. B **167** (2024), 338–391.

[2] C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, *Treewidth versus clique number. II. Tree-independence number*, J. Combin. Theory Ser. B **164** (2024), 404–442.

[3] C. Dallard, M. Milanič, K. Štorgel, *Treewidth versus clique number. I. Graph classes with a forbidden structure*, SIAM J. Discrete Math. **35** (2021), no. 4, 2618–2646.

[4] Z. Dvořák, *Graph minors—theory and applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2025.

[5] B. Courcelle, *The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs*, Inform. and Comput. **85** (1990), no. 1, 12–75.

[6] N. Yolov, *Minor-matching hypertree width*, in: Proc. 29th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA 2018), SIAM, 2018, 219–233.

[7] M. Chudnovsky, N. Trotignon, *On treewidth and maximum cliques*, Innov. Graph Theory **2** (2025), 223–243.

[1] Medtem ko je bil članek v postopku recenzije, so avtorji izvedeli, da je omenjeno invarianto leta 2018 vpeljal in študiral že Yolov [6].

[2] martin.milanic@upr.si

[8] F. P. Ramsey, *On a Problem of Formal Logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1929), no. 4, 264–286.

Poročilo s srečanja Sveta Evropskega fizikalnega društva (EPS Council Meeting) 2026

Institut za teoretično fiziko in astronomijo Univerze v Vilniusu (Litva) je maja gostil redno letno srečanje Sveta Evropskega fizikalnega društva (European Physical Society - EPS). Srečanja se je udeležilo približno šestdeset predstavnikov nacionalnih fizikalnih društev, pridruženih članov ter predstavnikov sekcij in drugih organov društva. Letos je bilo srečanje prvič organizirano skupaj s srečanjem predstavnikov programa Mladi umi (Young Minds), zato se je skupnih zaključnih predstavitev udeležilo okoli sto udeležencev. Srečanje je potekalo v arhitekturno zanimivi stavbi instituta, katere zasnova je črpala navdih iz atomske strukture grafena.



Slika 2. Skupinska slika udeležencev pred stavbo Instituta

Med najpomembnejšimi temami letošnjega zasedanja so bile menjava predsednika EPS, obravnava dveh pomembnih dokumentov stališč s področja energetike in visokošolskega izobraževanja, predstavitve dejavnosti nacionalnih društev ter okrogla miza o položaju znanstvenih raziskav v luči

trenutnih geopolitičnih razmer.

Po potrditvi dnevnega reda in zapisnika prejšnjega zasedanja ter pozdravnem nagovoru gostiteljev je predsednica EPS prof. Mairi Sakellariadou (King's College London) predstavila pregled dela v svojem mandatu. Izpostavila je strateške usmeritve, ki si jih je zastavila ob nastopu funkcije, med katerimi so krepitev položaja Evrope na področju znanosti in raziskav, večja in aktivnejša vključenost fizikov v oblikovanje evropskih znanstvenih politik ter utrditev vloge EPS kot osrednje evropske organizacije na področju fizike. Pomemben del aktivnosti je bila izdaja obsežne knjige *EPS Grand Challenges: Physics for Society in the Horizon 2050* [1].

Poseben poudarek je predsednica namenila večletnim prizadevanjem za pripravo dokumentov, ki so namenjeni evropskim odločevalcem kot strokovna podlaga za oblikovanje politik, predvsem na področju energetike. Ob tem je pojasnila, da uresničitev načrta o zaposlitvi strokovnega sodelavca (lobista) za področje znanstvenih politik, ki bi podpiral sodelovanje EPS z evropskimi odločevalci v Bruslju, zaradi finančnih omejitev za zdaj še ni bila mogoča. Drugo pomembnejše področje delovanja EPS predstavlja visokošolsko izobraževanje. Predsednica je poudarila, da morajo študijski programi fizike diplomantom omogočiti razvoj kompetenc, ki jih bodo pripravile na uspešno vključevanje v hitro spreminjajoče se raziskovalno in gospodarsko okolje. Predstavila je tudi aktivnosti ob Mednarodnem letu kvantne znanosti in tehnologije, pri katerem smo sodelovali tudi v DMFA. Poročala je tudi o priznanju novih lokacij, ki so bile v zadnjem letu vključene v program zgodovinskih lokacij EPS: Inštitut za fiziko Univerze v Gradcu, Villa Mondragone v bližini Rima, Accademia Galileiana v Padovi, mesto Göttingen ter predavalnica Heinricha Hertza na Tehnološkem inštitutu Karlsruhe (KIT).

Častna sekretarka društva Katharina Lorenz (INESC, Lizbona) je predstavila delo Izvršnega odbora v zadnjem letu. Med pomembnejšimi dosežki je omenila digitalizacijo administrativnih postopkov, prenovo spletnih strani in pristop k učinkovitejšemu načinu obveščanju članic in članov. Častna blagajničarka Alessandra Fantoni (INFN, Rim) je predstavila finančno poslovanje društva. Iz poročila izhaja, da finančno stanje EPS ostaja stabilno, vendar z izrazito dvoletno komponento zaradi večjih prihodkov konference CLEO, ki jo društvo organizira izmenično vsako drugo leto. Gertrud Zwicknagl (TU Braunschweig) je nato poročala o aktivnostih za večje in enakomernejše vključevanje članic in članov iz južne in vzhodne Evrope. Poudarila je, da aktivnosti sicer potekajo, vendar so namenjena sredstva in posledično tudi izpeljane aktivnosti še vedno v precej omejenem obsegu.

Založniški del društva je predstavil problematiko, s katero se soočajo

ob izdajanju revij Europhysics Letters (EPL), European Journal of Physics (EJP) in Europhysics News (EPN). Pri EPL so izpostavili povečano število prejetih rokopisov, domnevno zaradi pomoči umetne inteligence, ki predstavlja dodatno obremenitev recenzentov in urednikov. Čeprav je revija evropska, je več kot polovica prejetih prispevkov iz Kitajske, Indije in Brazilije. Glavni urednik Richard Blythe je izpostavil sodelovanje z revijo Physics World pri promociji najzanimivejših objav v EPL. Revija Europhysics News ostaja osrednji komunikacijski kanal EPS in izhaja šestkrat letno. V tematskih številkah so poleg člankov objavljene tudi novice o dejavnostih društva, strokovni članki, intervjuji in prispevki Mladih umov. V letu 2025 sta bili najodmevnejši številka ob Mednarodnem letu kvantne znanosti in tehnologije ter tradicionalna Nobelova številka. V letu 2026 so napovedane številke o fiziki nevtrinov, fiziki možganov, kvantni fiziki, dronih in o izobraževanju v dobi umetne inteligence. Podan je bil tudi poziv za predlaganje tematik za prihodnje številke.

Po kosilu je predsednica EPS predstavila vsebino konference *The Contribution of Physics to Energy Production, Storage and Distribution*, ki jo je društvo aprila 2026 organiziralo v Bruslju ob predstavitvi dokumenta stališč o energetiki. Konferenca je združila predstavnike znanosti, industrije in evropskih institucij ter obravnavala prispevek fizike k razvoju trajnostnih energetskih sistemov, pri čemer so bile v ospredju proizvodnja, shranjevanje in distribucija energije. V razpravah je bilo poudarjeno, da mora energetska politika temeljiti na znanstvenih dokazih ter jasno razlikovati med nameščeno nazivno močjo različnih energetskih sistemov in dejansko količino proizvedene energije. Pri primerjavi različnih virov energije pa je treba upoštevati njihov celoten življenjski cikel – od pridobivanja surovin in proizvodnje naprav prek njihovega obratovanja do razgradnje, nastanka odpadkov ter možnosti recikliranja materialov.

Energija: temelj blaginje in stabilnosti

Prof. Alfredo Portone (F4E, Barcelona) je predstavil dokument stališč z naslovom Energija: temelj blaginje in stabilnosti (*Energy: A Foundation for Prosperity and Stability*). Dokument poudarja, da mora evropska energetska politika temeljiti na znanstvenih dokazih ter uravnotežiti zanesljivost oskrbe z energijo, njeno cenovno dostopnost in zmanjševanje vpliva na okolje. Dokument opozarja na izzive hitrega povečevanja deleža obnovljivih virov energije, predvsem z vidika stabilnosti elektroenergetskega omrežja, shranjevanja energije in zagotavljanja kritičnih surovin. Kritično obravnava tudi trenutno vlogo tehnologij zajemanja in shranjevanja ogljika (CCS) ter

vodika, ki po mnenju avtorjev za zdaj še ne omogočata učinkovite in gospodarne rešitve za obsežno razogljičenje. Dokument poudarja, da ima fizika ključno vlogo pri razvoju prihodnjih energetskih sistemov, zlasti na področju jedrske energije, shranjevanja energije, elektroenergetskih omrežij in izboljšanja učinkovitosti. Dokument, katerega namen je ponuditi strokovno podlago evropskim oblikovalcem politik in širši javnosti ter poudariti pomen dolgoročnega vlaganja v raziskave in razvoj, je dosegljiv na spletu [2].

Dokument stališč o študijskih programih fizike

Zadnji podoben dokument stališč je EPS objavil leta 2009 ob prehodu na bolonjski sistem, zato je bil skrajni čas za pripravo novega, je poudaril dr. Sascha Schmeling (CERN), ki je predstavil obsežen dokument s priporočili za razvoj sodobnih študijskih programov fizike v Evropi glede na sodobne potrebe družbe in trga dela. Dokument poudarja, da mora študij poleg trdnih temeljev iz fizike in matematike razvijati tudi eksperimentalne, računalniške in digitalne kompetence, sposobnost reševanja odprtih problemov, kritično mišljenje, komuniciranje ter sodelovanje v interdisciplinarnih skupinah. Posebna pozornost je namenjena vključevanju umetne inteligence in računalniških metod v študij, pri čemer morajo študenti AI uporabljati kot orodje za raziskovanje in kritično presojo, ne pa kot nadomestilo za razumevanje fizikalnih konceptov. Med priporočili so večja uporaba aktivnih oblik poučevanja, mentorskih in tutorskih programov ter sistematično spremljanje kakovosti študijskih programov ne zgolj na podlagi študentskih anket. Dokument je objavljen na spletni strani EPS [3].

Naslednji dan se je zasedanje začelo z razglasitvijo društvenih nagrad in priznanj ter podelitvijo Alessandro Volta nagrade Jeanu Dalibardu (Collège de France, Paris). Nagrajenec je v predavanju predstavil svoje pionirsko delo na področju laserskega hlajenja, interakcij med svetlobo in snovjo ter fizike ultrahladnih kvantnih plinov. Okrogla miza o fiziki in geopolitičnih razmerah je izpostavila številne izzive, s katerimi se danes soočamo raziskovalci. Med njimi so dolgotrajni postopki pridobivanja vizumov, tudi za krajše obiske in konference, zapleteni birokratski postopki, otežena mobilnost raziskovalcev, visoki stroški potovanj in naraščajoča nezaupljivost glede mednarodnega raziskovalnega sodelovanja. Sogovorniki so opozorili tudi na težave pri dobavi opreme, pomanjkanje in višje cene materialov ter računalniških komponent. Glavno sporočilo predsednice je bilo, da ne smemo obupati.

Sledil je prenos predsedništva, saj je prof. Sakellariadou zaključila svoj dvoletni mandat, predsedovanje društva pa je prevzel prof. Jose Maria de



Slika 3. Predavanje nagrajenca Jeana Dalibarda

Teresa (CSIC, Zaragoza). Za konec smo se združili s predstavniki Mladih umov in spregovorili o aktivnostih, ki jih organizirajo mladi za popularizacijo znanosti, in o raznovrstnih načinih podpore, ki jih nudijo lokalna društva. Kljub natrpanemu urniku je ostalo nekaj časa za ogled okoliških znamenitosti, ki izkazujejo bogato litovsko zgodovino, in delujočega Foucaultovega nihala v zvoniku znotraj starega univerzitetnega kompleksa.

Mojca Vilfan

LITERATURA

[1] https://iopscience.iop.org/book/oa-edit/978-0-7503-6342-6

[2] https://eps.org/wp-content/uploads/2025/11/EPS-Energy-Position-Paper-2025.pdf

[3] https://eps.org/wp-content/uploads/2026/09/EPS-Physicsbachelor-studiesinEurope.pdf

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE

SAVA ZAVAROVALNA SKUPINA

V DRUŽBI DOBRIH LJUDI

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2026
Letnik 73, številka 2
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Diskretna matematika pri nas: začetki
(Tomaž Pisanski) 41–54

Oortove konstante
(Vid Kavčič) 55–72

Novice

Nagrada Ivana Vidava 73–74

Kenny Bešter Štorgel – nagrada Ivana Vidava 2026
(Martin Milanič) 74–77

Poročilo s srečanja Sveta Evropskega fizikalnega društva
(EPS Council Meeting) 2026 (Mojca Vilfan) 77–VII

CONTENTS

Articles **Pages**

Discrete mathematics in slovenia: the beginnings
(Tomaž Pisanski) 41–54

Oort constants
(Vid Kavčič) 55–72

News 73–VII

Na naslovnici: Slika prikazuje neprestano gibanje zvezd, ki mu v astronomiji pravimo lastno gibanje. Čeprav je to premikanje človeškemu očesu povsem neopazno, ga evropski vesoljski teleskop Gaia meri z vse večjo natančnostjo. Svetle sledi na grafiki ponazarjajo, kako se bo 40.000 zvezd, ki se nahajajo znotraj 100 parsekov (približno 326 svetlobnih let) od našega Osončja, premikalo po nebu v prihodnjih 400.000 letih. Ti podatki so bili objavljeni v sklopu paketa Gaia EDR3. Zaradi meritev skozi daljše časovno obdobje so te projekcije kar dvakrat natančnejše od predhodnih, kar predstavlja velik korak za razumevanje kinematike naše Galaksije. Vir: ESA/Gaia/DPAC (A. Brown, S. Jordan, T. Roegiers, X. Luri, E. Masana, T. Prusti in A. Moitinho), CC BY-SA 3.0 IGO.