

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 12 (1984/1985)

Številka 3

Strani 103-108

Janez Strnad:

STOLETNICA BALMERJEVE ENAČBE

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/12/730-Strnad.pdf>

© 1985 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

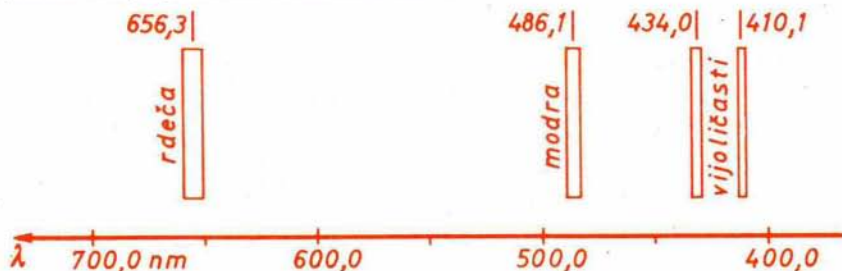
© 2009 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

STOLETNICA BALMERJEVE ENAČBE

25. junija 1984 je minilo sto let, odkar je švicarski srednješolski učitelj matematike Johann Jakob Balmer (1825 – 1898) na predavanju naravoslovnega društva v Baslu predstavil svojo enačbo. Enačba je postala znamenita posebno kot temelj nove, kvantne mehanike. Danskemu fiziku Nielsu Bohru jo je po daljšem poskušanju uspelo pojasniti leta 1913 tako, da je dodal starim mehaničnim zakonom nova privzetka. Bohrovo enačico enačbe je uporabil za preskus Erwin Schrödinger, ko je leta 1926 odkril eno izmed oblik osnovnega zakona kvantne mehanike. Bohrovega koraka ni lahko pojasniti, če se ne sklicujemo na fizikalne zakone, in Schrödingerjev korak je po matematični strani še trši oreh. Johannu Jakobu pa lahko pogledamo pod prste. Ne mislijo samo nekateri romanopisci, da je bilo prababicam lažje. Slikovito in z nekaj pretiravanja bi lahko rekli, da je skoraj šestdesetleten stopil v fiziko tisti dan, ko se je namenil poslušati predavanja E. Hagenbacha, fizika z baselske univerze. Ta je predaval o "kvantitativnih odnosih med črtami vodikovega spektra". To predavanje je vsaj po fizikalni strani spremenilo Balmerjevo življenjsko pot, s čimer hočemo reči, da je doseglo, da pozna njegovo ime in njegovo enačbo vsak fizik.

Segreti plin ali plin, po katerem poganjamo električni tok, seva vidno svetlobo. V Balmerjevih časih so že dobro vedeli, da so v tej svetlobi zastopane samo določene valovne dolžine. Ko na primer spustimo tako svetlobo skozi stekleno prizmo, se sestavine z različno valovno dolžino ali - po domače - z različno barvo različno odklonijo in dobimo *spekter*. (Pojav imenujemo *razklon - disperzija* - in ga pojasnimo z odvisnostjo svetlobne hitrosti v steklu ali lomnega kvocienta stekla od valovne dolžine: svetloba ima tem večjo hitrost in se tem manj lomi, čim večja je njena valovna dolžina.) V spektru sevajočih razredčenih plinov opazimo na temnem ozadju črte različnih barv (slika 1). Zaradi tega so tudi plinske cevi pripravne za svetlobne reklame.



Slika 1. Prve štiri črte v Balmerjevi seriji v vidnem delu vodikovega spektra. Nad črtami so napisane valovne dolžine v nanometrih, širina črte pa kaže na njeno izrazitost.

Optična spektroskopija, kakor imenujemo proučevanje spektrov vidne svetlobe, se je v drugi polovici prejšnjega stoletja hitro razvila. Ker so valovne dolžine spektralnih črt značilne za element, je bilo mogoče po spektru ugotavljati kemijski sestav snovi. S tako *spektralno analizo* so odkrili tudi nekaj dotlej še neznanih elementov. Spektralna analiza je omogočila, da so prvič ugotovili sestavo snovi na Soncu in na zvezdah. Odlikovala se je tudi po tem, da je bilo za analizo treba imeti samo ščepec snovi.

Kemiki so torej na veliko uporabljali spektralno analizo, a fiziki nakopičene spoznanja o spektrih še niso uredili. Vedeli so sicer, da sevajo v razredčenih plinih svetlobo posamični atomi. Niso si pa znali pojasniti, zakaj sevajo atomi samo svetlobo z določenimi valovnimi dolžinami in zakaj sevajo prav te valovne dolžine in ne drugih.

Menda je bil francoski fizik M. Masquart prvi, ki je primerjal atome s strunami. Napeta struna namreč lahko oddaja zvok z valovnimi dolžinami, ki so med seboj v razmerju majhnih celih števil. Največjo valovno dolžino ima osnovni ton, manjše valovne dolžine pa imajo višji harmonični toni. Zvoku, ki ga dobimo kot mešanico teh tonov, pravimo zven. Podobno je na primer tudi z zvokom nihajočih plošč, le da tam razmerja med valovnimi dolžinami niso tako preprosta. Ali ni torej svetloba, ki jo sevajo atomi, nekakšen zven?

V spektru sevajočega vodika so leta 1871 poznali tri črte: vijolično, modro in rdečo. Angleški fizik Johnstone Stoney je tedaj ugotovil, da so njegove valovne dolžine v razmerju 20 : 27 : 32. Toda A. Schuster je močno ugovarjal tem računom. Opozarjal je na to, da so valovne dolžine določene nenatančno in je seveda vedno mogoče najti dve dovolj veliki celi številki za razmerje dveh valovnih dolžin.

Take so bile — na kratko povedano — razmere, ko se je dela lotil J. J. Balmer. Kaže, da je dobil od Hagenbacha podatke še o četrty — tudi vijolični — črti. Pred kratkim je namreč švedski fizik Andres Angstroem natančno izmeril valovne dolžine štirih črt v vidnem delu vodikovega spektra. Njegovi podatki so navedeni v prvem stolpcu 1. preglednice. Balmer je izračunal razmerje največje valovne dolžine in valovnih dolžin preostalih treh črt (drugi stolpec), ga zapisal kot razmerje dveh celih števil (tretji stolpec) in razstavil števili na prafaktorje (četrty stolpec). Zadnjemu razmerju je dodal kot faktor $3.3.3/3.3.3 = 1$ in ugotovil, da je vsem razmerjem skupen faktor $3.3.3/5$. Poiskal je najmanjši skupni imenovalac

$$\begin{aligned} 656,21 \text{ nm} \cdot 5/3.3.3 &= 486,074 \text{ nm} / 2.2 = 434,01 \text{ nm} / 5.5 = \\ &= 410,12 \text{ nm} \cdot 2.2.2/3.3.3 = 121,52 \text{ nm} \end{aligned}$$

Ko je enačbo na desni in na levi pomnožil s 3, je dobil:

$$656,21 \text{ nm} \cdot 5/9 = 486,074 \text{ nm} \cdot 3/4 = 433,01 \text{ nm} \cdot 21/25 = 410,128/9 = \\ = 364,56 \text{ nm}.$$

1. Preglednica, ki kaže, kako je računal J.J. Balmer

Angstroemovi podatki za valovno dolžino	2. stolpec	3. stolpec	4. stolpec	valovne dolžine, izračunane po Balmerjevi enačbi
rdeča				
656,21 nm				656,208 nm
modra	$\frac{656,21 \text{ nm}}{486,074 \text{ nm}} = 1,35 = \frac{27}{20} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5}$			
486,074 nm				486,08 nm
vijolična	$\frac{656,21 \text{ nm}}{434,01 \text{ nm}} = 1,512 = \frac{189}{125} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5}$			
434,01 nm				434,00 nm
vijolična	$\frac{656,21 \text{ nm}}{410,21 \text{ nm}} = 1,6 = \frac{8}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$			
410,12 nm				410,13 nm

Valovne dolžine štirih črt je torej dobil, ko je pomnožil 364,56 nm po vrsti z 9/5, 4/3, 25/21 in 9/8. Navidez to ni urejena vrsta ulomkov. Ko pa je števec in imenovalc drugega in četrtega ulomka pomnožil s 4, je dobil 9/5, 16/12, 25/21 in 36/32. To vrsto ulomkov je mogoče napisati kot razmerje med kvadratom celega števila in njegovim kvadratom zmanjšanim za štiri, torej $n^2/(n^2 - 2^2)$. Tako je sledila Balmerjeva enačba

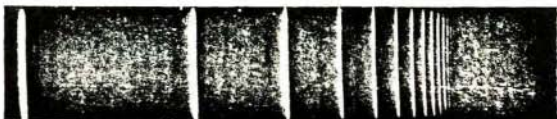
$$\lambda = \lambda_0 n^2 / (n^2 - 2^2) \quad \lambda_0 = 364,56 \text{ nm}$$

ki je dala po vrsti za $n = 3, 4, 5, 6$ valovne dolžine izmerjenih črt (glej peti stol-

2. Preglednica, ki vsebuje izmerjene in izračunane valovne dolžine črt v ultravijoličnem delu vodikovega spektra

izmerjeno	izračunano	n
396,9 nm	396,965 nm	7
388,75	388,864	8
383,4	383,498	9
379,5	379,75	10
376,9	377,02	11

Slika 2. Prvih dvanajst črt (zgoraj) in že nadaljnje črte (za $n = 6$ do 20, spodaj). Iz članka G. Herzberga *Über die Spektren des Wasserstoffs* (O vodikovih spektrih) iz revije *Annalen der Physik* leta 1927.



pec preglednice). Relativna razlika med izmerjeno in izračunano valovno dolžino je v najslabšem primeru manjša kot $1/40\,000$.

J. J. Balmer ni bil fizik, zato ni bral fizikalnih revij in ni poznal najnovejših podatkov. Njegovi članki o enačbi so dokaj nepregledni in težko razumljivi in v prvem, ki je izšel v *Annalen der Physik und Chemie*, je urednik izpustil odstavek in naredil vse še manj pregledno. Balmer ni zapisal, odkod je dobil kak podatek. Kaže, da mu je Hagenbach posredoval še podatke o valovnih dolžinah črt, ki so jih opazovali v svetlobi zvezd v ultravijoličnem delu vodikovega spektra. Ujemanje med izmerjenimi in izračunanimi valovnimi dolžinami je bilo v tem primeru zaradi manj natančnega merjenja nekoliko slabše. Toda s tem je Balmer svojo enačbo po vseh pravilih potrdil, saj tedaj, ko jo je izpeljal, še ni vedel zanje.

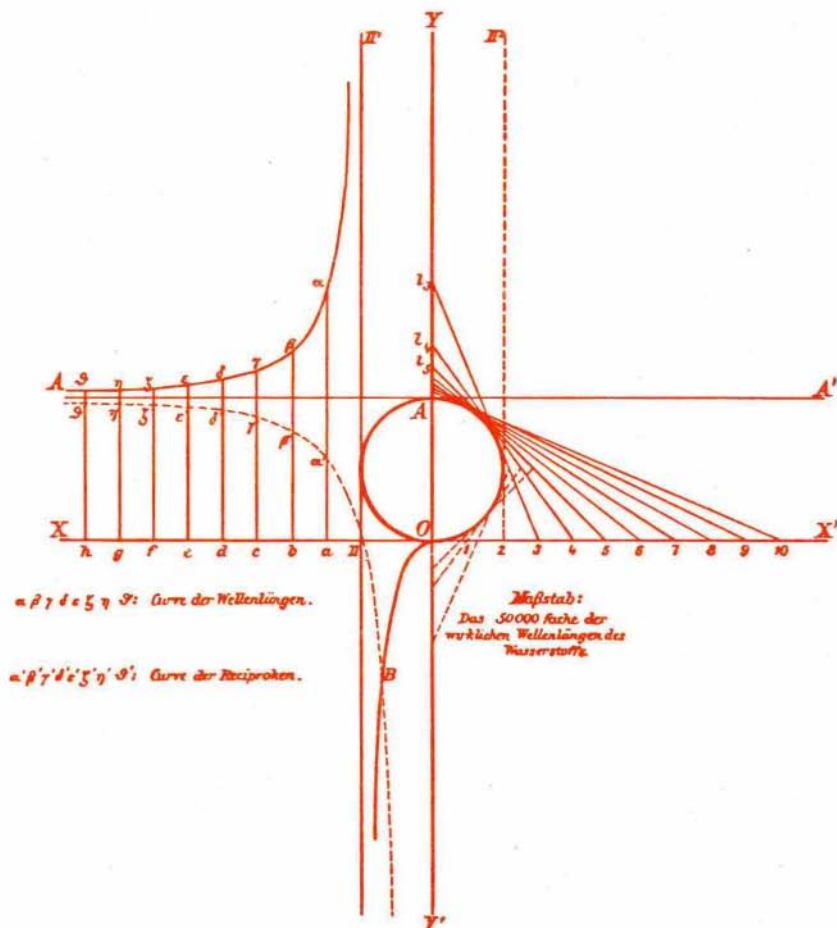
Balmer je šel korak dalje in napovedal, da obstajajo tudi spektralne črte, katerih valovno dolžino da enačba, ko v njej nadomestimo 2^2 z $1^2, 3^2 \dots$ (Tedadaj je treba pač vzeti drugo valovno dolžino λ_0 .) Tako je predvidel, da sestavlja jo vodikov spekter serije črt (slika 2). Danes nosi serija, za katero velja zapisana enačba, Balmerjevo ime. Že dolgo pa poznamo serijo z 1^2 v ultravijoličnem delu spektra in serije s $3^2, 4^2, \dots$ v infrardečem delu.

Balmerjevo delo je vodilo švedskega fizika Johannesa Roberta Rydberga, ko je leta 1889 posplošil Balmerjevo enačbo tako, da je veljala tudi za sevanje drugih elementov. Tedaj so se že navadili računati z obratno vrednostjo valovne dolžine in so Balmerjevo enačbo (za vodik) zapisali v obliki

$$1/\lambda = R_{\text{H}}(1/n'^2 - 1/n^2) \quad n' = 1, 2, 3, \dots, n > n'$$

Konstanto $R_Y = 4/\lambda_0$ so poimenovali po Rydbergu. Novejši podatek zanjo je $1,09737315 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, Niels Bohr jo je izrazil z maso elektrona m , osnovnim nabojem e_0 , influenčno konstanto ϵ_0 , Planckovo konstanto h in hitrostjo svetlobe c takole

$$R_Y = me_0^4 / 8\epsilon_0^2 h^3 c$$



Slika 3. Tako je J. J. Balmer z načrtovanjem ugotovil valovno dolžino spektralnih črt po njem imenovane serije pri vodik. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zaznamujejo valovne dolžine, $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ pa njihove obratne vrednosti. Balmer je imel rad zapletene naloge z načrtovanjem. Slika je vzeta iz članka Lea Baneta *Evolution of the Balmer Series* (Razvoj Balmerjeve serije) v reviji American Journal of Physics leta 1966.

Morda se zdi komu to, kar je naredil J. J. Balmer, zgolj igranje s števili. Treba pa je upoštevati, da je z enim korakom uredil merske podatke za vodik in omogočil preprost pregled nad njimi. Drugim, ki so poskušali, to ni uspelo. Tako je omogočil poznejši korak, ki je privedel do novih fizikalnih zakonov.

Ali ni podobno ravnal tudi Johannes Kepler, ko je uredil podatke o gibanju planetov s tem, da je spoznal eliptično obliko njihovih poti? Isaacu Newtonu so rabili Keplerjevi podatki kot izhodišče za odkritje novih zakonov. J. Kepler, J. J. Balmer in številni drugi so ravnali pravzaprav v duhu Pitagore in njegovih pristašev, ki so oboževali števila, in Platona, ki je verjel, da je mogoče naravne pojave zajeti z matematiko.

Janez Strnad