Jasna Prezelj

DIFERENCIALNE ENAČBE

ZA FINANČNO MATEMATIKO

Ljubljana 2011

naslov: DIFERENCIALNE ENAČBE ZA FINANČNO MATEMATIKO
avtorske pravice: Jasna Prezelj
izdaja: prva izdaja
založnik: samozaložba Jasna Prezelj, Ljubljana
avtor: Jasna Prezelj
leto izida: 2011
natis: elektronsko gradivo
dostop: http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/difenacbe_Book.pdf

CIP - Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.91(075.8)(0.034.2)

PREZELJ-Perman, Jasna
Diferencialne enačbe za finančno matematiko [Elektronski vir] / Jasna Prezelj.
- 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. J. Prezelj, 2011

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/difenacbe_Book.pdf

ISBN 978-961-93108-2-3

256642560

Kazalo

Predgovor

Predavanja so namenjena študentom 3. letnika finančne matematike. Vsebujejo Laplacovo transformacijo, navadne diferencialne enačbe, sisteme diferencialnih enačb, specialne funkcije, parcialne diferencialne enačbe prvega reda, parcialne diferencialne enačbe višjih redov, Laplacovo, difuzijsko in valovno enačbo.

1. Primeri navadnih diferencialnih enačb

1. Kaj je navadna diferencialna enačba

Privzeli bomo, da so funkcije definirane na odprtih množicah in odvedljive tolikokrat, kolikor je potrebno, ne da bi to vsakič eksplicitno povedali.

Da bi razumeli, kaj je diferencialna enačba, se najprej spomnimo, kaj pove odvod. Naj bo f odvedljiva, Γf njen graf in p tangenta na Γf v točki (x_0, y_0). Potem je smerni koeficient p enak $f'(x_0)$, enotski smerni vektor na p pa je $(1, f'(x_0))/\sqrt{1 + f'(x_0)^2}$. Funkcija f je rešitev diferencialne enačbe $y' = f'(x)$. Iz analize 1 vemo, da je rešitev tudi vsaka funkcija $f(x) + c$, kjer je c konstanta. Tangenta na graf te funkcije v $(x_0, y_0 + c)$ ima enak enotski smerni vektor kot p. Če na ta način vsaki točki pripnemo enotski smerni vektor tangente na graf rešitve diferencialne enačbe, dobimo vektorsko polje smeri in rešitve diferencialne enačbe so tokovnivce tega polja (to so krivulje, ki so tangentne na dano vektorsko polje).

Definicija 1.1. *Navadna diferencialna enačba je vsaka enačba oblike*

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)).$$

Stopnja najvišjega odvoda je red diferencialne enačbe.

Najprej nas bodo zanimale diferencialne enačbe prvega reda, ki so oblike

$$y' = f(x, y).$$

Definicija 1.2. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ odprta množica. Funkcija $\varphi : D \to \mathbb{R}$ je rešitev enačbe $y' = f(x, y)$ na D, če je*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{1.1}$$

za vsak $x \in D$. Rešitev φ zadošča začetnemu pogoju (x_0, y_0), če je $\varphi(x_0) = y_0$.

2. Najpreprostejša diferencialna enačba

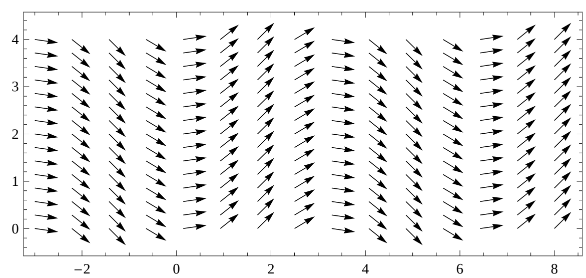
Ena od najpreprostejših diferencialnih enačb je enačba oblike $y' = f(x)$ z začetnim pogojem (x_0, y_0). Njena rešitev je dana z (Barrowovo) formulo:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_0^x f(t)\, dt.$$

Ob tem smo privzeli, da je f zvezna. Če vzamemo npr. $f(x) = \sin(x)$ dobimo rešitve

$$y = y_0 - \cos x + \cos x_0.$$

Diferencialna enačba 1.1 določa vektorsko polje smeri v ravnini. Vsaki točk (x, y) pripnemo enotski vektor v smeri $(dx, dy) = (1, f(x, y))dx$. To vektorsko polje imenujemo polje smeri in za primer $f(x, y) = \sin x$ je prikazano na sliki 1. Funkcija φ bo rešitev diferencialne enačbe pri začetnem pogoju (x_0, y_0), če bo njen graf v vsaki točki tangenten na polje smeri in bo potekal skozi točko (x_0, y_0). Za naš primer enačbe $y' = f(x)$ so rešitve pri različnih začetnih pogojih prikazane na sliki 2.



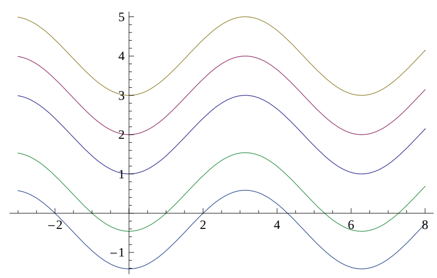
Slika 1.1: Polje smeri enačbe $y' = \sin x$

Opomba. Ker je polje smeri invariantno za translacije v smeri osi y, bo to veljalo tudi za rešitve pripadajoče diferencialne enačbe.

3. Druga najpreprostejša diferencialna enačba

Malenkost manj preprosta diferencialna enačba je enačba oblike $y' = f(y)$. Privzemimo, da f nima ničel. Potem polje smeri

$$v(x, y) = (1, f(y))/\sqrt{1 + f(y)^2}$$



Slika 1.2: Rešitve enačbe $y' = \sin x$ pri različnih začetnih pogojih

te enačbe sovpada s poljem smeri enačbe

$$x' = \frac{1}{f(y)};$$

$$w(x,y) = (1/f(y),1)/\sqrt{1/f^2(y)+1}.$$

Zato imata polji enake tokovnice. Ker pa so tokovnice druge enačbe dane z Barrowovo formulo, dobimo

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(t)}\,dt. \tag{1.2}$$

Tako smo dokazali prvi

Izrek 1.3. *Naj bo f neničelna zvezna funkcija. Rešitev $y = \varphi(x)$ enačbe $y' = f(y)$, ki zadošča začetnemu pogoju (x_0, y_0), je dana s formulo (1.2).*

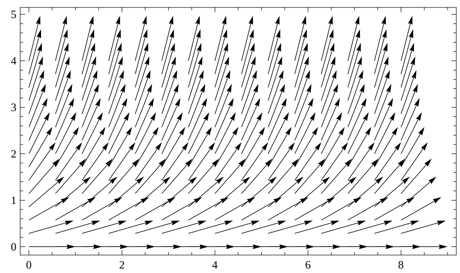
Opomba. Ker je polje smeri invariantno za translacije v smeri osi x, bo to veljalo tudi za rešitve pripadajoče diferencialne enačbe.

4. Enačba normalne reprodukcije

Naj bo $y(t)$ velikost dane populacije v času t. Naj bo število novih osebkov linearno odvisno od velikosti populacije. To je npr. res, če je dovolj hrane in ni drugih dejavnikov. Označimo proporcionalnostni faktor rasti s $k > 0$. Potem lahko reprodukcijo popišemo z naslednjo diferencialno enačbo

$$y'(t) = ky(t),\ k > 0.$$

Imenuje *diferencialna enačba normalne reprodukcije.* Ker izraz $y' = dy/dt$ pomeni spremembo y glede na x, lahko diferencialno enačbo predstavimo tudi z vektorskim poljem enotskih vektorjev v smeri $(dt, dy) = (1, y')dt$. Če sledimo



Slika 1.3: Polje smeri enačbe $y' = y$

puščicam, vidimo, kako bo izgledal graf rešitve. Ta enačba je preprosto rešljiva z integriranjem. Delimo z y

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k,$$

integriramo od t_0 do t in dobimo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{y(t)}\ dt = \int_{t_0}^{t} k\ dt,$$

oziroma

$$\ln(y(t)/y(t_0)) = k(t - t_0).$$

Antilogaritmiramo, množimo z $y(t_0)$ in dobimo

$$y(t) = y(t_0)e^{k(t-t_0)}.$$

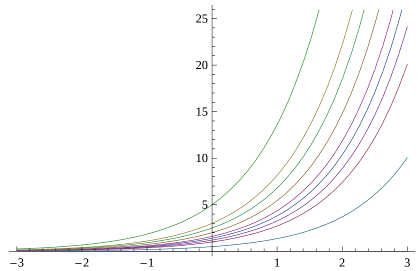
Iz rešitve vidimo, da populacija eksponentno narašča.
Ker smo delili z y, je potrebno posebej pogledati primer $y = 0$. Vidimo, da tudi ta reši enačbo. Taki rešitvi bomo rekli *singularna.* Glede na različne vrednosti v t_0 dobimo rešitve kot na grafu.

Podoben problem je radioaktivni razpad, kjer je delež razpadlih atomov proporcionalen številu vseh, le da je proporcionalnostni faktor negativen:

$$y'(t) = -ky(t),\ k > 0.$$

Izračunajmo *razpolovni čas*, to je čas, v katerem se količina radioaktivne snovi zmanjša za polovico glede na vrednost na začetku, torej

$$y(t_r + t_0) = \frac{1}{2}y(t_0).$$



Slika 1.4: Rešitve enačbe $y' = y$ pri različnih začetnih pogojih

Na enak način kot prej dobimo rešitev enačbe

$$\ln(y(t)/y(t_0)) = -k(t - t_0).$$

Za razpolovni čas dobimo enačbo

$$\ln(1/2) = -kt_r,$$

oziroma $t_r = k^{-1} \ln 2$.

5. Eksplozijska enačba

Privzemimo, da je reprodukcija proporcionalna številu vseh možnih parov. Popisuje jo *eksplozijska enačba,*

$$y'(t) = ky^2(t),\ k > 0.$$

Ta situacija se pogosto pojavlja v kemiji, ko je reakcija odvisna od koncentracije dveh reagentov. Pripadajoče vektorsko polje je predstavljeno na sliki 5.

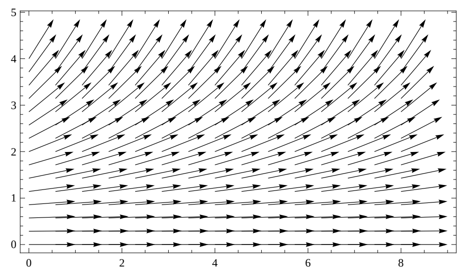
Z integracijo dobimo rešitev

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{y^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} k\ dt,$$

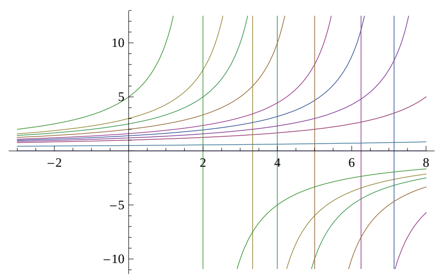
$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(t_0)} = k(t - t_0).$$

Premečemo in dobimo

$$y(t) = \frac{y(t_0)}{1 - k(t - t_0)y(t_0)}.$$



Slika 1.5: Polje smeri enačbe $y' = y^2/10$



Slika 1.6: Rešitve enačbe $y' = y^2/10$ pri različnih začetnih pogojih

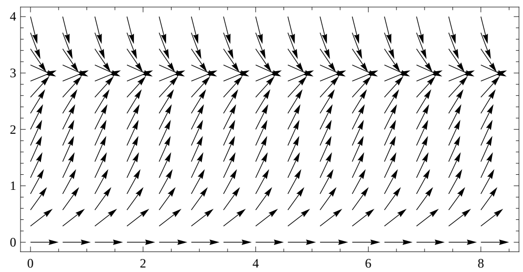
Opazimo, da imamo pol v $t - t_0 = (ky(t_0))^{-1}$ (od tod ime enačbe). Takemu času pravimo kritični čas. Za čase, blizu kritičnemu času, poenostavitev, ki je pripeljala do diferencialne enačbe, ni več uporabna (umestna), zato je naš model v bližini kritičnih časov neustrezen. Tudi ta enačba ima rešitev $y = 0$.

6. Logistična krivulja

V realnem svetu seveda reprodukcija ni odvisna le od trenutnega števila osebkov, temveč tudi od zunanjih faktorjev, npr. količine hrane. Primer so ribe v končnem ribniku, kjer ni plenilcev. S povečanjem števila osebkov se poveča tekmovanje za hrano, zato je do hrane težje priti, kar doprinese k padcu rasti števila osebkov v populaciji. Najenostavnejši privzetek je, da je faktor rasti linearna funkcija števila osebkov, $k = a - by$. Ob upoštevanju tega privzetka pridemo do *logistične enačbe*

$$y'(t) = ay(t) - by^2,\ a, b > 0.$$

Pripadajoče vektorsko polje smeri je prikazano na sliki 7. Iz slike razberemo, da bo za nekatere začetne vrednosti populacija naraščala, za nekatere padala, pri nekaterih pa bo konstantna.



Slika 1.7: Vektorsko polje logistične enačbe $y' = 3y - y^2$

Z integracijo dobimo rešitev

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{ay(t) - by^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} dt,$$

Pišimo $a/b = c$ in razcepimo $ay - by^2 = by(c - y)$. Razstavimo integral na parcialne ulomke

$$\frac{1}{by(c-y)} = \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{c-y}\right).$$

Integriramo in dobimo

$$\frac{1}{bc} \ln\left|\frac{y}{c-y}\right| = t - t_0$$

oziroma

$$\ln\left|\frac{y(t)(a - by(t_0))}{y(t_0)(a - by(t))}\right| = a(t - t_0).$$

Vidimo, da je rešitev odvisna od znaka izraza $a - by(t_0)$. Če je ali $a - by(t_0) = 0$ ali $y(t_0) = 0$, smo delili z 0. Očitno sta tudi $y = 0$ in $y = b/a$ rešitvi dane enačbe. Pri $y = 0$ populacije ni, pri $y = b/a$ pa je število konstantno.

Naj bo $t_0 = 0$. Naj bo začetna velikost populacije enaka $a/(2b)$. Potem je

$$\ln\left|\frac{y(t)(a/2)}{(a/2b)(a - by(t))}\right| = \ln \frac{by(t)}{a - by(t)} = at,$$

oziroma

$$y(t) = \frac{a}{b}\frac{e^{at}}{1 + e^{at}} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{1}{1 + e^{at}}\right).$$

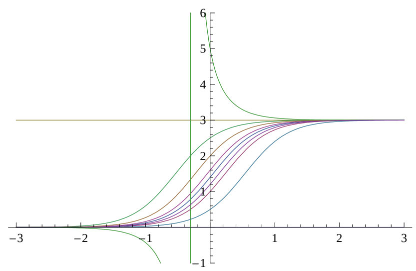
Velikost populacije narašča in je v limiti enaka a/b. Kaj pa se zgodi, če je velikost začetne populacije večja od limitne, npr. $y(0) = 2a/b$? V tem primeru je

$$\ln\left|\frac{y(t)(-a)}{(2a/b)(a-by(t))}\right| = \ln\frac{by(t)}{by(t)-a} = at,$$

oziroma

$$y(t) = \frac{a}{b}\frac{e^{at}}{e^{at}-1} = \frac{a}{b}(1+\frac{1}{e^{at}-1}).$$

Funkcija je padajoča z limito a/b.



Slika 1.8: Rešitve logistične enačbe $y' = 3y - y^2$ pri različnih začetnih pogojih

1.1 Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi dane logistične enačbe $y'(t) = ay(t) - by^2,\ a, b > 0$, pri začetnih pogojih $y_i(0) = c_i \in (0, a/b)$. Dokaži, da je $y_1(t) = y_2(t-\alpha)$. Premik α izrazi s količinami a, b, y_1, y_2. Interpretiraj to lastnost.

1.2 Naj bo $c = a/b$ fiksen in $y(0) = a/(2b)$. Kako se spreminja rešitev logistične enačbe $y'(t) = ay(t) - by^2,\ a, b > 0$, ko pošljemo a (oz. b) proti neskončno? Kaj to pomeni za populacijo? Rezultat interpretiraj.

7. Ribolovna enačba

Poglejmo spet naše ribe v ribniku, ki jih lovimo za prodajo. Naj bo stopnja ulova konstantna, c. Imenujemo jo *kvota*. Pripadajoča diferencialna enačba je

$$y' = ay - by^2 - c,\ a, b, c > 0.$$

Ločiti moramo primere, ko ima enačba $ay(t) - by^2 - c = 0$ eno, dve ali nobene realne rešitve.

Če enačba nima nobene realne rešitve, potem je odvod vedno negativen in število osebkov v populaciji pada. Ali populacija izumre? Da bi odgovorili na to vprašanje, moramo najprej rešiti enačbo. Ker kvadratna enačba nima realnih rešitev, lahko diferencialno enačbo zapišemo v obliki

$$y' = -b((y-\alpha)^2 + \beta^2),\ \beta > 0.$$

Vzemimo kar $t_0 = 0$. Z integriranjem dobimo

$$\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha - y(0)}{\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - y(t)}{\beta}\right) = -bt.$$

Vstavimo $y(t) = 0$ in izračunamo čas izumrtja.

Če ima kvadratna enačba $ay(t) - by^2 - c = 0$ eno realno rešitev, bo število osebkov v populaciji padalo, razen v primeru, ko je začetna vrednost enaka ničli enačbe; v tem primeru bo število osebkov kostantno. Diferencialna enačba ima potem obliko

$$y' = -b(y-\alpha)^2$$

za nek $\alpha > 0$ in je enaka eksplozijski enačbi, če uvedemo spremenljivko $u = y - \alpha$. Če je $y(0) \neq \alpha$, lahko enačbo delimo in integriramo. Dobimo

$$\frac{1}{\alpha - y(t)} - \frac{1}{\alpha - y(0)} = -bt.$$

Izrazimo $y(t)$

$$y(t) = \frac{\alpha bt(\alpha - y(0)) - y(0)}{bt(\alpha - y(0)) - 1}.$$

Spet nas zanima, pri katerih začetnih pogojih bo populacija izumrla (takrat je $y(t) = 0$. Gornji izraz ima ničlo za pozitivne t le, če je $\alpha - y(0) > 0$, torej mora biti začetno število osebkov populaciji manjše od α.

Če ima kvadratna enačba dve (pozitivni) realni ničli, dobimo pravzaprav premaknjeno logistično enačbo. Naj bosta $\alpha < \beta$ različni (pozitivni) realni ničli. Z razcepom na parcianle ulomke dobimo

$$\frac{1}{\alpha - \beta}\log\left|\frac{(y(t)-\alpha)(y(0)-\beta)}{(y(t)-\beta)(y(0)-\alpha)}\right| = -bt.$$

Glede na lego začetnega pogoja dobimo štiri različne tipe rešitev. Če je $y_0 < \alpha$, bo populacija v končnem času izumrla. Če je $y_0 = \alpha$ ali $y_0 = \beta$, bo populacija konstantna, če je $\alpha < y_0 < \beta$, bo število osebkov v populaciji naraščalo in v limiti doseglo β, če pa je $y_0 > \beta$, bo bo število osebkov v populaciji padalo in v limiti doseglo β.

Ilustrirajmo našo teorijo še s primerom. Poglejmo, kako so rešitve odvisne od c in začetne količine za primer $a = 3$ in $b = 1$. Začetno vrednost $y(0)$ označimo z y_0. Naj bo $c > 9/4$. Potem je rešitev enaka

$$y(t) = \frac{-2}{\sqrt{4c-9}}(\operatorname{arctg} \frac{2y-3}{\sqrt{4c-9}} - \operatorname{arctg} \frac{2y_0-3}{\sqrt{4c-9}}).$$

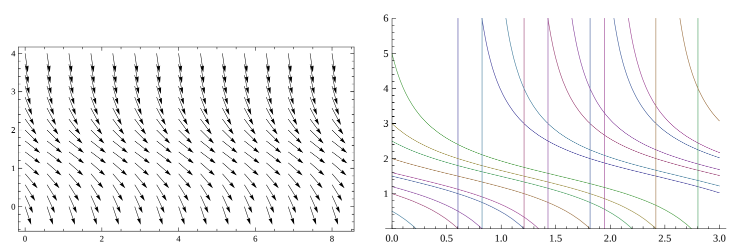
Za $c = 9/4$ dobimo

$$y(t) = (9t - 4y_0 - 6ty_0)/(-4 + 6t - 4ty_0).$$

in za $c < 9/4$

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{9-4c}} \log \left| \frac{(-2y + 3 - \sqrt{9-4c})(-2y_0 + 3 + \sqrt{9-4c})}{(-2y_0 + 3 - \sqrt{9-4c})(-2y + 3 + \sqrt{9-4c})} \right|$$

Slike pripadajočih polj in smeri so prikazane spodaj (slike 1.9,1.10,1.11).



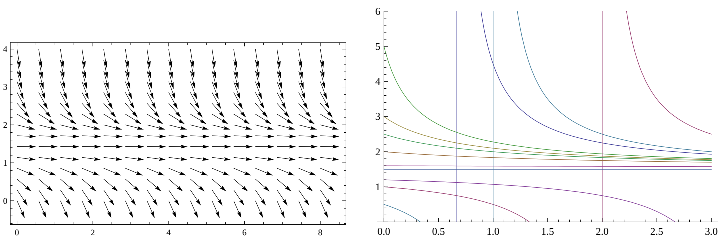
(a) (b)

Slika 1.9: Polje smeri in rešitve enačbe $y' = 3y - y^2 - 3$

Soroden primer je ribolovna enačba z relativnimi kvotami, to pomeni, da je stopnja uliva enaka cy. Enačba ima potem obliko

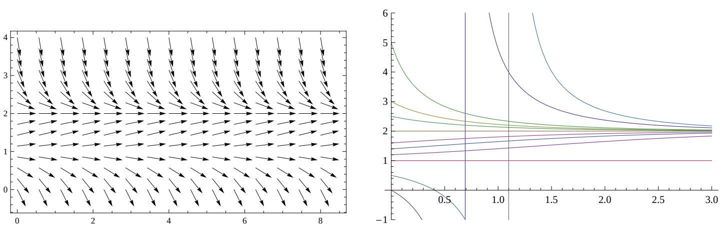
$$y' = ay - by^2 - cy, \; a, b, c > 0.$$

1.1 Analiziraj ribolovno enačbo z relativnimi kvotami pri $a = 3$, $b = 1$.



(a) (b)

Slika 1.10: Polje smeri in rešitve enačbe $y' = 3y - y^2 - 9/4$



(a) (b)

Slika 1.11: Polje smeri in rešitve enačbe $y' = 3y - y^2 - 2$

8. Prosti pad

Naj bo y višina, na kateri se nahaja telo. Diferencialna enačba, ki popisuje prosti pad je

$$y'' = -g,$$

kjer je g težnostni pospešek. Minus dobimo, ker je smer gibanja nasprotna smeri naraščanja višine. Z uvedbo nove spremenljiv. Pišimo $x_2 = y$. Tej enačbi lahko priredimo sistem enačb:

$$x_1' = x_2, \;\; x_2' = -g.$$

Temu sistemu priredimo vektorsko polje smeri, ki ga določa polje (x_1', x_2'). Tokovnice tega polja so parabole.

9. Enačba majhnih oscilacij

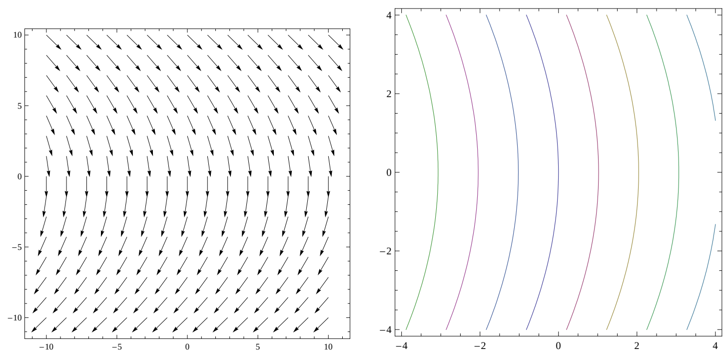
To enačbo dobimo, če zapišemo npr. Hookov zakon za nihalo (pospešek je premo sorazmeren odmiku iz mirovne lege) ali pa enačbo nihanja za nitno nihalo, če so odmiki majhni.

$$y'' = -ky, \; k > 0.$$

Podobno kot v prejšnjem primeru priredimo tej enačbi sistem enačb

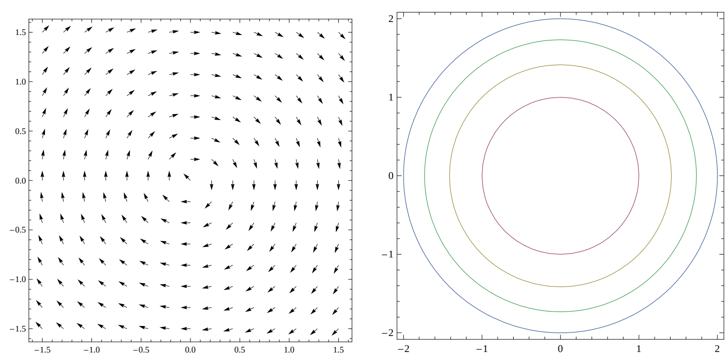
$$x_1' = x_2, \;\; x_2' = -kx_1.$$

in vektorsko polje smeri, ki ga določa polje (x_1', x_2'). Tokovnice tega polja so za $k = 1$ krožnice.



(a) (b)

Slika 1.12: Polje smeri in fazne krivulje za enačbo $y'' = -g$



(a) (b)

Slika 1.13: Polje smeri in fazne krivulje za enačbo $y'' = -y$

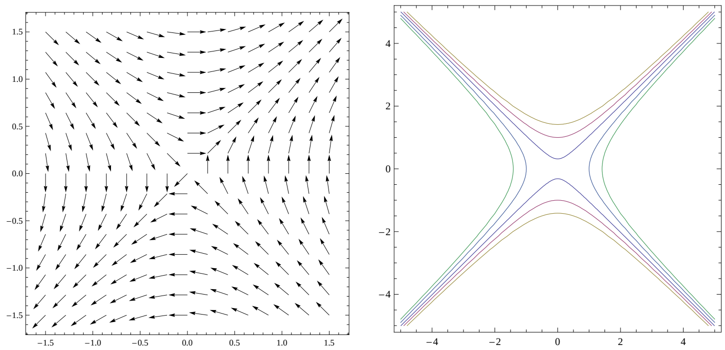
10. Obrnjeno nihalo

To enačbo dobimo, če je nihalo obrnjeno na glavo (utež nad osjo vrtenja).

$$y'' = ky, \ k > 0$$

Podobno kot v prejšnjem primeru priredimo tej enačbi sistem enačb

$$x_1' = x_2, \ \ x_2' = x_1.$$



(a) (b)

Slika 1.14: Polje smeri in fazne krivulje za enačbo $y'' = y$

in vektorsko polje smeri $(x_2, x_1)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Tokovnice tega polja so hiperbole.

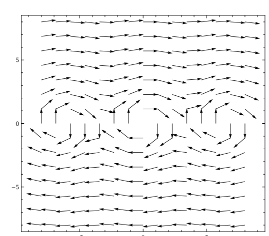
11. Fizikalno nihalo

Utež z maso m je obešena na drog dolžine l. Kotni pospešek zadošča enačbi

$$Iy'' = -mgl \sin y;$$

$I = ml^2$ je vztrajnostni moment. Če damo konstante na eno stran in pišemo $k = mgl/I$ dobimo

$$y'' = -k \sin y.$$



Slika 1.15: Polje smeri in fazne krivulje za enačbo $y'' = -\sin y$

Pripadajoč sistem enačb je

$$x_1' = x_2, \;\; x_2' = -k \sin x_1,$$

Vektorsko polje smeri prikazuje slika 1.15.

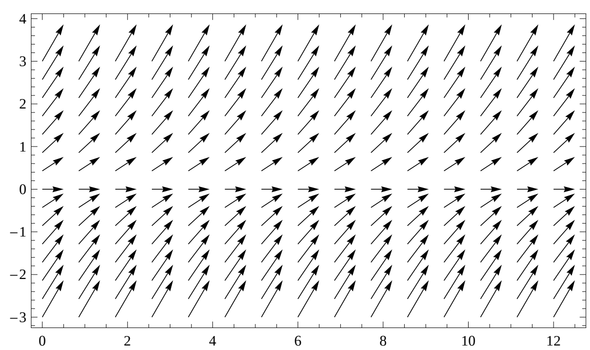
2. Enoličnost in eksistenca rešitev

1. Enoličnost rešitve diferencialne enačbe $y' = f(y)$.

Vse dosedanje rešitve diferencialnih enačb so imele lastnost, da je za vsak začetni pogoj obstajala natanko ena rešitev. To žal ni vedno res. Oglejmo si rešitve diferencialne enačbe

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Pripadajoče polje smeri je prikazano na sliki 2.1. Po običajnem postopku



Slika 2.1: Polje smeri enačbe $y' = 2\sqrt{|y|}$

dobimo rešitev

$$\frac{y'}{2\sqrt{|y|}} = 1.$$

Za pozitivne y dobimo

$$\sqrt{y} = (x - c),$$

oziroma

$$y = (x - c)^2.$$

Preverimo, ali ustreza začetnim pogojem. Naša enačba predpostavlja, da je $y' \geq 0$, zato je rešitev dobra le za $x \geq c$. Ker smo delili z 0, dobimo tudi rešitev $y = 0$. Za negativne y dobimo

$$\frac{y'}{2\sqrt{-y}} = 1,$$

oziroma

$$\sqrt{-y} = (-x + c).$$

Rešitev je $y = -(x-c)^2$ za $x < c$. Vidimo, da imamo pri vsakem začetnem pogoju $(x_0, 0)$ tri rešitve: $y_1 = 0$, $y_2 = (x - x_0)^2$ za $x \geq x_0$ in $y_3 = -(x - x_0)^2$ za $x \leq x_0$. Sestavimo lahko še četrto, če definiramo $y_4 = y_1$ za $x \geq x_0$ in $y_4 = y_3$ za $x \leq x_0$. Razlog za propad enoličnosti je v dejstvu, da funkcija $2\sqrt{|y|}$ ni zvezno odvedljiva v 0; odvod ima tam pol, kar pomeni, da singularno rešitev dosežemo v končnem času (z leve).

Napišimo zdaj še splošno verzijo izreka 1.3.

Izrek 2.1. *Naj $D \subset \mathbb{R}$ odprt interval in naj bo $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Rešitev φ enačbe $y' = f(y)$ pri začetnem pogoju (x_0, y_0) obstaja za vsak $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in D$ in je ena sama v naslednjem smislu: vsaki dve rešitvi enačbe pri danem začenem pogoju se ujemata na neki okolici y_0. Za $f(y_0) \neq 0$ je rešitev dana z Barrowovo formulo*

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{f(t)},$$

če pa je $f(y_0) = 0$, je rešitev $\varphi(x) = y_0$.

Dokaz. Dokazali smo že vse, razen enoličnosti v primeru, ko je $f(y_0) = 0$. Dokaz bo s protislovjem. Naj bo φ nekonstantna rešitev enačbe $y' = f(y)$, ki zadošča $\varphi(x_0) = y_0$. Naj bo $(x_1, \varphi(x_1))$ neravnovesna točka, tj. točka v kateri je $f(\varphi(x_1)) \neq 0$. Naj bo $x_2 = \max\{x < x_1, f(\varphi(x)) = 0\}$ (obstaja zaradi zveznosti funkcij). Torej je $f(\varphi(x)) \neq 0$ za vsak $x \in (x_2, x_1]$. Za vsak tak x pa velja Barrowova formula:

$$x - x_1 = \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{f(t)}.$$

Uvedimo oznake $y = \varphi(x)$, $y_1 = \varphi(x_1)$ in $y_2 = \varphi(x_2)$ in privzemimo, da je $y_1 \leq y_2$. Ker je funkcija f zvezno odvedljiva, na intervalu $[y_1, y_2]$ velja ocena

$|f(y)| \leq k|y-y_2|$. Pravimo, da je funkcija Lipschitzova s konstanto k. Ocenimo integral:

$$|x - x_1| = \left| \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{f(t)} \right| \geq \int_{y_1}^{y} \frac{dt}{k|t - y_2|}.$$

Zadnji integral gre proti neskončno, ko pošljemo x proti x_2 (in s tem y proti y_2), kar nas privede v protislovje. To pa pomeni, da rešitev, če je rešitev v začetku ravnovesni točki, tam vedno ostane. ♢

2. Diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama

Definicija 2.2. *Naj bosta f in g gladki neničelni funkciji, definirani vsaka na svojem odprtem intervalu $I_x, I_y \subset \mathbb{R}$. Diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama je enačba oblike*

$$y' = \frac{g(y)}{f(x)}. \tag{2.1}$$

Kot navadno pridemo do njene rešitve z integriranjem:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)} = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}.$$

V splošnem dobimo implicitno podano krivuljo.

Diferencialni enačbi z ločljivima spremenljivkama priredimo polje smeri

$$v(x, y) = \frac{(1, y')}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = \frac{(f(x), g(y))}{\sqrt{f^2(x) + g^2(y)}}.$$

Enačbi priredimo še *sistem diferencialnih enačb*

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y); \tag{2.2}$$

pika $\dot{}$ se nanaša na odvod po času. Naj bosta $\varphi_x : I \to I_x$ in $\varphi_y : I \to I_y$ rešitvi sistema enačb (2.2) z istim začetnim časom, ki sta dani z izrekom 2.1. Krivuljo, ki jo popiše pot $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ v ravnini za $t \in I$, imenujemo *fazna krivulja.*

Trditev 2.3. *Fazne krivulje sistema (2.2) sovpadajo z grafi rešitev (integralskimi krivuljami) enačbe (2.1).*

Dokaz. Ker imata krivulji $\varphi(I)$ in rešitev enačbe (2.1) enako polje smeri, je $\varphi(I)$ tokovnica polja, torej rešitev. Predpostavimo obratno. Naj bo γ integralska krivulja enačbe (2.1) in naj bo $(\gamma_x, \gamma_y) : J \to \mathbb{R}^2$ njena parametrizacija. Privzeti smemo, da γ_x reši prvo enačbo sistema (2.1), $\dot{\gamma}_x = f(\gamma_x)$; na tem mestu smo uporabili dejstvo, da je f brez ničel, kar pomeni, da ima krivulja lokalno bijektivno projekcijo na os x. Dokazati moramo, da je γ_y reši drugo enačbo sistema, $\dot{\gamma}_y = g(\gamma_y)$. Krivulja γ ima nagib y', zato komponenti ustrezata enačbi

$$\frac{\dot{\gamma}_y(t)}{\dot{\gamma}_x(t)} = \frac{g(\gamma_y(t))}{f(\gamma_x(t))}.$$

Ker je $\dot{\gamma}_x(t) = f(\varphi_x(t))$, mora biti tudi $\dot{\gamma}_y(t) = f(\gamma_y(t))$, torej par funkcij reši sistem (2.2). $\diamondsuit$

Zdaj pa lahko formuliramo analog izreka 2.1. za ta primer.

Izrek 2.4. *Rešitev enačbe (2.1) pri začetnem pogoju* (x_0, y_0) *obstaja, je enolična in dana s formulo*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)} = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}.$$

Dokaz. Eksistenca in enoličnost sledita iz trditve 2.3. in iz izreka 2.1. za enačbi $\dot{x} = f(x)$ in $\dot{y} = g(y)$ pri začetnih pogojih (t_0, x_0), (t_0, y_0) po vrsti. $\diamondsuit$

3. Linearne diferencialne enačbe

1. Linearna diferencialna enačba prvega reda

Definicija 3.1. *Homogena linearna diferencialna enačba prvega reda je enačba oblike*

$$y' = f(x)y. \tag{3.1}$$

Opomba. Enačba je poseben primer enačbe z ločljivima spremenljivkama.

Izrek 3.2. *Rešitev enačbe* (3.1) *pri začetnem pogoju* (x_0, y_0) *je dana s formulo*

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}.$$

Dokaz. Delimo z y, integriramo in antilogaritmiramo. $\diamondsuit$

Trditev 3.3. *Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi enačbe* (3.1). *Potem je za vsaka $a, b \in \mathbb{C}$ tudi $ay_1 + by_2$ rešitev enačbe. Vektorski prostor vseh rešitev je enodimenzionalen.*

Dokaz. Linearnost preverimo z računom:

$$\begin{aligned} (ay_1 + by_2)' &= ay_1' + by_2' = \\ &= af(x)y_1 + bf(x)y_2 = f(x)(ay_1 + by_2). \end{aligned}$$

Dimenzija vektorskega prostora sledi iz izreka 3.2.

Definicija 3.4. *Nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda je enačba oblike*

$$y' = f(x)y + g(x). \tag{3.2}$$

(Splošna) rešitev enačbe je vsaka funkcija φ, ki zadošča $\varphi'(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)$ na preseku definicijskih območij funkcij f in g. Posameyno rešitev enačbe (3.2) imenujemo partikularna.

Trditev 3.5. *Naj bo* y_p *partikularna rešitev enačbe (3.2). Potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike* $y = y_p + y_h$*, kjer je* y_h *rešitev pripadajoče homogene enačbe* $y' = f(x)y$.

Dokaz. Preverimo z računom. Naj bosta y_1 in y_2 dve različni rešitvi enačbe (3.2). Potem razlika $y_1 - y_2$ reši diferencialno enačbo $y' = f(x)y$. ♢

Izrek 3.6. *Rešitev enačbe (3.2) pri začetnem pogoju* $(x_0, 0)$ *obstaja, je ena sama in je dana s formulo*

$$y = \int_{x_0}^{x} e^{\int_s^x f(t)\,dt} g(s)\,ds.$$

Dokaz. Rešitev iščemo z metodo variacije konstant. Naj bo

$$\varphi(x) = Ce^{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}$$

rešitev homogene enačbe. Rešitev bomo iskali s podobnim nastavkom, le da bomo konstanto C spremenili v funkcijo x (konstanto bomo variirali). Pišimo $y = C(x)\varphi(x)$, odvajajmo in vstavimo v enačbo (3.2):

$$C'(x)\varphi(x) + C(x)\varphi'(x) = f(x)C(x)\varphi(x) + g(x).$$

Ker funkcija φ reši homogeno enačbo, sta drugi in tretji člen enaka, je

$$C'(x)\varphi(x) = g(x).$$

Upoštevamo definicijo φ in dobimo

$$C'(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(t)\,dt} g(x).$$

Integriramo:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^s f(t)\,dt} g(s)\,ds.$$

Rešitev osnovne enačbe je

$$\begin{aligned}
y &= C(x)\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^s f(t)\,dt} g(s)\,ds \cdot e^{\int_{x_0}^x f(t)\,dt} = \\
&= \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^s f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt} g(s)\,ds = \\
&= \int_{x_0}^{x} e^{\int_s^x f(t)\,dt} g(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Primeri.

1. Reši enačbo $y' = 2y + 4x$ pri začetnem pogoju $y_0 = 1$.

Rešitev homogene enačbe je $y_h = Ce^{2x}$. Poiščimo rešitev nehomogene enačbe z variacijo konstant. Vzemimo nastavek $y_p = C(x)e^{2x}$, odvajajmo in vstavimo v enačbo:

$$C'(x)e^{2x} + C(x)2e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + 4x.$$

Uredimo in dobimo

$$C'(x) = 4xe^{-2x}.$$

Integracija po delih da

$$y_p(x) = -(1 + 2x)e^{-2x}e^{2x} = -(1 + 2x).$$

Rešitev pri danem začetnem pogoju je oblike $y = -(1 + 2x) + Ce^{2x}$. Ker je $y(0) = 1$, mora biti $C = 2$.

2. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = e^x y - \frac{e^{e^x}}{x}$.

Rešitev homogene enačbe je $y_h = Ce^{e^x}$. Z variacijo konstant dobimo

$$C'(x)e^{e^x} + C(x)e^{e^x}e^x = e^x C(x)e^{e^x} - \frac{e^{e^x}}{x}.$$

Uredimo in integriramo:

$$C'(x) = -\frac{1}{x},\ C(x) = -\log x.$$

Splošna rešitev je

$$y = (-\log x + C)e^{e^x}.$$

Trditev 3.7. *Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi diferencialnih enačb $y' = f(x)y+g_1(x)$ in $y' = f(x)y + g_2(x)$ po vrsti. Potem je $y_1 + y_2$ rešitev enačbe $y' = f(x)y + g_1(x) + g_2(x)$ in ay_1 rešitev enačbe $y' = f(x)y + ag_1(x)$.*

Dokaz. Račun:

$$\begin{aligned} y_1' &= fy_1 + g_1 \\ y_2' &= fy_2 + g_2 \\ (y_1 + y_2)' &= f(y_1 + y_2) + g_1 + g_2 \\ ay_1 &= afy_1 + ag_1. \end{aligned}$$

Metoda inteligentnega ugibanja

Poglejmo si ta primer še z druge strani. Funkcija $f(x)$ je v tem primeru konstanta 2, zato lahko rešitev homogene enačbe kar zapišemo: $y_h = e^{2x}$. Nehomogeni del pa je polinom. Enačba je, ker je $f(x) = 2$, take oblike, da iz polinomov naredi spet polinome, zato lahko poskušamo najti partikularno rešitev kar z nastavkom $y_p = ax + b$. Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$a = 2ax + 2b + 4x.$$

Primerjamo koeficiente in vidimo, da je $a = -2$ in $b = -1$. Podoben razmislek funkcionira vedno, ko je $f(x)$ konstanta in je $g(x)$ iz razreda funkcij, ki je zaprt za odvajanje. To so: polinomi, kotne funkcije, eksponentna funkcija in njihove kombinacije.

Poglejmo si podobno enačbo $y' = 2x + e^{ax}$ in poiščimo splošno rešitev. Rešitev homogene enačbe je e^{2x}, nastavek za partikularno rešitev pa bo $y = Ce^{ax}$. Odvajamo, vstavimo v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} aCe^{ax} &= 2Ce^{2a} + e^{ax} \\ C &= \frac{e^{ax}}{ae^{ax} - 2e^{ax}}. \end{aligned}$$

To seveda lahko zapišemo le, če je $a \neq 2$. Če je $g(x) = be^{2x}$ in $f(x) = 2$ je potrebno nastavek za partikularno rešitev popraviti:

$$y_p = xe^{2x}.$$

Trditev 3.8. *Naj bo $y' = ay + g(x)$ nehomogena linearna diferencialna enačba in $b \neq a$, c poljuben. Potem veljajo spodnji recepti za iskanje partikularne rešitve y_p.*

$g(x)$	*nastavek za* $y_p(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x), a \neq 0,$
$\cos bx, \sin bx$	$\alpha \cos bx + \beta \sin bx$
e^{bx}	αe^{bx}
$e^{bx} P_n(x)$	$e^{bx} Q_n(x)$
$e^{ax} P_n(x)$	$xe^{ax} Q_n(x)$
$e^{cx} \cos bx, e^{cx} \sin bx$	$e^{cx}(\alpha \cos bx + \beta \sin bx)$

Oznaki $P_n(x)$ in $Q_n(x)$ pomenita (splošni) polinom n-te stopnje.

2. DE prvega reda, ki se prevedejo na LDE prvega reda

Bernoullijeva Diferencialna enačba

Bernoullijeva diferencialna enačba (BDE) je enačba

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}. \tag{3.3}$$

Če je $\alpha = 0$, je to homogena linearna diferencialna enačba, če pa je $\alpha = 1$, je nehomogena linearna diferendialna enačba. Če je $\alpha \neq 0, 1$, s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$ BDE prevedemo na LDE.

Ricattijeva Diferencialna enačba

Ricattijeva diferencialna enačba (RDE) je enačba

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),\ a, b, c \in \mathcal{C}([\alpha, \beta]). \tag{3.4}$$

Enačba v splošnem ni rešljiva. Če pa kako rešitev y_1 RDE uganemo, pridemo do splošne rešitve s substitucijo $y = y_1 + z$. Funkcija z zadošča BDE.

3. Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Definicija 3.9. *Nehomogena linearna diferencialna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti je enačba oblike*

$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x). \tag{3.5}$$

Če je $f = 0$, je enačba homogena.

Pri homogeni linearni diferencialni enačbi prvega reda s konstantnimi koeficienti, $y' = ay$, smo ugotovili, da je rešitev kar Ce^{ax}. Poglejmo, ali si lahko s tem kaj pomagamo. Vstavimo $y = e^{\lambda x}$ v homogeno linearno diferencialnoe načbo n-tega reda

$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0. \tag{3.6}$$

Dobimo

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\lambda^n + a_1e^{\lambda x}\lambda^{n-1} + a_2e^{\lambda x}\lambda^{n-2} + \ldots + a_ne^{\lambda x} = 0.$$

Pokrajšamo $e^{\lambda x}$ in dobimo polinomsko enačbo

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Definicija 3.10. *Polinom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n \tag{3.7}$$

imenujemo karakteristični polinom enačbe (3.6).

Zanimajo nas ničle karakterističnega polinoma, saj bo za vsako ničlo λ_0 funkcija $e^{\lambda_0 x}$ rešila enačbo. Polinom ima n kompleksnih ničel, štetih z večkratnostjo. Po analogiji s homogeno linearno diferencaialno enačbo bi radi toliko linearno neodvisnih rešitev, kolikor je red enačbe. Če je λ_0 večkratna ničla, nam manjkajo rešitve.

Trditev 3.11. *Naj bo λ_0 k-kratna ničla karakterističnega polinoma (3.7). Funkcije*

$$x^{k-1}e^{\lambda_0 x}, x^{k-2}e^{\lambda_0 x}, \ldots, e^{\lambda_0 x}$$

rešijo diferencialno enačbo (3.6).

Dokaz. Naj bo

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\lambda^n + a_1 e^{\lambda x}\lambda^{n-1} + a_2 e^{\lambda x}\lambda^{n-2} + \ldots + a_n e^{\lambda x}. \tag{3.8}$$

Odvajajmo (3.8) po λ.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}L(e^{\lambda x}) &= n\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \lambda^n x e^{\lambda x} + \\
&\quad +(n-1)a_1 e^{\lambda x}\lambda^{n-2} + a_1 x e^{\lambda x}\lambda^{n-1} + \\
&\quad +(n-2)a_2 e^{\lambda x}\lambda^{n-3} + a_2 x e^{\lambda x}\lambda^{n-2} + \ldots + x a_n e^{\lambda x} = \\
&= p'(\lambda)e^{\lambda x} + x p(\lambda)e^{\lambda x}.
\end{aligned}$$

Ker je L linearen v y, je

$$\frac{d}{d\lambda}L(e^{\lambda x}) = L(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda x}) = L(xe^{\lambda x}).$$

Naj bo zdaj λ_0 vsaj k-kratna ničla ($k \geq 2$) karakterističnega polinoma. Potem je λ_0 tudi ničla njegovega odvoda, torej je $p(\lambda_0) = xp'(\lambda_0) = 0$, zato je tudi $L(xe^{\lambda_0 x}) = 0$. Ta postopek lahko ponovimo $k-1$ krat in vsakič pri odvajanju pridobimo en faktor x :

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}L(e^{\lambda x}) = L(x^{k-1}e^{\lambda x}) = x^{k-1}p(\lambda)e^{\lambda x} + \ldots + p^{(k-1)}(\lambda)(e^{\lambda x}).$$

$\diamondsuit$

Trditev 3.12. *Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi enačbe* (3.6). *Potem je za vsaka $a, b \in \mathbb{C}$ tudi $ay_1 + by_2$ rešitev enačbe. Vektorski prostor vseh rešitev je n-dimenzionalen.*

Dokaz. Pišimo $a_0 = 1$. Linearnost preverimo z računom:

$$\begin{aligned} L(ay_1 + by_2) &= \sum_0^n a_i (ay_1 + by_2)^{(n-i)} = \\ &= \sum_0^n a_i (ay_1^{(n-i)} + by_2^{(n-i)}) = \\ &= aL(y_1) + bL(y_2). \end{aligned}$$

Iz trditve 3.11. vidimo, da je prostor rešitev vsaj n dimenzionalen. Dokaz, da ni drugih rešitev, bo kasneje. $\diamondsuit$

Trditev 3.13. *Naj bo y_p partikularna rešitev enačbe (3.5). Potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike $y = y_p + y_h$, kjer je y_h rešitev pripadajoče homogene enačbe (3.6).*

Dokaz. Preverimo z računom. Naj bosta y_1 in y_2 dve različni rešitvi enačbe (3.5). Potem razlika $y_1 - y_2$ reši diferencialno enačbo

$$0 = \sum_0^n a_i y_1^{(n-i)} - f(x) - (\sum_0^n a_i y_2^{(n-i)} - f(x)) = \sum_0^n a_i (y_1 - y_2)^{(n-i)}.$$

$\diamondsuit$

Pri nehomogeni linearni diferencialni enačbi lahko partikularne rešitve iščemo z variacijo konstant ali pa z metodo inteligentnega ugibanja (MIU). Metoda variacije konstant je komplicirana, zato se bomo omejili le na MIU.

Trditev 3.14. *Naj bo $L(y) = f$ nehomogena diferencialna enačba n-tega reda. Naj bo a k-kratna ničla karakterističnega polinoma p in naj bo $p(b) \neq 0$. Potem veljajo nasednji recepti za iskanje partikularne rešitve:*

$f(x)$	$y_p(x)$
$P_m(x)$	$Q_m(x), a \neq 0$
ce^{bx}	αe^{bx}
$e^{bx}P_m(x)$	$e^{bx}Q_m(x)$
$e^{ax}P_m(x)$	$x^k e^{ax}Q_m(x)$

.

Oznaki $P_m(x)$ in $O_m(x)$ pomenita (splošni) polinom m-te stopnje.

Trditev 3.15. *Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi diferencialnih enačb $L(y) = f(x)$ in $L(y) = g(x)$ po vrsti. Potem je $y_1 + y_2$ rešitev enačbe $L(y) = f(x) + g(x)$ in ay_1 rešitev enačbe $L(y) = af(x)$.*

Primer. Poišči splošno rešitev enačbe $L(y) = y'' - 2y' + 2y = 0$. Poišči še rešitve nehomogene enačbe $L(y) = f$ za $f(x) = 2x$, $5\sin x$, $2e^x(\cos x + \sin x)$.

Karakteristični polinom je $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ z ničlama $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Rešitvi sta ali

$$y_1 = e^{(1+i)x},\ y_2 = e^{(1-i)x},$$

ali pa

$$v_1 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^x \sin x,\ v_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^x \cos x.$$

Pri $f(x) = 2x$ uporabimo nastavek $ax + b$ in dobimo enačbo $-2a + 2ax + 2b = 2x$. Sledi $a = 1$ in $b = 1$. Pri $f(x) = 5\sin x$ uporabimo nastavek $a\sin x + b\cos x$ in dobimo $\sin x(-a + 2b + 2a) + \cos x(-b - 2a + 2b) = 5\sin x$. Sledi $a = 1$ in $b = 2$. Pri zadnjem primeru pa ugotovimo, da desni strani pripadata eksponenta $1 \pm i$, ki sta ničli karakterističnega polinoma, zato je nastavek $xe^x(a\sin x + b\cos x)$ oziroma $x(Ae^{(1+i)x} + Be^{(1-i)x})$. Vstavimo v enačbo in dobimo $2e^x(a\cos x - b\sin x) = 2e^x(\cos x + \sin x)$, torej je $a = 1$ in $b = -1$.

4. Eksistenca in enoličnost

1. Eksistenca in enoličnost

Definicija 4.1. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica. Vektorsko polje*

$$v : D \to \mathbb{R}^2$$

lahko izravnamo, če obstaja difeomorfizem $h : D \to D' \subset \mathbb{R}^2$, tako da je $Dh \cdot v = \lambda(x, y)e_1$, kjer je e_1 drugi bazni vektor.

Trditev 4.2. *Naj bo $y' = f(x, y)$ navadna diferencialna enačba s poljem smeri v. Če polje lahko izravnamo z difeomorfizmom h, se integralske krivulje polja smeri v preslikajo v vodoravnice.*

Dokaz. Posredno odvajamo. Naj bo φ integralska krivulja in $(x(t), y(t))$ njena parametrizacija. Potem je $(\dot{x}, \dot{y}) = \psi(x, y)v(x, y)$ za neko funkcijo λ. Izračunajmo $h(x(t), y(t))$. Po formuli za posredno odvajanje je

$$\frac{d}{dt}h(x(t), y(t)) = Dh \circ (\dot{x}, \dot{y})^T = \psi Dh \cdot v = \psi \lambda e_1.$$

Tangentni vektor na sliko tokovnice je vedno vzporeden e_1, torej je tokovnica vodoravna. $\diamondsuit$

Posledica 4.3. *Pri predpostavkah trditve 4.2. je diferencialna enačba $y' = f(x, y)$ ekvivalentna enačbi $z' = 0$.*

Izrek 4.4. *(Osnovni izrek). Vsako polje smeri reda $\mathcal{C}^r$ lahko lokalno izrav-- namo s $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmom.*

Zgodba o dokazu. Ideja je Newtonova. Predstavil jo je v svojem drugem pismu tajniku Royal Society (24.10.1676). Najprej je idejo uporabil za reševanje enačbe $y' = y$. Danes se nam to zdi trivialno, ker poznamo ekspo-nentno funkcijo, ki pa jo je odkril Newton ravno pri reševanju zgornje diferencialne enačbe. Njegova ideja je bila naslednja. Naj bo $y' = f(x,y)$ dana diferencialna enačba in f analitična. Iščemo difeomorfizem v obliki $(x,z) = (x, h(x,y))$ pri pogoju $h(0,y) = y$. Iz pogoja, da mora biti $z' = 0$ dobimo s posrednim odvajanjem $z' = h_x + h_y y' = h_x + h_y f = 0$. Razvijmo h in f v Taylorjevo vrsto po potencah x

$$h(x,y) = \sum_0^\infty h_i(y)x^i, \quad f(x,y) = \sum_0^\infty f_i(y)x^i$$

in vstavimo v našo enačbo. Upoštevamo še, da je $h_0(y) = h(0,y) = y$ in zato je $h_y(0,y) = h_0' = 1$. Zaradi enostavnosti pisave bomo argument y izpuščali. Potem je

$$\sum_1^\infty i h_i x^{i-1} + \sum_0^\infty h_{i,y} x^i \sum_0^\infty f_i x^i = 0.$$

Primerjamo koeficiente pri potencah x. Pri x^0 dobimo $h_1 + h_0' f_0 = 0$. Ker je $h_0' = 1$, dobimo $h_1 = -f_0$. Pri x^1 imamo enačbo $2h_2 + h_1' f_0 + h_0' f_1 = 0$. Količini h_0 in h_1 poznamo, zato je lahko izračunamo h_2. Pri potenci x^n dobimo

$$(n+1)h_{n+1} + \sum_0^n h_i' f_{n-i} = 0,$$

pri čemer so količine $f_l, l \in \mathbb{N}_0$ in $h_m', m \leq n$ znane. Tako dobimo vse člene Taylorjevega razvoja.

Poglejmo, kaj dobimo za diferencialno enačbo $y' = y$. V tem primeru je $f_0 = y$ in $f_i = 0$ za $i \geq 0$. Zgornja formula ima obliko

$$(n+1)h_{n+1} = -h_n' f_0.$$

Ker je $h_0(y) = y$, je $h_1 = -y$, $h_2 = y/2$, $h_3 = y/3!$ in tako dalje. Torej je

$$h(x,y) = y - yx + y\frac{x^2}{2} - y\frac{x^3}{3!} \ldots = y \operatorname{Exp}(-x),$$

kjer je $\operatorname{Exp}(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$. Po definiciji funkcija Exp reši enačbo $y' = y$ pri začetnem pogoju $y(0) = 1$.

Ko je Euler poskušal z istimi sredstvi poiskati rešitev diferencialne enačbe

$$y' = \frac{y - x}{y^2}$$

je za rešitev dobil povsod divergentno vrsto $y = \sum(k-1)!x^k$. Probleme s konvergenco je za analitične f rešil Cauchy, za gladke pa Picard, ki pa je uporabil povsem drugo tehniko. Njegov dokaz bazira na naslednji ideji.

Iskani difeomorfizem lahko dobimo tudi tako, da parametriziramo tokov-- nice polja, torej rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x,y)$ pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$. Spomnimo se na Eulerjevo metodo iskanja rešitev. Če začnemo z začetnim približkom y_0, dobimo točko $y_1 = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0)$. Prvi del rešitve predstavlja daljica med tema dvema točkama. Poglejmo na ta postopek s stališča funkcij. Začnemo s konstantno funkcijo y_0 in dobimo premico skozi $(0, y_0)$ in (x, y_1). Ta premica pa ima enačbo $y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0)\,dt$. Potem v isto enačbo vstavimo našo premico in dobimo novo funkcijo itd. Formalizirajmo zdaj ta postopek.

Začnimo s konstanto $\varphi_0(x) = y_0$. Če to funkcijo vstavimo v diferencialno enačbo in integriramo, dobimo

$$A(\varphi_0)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t))\,dt.$$

Dobljena funkcija zadošča začetnemu pogoju, njen odvod po x v x_0 pa je enak $f(x_0, \varphi_0(x_0))$, torej ima v točki x_0 pravi tudi odvod. Naj bo $\varphi_1 := A(\varphi_0)$ in izračunajmo $\varphi_2 = A(\varphi_1)$. Kot prej funkcija ustreza začetnemu pogoju in $\varphi_2'(x) = f(x, \varphi_1(x))$ (odvod v x_0 je tudi pravi). Če bi bila funkcija φ_2 blizu φ_1, bi dobili približno pravo rešitev. Postopek ponavljamo in dobimo zaporedje funkcij, ki ustreza

$$\varphi_{n+1}'(x) = f(x, \varphi_n(x)),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Denimo, da zaporedje funkcij $\varphi_i = A^i(\varphi_0)$ konvergira k funkciji φ. Ko v enačbah (4.1) pošljemo $n \to \infty$, dobimo enačbo

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \tag{4.2}$$

torej φ reši diferencialno enačbo pri danem začetnem pogoju. Edini problem je konvergenca. Dokazati moramo, da je zaporedje $A^i(\varphi_0)$ Cauchyjevo, kar pomeni, da morajo biti norme razlik $A^n(\varphi_0) - A^m(\varphi_0)$ majhne. Ocenimo najprej normo razlike za poljubno funkcijo ψ :

$$A^2(\psi)(x) - A(\psi)(x) = \int_{x_0}^x (f(t, A(\psi(t))) - f(t, \psi(t)))\,dt.$$

Če je f (pri fiksnem x) Lipschitzova na y, velja

$$|f(t, A(\psi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq k(t)|A(\psi(t)) - \psi(t)|,$$

zato bo

$$\begin{aligned}\|A^2(\psi)-A(\psi)\|_\infty &\le \int_{x_0}^{x} |f(t,A(\psi(t)))-f(t,\psi(t))|\,dt \le \\ &\le \int_{x_0}^{x} k(t)\,dt \|f(\cdot,A(\psi))-f(\cdot,\psi)\|_\infty;\end{aligned}$$

norma $\|\|_\infty$ se nanaša na interval $[x_0,x]$. Pišimo

$$K(x)=\int_{x_0}^{x} k(t)\,dt$$

in izračunajmo normo razlike

$$\|A^n(\psi)-A^{n-1}(\psi)\|_\infty \le K(x)\|A^{n-1}(\psi)-A^{n-2}(\psi)\|_\infty \le \dots$$
$$\dots \le K(x)^{n-1}\|A(\psi)-\psi\|_\infty.$$

Podobno dobimo

$$\begin{aligned}\|A^n(\psi)-\psi\|_\infty &\le \|A^n(\psi)-A^{n-1}(\psi)+A^{n-1}(\psi)+ \\ &\quad +\dots+A^2(\psi)-A(\psi)\|_\infty \le \\ &\le \|A^n(\psi)-A^{n-1}(\psi)\|_\infty+\|A^{n-1}(\psi)-A^{n-2}(\psi)\|_\infty+ \\ &\quad +\dots+\|A(\psi)-\psi\|_\infty \le \\ &\le (K(x)^{n-1}+K(x)^{n-2}+\dots+1)\|A(\psi)-\psi\|_\infty\end{aligned}$$

in za $n>m$

$$\begin{aligned}\|A^n(\psi)-A^m(\psi)\|_\infty &\le K(x)^m\|A^{n-m}(\psi)-\psi\|_\infty \le \\ &\le K(x)^{m-1}(K(x)^{n-m-1}+K(x)^{n-1}+\dots+1)\cdot \\ &\quad \cdot\|A(\psi)-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Vidimo, da bo zaporedje $A^n(\psi)$ Cauchyjevo, če bo ta konstanta vedno manjša od 1. Poglejmo, kdaj bo. Ker gre za vsoto geometrijske vrste, zadošča vsak K, ki je manjši od 1 saj je potem vsota

$$1+K+K^2++K^3+\dots+K^l \le \frac{1}{1-K},$$

faktor K^{m-1} pa tako majhen, kot želimo. Zato lahko za vsak $\varepsilon>0$ izberemo N da je za $m,n>N$ norma $\|A^n(\psi)-A^m(\psi)\|_\infty \le \varepsilon$. Če je k integrabilna na

$[x_0, x_1]$ za nek $x_1 > x_0$, potem lahko izberemo x dovolj blizu x_0 in dosežemo, da je $\int_{x_0}^x k < 1$.

Dokazali smo, da bo zaporedje φ_i konvergentno in bo imelo limito φ. Dokazali smo pravzaprav več. Zaporedje $A^n(\psi)$ bo konvergiralo k rešitvi tudi za (nekatere) druge funkcije ψ, saj je $A^n(\psi)(x_0) = y_0$ in $A^n(x_0)' = f(x_0, A^{n-1}\psi(x_0)) = f(x_0, y_0)$ za $n \geq 2$.

Dokažimo še enoličnost. Naj bosta φ in ψ različni rešitvi diferencialne enačbe, ki ustrezata istemu začetnemu pogoju (x_0, y_0) in interval okoli x_0 tako majhen, da bo $K(x) < 1$. Ker je $A(\varphi) = \varphi$ in $A(\psi) = \psi$, lahko ocenimo

$$\|\psi - \varphi\|_\infty = \|A(\psi) - A(\varphi)\|_\infty \leq K(x)\|\psi - \varphi\|_\infty,$$

kar je mogoče le, če je norma razlike enaka 0, torej sta funkciji enaki.

Dokaz bi lahko formulirali tudi kot iskanje fiksne točke preslikave A na primernih funkcijskih prostorih.

Za zaključek si poglejmo, kaj da ta metoda pri diferencialni enačbi $y' = y$ in začetnem pogoju $y(0) = y_0$.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= y_0, \\
\varphi_1 &= y_0 + \int_0^x y_0\, dt = y_0 + y_0 x = y_0(1 + x), \\
\varphi_2 &= y_0 + \int_0^x y_0(1 + t)\; dt = y_0(1 + x + x^2/2), \\
\varphi_3 &= y_0 + \int_0^x y_0(1 + t + t^2/2)\, dt = y_0(1 + x + x^2/2 + x^3/3!), \\
&\vdots \\
\varphi_n &= y_0(1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n!) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dobimo razvoj rešitve φ v Taylorjevo vrsto:

$$\varphi(x) = y_0 \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = y_0 \operatorname{Exp}(x).$$

Iz konstrukcije je tudi očitno, da bi bile rešitve enačbe $y' = ay$ pri začetnem pogoju $y(0) = y_0$ enake $\varphi(x) = y_0 \operatorname{Exp}(ax)$. $\diamondsuit$

Povzemimo zagodbo o dokazu v

Izrek 4.5. *(Lokalni eksistenčni izrek). Naj bo $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba in $f \in \mathcal{C}((0, a) \times (0, b))$, f Lipschitzova na y s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilen na $(0, a)$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$.*

Posledica 4.6. *Naj bo v gladko polje smeri na $D \subset \mathbb{R}^2$. Potem obstaja skozi vsako točko $(x_0, y_0) \in D$ integralska krivulja, ki je ena sama v naslednjem smislu: če se dve integralski krivulji sekata v (x_0, y_0), se ujemata še na okolici (x_0, y_0).*

Velja tudi globalna verzija izreka, ki pa je ne bomo dokazali.

Izrek 4.7. *(Globalni eksistenčni izrek). Naj bo $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba in $f \in \mathcal{C}([0, a] \times \mathbb{R})$, f Lipschitzova na y s koeficientom $k(x)$, ki je integrabilen na $[0, a]$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(x_0, y_0) \in [0, a] \times \mathbb{R}$ in je definirana na $[0, a]$.*

2. Gladkost

Pri diferencialnih enačbah je pomembno tudi vprašanje, kaj se zgodi z rešitvijo, če začetne podatke malo premaknemo. Zaželeno bi bilo, da se pri majhnih spremembah začetnega pogoja tudi rešitve v bližini začetnega pogoja malo spremenijo. Označimo s $\varphi(x, x_0, y_0)$ rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ pri začetnem pogoju (x_0, y_0). Kot posledico osnovnega izreka dobimo

Izrek 4.8. *Rešitev enačbe $y' = f(x, y)$ za gladko f je gladko odvisna od začetnih pogojev. Natančneje, funkcija $\varphi(x, s, t)$, kjer je f razreda $\mathcal{C}^r$, obstaja in je $\mathcal{C}^r$ funkcija v okolici (x_0, x_0, y_0).*

Dokaz. Za enačbo $z' = 0$ je to očitno, ostale pa lahko s $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmom prevedem na take. $\diamondsuit$

Podobno velja, če v diferencialni enačbi nastopa kak dodaten parameter, recimo a, $y' = f(x, y, a)$, kjer a teče po neki odprti množici v $\mathbb{R}^k$.

Izrek 4.9. *Naj bo f gladka v vseh spremenljivkah. Rešitev enačbe*

$$y' = f(x, y, a)$$

je gladko odvisna od začetnih pogojev, x in a.

5. Sistemi diferencialnih enačb

1. Definicija in primeri

Definicija 5.1. *Naj bodo* $y_1, \ldots, y_n$ *in* x *realne spremenljivke in* $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *funkcije. Sistem* n *diferencialnih enačb prvega reda je*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Zaradi enostavnosti pisave pišemo sisteme raje v vektorski obliki. Naj bo

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ in } \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Potem lahko sistem zapišemo kot

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

začetni pogoj pa $\vec{y}(x_0) = \vec{a}$. Sistemu priredimo tudi polje smeri v $\mathbb{R}^n$:

$$v(\vec{y}) = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|}.$$

Tokovnice tega polja bodo grafi rešitev.

Zajčki in lisičke

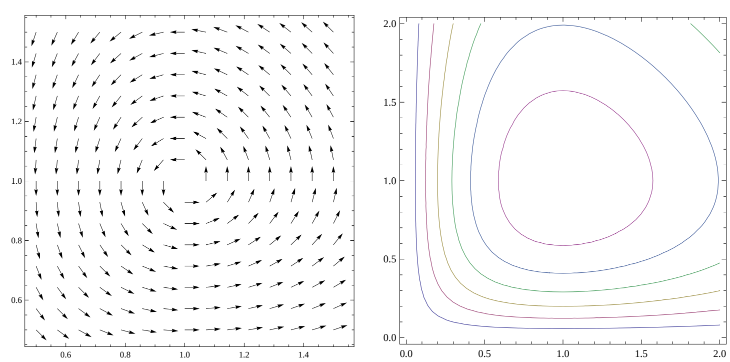
Imamo končen gozd, v katerem so zajčki (ki jih označimo z x), ki se razmnožujejo po zakonu $x' = kx$ in lisice (y), ki zajce jedo in prispevajo k zmanjšanju populacije: $x' = kx - axy$. Pri lisicah privzamemo, da ob odsotnosti zajcev izumirajo $y' = -ly$, zajci pa prispevajo k njihovemu povečanju $y' = -ly + bxy$, $a, b, k, l, > 0$. Ravnovesje dobimo, ko se število enih in drugih ne spremin-ja, torej

$$x(k - ay) = 0 \text{ in } y(l - bx) = 0.$$

Točka

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{l}{b}, \frac{k}{a}\right)$$

je ravnovesna točka. Rešitve je mogoče eksplicitno izračunati. Izkaže se, da dobimo sklenjene krivulje. Pripadajoče vektorsko polje in rešitve prikazuje slika 5.1.



(a) (b)

Slika 5.1: Polje smeri in rešitve sistema zajčki in lisičke

Pripomnimo še, da če enačbi za x' in y' poljubno malo perturbiramo s funkcijami obeh spremenljivk, ni več nujno, da so rešitve sklenjene, se pa navijajo okoli limitne sklenjene krivulje.

Na čisto enak način, kot pri navadnih diferencialnih enačbah (izrek 4.5.), lahko s Picardovo metodo dokažemo eksistenco in enoličnost pri sistemih. Integriramo po komponentah.

Izrek 5.2. *(Lokalni eksistenčni izrek). Naj bo* $\vec{y'} = \vec{f}(x, \vec{y})$ *sistem diferenci-alnih enačb in* $\vec{f} \in \mathcal{C}((0, a) \times (0, b)^n)$, f *Lipschitzova na* $\vec{y}$ *s koeficientom* $k(x)$, *ki je lokalno integrabilen na* $(0, a)$. *Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju* $(x_0, \vec{y}_0) \in (0, a) \times (0, b)^n$.

Velja tudi globalna verzija:

Izrek 5.3. *(Globalni eksistenčni izrek). Naj bo* $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ *sistem linearnih diferencialnih enačb in* $\vec{f} \in \mathcal{C}([0, a] \times \mathbb{R}^n)$, f *Lipschitzova na* $\vec{y}$ *s koeficientom* $k(x)$, *ki je integrabilen na* $[0, a]$. *Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju* $(x_0, \vec{y}_0) \in [0, a] \times \mathbb{R}^n$.

2. Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Definicija 5.4. *Sistem n linearnih diferencialnih enačb prvega reda je sistem oblike*

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x), \tag{5.1}$$

kjer je $A : [0, a] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrična funkcija,* $\vec{b} : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ *pa vektorska.*

Če sta A in $\vec{b}$ zvezni, je desna stran Lipschitzova na y, zato ima enačba pri danem začetnem pogoju eno samo rešitev, ki je definirana na $[0, a]$. Struktura prostora rešitev je enaka kot pri linearni diferencialni enačbi 1.reda.

Izrek 5.5. *Naj bo* $\vec{y}_p$ *rešitev sistema (5.1). Potem je vsaka druga rešitev oblike* $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$, *kjer je* $\vec{y}_h$ *rešitev homogenega sistema*

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}. \tag{5.2}$$

Prostor rešitev homogene enačbe je n*-dimenzionalen vektorski prostor, prostor rešitev nehomogene enačbe pa* n*-dimenzionalen afin prostor.*

Dokaz. Z enakim računom, kot pri dokazu trditev 3.3. in 3.5. preverimo, da velja $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$ in da je prostor rešitev homogenega sistema vektorski prostor. Dokazati moramo, da je n-dimenzionalen. Po izreku 4.5. obstajajo rešitve $\vec{y}_i$ homogenega sistema, ki ustrezajo začetnim pogojem $\vec{y}_i(0) = \vec{e}_i$, kjer je $\vec{e}_i$ i-ti enotski vektor. Te rešitve sestavimo v matriko, ki jo imenujemo *matrika Wronskega:*

$$W(x) = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n].$$

Ker je $W(0) = I$, je $w(0) = 1$, kjer je $w(x) := \det W(x)$ *determinanta Wronskega.* Zaradi zveznosti rešitev in determinante je determinanta Wronskega neničelna še na neki okolici točke 0, kar pomeni, da rešitve sestavljajo bazo $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\vec{y}$ poljubna rešitev homogene enačbe in $\vec{y} = \sum_1^n a_i(x)\vec{y_i}$ njen razvoj po bazi. Trdimo, da so funkcije $a_i(x)$ konstante. Odvajajmo ta razvoj in upoštevajmo, da so $\vec{y}$ in $\vec{y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ rešitve homogenega sistema:

$$\vec{y}\,' = \sum_1^n a_i'(x)\vec{y_i} + \sum_1^n a_i(x)\vec{y_i}\,' = \sum_1^n a_i'(x)\vec{y_i} + \sum_1^n a_i(x)A(x)\vec{y_i},$$
$$\vec{y'} = A(x)\vec{y} = \sum_1^n a_i(x)A(x)\vec{y_i}.$$

Sledi, da mora biti $\sum_1^n a_i'(x)\vec{y_i} = 0$. Ker pa so $\vec{y_i}$ na okolici 0 baza, morajo biti $a_i' = 0$ na okolici 0.

Z uporabo matrike Wronskega bomo pokazali, da če so $\vec{y_i}$ baza na okolici 0, so baza na $[0, a]$. To pomeni, da so tudi funkcije a_i konstante na tem intervalu. Matrika Wronskega je vsaka matrika, v kateri je n rešitev homogenega sistema . Tisto matriko, ki pa ima lastnost, da je $W(0) = I$, imenujemo *fundamentalna matrika sistema.* Za vsako matriko Wronskega lahko definiramo determinanto Wronskega, ki jo je je mogoče izračunati brez poznavanja rešitev. Če jo odvajamo in upoštevamo multilinearnost determinante, dobimo za determinanto Wronskega enačbo

$$w'(x) = \operatorname{sled} A(x)w(x).$$

Rešitev je

$$w(x) = e^{\int_0^x \operatorname{sled} A(t)\, dt}$$

pri začetnem pogoju $w(0) = 1$ oziroma

$$w(x) = ce^{\int_{x_0}^x \operatorname{sled} A(t)\, dt}$$

pri začetnem pogoju $w(x_0) = c$. Ker je matrična funkcija zvezna, je $w(x)$ definirana na $[0, a]$ in povsod neničelna. To pomeni, da če je n rešitev v eni točki linearno odvisnih, bodo take na celem območju $[0, a]$. $\diamondsuit$

Kako pa bi rešitve izračunali? Ena možnost je Picardov postopek. Poglejmo, kaj nam ta postopek da v primeru sistema linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$.

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi}_0 &= \vec{y}_0, \\
\vec{\varphi}_1 &= \vec{y}_0 + \int_0^x A\vec{y}_0\,dt = \vec{y}_0 + A\vec{y}_0 x = (I + Ax)\vec{y}_0, \\
\vec{\varphi}_2 &= \vec{y}_0 + \int_0^x A(1 + At)\vec{y}_0\ dt = (I + Ax + A^2x^2/2)\vec{y}_0, \\
\vec{\varphi}_3 &= \vec{y}_0 + \int_0^x A(I + At + A^2t^2/2)\vec{y}_0\,dt = (I + Ax + A^2x^2/2 + A^3x^3/3!)\vec{y}_0, \\
&\ \vdots \\
\vec{\varphi}_n &= (I + Ax + A^2x^2/2 + \ldots + A^nx^n/n!)\vec{y}_0 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Dobimo razvoj rešitve $\vec{\varphi}$ v Taylorjevo vrsto:

$$\vec{\varphi}(x) = \sum_0^\infty \frac{(Ax)^n}{n!} = \mathrm{Exp}(Ax)\vec{y}_0.$$

Matrika $\mathrm{Exp}(Ax)$ je fundamentalna matrika sistema (fundamentalna rešitev). Izračunamo jo lahko s pomočjo Jordanove forme. Naj bo λ k-kratna lastna vrednost in v_i^λ, $i = 1,\ldots,j$, $j < k$ ena od pripadajočih verig korenskih vektorjev: $(A - \lambda_0 I)v_i^\lambda = v_{i-1}^\lambda$. Potem so vektorji oblike $e^{Ax}v_i^\lambda$, kjer so v_i vsi korenski vektorji, ki tvorijo bazo lastnega podprostora, ki pripada lastni vrednosti λ in λ teče po vseh lastnih vrednostih, baza prostora rešitev. Če jih izračunamo, dobimo

$$\begin{aligned}
e^{Ax}v_i^\lambda &= e^{\lambda x}e^{x(A-\lambda I)}v_i^\lambda = && (5.3)\\
&= e^{\lambda x}\sum_0^\infty (A - \lambda I)^n \frac{x^n}{n!}v_i^\lambda = && (5.4)\\
&= e^{\lambda x}\sum_0^i \frac{x^n}{n!}v_{i-n}^\lambda = && (5.5)\\
&= e^{\lambda x}\left(v_i^\lambda + v_{i-1}^\lambda x + \ldots v_1^\lambda \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right). && (5.6)
\end{aligned}$$

Ostala nam je še konstrukcija rešitve nehomogene enačbe. Naj bo $W(x)$ fundamentalna rešitev. Rešitev nehomogene enačbe iščemo z metodo variacije konstant. Naj bo

$$\vec{y}_p = W(x)\vec{c}(x).$$

Odvajamo, upoštevamo, da je $W'(x) = A(x)W(x)$, vstavimo v enačbo (5.1) in dobimo

$$\begin{aligned}
&\vec{y}_p\,' = W'(x)\vec{c}(x) + W(x)\vec{c}\,'(x) = A(x)W(x)\vec{c} + \vec{b}(x),\\
&W(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{b},\\
&\vec{c}\,'(x) = W(x)^{-1}\vec{b}(x),\\
&\vec{c}(x) = \int_{x_0}^{x} W(t)^{-1}\vec{b}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Splošna rešitev je dana s formulo

$$\vec{y}(x) = W(x)\int_{x_0}^{x} W(t)^{-1}\vec{b}(t)\,dt + W(x)\vec{c},$$

kjer je $\vec{c}$ konstanten vektor.

Ogledali si bomo nekaj tipičnih primerov 2×2 sistemov linearnih difer-- encialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Kot smo videli, so rešitve tesno povezane z Jordanovo formo. Naredili bomo primere enačb $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, kjer bo A nediagonalizabilna, diagonalizabilna z enako ali nasprotno predznačenima lastnima vrednostma, singularna ali s konjugirano kompleksnima lastnima vrednostma. Vektorji, ki so v jedru A, predstavljajo ravnovesne točke.

1. Matrika A je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lastna para sta $\lambda_1 = 1, v_1 = (1,-1)$ in $\lambda_2 = 3, v_2 = (1,1)$. Linearno neodvisni rešitvi sta

$$\vec{y}_1 = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{y}_2 = e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrika Wronskega je

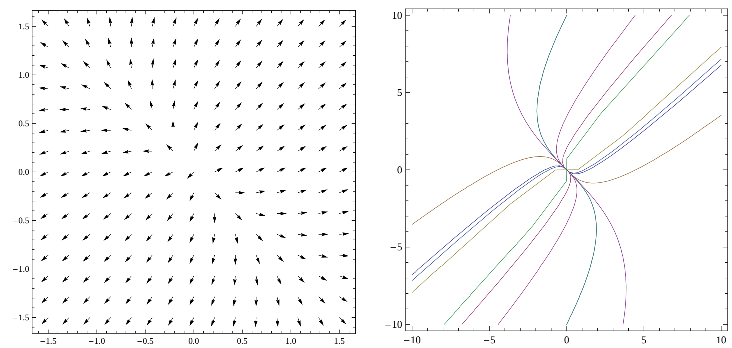
$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ -e^x & e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$W(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1. \end{bmatrix},$$

je fundamentalna rešitev enaka

$$Y(x) = W(x)W^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^x + e^{3x} & -e^x + e^{3x} \\ -e^x + e^{3x} & e^x + e^{3x}. \end{bmatrix}$$



(a) (b)

Slika 5.2: Polje smeri in rešitve sistema pri dveh pozitivnih lastnih vrednostih

Naj bo $\vec{y}$ rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $\vec{y}(0) = (c_1, c_2)$:

$$\vec{y}(x) = Y(x) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c_1 - c_2)e^x + (c_1 + c_2)e^{3x} \\ -(c_1 - c_2)e^x + (c_1 + c_2)e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Napišimo implicitno enačbo krivulje, ki jo določa ta pot. Označimo prvo komponento z x_1, drugo z x_2. Potem je

$$x_1 - x_2 = e^x(c_1 - c_2) \text{ in } x_1 + x_2 = e^{3x}(c_1 + c_2).$$

Naša krivulja ima enačbo

$$(x_1 - x_2)^3(c_1 + c_2) = (x_1 + x_2)(c_1 - c_2)^3.$$

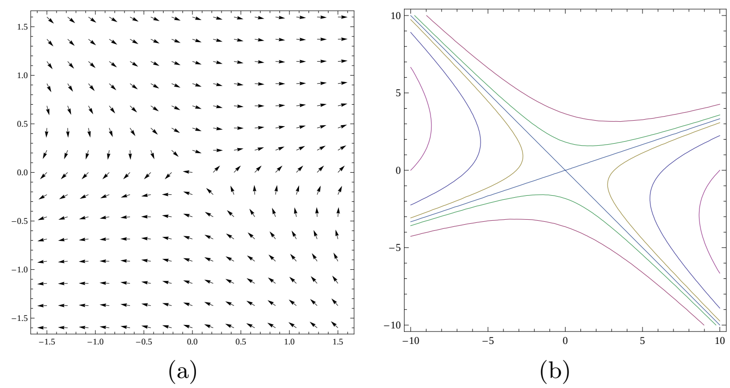
Pri pogoju $c_1 = c_2$ je rešitev premica $x_1 = x_2$, pri pogoju $c_1 + c_2 = 0$ je rešitev premica $x_1 = -x_2$. Pri pogoju $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ je rešitev $(x_1 - x_2)^3 = x_1 + x_2$. Polje smeri in družino rešitev za različne začetne pogoje prikazuje slika 5.2. Če bi imeli lastni vrednosti -1 in -3 pri istih lastnih vektorjih po vrsti, bi bilo polje ravno nasprotno, krivulje pa iste.

2. Matrika A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lastna para sta $\lambda_1 = 2, v_1 = (3, 1)$ in $\lambda_2 = -2, v_2 = (1, -1)$. Linearno neodvisni rešitvi sta

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{y}_2 = e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Slika 5.3: Polje smeri in rešitve sistema pri različno predznačenih lastnih vrednostih

Matrika Wronskega je

$$W(x) = \begin{bmatrix} 3e^{2x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & -e^{-2x} \end{bmatrix}.$$

Napišimo implicitno enačbo krivulje, ki jo določajo rešitve pri različnih začetnih pogojih. Rešitve so linearne kombinacije rešitev $\vec{y_1}$ in $\vec{y_2}$. Označimo prvo komponento z x_1, drugo z x_2. Povezuje ju enačba

$$(x_1 + x_2)(x_1 - 3x_2) = c,$$

kjer je c konstanta, odvisna od začetnega pogoja. Polje smeri in družino rešitev za različne začetne pogoje prikazuje slika 5.3.
3. Matrika A je

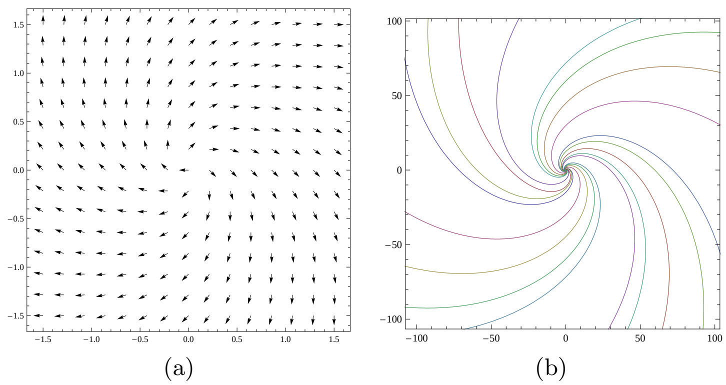
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastni vrednosti sta $1 \pm i$. Dovolj je poiskati en lastni par in to je $\lambda_1 = 1 + i, v_1 = (-i, 1)$. Realni in imaginarni del $e^{(1+i)x} v_1$ sta potem linearno neodvisni rešitvi.

$$\vec{y_1} = e^x \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} \text{ in } \vec{y_2} = e^x \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

Matrika Wronskega (in fundamentalna matrika) je

$$W(x) = e^x \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$



Slika 5.4: Polje smeri in rešitve sistema pri kompleksno konjugiranih lastnih vrednostih

Polje smeri in družino rešitev za različne začetne pogoje prikazuje slika 5.4.

4. Matrika A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastna vrednost je 1, lasni vektor $(1,0)$, pripadajoči korenski pa $(0,1/2)$. Linearno neodvisni rešitvi sta

$$\vec{y}_1 = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{y}_2 = e^x \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrika Wronskega (in fundamentalna matrika) je

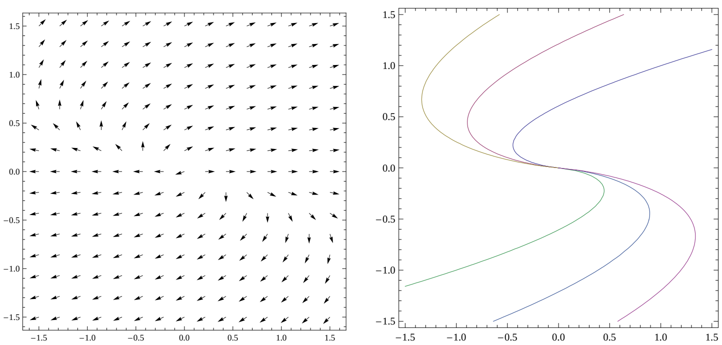
$$W(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polje smeri in družino rešitev za različne začetne pogoje prikazuje slika 5.5.
5. Matrika A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lastna para sta $(3,(1,1))$ in $(0,(-2,1))$, Linearno neodvisni rešitvi sta

$$\vec{y}_1 = e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



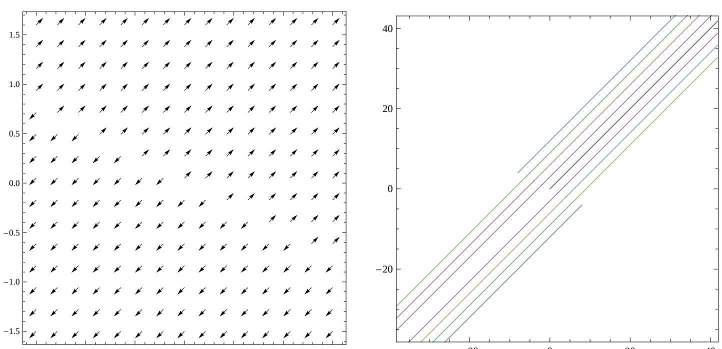
(a) (b)

Slika 5.5: Polje smeri in rešitve sistema, če matrika ni diagonalizabilna

Matrika Wronskega (in fundamentalna matrika) je

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} & -2 \\ e^{3x} & 1 \end{bmatrix}.$$

Polje smeri in družino rešitev za različne začetne pogoje prikazuje slika 5.6.



(a) (b)

Slika 5.6: Polje smeri in rešitve sistema, če je matrika singularna

6. Kvalitativna analiza

1. Fazni portreti

Oglejmo si fazne portrete (slike vseh tokovnic) sistemov dveh linearnih dife-rencialnih enačb. Iz formule za splošno rešitev sistemov dveh linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti dobimo naslednji izrek.

Izrek 6.1. *Naj bo $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ sistem diferencialnih enačb in γ fazna krivulja pri nekem začetnem pogoju. Naj bo A diagonalizabilna z lastnima paroma $(\lambda_1, \vec{v_1})$, $(\lambda_2, \vec{v_2})$. V koordinatnem sistemu (u, v), ko ga določata lastna vektorja $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ ima krivulja parametrizacijo $u = ae^{\lambda_1 x}$, $v = be^{\lambda_2 x}$, implicitno pa $b^{\lambda_1}u^{\lambda_2} - a^{\lambda_2}v^{\lambda_1} = 0$. Glede gibanja po krivulji, ko gre $x \to \infty$, ločimo naslednje primere.*

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. *Ne glede na to, kje začnemo, se gibljemo proti izhodišču po krivuljah, ki jih predstavlja slika 5.2. Taki sliki pravimo stabilni vozel.*
2. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. *Krivulje so poltraki, po katerih se gibljemo proti izhodišču.*
3. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$. *Krivulje so vzporedni poltraki s smernim vektorjem $\vec{v_1}$, po katerih se gibljem proti premici $\mathbb{R}\vec{v_2}$.*
4. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. *Prevlada rešitev $e^{\lambda_2 x}\vec{v_2}$, torej se asimptotsko približujemo premici $\mathbb{R}\vec{v_2}$. Pri vsakem začetnem pogoju se za dovolj velike x gibljemo stran od izhodišča. Dobimo sedlo (slika 5.3).*
5. $0 = \lambda_1 < \lambda_2$. *Krivulje so vzporedni poltraki s smernim vektorjem $\vec{v_2}$, po katerih se gibljemo od premice $\mathbb{R}\vec{v_1}$.*
6. $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. *Krivulje so premice, po katerih se gibljemo od izhodišča.*
7. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. *Isto, kot v 1. primeru, le da se gibljemo stran od izhodišča.*
8. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = a + ib$. *Če je $a = 0$, dobimo sklenjeno krivuljo. Če je $a > 0$, dobimo krivuljo, ki kroži okoli izhodišča in gre v neskončnost, če pa je $a < 0$ krožimo okoli izhodišča in se mu približujemo.*

Če a ni diagonalizabilna, ima en lastni par $(\lambda_1, \vec{v_1})$ in pripadajoč korenski vektor (iz verige). Rešitev je oblike $e^{\lambda_1 x}(a\vec{v_1} + b(\vec{v_2} + x\vec{v_1}))$. Za $\lambda_1 > 0$ se gibljemo od izhodišča po krivuljah, ki postajajo vedno bolj položne, če je $\lambda_1 < 0$, se po enakih krivuljah gibljemo proti izhodišču (stabilni vozel), če pa je $\lambda_1 = 0$, je krivulja premica.

V večrazsežnih primerih so fazni portreti ustrezno bolj komplicirani.

2. Stabilnost ravnovesnih rešitev

Naslednja zanimiva stvar je vedenje rešitev v okolici ravnovesnih točk. V primeru linearnih sistemov je ravnovesna točka vedno (vsaj) točka 0. V 2×2 primerih sistemov LDE s konstantnimi koeficienti je vse o vedenju bližini ničle povedal gornji izrek. Kaj pa v splošnem? Vrnimo se k našemu primeru zajčkov in lisičk

$$\dot{x} = x(k - ay) \text{ in } \dot{y} = -y(l - bx)$$

z ravnovesno točko

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{l}{b}, \frac{k}{a}\right)$$

Ta model se imenuje tudi Volterrov model (ali model Volterra - Lotka). Uvedimo novi spremenljivki $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$ in dobimo sistem oblike

$$\dot{x} = -\left(x - \frac{l}{b}\right) ay \text{ in } \dot{y} = -bx\left(y - \frac{k}{a}\right).$$

Za majhne x in y lahko kvadratni člen zanemarimo in rešujemo linearni sistem z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{al}{b} \\ -\frac{bk}{a} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pravimo, da smo sistem linearizirali. Matrika ima čisto imaginarni rešitvi, torej bodo rešitve za majhne x in y podobne krožnicam (ni nujno, da so sklenjene).

Definicija 6.2. *Naj bo $\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ sistem enačb in $\varphi(x)$ njegova rešitev. Pravimo, da je rešitev stabilna, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da je za vsako rešitev ψ, za katero velja $\|\psi(0) - \varphi(0)\| \leq \delta$ tudi $\|\psi(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$ za vsak $x \geq 0$.*

Rešitev je stabilna, če so rešitve z bližnjimi začetnimi pogoji enakomerno blizu za vse čase. Za homogene sisteme linearnih enačb s konstantnimi koeficienti lahko s pomočjo izreka 6.1. dokažemo naslednji

Izrek 6.3. *Naj bo $\vec{y}' = A\vec{y}$ in A matrika z lastnimi vrednostmi λ_i. (a) Če je $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ za vsak i, potem je vsaka rešitev sistema stabilna. (b) Če ima vsaj ena lastna vrednost pozitivni realni del, so vse rešitve nestabilne. (c) Če je $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i \geq j$ in $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ za $i < j$ pri čemer je število lastnih vektorjev, ki pripadajo $\lambda_i, i < j$ enako algebrski večkratnosti, je vsaka rešitev stabilna, če pa je manjše, je nestabilna.*

Dokaz. Skica. Naj bo φ rešitev, φ_1 rešitev, ki pripada lastni vrednosti λ_1 in ψ perturbacija. Prvi dve trditvi takoj dobimo iz formul za bazo prostora rešitev (5.3), saj so norme rešitev oblike $e^{a_i x} \cdot P_{n,i}(x)$. Če so vsi $a_i < 0$, je vse omejeno, če pa je recimo $a_1 > 0$, gredo norme proti neskončno (za ψ lahko vzamemo $\delta\varphi_1$). Podobno je z zadnjo trditvijo. Če je za čisto imaginarno lastno vrednost dovoj lastnih vektorjev, so pripadajoče rešitve oblike $e^{i\sigma_1 x}v_i$ in so norme omejene, če pa lastnih vektorjev ni dovolj, dobimo še kak faktor x pri normi in vse skupaj divergira. $\diamondsuit$

Definicija 6.4. *Naj bo $\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ sistem enačb in $\varphi(x)$ njegova rešitev. Pravimo, da je rešitev asimptotsko stabilna, če obstaja $\delta > 0$, tako da je za vsako rešitev ψ, za katero velja $\|\psi(0) - \varphi(0)\| \leq \delta$, limita $\lim_{x\to\infty} \|\psi(x) - \varphi(x)\| = 0$.*

Izrek 6.5. *Pogoji (a) izreka 6.3. zadoščajo za asimptotsko stabilnost.*

Primer. Linearen sistem s pripadajočo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je stabilen, ni pa asimptotsko stabilen. Vse rešitve so namreč periodične (krožnice).

Obravnavajmo še stabilnost *avtonomnega sistema*

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + g(\vec{y}),$$

kjer je g dovolj gladka in majhna glede na $\vec{y} : \|g(\vec{y})\| = o(\|\vec{y}\|)$, ko gre $\|\vec{y}\| \to \infty$ in velja $g(0) = 0$. Pri teh predpostavkah je $\vec{y} = 0$ ravnovesna rešitev sistema.

Izrek 6.6. *Pri zgornjih predpostavkah je ravnovesna rešitev $\vec{y} = 0$ asimptotsko stabilna, če je hkrati tudi asimptotsko stabilna rešitev linearizirane enačbe $\vec{y} = A\vec{y}$. Rešitev $\vec{y} = 0$ asimptotsko nestabilna, če ima A vsaj eno lastno vrednost s strogo pozitivnim realnim delom. Če imajo vse lastne vrednosti A negativni realni del, vsaj ena pa je čisto imaginarna, potem se na podlagi linearizacije ne moremo odločiti.*

Dokaz izpustimo.

3. Vedenje rešitev pri velikih časih

Ostala je še analiza vedenja rešitev pri velikih časih. Kot prej se bomo omejili na avtonomne sisteme

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}), \tag{6.1}$$

kjer je $\vec{f}$ dovolj gladka vektorska funkcija.

Oglejmo si najprej analog stabilnega ravnovesja pri sistemih s konstantnimi koeficienti.

Lema 6.7. *Naj bo $\vec{y}(x)$ rešitev sistema (6.1) z limito $\lim_{x\to\infty} \vec{y}(x) = \vec{y}_0$. Potem je $\vec{y}_0$ ravnovesna točka sistema.*

Dokaz. Ker je $\lim_{x\to\infty} \vec{y}(x) = \vec{y}_0$, je za vsak $h > 0$,

$$\|\vec{y}(x+h) - \vec{y}(x)\| \leq \|\vec{y}(x+h) - \vec{y}_0\| + \|\vec{y}(x) - \vec{y}_0\|,$$

torej je

$$\lim_{x\to\infty} \vec{y}(x+h) - \vec{y}(x) = 0.$$

Po Lagrangevem izreku je

$$\vec{y}(x+h) - \vec{y}(x) = hf(\vec{y}(\tau)),$$

kjer je τ točka med x in $x = h$. Ko pošljemo x proti neskončno, gre tudi τ proti neskončno, zato je

$$0 = \lim_{x\to\infty} (\vec{y}(x+h) - \vec{y}(x)) = hf(\vec{y}_0),$$

kar pomeni, da je $\vec{y}_0$ ravnovesna točka. $\diamondsuit$

Kaj pa lahko rečemo o rešitvah, če so za velike čase omejene? Za 2×2 primer nam odgovor da

Izrek 6.8. *(Poincarè - Bendixon). Naj bo*

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

in $(x(t), y(t))$ rešitev sistema, ki je za $t \geq t_0$ omejena na območju, na katerem ni ravnovesne lege. Potem se rešitev navija okoli enostavno sklenjene krivulje, ki je tir neke periodične rešitve.

4. Problem morskih psov med 1. svetovno vojno

V sredini dvajsetih let prejšnjega stoletja je znan italijanski biolog Umberto D'Ancona študiral populacijske spremembe med raznimi vrstami rib, ki so soodvisne. Prišel je do podatkov o ulovu posameznih vrst rib v letih okoli prve svetovne vojne. Podatki o hrustančnicah (morski psi, skati), ki niso najbolj zaželeni kot hrana, so bili za pristanišče Reka (Rijeka) podatki naslednji:

1914	1915	1916	1917	1918
$11,9\%$	$21,4\%$	$22,1\%$	$21,2\%$	$36,4\%$
1919	1920	1921	1922	1923
$27,3\%$	$16,0\%$	$15,9\%$	$14,8\%$	$10,7\%$

V opazovanem obdobju je bil zaradi vojne ulov rib manjši in zdelo se mu je, da je to dvoje povezano. Ker so večino ujetih hrustančnic predstavljali plenilci, ki jedo iste ribe kot mi, je sklepal, da so se hrustančnice namnožile, ker je bilo več plena zanje. Izkazalo pa se je, da se je tudi število rib povečalo, torej ta razmislek ni bil dovolj natančen. Pokazal je pa, da je manjši ulov bolj ugoden za števililo plenilcev.

Ko mu je zmanjkalo bioloških razlag, je za pomoč prosil kolega matematika Vita Volterro, ki je sestavil matematični model, ki opisuje interakcijo med dvema populacijama. Volterrov model je

$$\dot{x} = x(k - ay) \text{ in } \dot{y} = -y(l - bx) \tag{6.2}$$

z ravnovesnima točkama

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{l}{b}, \frac{k}{a}\right).$$

Izračunajmo tokovnice polja eksplicitno. Kvocient

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-y(l - bx)}{x(k - ay)}$$

nas pripelje do enačbe z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{(k-ay)\,dy}{y}=\frac{(bx-l)\,dx}{x}.$$

Z integracijo dobimo

$$e^{-ay-bx}x^l y^k=c,$$

kjer je c konstanta. Kako bi dokazali, da so nivojnice te funkcije sklenjene? Oglejmo si funkciji $f(x)=x^l e^{-bx}$ in $g(y)=y^k e^{-ay}$. Funkciji sta zvončasti: $f'(x)=x^{l-1}e^{-bx}(l-bx)$. Levo od ravnovesne lege je f strogo naraščajoča, desno pa strogo padajoča. Maksima f in g sta zavzeta v stacionarnih točkah in ju označimo z M_f in M_g. Maksimum produkta je $M_f M_g$. Poglejmo, kaj so preseki grafa z vodoravnicami. Če je y konstanta, rešujemo enačbo

$$e^{-bx}x^l=cM_g e^{ay}y^{-k}.$$

Rešljiva je za $c\le M_f$. Ker je f zvončasta, za $0<cM_g e^{ay}y^{-k}<M_f$ dobimo dve rešitvi, eno pod in eno nad stacionarno točko. Če je $cM_g e^{ay}y^{-k}=M_f$ je rešitev ena, če pa je $cM_g e^{ay}y^{-k}>M_f$, pa nobene. Ker gre g^{-1} proti neskončno na robovih, je množica y, za katere je enačba rešljiva, kompaktna, natančneje interval $[y_{c,0},y_{c,1}]$, kjer sta krajišči rešitvi enačbe $cM_g e^{ay}y^{-k}=M_f$. Če je $c=M_f$ je interval točka. Za vsak y iz notranjosti dobimo dve rešitvi. Integralska krivulja je torej enostavno sklenjena krivulja razen v primeru, ko je $c=M_f$ in je ta krivulja točka.

Podatki, ki jih je D'Ancona dobil, so bili podatki o povprečnem letnem ulovu. Kaj lahko povemo o povprečju rešitev?

Lema 6.9. *Naj bosta $x(t)$, $y(t)$ periodični rešitvi sistema (6.2) s periodo $T>0$. Potem velja*

$$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \ \textit{in}\ \bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt,$$

kjer je $(\bar{x},\bar{y})$ ravnovesna točka.

Dokaz. Izračunamo integral

$$\int_0^T\frac{\dot{x}(t)\,dt}{x(t)}=\int_0^T(k-ay(t))\,dt=\log x(T)-\log x(0)=0.$$

Torej je

$$\int_0^T y(t)\,dt=\frac{Tk}{a},$$

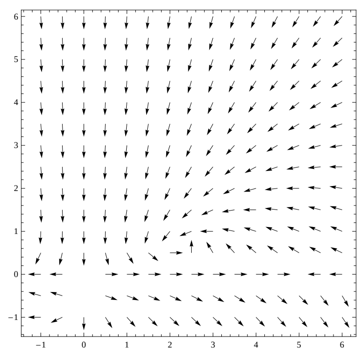
oziroma
$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{k}{a} = \bar{y}.$$
$\diamondsuit$

Ostalo je še vprašanje, kako ulov vpliva na populacijo. Recimo, da je stopnja ulova enaka $c > 0$. Potem se naš sistem glasi
$$\dot{x} = x(k - ay) - cx \text{ in } \dot{y} = -y(l - bx) - cy.$$
Ravnovesna točka je
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{l+c}{b}, \frac{k-c}{a}\right).$$
Ravnovesje (in s tem povprečje) je torej v primeru izlova pri večjem številu rib za prehrano. Pri čezmernem ulovu ($c > k$) nimamo več ravnovesne točke v prvem kvadrantu in populacija plenilcev izumre. Pripomnimo še, da je model smiseln za nenegativne količine.

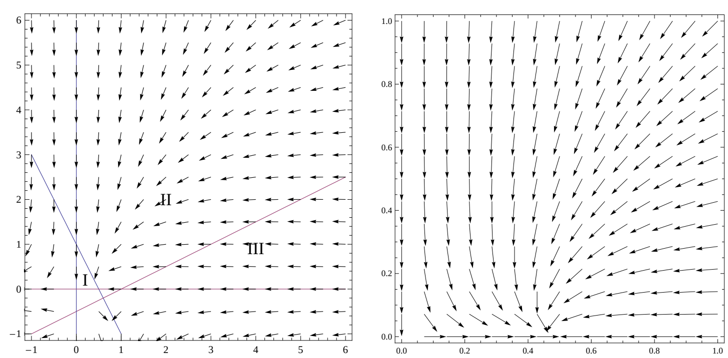
5. Lotka-Volterrov model z logistično rastjo

Bolj splošen model interakcije dveh takih populacij upošteva še notranje tekmovanje za vire. To pomeni, da namesto zakona naravne rasti vzamemo logistično enačbo. Izboljšan model je
$$\dot{x} = x(k - ay) - cx^2 \text{ in } \dot{y} = -y(l - bx) - dy^2. \tag{6.3}$$
Ravnovesne točke so
$$(0,0), \left(\frac{k}{c}, 0\right), \left(\frac{dk+al}{ab+cd}, \frac{bk-cl}{ab+cd}\right), \left(0, -\frac{l}{d}\right).$$
Polje smeri je prikazano na sliki 6.1. V tem primeru je ravnovesna točka, ki ni na koordinatnih oseh, v 1. kvadrantu. Izkaže se, da rešitve v splošnem niso periodične.

Ugotovili bi radi, kako se rešitve sistema spreminjajo glede na začetne pogoje in glede na konstante. Privzemimo, da je ravnovesna točka v četrtem kvadrantu, $bk - cl < 0$. Skicirajmo krivulje, kjer je vsaj eden od $\dot{x}$, $\dot{y}$ enak 0 in številčimo območja glede na znaka odvodov: I. $\dot{x} > 0,\ \dot{y} < 0$, II. $\dot{x} < 0,\ \dot{y} < 0$, III. $\dot{x} < 0,\ \dot{y} > 0$. Presečišči poševnic z osjo x sta k/c (ravnovesna točka) in l/b



Slika 6.1: Polje smeri izboljšanega Volterrovega modela pri $a = b = d = k = l = 1$ in $c = 0.5$.



(a) (b)

Slika 6.2: Polje in območja za $a = b = k = l = 1$, $c = 2$, $d = 2$

(ni ravnovesna točka). Območja in polje prikazuje slika 6.2. Obravnavajmo posamezne primere.

1. Rešitev, ki se začne v območju I, tam tudi ostane.

Dokaz. Ker je x naraščajoča, gre krivulja lahko iz območja ali preko osi $y = 0$ ali preko premice $k - ay - cx = 0$. Recimo, da zadene os. Potem je $\dot{y} = 0$ in za x velja enačba $\dot{x} = x(k - cx)$. Ker je na območju I x manjši od k/c, dobimo naraščajočo logistično krivuljo z limito k/c, torej se rešitev približuje ravnovesni točki $(k/c, 0)$. Recimo, da bi rešitev ušla iz območja preko premice.

Ker je na tej premici $\dot{x} = 0$, je

$$\ddot{x} = k\dot{x} - a\dot{x}y - ax\dot{y} - 2cx\dot{x} = -ax\dot{y} > 0,$$

saj je $\dot{y} < 0$. Funkcija x ima zato pri tistem t, pri katerem seka premico, minimum. To pa je nasprotju s tem, da je x naraščajoča.

2. Vsaka rešitev, ki se začne in ostane v območju II, se približuje ravnovesni točki $(k/c, 0)$. Nobena rešitev, ki se začne v območju II, ne more v območje III.

Dokaz. Ker sta funkciji x in y padajoči, morata, če naj ostaneta v II, imeti limito. Po lemi 6.7. je limita lahko le ravnovesna točka, torej $(k/c, 0)$. Recimo, da gre rešitev lahko v območje III. Potem je pri nekem času t odvod $\dot{y} = 0$ in

$$\ddot{y} = -l\dot{y} + b\dot{x}y + bx\dot{y} - 2dy\dot{y} = by\dot{x} < 0,$$

torej ima y v t lokalni maksimum, kar je v nasprotju s tem, da je y padajoča.

3. Vsaka rešitev, ki se začne v območju III, to območje zapusti v končnem času.

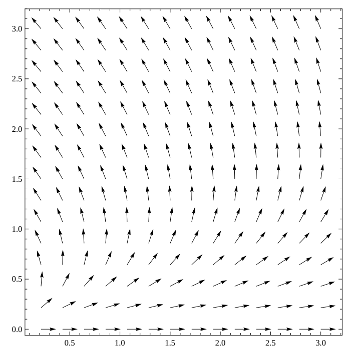
Dokaz. Recimo, da ne drži, Ker je x padajoča in je rešitev v območju III, je $y < (bx(0) - l)/d$. Torej imata x in y limito. Po lemi 6.7. je limita ravnovesna točka, ki pa je v območju III ni. $\diamondsuit$

6. Paramecij in didinij

Matematični biolog G.F. Gause je izvedel eksperiment z dvema enoceličarjema, eden je paramecij en pa didinij. Drugi jè prvega in sicer v velikih količinah. Poskusi so pokazali, da se vedno zgodi, da didinij požre vse paramecije in nato še sam izumre. Razlog je v tem, da se ob pomanjkanju hrane didinij še vedno razmnožuje, le da je prirastek manjši. Ti populaciji bolj ustrezno modelira naslednji sistem enačb (x paramecij, y didinij):

$$\dot{x} = kx - a\sqrt{x}y, \text{ in } \begin{cases} b\sqrt{x}y, & x \geq 0 \\ -cy, & x = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Ker funkcije v sistemu niso gladke, nimamo enoličnosti. Vsaka rešitev sistema s strogo pozitivnima začetnima pogojema doseže os y v končnem času. Polje smeri je prikazano na sliki 6.3.



Slika 6.3: Polje smeri sistema (6.4)

Omenimo še, da se vseh populacijskih sistemov ne da modelirati z navadnimi diferencialnimi enačbami, recimo v primerih, ko plenu ponudimo zatočišče, ki ga plenilec ne more doseči. V tem primeru sistem ni ustrezen zato, ker ne moremo predvideti, koliko pripadnikov plena bo tako neumnih, da bodo zapustili zatočišče. Ta proces postane zdaj naključen in ne več determinističen. Gause je to dokazal s še enim slavnim eksperimentom. Vzel je 30 enakih posod, v vsako dal pet paramecijev in tri didinije, paramecijem pa dal zatočišče. Čez dva dni so bili didiniji mrtvi v štirih posodah, v ostalih pa je bila populacija mešana s številom paramecijev med 2 in 38.

7. Bifurkacije

Definicija 6.10. *Naj bo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ in $\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}, \varepsilon)$ sistem dveh diferencialnh enačb orvega reda. Bifurkacijska točka sistema je vrednosti ε_0, pri kateri se spremeni fazni portret enačbe, natančneje, fazna portreta za $\varepsilon < \varepsilon_0$ in $\varepsilon > \varepsilon_0$ sta različna.*

Poiščimo bifurkacijsko točko za sistem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je $\lambda^2 - (1 + \varepsilon)$. Bifurkacijska točka je $\varepsilon_0 = -1$. Za večje vrednosti imamo sedlo, za manjše pa krožnice, v bifurkacijski točki pa vzporedne premice.

7. Navadne diferencialne enačbe višjih redov

1. Definicija in osnovni izreki

Definicija 7.1. *Navadna diferencialna enačba n-tega reda je enačba oblike*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{7.1}$$

kjer je f vsaj enkrat zvezno odvedljiva. Če je f linearna v y in njegovih odvodih, se enačba imenuje linearna. Začetni pogoj je oblike

$$y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}.$$

Vsako diferencialno enačbo n-tega reda lahko prevedemo na sistem enačb:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2,\\
y_2' &= y_3,\\
y_3' &= y_4,\\
&\vdots\\
y_n' &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Začetni pogoj je $y_i(x_0) = c_{i-1}, i = 1, \dots, n$. Začetni problem imenujemo tudi Cauchyjeva naloga.

Izrek 7.2. *Začetni problem enačbe (7.1) in začetni problem sistema (7.2) sta ekvivalentna.*

Posledica 7.3. *(Lokalni eksistenčni izrek). Naj bo funkcija f iz (7.1) definirana na okolici začetnega pogoja $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1, \dots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$. Potem obstaja ena sama rešitev diferencialne enačbe na okolici te točke.*

Dokaz. Uporabimo lokalni eksistenčni izrek za sisteme diferencialnih enačb, saj je $f(x, s_1, \dots, s_n)$ vsaj zvezno odvedljiva, torej Lipschitzova na spremenljivke $s_1, \dots, s_n$. ♢

Če je f linearna v y in njegovih odvodih,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y + b(x), \tag{7.3}$$

je vektorska oblika sistema $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}$, kjer je

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \text{ in}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Determinanta Wronskega je odvisna le od koeficienta $a_{n-1}(x)$:

$$w(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt}.$$

Izrek 7.4. *Naj bo*

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y$$

homogena linearna diferencialna enačba n-tega reda. Potem ima n linearno neodvisnih rešitev, ki so baza prostora vseh rešitev.

Dokaz. Po izreku 7.2. je enačba ekvivalentna linearnemu sistemu, za katerega velja izrek 5.5. $\diamondsuit$

Posledica 7.5. *Rešitve $y_1, \ldots, y_n$ so linearno neodvisne, če je matrika*

$$W(y_1, \ldots, y_n) := \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

nesingularna.

Dokaz. To je Wronski za pripadajoč sistem. $\diamondsuit$

2. Primeri

1. *Eulerjeva diferencialna enačba* je enačba

$$E(y) = x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y.$$

S substitucijo $t = \ln x$ jo prevedemo na enačbo s konstantnimi koeficienti.

2. Enačba

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$$

je enačba dušenega nihanja za nihalo na vzmeti. Koeficient dušenja je b, k pa je koeficient vzmeti. Glede na koeficient dušenja ločimo tri primere. Če je koeficient prevelik, $b^2 > 4km$, je dušenje tako močno, da do nihanja sploh ne pride in se nihalo le vrne v ravnovesno lego. Če je koeficient dušenja majhen, $b^2 > 4km$, dobimo dušeno nihanje. V kritičnem primeru $b^2 = 4km$ nihalo naredi en nihaj in se vrne v ravnovesno lego.

3. Diracova funkcija delta

Oglejmo si družino gladkih ($\mathcal{C}^\infty$) 'stopničastih' funkcij,

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0, x < -\varepsilon, \\ g_\varepsilon(x), -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 1, x > \varepsilon, \end{cases}$$

kjer je $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ naraščajoča funkcija z $g_\varepsilon(-\varepsilon) = 0$, $g_\varepsilon(\varepsilon) = 1$, liha preko $y = 1/2$. Odvod funkcije f_ε je soda funkcija z nosilcem na $[-\varepsilon, \varepsilon]$ in integralom 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Funkcije f_ε konvergirajo k stopničasti funkciji

$$f = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x > 0, \end{cases},$$

Kam pa gredo njihovi odvodi? Po točkah (razen v 0) konvergirajo k 0, njihovi integrali pa k 1. Poleg tega imajo te funkcije še eno lastnost:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f'_\varepsilon(x) h(x)\, dx = h(0)$$

za vsako gladko funkcijo h. Izkaže se, da je limito funkcij f_ε' smiselno definirati kot funkcijo $\delta(x)$. Imenujemo jo Diracova funkcija delta. V resnici ni funkcija ampak funkcional na zveznih funkcijah, za katerega velja, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x)h(t)\,dt = h(x)$$

Odvod 'stopnice' je vedno enak odvodu funkcije izven stopnice plus δ v stopnici, pomnoženi z višino skoka. Diracova funkcija delta je poseben primer *distribucije*, odvodu, kot smo ga omenili tu, pa pravimo *distribucijski odvod.* Omenimo še, da se družina pozitivnih $\mathcal{C}^\infty$ funkcij h_ε, ki ima lastnosti $\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon = 1$, $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = 0$, razen v $x = 0$, imenuje aproksimativna enota. Te funkcije uporabljamo za glajenje drugih funkcij. Če je npr. h stopničasta, so konvolucije

$$h_\varepsilon * h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h_t(x-t)\,dt$$

gladke in konvergirajo k prvotni funkciji, ko gre $\varepsilon \to 0$. Izkaže se, da lahko (v smislu distribucij) konvolucijo odvajamo tako, da odvajamo eno od funkcij, vseeno, katero. Izberemo si tisto, ki je gladka, in dobimo

$$(h_\varepsilon * h)'(x) = h_\varepsilon' * h(x).$$

Kot primer uporabe vzemimo matematično nihalo, ki miruje, v trenutku $t_0 > 0$ pa utež udarimo z neko silo. Potem lahko to gibanje popišemo z enačbo

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = C\delta(t-t_0),$$

pri začetnih pogojih $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; C predstavlja sunek sile. Rešitev nehomogene enačbe bo (razen v t_0) odvedljiva zvezna funkcija, ki bo izven t_0 rešila enačbo. Pred t_0 bo enaka 0, saj je nihalo mirovalo. Vemo, da je rešitev homogene enačbe enaka $c\sin k(t-t_0)$. Definirajmo zlepek te rešitve in ničle:

$$x_p(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0, t < t_0, \\ c\sin k(t-t_0), t > t_0, \end{array} \right. .$$

Izračunajmo prvi in drugi odvod:

$$x_p'(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0, t < t_0, \\ ck\cos k(t-t_0), t > t_0, \end{array} \right.$$

$$x_p''(t) = ck\delta(t-t_0) + \left\{ \begin{array}{l} 0, t < 0, \\ -ck^2\sin k(t-t_0), t > 0 \end{array} \right. .$$

Vstavimo v enačbo in dobimo, da je

$$ck\delta(t-t_0) = C\delta(t-t_0)$$

Rešitev je

$$x_p(t) = \frac{1}{k}\left\{\begin{array}{l} 0, t < t_0, \\ C\sin k(t-t_0), t > t_0 \end{array}\right. .$$

8. Laplacova transformacija

1. Osnovne lastnosti

Definicija 8.1. *Laplacova transformiranka funkcije* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je definirana z*

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt.$$

Če je f integrabilna na vsakem končnem intervalu in če za dano kompleksno število z_0 obstaja $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z_0)$, potem je funkcija $\mathcal{L}f$ definirana in analitična v vsakem $z \in \mathbb{C}$, ki zadošča $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Zaradi enostavnosti računov funkcije, ki so definirane le na pozitivnem delu realne osi, dodatno definiramo kot 0 na negativnem.

Definicija 8.2. *Merljiva funkcija* f *je eksponentega naraščanja, če obstajajo taka števila* $M, N > 0$ *in* $k \in \mathbb{R}$*, da je* f *integrabilna na* $[0, N]$ *in za vsak* $x \geq N$ *velja* $|f(x)| \leq Me^{kx}$*.*

Trditev 8.3. *Za take funkcije* $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)$ *obstaja in je analitična za vsak* z*, ki zadošča* $\operatorname{Re} z > k$*.*

Običajno $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)$ najprej izračunamo za velike realne z, nato pa s pomočjo principa enoličnosti za analitične funkcije dobimo vrednost tudi za kompleksne z. Če imata dve funkciji enako Laplacovo transformiranko potem sta enaki skoraj povsod (Lerchov izrek).

Primeri.

1. Naj ima funkcija f Laplacovo transformiranko. Izračunajmo Laplacovo transformiranko funkcije e^{ax} in funkcije $f(x)e^{ax}$ v točki z. Za $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ integral

$$\int_0^\infty e^{-zt+at}dt$$

obstaja in velja

$$\int_0^\infty e^{-(z-a)t} dt = (z-a)^{-1}.$$

$$\int_0^\infty e^{-zt+at} f(t) dt = \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z-a).$$

2. Laplacova transformiranka stopnice

$$\begin{cases} 1, & (t > a) \\ 0, & (t < a) \end{cases}$$

je

$$\int_a^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{e^{-az}}{z}$$

za $a > 0$.

3. Laplacova transformiranka funkcije $\delta(t-a)$ je e^{-az}.

Nekaj najosnovnejših transformirank je:

$$\mathcal{L}\left(t^\alpha\right)(p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,$$

$$\mathcal{L}\left(\sin \omega t\right)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\left(\cos \omega t\right)(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Manj osnovna transformiranka je

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\alpha^2/4t}\right)(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},$$

iz nje dobimo Efrosev izrek:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t}\, d\tau\right)(p) = \frac{\mathcal{L}\left(f\right)(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}.$$

Če uporabimo Efrosev izrek na $f(t) = \chi_{[\alpha,\infty)}(t)$, dobimo

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{Erf}(\alpha/2\sqrt{t})\right)(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds = 1 - \mathrm{erf}(x).$$

Izrek 8.4. *Odvajanje originala in slike. Naj bo funkcija $y(t)$ zvezno odvedljiva na $[0,\infty)$ in eksponentnega naraščanja. Velja*

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right)(z) = -y(0) + z\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z) \ \text{ in } \ \frac{d}{dz}\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z) = -\mathcal{L}\left(ty(t)\right)(z).$$

Dokaz. Za prvo enakost enkrat integriramo per partes, za drugo pa odvajamo po z. $\diamondsuit$

Primeri.

1. Rešimo sistem $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ pri pogojih $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$. Z Laplacovo transformacijo dobimo

$$z^2 Y - z - 3(zY + -1) + 2Y = \frac{1}{z-3}.$$

Izrazimo Y :

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-2)}.$$

Razcepimo na parcialne ulomke in dobimo

$$Y = \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}.$$

Inverzna transformiranka je

$$y = \frac{5}{2}\frac{1}{e}^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

2. Rešimo sistem diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

$$\begin{aligned} y'(t) &= -11y(t) + 6z(t), y(0) = 1, \\ z'(t) &= -18y(t) + 10z(t), z(0) = 2. \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{L}\left(y\right)\left(u\right) = Y$ in $\mathcal{L}\left(z\right)\left(u\right) = Z$. Če uporabimo Laplacovo transformacijo na obeh enačbah, dobimo sistem enačb $uY - 1 = -11Y + 6Z$, $uZ - 2 = -18Y + 10Z$. Rešitvi sistema sta

$$Y = \frac{1}{u-1}, \quad Z = \frac{2}{u-1}.$$

Inverzni transformiranki sta $y = e^t$, $z = 2e^t$.

Definicija 8.5. *Konvolucija funkcij $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je definirana s formulo*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Gre za običajno konvolucijo, če razširimo funkcije z 0 na negativni del realne osi.

Izrek 8.6. *Izrek o konvoluciji. Velja*

$$\mathcal{L}\left(f * g\right)(z) = \mathcal{L}\left(f\right)(z)\mathcal{L}\left(g\right)(z).$$

2. Inverzna transformacija

Izrek 8.7. *Inverzna formula za Laplacovo transformacijo. Naj bo funkcija $f(t)$ zvezna in odvedljiva na $[0,\infty)$ in od nekod naprej omejena z Me^{kt}. Če je $c > k$ poljubno število, potem je*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} e^{zt}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)dz = \begin{cases} f(t), & (t>0) \\ 0, & (t<0) \end{cases}$$

Lema 8.8. *Jordanova lema. Naj bo c realno število, $F(z)$ merljiva funkcija na območju $\operatorname{Re} z < c$ in $R_n \in \mathbb{R}^+$ zaporedje, ki gre proti ∞. Označimo*

$$\mathcal{C}_n = \{z: \ |z| = R_n, \ \operatorname{Re} z \le c\} \text{ in } M_n = \sup_{z\in\mathcal{C}_n} |F(z)|.$$

Če velja $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ in je $t > 0$, potem je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{C}_n} F(z)e^{zt}dz = 0.$$

Iz inverzne formule in Jordanove leme sledi

Izrek 8.9. *Drugi izrek o razvoju. Naj bo funkcija $F(z)$ meromorfna na $\mathbb{C}$, naj bo holomorfna na $\operatorname{Re} z > c$, in naj zadošča predpostavkam Jordanove leme. Potem je*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(z)\right)(t) = \begin{cases} \sum\limits_{z_i \text{ je pol } F(z)} \operatorname{Res}(F(z)e^{zt}, z_i) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Iz izreka o konvoluciji sledi, da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(z)G(z)\right)(t) = (F*G)(t) = \int_0^t F(t-u)G(u)du,$$

če sta F in G v sliki Laplacove transformacije.

9. Parcialne diferencialne enačbe

1. Uvod

Definicija 9.1. *Parcialna diferencialna enačba je relacija med neznano funkcijo in njenimi parcialnimi odvodi:*

$$f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \ldots) = 0.$$

Največja stopnja odvoda, ki nastopa v relaciji, je red enačbe. Če je f linearna v u in njenih odvodih, je enačba linearna.

Parcialne diferencialne enačbe (PDE) se pogosto pojavljajo v fiziki, mehaniki in financah. K analizi PDE lahko pristopimo na veliko različnih načinov. Klasični pristop, ki je prevladoval v 19. stoletju, je bil usmerjen k razvijanju metod za iskanje eksplicitnih rešitev. Zaradi velike pomembnosti PDE v fiziki je vsak matematični prispevek, ki je omogočal reševanje novega razreda PDE, pomenil izjemen napredek v fiziki. Posledice metode karakteristik je bil napredek v optiki in analitični mehaniki, Fourierova metoda je omogočila rešitev valovne in toplotne enačbe in Greenova metoda je pripomogla k razvoju elektromagnetike. Največji napredek je bil morda v 50. letih 20. stoletja z vpeljavo numeričnih metod, ki so omogočile reševanje praktično kakršnihkoli diferencialnih enačb (vsaj teoretično). Poudariti je pa potrebno, da obstajajo PDE, ki jih je trenutno nemogoče rešiti tudi z uporabo najmodernejših računalnikov. V takih primerih poskušamo dobiti vsaj kake kvalitativne informacije o rešitvah.

Pomembno teoretično vprašanje je, ali je problem 'reši enačbo pri danih začetnih pogojih' korekten (po Jacquesu Hadamardu, 1865-1963). To pomeni: 1. Problem je rešljiv. 2. Rešitev je ena sama. 3. Rešitev je zvezno odvisna od začetnih podatkov (enačbe in pogojev). Večina problemov v matematični fiziki je korektnih, se pa najdejo primeri v strojništvu, ki niso.

Primeri.
1. **Toplotna in Laplacova enačba.** Toplotna ali difuzijska enačba je enačba

$$u_t = c^2 \triangle u,$$

kjer je

$$\triangle u = \sum_1^n u_{x_i x_i}$$

Laplacov diferencialni operator. Opisuje prevajanje toplote. Stacionarna porazdelitev toplote pa ustreza Laplacovi enačbi

$$\triangle u = 0.$$

Rešitve te enačbe imenujemo harmonične funkcije. Enačbo

$$\triangle u = f$$

imenujemo Poissonova enačba.

2. **Navier-Stokesove enačbe.** To so enačbe, ki opisujejo gibanje tekočin v prostoru. Če je u hitrost tekočine in p tlak, potem dobimo za nestisljive tekočine z gostoro ρ enačbi

$$\rho(\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) = \mu \triangle \vec{u} - \vec{\nabla} p,\ \vec{\nabla} u = 0.$$

Oznaka $\vec{\nabla}$ pomeni divergenco, μ pa je oznaka za viskoznost. Navier-Stokesove enačbe so temelj hidrodinamike. Uporabljajo jih npr. pri projektiranju letal, ladij, vozil, črnila v tiskalnikih itd. En večjih, trenutno še nerešenih problemov, je korektnost Navier-Stokesovega sistema.

3. **Valovna enačba.** Valovna ena1ba je enačba oblike

$$u_{tt} = c^2 \triangle u + f.$$

Opisuje valovanje strune, membrane, zraka pri majhnih amplitudah. Rešitev enačbe pri eni krajevni spremenljivki je prispeval Jean D'Alembert (1717 - 1783).

Če opazujemo valovanje v plitvi vodi, dobimo nekoliko drugačno diferencialno enačbo. Korteweg - De Vriesova enačba

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

je modelna enačba za valovanje v plitvi vodi. Rešitve so valovi, ki jih imenujemo solitoni in imajo veliko stabilnost.

4. **Brownovo gibanje.** Odkril ga je angleški biolog Robert Brown (1773-1858), matematični model, ki ga popisuje, pa je razvil Einstein leta 1905. Predlagal je model, pro katerem točka (x, y) skoči v bližnjo točko $(x \pm \delta x, y \pm \delta x)$ v času δt. Pokazal je, da pri primernih predpostavkah na δx in δt verjetnost, da se bo delec nahajal na poziciji (x, y) zadošča toplotni enačbi.

5. **Schrödingerjeva enačba.** Ta enačba opisuje valovno funkcijo u delca v potencialnem polju s potencialnom V :

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar}{2m} \triangle u + Vu.$$

Tu je $\hbar$ Planckova konstanta, deljena z 2π, m masa delca, i imaginarna enota.

Pogoji, ki jih lahko imamo, so začetni (predpisana je vredost funkcije in odvodov v $t = 0$) ali robni (predpisana je vrednost funkcije in odvodov na robu območje, kjer rešujemo enačbo) ali pa imamo na robu območja, na katerem rešujemo enačbo, predpisano kombinacijo vrednosti in normalnih odvodov, odvisno od problema, ki ga rešujemo.

2. Parcialne diferencialne enačbe 1. reda

Definicija 9.2. *Parcialna diferencialna enačba 1. reda je enačba oblike*

$$f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u) = 0,$$

kjer je f funkcija $2n + 1$ spremenljivk. Pri enačbah v prostoru uporabljamo oznake $p = u_x$, $q = u_y$ in $r = u_z$.

Kvazilinearne enačbe

Definicija 9.3. *PDE je kvazilinearna, če je f linearna v parcialnih odvodih. V dveh spremenljivkah je*

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, z),$$

ali krajše

$$ap + bq = c.$$

Naj bo u rešitev enačbe. Poglejmo si njen graf v $\mathbb{R}^3$. Graf je dan z implicitno enačbo $u(x,y) - z = 0$. Normala na graf je gradient funkcije $u(x,y) - z$ (gradient je pravokoten na nivojnico):

$$\vec{n} = (u_x, u_z, -1) = (p, q, -1)$$

Ob teh oznakah je izraz $ap + bq - c$ skalarni produkt med normalo in nekim vektorjem:

$$ap + bq - c = (p, q, -1)(a, b, c).$$

Rešitev enačbe bo vsaka funkcija, katere graf je tangenten na vektorsko polje (a, b, c). To pomeni, da so rešitve ploskve, ki so sestavljene iz tokovnic polja (a, b, c). Tokovnice (x, y, u) so rešitve *karakterističnega sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a, \\ \dot{y} &= b, \\ \dot{u} &= c. \end{aligned}$$

Tokovnice polja (a, b, c) imenujemo tudi *karakteristike*, metodo reševanja s pomočjo tokovnic pa *metoda katakteristik*.

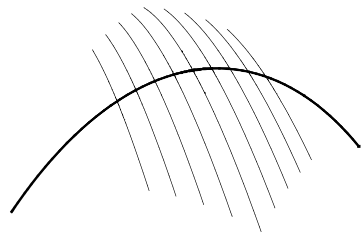
Da bi si zagotovili enoličnost, moramo podati začetni pogoj. Naj bo začetni pogoj ta, da gre graf u skozi dano krivuljo v prostoru

$$\Gamma = \Gamma(s) = \{(x(s), y(s), u(s)),\ s \in I = (\alpha, \beta)\}.$$

Če želimo, da bomo res dobili eno ploskev v splošnem primeru, ta krivulja gotovo ne sme biti tokovnica, saj je bi bilo v tem primeru rešitev neskončno. Pravzaprav bomo zahtevali, da je kot med krivuljo in tokovnico, ki gre skoznjo, strogo med 0 in π in to za vsako točko na začetni krivulji. Tokovnice torej ne smejo sekati krivulje tangencialno, ampak transverzalno. Pravimo, da je v tem primeru izpolnjen transverzalnostni pogoj. Pri gladkih podatkih se tokovnice se vzdolž krivulje gladko spreminjajo in sestavljajo ploskev vsaj v okolici začetne krivulje (slika 9.1).

Primer. Rešimo enačbo $u_x + u_y = 2$ pri pogoju $u(x, 0) = x^2$. Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 1, \\ \dot{u} &= 2, \end{aligned}$$



Slika 9.1: Začetna krivulja in tokovnice

začetna krivulja pa je parametrizirana z

$$\Gamma = \{(s, 0, s^2),\ s \in \mathbb{R}\}.$$

Označimo z $\gamma(s)$ tangentni vektor v točki $\Gamma(s)$. Rešimo sistem in dobimo $x(s,t) = t + A(s)$, $y(s,t) = t + B(s)$ $u(s,t) = 2t + C(s)$. V času $t = 0$ mora biti točka na začetni krivulji: $x(s,0) = A(s) = s$, $y(s,0) = B(s) = 0$ in $u(s,0) = C(s) = s^2$. Rešitve so $x(s,t) = t + s$, $y(s,t) = t$ $u(s,t) = 2t + s^2$. Zadosten pogoj, da je $x(s,t), y(s,t), u(s,t))$ parametrizacija ploskve (v okolici začetne krivulje) je, da je preslikava $U : (s,t) \to \mathbb{R}^3$ maksimalnega ranga, kar pa ni nič drugega, kot da sta vektorja U_s, U_t nevzporedna na okolici začetne krivulje. Ta vektorja pa sta na začetni krivulji

$$U_s(s,0) = \gamma(s),\ \ U_t(s,0) = (a,b,c).$$

Če želimo, da je ploskev graf nad ravnino x, y, morata biti (po izreku o implicitni funkciji) vektorja $(x_s(s,0), y_s(s,0))$ in $(x_t(s,0), y_t(s,0))$ nevzporedna, torej mora biti determinanta

$$\begin{vmatrix} x_s(s,0) & y_s(s,0)) \\ x_t(s,0) & y_t(s,0)) \end{vmatrix}$$

neničelna. Če so bili podatki gladki, so rešitve gladko odvisne od začetnih pogojev. Če sta bila vektorja $U_s(s,0)$ in $U_t(t,0)$ netangencialna, sta taka še na majhni okolici točke $(s,0)$, zato je s tem predpisom podana parametrizacija ploskve. Ta postopek funkcionira čisto splošno. Edina stvar, za katero moramo poskrbeti, je rešljivost karakterističnega sistema in transverzalnostni pogoj.

Izrek 9.4. *Naj bodo a, b in c gladke v okolici začetne krivulje Γ in naj bo izpolnjen transverzalnostni pogoj. Potem je enačba*

$$ap + bq - c = 0$$

rešljiva v okolici krivulje Γ. Rešitev je ena sama in gladko odvisna od začetnih podatkov.

Če rešitev iščemo v implicitni obliki $F(x, y, u) = 0$, potem je zveza med rešitvijo in normalo

$$-\frac{F_x}{F_u}a + -\frac{F_y}{F_u}b - c = 0,$$

oziroma

$$aF_x + bF_y + cF_u = 0.$$

Spet je normala, ki je gradient F, pravokotna na vektor (a, b, c), le da pri tem ne zahtevamo, da je rešitev mogoče izraziti z x in y, ampak le, da sta polje (a, b, c) in tangentno polje γ vzdolž začetne krivulje transverzalna.

Definicija 9.5. *Naj bo $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ sistem diferencialnih enačb. Funkcija $F(x, \vec{y})$ je prvi integral sistema diferencialnih enačb, če velja sklep: če je $\vec{y}$ rešitev sistema, je $F(x, \vec{y})$ konstanta. Prvi integrali F_1, $F_2, \ldots F_m$ so funkcijsko neodvisni, če ne obstaja taka netrivialna funkcija G, da je*

$$G(F_1, F_2, \ldots F_m) = 0.$$

Trditev 9.6. *Funkcije F_1, $F_2, \ldots F_m$ n-spremenljivk so funkcijsko odvisne natanko tedaj, ko je rang Jacobijeve matrike $J(F_1, \ldots F_m)$ strogo manjši od m (gradienti so linearno odvisni).*

Dokaz. V eno smer je očitno, saj samo posredno odvajamo in dobimo $\sum G_{u_i} DF_i = 0$. Za dokaz v drugo smer smemo privzeti, ima Jacobijeva matrika rang r in da so gradienti prvih r funkcij funkcijsko neodvisni. Po izreku o implicitni funkciji je spremenljivke $x_1, \ldots x_r$ mogoče izraziti s funkcijami $F_1, \ldots, F_r$, $x_i = G_i(F_1, \ldots, F_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, kjer spremenljivke $x_{r+1}, \ldots$, x_n nastopajo kot parametri. Funkcijo F_{r+1} lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} F_{r+1}(x_1, \ldots, x_n) &= F_{r+1}(G_1(F_1, \ldots, F_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), ...) = \\ &= G(F_1, \ldots, F_r, x_{r+1}, \ldots x_n). \end{aligned}$$

Trdimo, da spremenljivke $x_{r+1}, \ldots, x_n$ eksplicitno ne nastopajo. Pokažimo, da x_{r+1} ne nastopa eksplicitno. Zapišimo Jacobijevko na prvih $r+1$ spremenljivk za preslikavo $(F_1, \ldots, F_r, G)$:

$$D = \det \begin{bmatrix} F_{1,x_1} & \ldots, & F_{r,x_1} & \sum G_{u_i} F_{i,x_1} \\ F_{1,x_2} & \ldots, & F_{r,x_2} & \sum G_{u_i} F_{i,x_2} \\ & \vdots & \vdots & \\ F_{1,x_r} & \ldots, & F_{r,x_r} & \sum G_{u_i} F_{i,x_r} \\ F_{1,x_{r+1}} & \ldots, & F_{r,x_{r+1}} & G_{u_{r+1}} + \sum G_{u_i} F_{i,x_{r+1}} \end{bmatrix}.$$

Ker je bila funkcija F_{r+1} funkcijsko odvisna od prejšnjih, je determinanta enaka 0. Takoj opazimo, da je zadnji stolpec skoraj linearna kombinacija prejšnjih. Če jo odštejemo, dobimo

$$D = \det \begin{bmatrix} F_{1,x_1} & \ldots, & F_{r,x_1} & 0 \\ F_{1,x_2} & \ldots, & F_{r,x_2} & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ F_{1,x_r} & \ldots, & F_{r,x_r} & 0 \\ F_{1,x_{r+1}} & \ldots, & F_{r,x_{r+1}} & G_{u_{r+1}} \end{bmatrix}.$$

Upoštevajmo še, da je $G_{u_i} = F_{r+1,x_{r+1}}$ in dobimo

$$D = \det \begin{bmatrix} F_{1,x_1} & \ldots, & F_{r,x_1} & 0 \\ F_{1,x_2} & \ldots, & F_{r,x_2} & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ F_{1,x_r} & \ldots, & F_{r,x_r} & 0 \\ F_{1,x_{r+1}} & \ldots, & F_{r,x_{r+1}} & F_{r+1,x_{r+1}} \end{bmatrix} = 0.$$

Iz razvoja po zadnjem stolpcu dobimo $F_{r+1,x_{r+1}} = 0$. Enako za ostale spremenljivke. $\diamondsuit$

Izrek 9.7. *Če je $\vec{f}$ iz definicije 9.5. razreda C^1, obstaja n funkcijsko neodvisnih prvih integralov sistema $\vec{y'} = \vec{f}(x, \vec{y})$. Vsaka funkcija prvih integralov je tudi prvi integral. Vsak prvi integral sistema je funkcija n funkcijsko neodvisnih prvih integralov sistema.*

Primeri. **1**. Reši enačbo $xu_x + yu_y = 0$, ki ima v točki (x, y) na krivulji $4x^2 + y^2 = 1$ vrednost xy.
Rešitev. Pogoj transverzalnosti je izpolnjen, saj je vektor (x, y) pravokoten

na krožnico v točki (x, y). Karakteristični sistem je $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ in $\dot{u} = 0$. En prvi integral je rešitev enačbe

$$-\frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} = 0:$$

$$\frac{y}{x} = F_1,$$

drugi prvi integral pa je rešitev enačbe

$$\dot{u} = 0:$$

$$u = F_2.$$

V tretjem prvem integralu nastopa tudi t in ta integral je $x^2 + y^2 = 2t + C$. Parametrizacija začetnih pogojev je $(\cos s, \sin s, \cos s \sin s)$. Naša rešitev je funkcija F_1, F_2 :

$$G(F_1, F_2) = 0.$$

Funkcijo G določimo iz začetne funkcije.

$$0 = G(\operatorname{tg} s, \sin s \cos s).$$

Spomnimo se, da je $1 + \operatorname{tg}^2 s = \cos^{-2} s$. Rešitev je

$$G(a, b) = \frac{a}{1 + a^2} - b = 0$$

Vstavimo prve integrale in dobimo rešitev

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} - u = 0.$$

2. Poišči družino ploskev f, ki je pravokotna na družino ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = c$.
Rešitev. Ker mora biti $\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g = 0$, rešujemo enačbo $2px + 2qy - 2zu = 0$. Karakteristični sistem je $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ $\dot{u} = u$. En prvi integral je $x/y = A$ in drugi $u/y = B$. Rešitve so vse funkcije oblike $F(x/y, u/y) = C$.

3. Nelinarne enačbe

Definicija 9.8. *Splošna (nelinearna) parcialna diferencialna enačba 1. reda je enačba v dveh spremenljivkah je enačba oblike*

$$f(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

kjer je f gladka funkcija petih spremenljivk. Zaradi enostavnejše pisave bomo tudi tu uporabljali oznake $p = u_x$ in $q = u_y$. Enačba z novimi oznakami je

$$f(x, y, u, p, q) = 0.$$

Metoda, ki jo bomo razvili za reševanje bo posnemala metodo katakteristik. Pri metodi karakteristik je bila smer normale določena z vektorskim poljem in začetno krivuljo. V nelinearnem primeru takega vektorskega polja nimamo. Poskusimo kaj povedati o rešitvah. V točki (x_0, y_0, u_0) ima tangentna ravnina enačbo

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (u - u_0) = 0.$$

Poleg tega morajo količine p, q, u zadoščati še nelinearni enačbi

$$f(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0.$$

Če npr. p izrazimo s q, bomo v točki (x_0, y_0, u_0) dobili enoparametrično družino dopustnih tangentnih ravnin. Ta družina določa ima za ogrinjalko stožec, ki mu pravimo Mongev stožec po francoskem geometru Gaspardu Mongu (1746-1818)). Naravni kandidat za tangentni vektor tokovnice, ki jo iščemo, je zato generator Mongevega stožca, to je smerni vektor presečišča stožca in tangentne ravnine. Za izračun ogrinjalke odvajajmo enačbo tangentne ravnine po p :

$$(x - x_0) + q_p(y - y_0) = 0.$$

Po pravilu za odvod posredne funkcije je

$$q_p = -\frac{f_p}{f_q},$$

oziroma

$$\frac{x - x_0}{f_p} = \frac{y - y_0}{f_q}.$$

Premica skozi (x_0, y_0, z_0), ki jo dobimo, je parametrizirana z

$$(x - x_0) = \frac{(y - y_0)f_p}{f_q}, u - u_0 = p\frac{(y - y_0)f_p}{f_q} + q(y - y_0),$$

oziroma

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \frac{y - y_0}{f_q}(f_p, f_q, pf_p + qf_q).$$

Ta vektor bo tangentni vektor naše tokovnice:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_p, \\ \dot{y} &= f_q, \\ \dot{u} &= pf_p + qf_q. \end{aligned}$$

Ker pa v sistemu nastopata tudi $pinq$, potrebujemo še dve enačbi za $\dot{p}, \dot{q}$. Izračunajmo

$$\dot{u}_x = \dot{p} = p_x\dot{x} + p\dot{x}_x + q_x\dot{y} + q\dot{y}_x.$$

Če zamenjamo vrstni red integriranja, vidimo, da je $\dot{x}_x = 0$ in $\dot{y}_x = 0$. Če odvajamo $f(x, y, u, p(x, y), q(x, y))$ na x, dobimo

$$f_x + f_u u_x + f_p p_x + f_q q_x = 0,$$

oziroma

$$f_p p_x + f_q q_x = -(f_x + f_u u_x).$$

Pišimo še $u_x = p$ in dobimo enačbo za $\dot{p}$

$$\dot{p} = -(f_x + pf_u).$$

Podobno je za $\dot{q}$, le da odvajamo na y :

$$\dot{q} = -(f_y + qf_u).$$

Dobili smo sistem karakterističnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_p, \\ \dot{y} &= f_q, \\ \dot{u} &= pf_p + qf_q, \\ \dot{p} &= -f_x - pf_u, \\ \dot{q} &= -f_y - qf_u. \end{aligned}$$

Krivuljam, ki rešijo ta sistem, ne pravimo več karakteristične krivulje, ker vsaka nosi s sabo še podatek o tangentni ravnini, v kateri se nahaja, temveč jim pravimo karakteristični pasovi.

Formulirajmo Cauchyjevo nalogo za nelinearne enačbe. Iščemo rešitve diferencialne enačbe $f(x, y, u, p, q) = 0$, ki vsebujejo začetno krivuljo Γ,

$$\Gamma = \Gamma(s) = \{(x(s), y(s), u(s)),\ s \in I = (\alpha, \beta)\}.$$

Definicija 9.9. *Naj točka* $P_0 = (x(s_0), y(s_0), u(s_0), p(s_0), q(s_0))$ *izpolnjuje kompatibilnostne pogoje* $f(P_0) = 0$ *in*

$$u_s(s_0) = p(s_0)x_s(s_0) + q(s_0)y_s(s_0).$$

Če je izpolnjen transverzalnostni pogoj

$$x_s(s_0)f_q(P_0) - y_t(s_0)f_q(P_0) \neq 0,$$

pravimo, da Cauchyjeva naloga zadošča posplošenemu transverzalnostnemu pogoju v P_0.

Izrek 9.10. *Naj Cauchyjeva naloga zadošča posplošenemu transverzalnostnemu pogoju v* P_0. *Potem obstaja* $\varepsilon > 0$ *in enolična rešitev* $(x(s,t), y(s,t), u(s,t))$ *Cauchyjeve naloge, ki je definirana za* $|s - s_0| + |t| < \varepsilon$. *Parametrizacija določa ploskev, ki je graf funkcije* $u(x, y)$.

Primer. Reši enačbo $xp + yq = pq$ pri pogoju $u(x, 0) = 2x$.
Rešitev. Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f_p = x - q, \\
\dot{y} &= f_q = y - p, \\
\dot{u} &= xp + yq - 2pq = -pq, \\
\dot{p} &= -p, \\
\dot{q} &= -q.
\end{aligned}$$

Začetni pogoji so $x(s) = s$, $y(s) = 0$, $u(s) = 2s$. Pogoja za p in q izračunamo tako, da zahtevamo kompatibilnost. Odvajamo začetni pogoj na x in dobimo $u_x(x, 0) = 2$ oziroma $p(s) = 2$. Vstavimo v enačbo in izračunamo $q(s)$:

$$sp(s) + 0 \cdot q(s) = p(s)q(s),$$

torej je $q(s) = s$. Rešitvi za p in q sta

$$p(s,t) = 2e^{-t}, \;\; q(s,t) = se^{-t}.$$

Iz tega izračunamo

$$u(s,t) = se^{-2t} + s$$

in

$$x(s,t) = A(s)e^t + \frac{s}{2}e^{-t}.$$

Iz začetnega pogoja sledi

$$x(s,t) = \frac{s}{2}e^{t} + \frac{s}{2}e^{-t} = s\,\mathrm{ch}\,t.$$

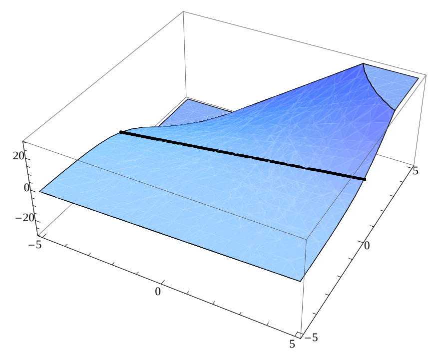
Podobno za y dobimo

$$y(s,t) = -2\,\mathrm{sh}\,t.$$

Eliminiramo s, t iz enačbe za u :

$$u(s,t) = 2se^{-t}\,\mathrm{ch}\,t = 2xe^{-t} = x(y + \sqrt{y^2+4}).$$

Pri korenu vzamemo plus, da je izpolnjen začetni pogoj na p. Rešitev skupaj z začetno krivuljo je prikazana na sliki 9.2.



Slika 9.2: Rešitev enačbe $xp + yq = pq$ in začetna krivulja

4. Pfaffova enačba

Oglejmo si primer, podoben primeru 2 iz poglavja 9.2 Poiščimo družino ploskev $f(x,y,z) = a$, ki so pravokotne na dve družini, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = c$ in $h(x,y,z) = (x^2+y^2)/z = d$.

Rešitev. Normala ploskve, ki jo iščemo, mora biti pravokotna na $\mathrm{grad}\,g$ in $\mathrm{grad}\,h$ in ima zato smer vektorskega produkta:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,f(x,y,z) &= \nu(x,y,z)\,\mathrm{grad}\,g(x,y,z) \times \mathrm{grad}\,h(z,y,z) \\
&= \nu(x,y,z)\left(\frac{-2y(x^2+y^2-2y^2)}{z^2}, \frac{2x(x^2+y^2-2y^2)}{z^2}, 0\right) \\
&= \mu(x,y,z)(-y, x, 0).
\end{aligned}$$

Naj bo $\vec{F}$ gladko polje. Enačba

$$\operatorname{grad} f = \mu\vec{F}$$

bo rešljiva, če obstaja taka funkcija $\mu(x, y, z)$, da je polje $\mu(x, y, z)(-y, x, 0)$ potencialno. To pa je (vsaj lokalno) takrat, ko je $\operatorname{rot}(\mu\vec{F}) = 0$ Ker je

$$\operatorname{rot}(\mu\vec{F}) = \mu \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} \mu \times \vec{F} = 0.$$

Množimo skalarno z $\vec{F}$ in dobimo

$$\mu\vec{F} \operatorname{rot} \vec{F} + (\vec{F}, \operatorname{grad} \mu, \vec{F}) = 0,$$

iz česar sledi

$$\vec{F} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Iskanje ploskve s predpisano tangentno ravnino lahko formuliramo tudi drugače. Naj bo (dx, dy, dz) vektor v tangentni ravnini. Potem je pravokoten na vektorsko polje $\vec{F}$,

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = 0.$$

Enačba se imenuje Pfaffova enačba.

Izrek 9.11. *Pfaffova enačba je rešljiva natanko tedaj, ko je* $\vec{F} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

V eno smer smo izrek že dokazali. Dokaz v drugo smer pa je metoda za reševanje. Privzemimo, da je iskana ploskev (vsaj v okolici neke točke) taka, da je njen presek z ravnino $z = a$ krivulja brez samopresečišč. Tangentni vektor na to krivuljo ima komponento v smeri z enako 0, zato ustreza enačbi

$$F_1 dx + F_2 dy = 0.$$

Recimo, da je krivulja taka, da je lokalno graf nad x. Potem je krivulja graf funkcije, ki reši enačbo

$$y' = -F_1/F_2.$$

Enačba ustreza eksistenčnemu izreku, zato ima enoparametrično družino rešitev $u(x, y, z) = C(z)$. Pokazati moramo, da lahko najdemo tak nabor krivulj, ki bo sestavljal ploskev oziroma da mora obstajati μ, da je

$$\operatorname{grad}(u(x, y, z) - C(z)) = \mu(x, y, z)\vec{F}(x, y, z).$$

Dobimo enačbe

$$\begin{aligned} u_x &= \mu F_1, \\ u_y &= \mu F_2, \\ u_z - C' &= \mu F_3. \end{aligned}$$

Izrazimo C'

$$C' = u_z - \mu F_3.$$

Trdimo, da x in y v tej enačbi ne nastopata. Izračunajmo

$$\operatorname{rot}(\mu\vec{F}) = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u - \operatorname{rot}(0,0,C') = (-C'_y, C'_x, 0).$$

Ker je

$$\mu\vec{F}\operatorname{rot}(\mu\vec{F}) = \mu\vec{F}(\mu\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\mu \times \vec{F}) = \mu^2\vec{F}\operatorname{rot}\vec{F} = 0,$$

sledi, da je

$$\mu\vec{F}\operatorname{rot}(\mu\vec{F}) = ((\operatorname{grad} u - (0,0,C'))(-C'_y, C'_x, 0) = -u_x C'_y + u_y C'_x = 0.$$

Funkciji C' in u sta funkcijsko odvisni, zato je $C' = \Phi(u) = \Phi(C)$. Enačba

$$C' = u_z - \mu F_3$$

je navadna diferencialna enačba za C. Tako dobimo končno rešitev. $\diamondsuit$

10. Sturm - Liouvillova teorija

1. Lastni problemi za diferencialne operatorje

Nemalokrat naletimo na probleme iskanja lastnih funkcij, npr. pri iskanju lastnih frekvenc strune. Imamo vpeto struno s krajiščema $[0, a]$ in zanima nas, kako niha. Enačba nihanja strune je

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

kjer je c hitrost potovanja 'vala.' Iz izkušenj vemo, da so rešitve stoječa valovanja: 1. imamo sinusni hrib, ki niha in ima valovno dolžino enako dolžini intervala. Sledita hrib in dolina, ki nihata. Valovna dolžina takega nih.anja je $a/2$. Potem sledi kombinacija hrib - dolina - hrib z valovno dolžino $a/3$ itd. Za rezultat dobimo neskončno *lastnih nihanj* $X_k(x) = \sin k\pi/a$. Pojavi se vprašanje, ali lahko vsako nihanje strune predstavimo kot vsoto lastnih nihanj. Tu nam pomaga Fourierova analiza. Recimo, da smo po struni udarili na sredini, struna pa je bila izravnana. Začetna pogoja sta $u(x, 0) = 0$ in $u_t(x, 0) = \delta(x - a/2)$. Potem je za vsak fiksen t rešitev mogoče razviti v Fourierovo vrsto po x, koeficienti pa so funkcije časa:

$$u(x, t) = \sum T_k(t) X_k(x).$$

Ker mora rešitev zadoščati diferencialni enačbi, mora biti

$$\sum T_k''(t) X_k(x) = c^2 \sum T(t) X_k''(x),$$

oziroma

$$\sum T_k''(t) \sin(k\pi x/a) = c^2 \sum T_k(t) \sin(k\pi x/a)(-(k\pi/a)^2).$$

Zaradi enoličnosti razvoja v vrsto morajo funkcije T_k rešiti enačbo

$$T_k'' = -(k\pi/a)^2 c^2 T_k(t).$$

Splošna rešitev te enačbe je $T_k = a_k \sin(ck\pi t/a) + b_k \cos(ck\pi t/a)$, splošna rešitev robnega problema pa

$$u(x,t) = \sum (a_k \sin(ck\pi t/a) + b_k \cos(ck\pi t/a)) \sin(k\pi x/a).$$

Konstante a_k inb_k določimo iz začetnih pogojev. Ker je struna v začetku ravna, je $b_k = 0$. Za odvod dobimo

$$u_t(x,0) = \sum \frac{ck\pi}{a} a_k \sin(k\pi x/a) = \delta(x - a/2).$$

Po formuli za izračun Fourierovih koeficientov je

$$\frac{ck\pi}{a} a_k = \frac{2}{a} \int_0^a \sin(k\pi x/a) \delta(x - a/2)\, dx = \sin(k\pi/2).$$

Opazimo, da smo problem reševali tako, da smo ga rešili za vsako spremenljivko posebej. Ta postopek formalizirajmo v *metodo separacije spremenljivk.* Delamo se, da je funkcija u oblike $u(x,t) = X(x)T(t)$, vstavimo ta nastavek v enačbo in dobimo

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ker je leva stran funkcija t, desna pa funkcija x, morata biti konstantni, zato je

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \text{ oziroma } X''(x) = \lambda X.$$

Pri tem zahtevamo, da funkcija X zadosti tudi robnemu pogoju pri vpeti struni, to je $X(0) = X(a) = 0$. Iščemo torej lastne funkcije diferencialnega operatorja y'' pri pogoju $X(0) = X(a) = 0$. Ločimo primere $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ in $\lambda < 0$. Za $\lambda = b^2 > 0$, $b > 0$ so rešitve $y = \alpha \operatorname{sh} bx + \beta \operatorname{ch} bx$. Ker hočemo zadostiti še robnima pogojema, dobimo $\beta = 0$ in $\alpha b = 0$. Podobno je pri $\lambda = 0$, ko sta linearno neodvisni rešitvi konstanta in x. Za $\lambda = -b^2 < 0$ so rešitve $\alpha \sin bx + \beta \cos bx$. Iz robnih pogojev dobimo enačbe $\beta = 0$ in $\alpha \sin ab = 0$, torej mora biti $ab = k\pi$. Lastne funkcije so $X_k = \sin(k\pi x/a)$, ki tvorijo kompleten ortogonalen sistem za skalarni produkt $(f,g) = \int_0^a f(x)g(x)\, dx$ v prostoru vseh L^2 funkcij na $[0,a]$. Kompletnost lastnih funkcij smo dobili iz klasične Fourierove analize, ortogonalnost pa sledi iz dejstva, da je operator

$$Ly = -y''$$

simetričen (sebiadjungiran) linearen operator na prostoru

$$D_L = \{y \in C^2[0,a],\ y(0) = y(a) = 0\}$$

s skalarnim produktom $(f,g) = \int_0^a f(x)g(x)\,dx$. Res, za $z, y \in D_L$ je

$$(Ly, z) = \int_0^a -y''(x)z(x)\,dx = -y''z\Big|_0^a + \int_0^a y'(x)z'(x)\,dx = (y', z').$$

Zaradi simetrije je tudi $(Lz, y) = (y', z')$, zato je operator simetričen. Ker so lastni podprostori simetričnih operatorjev, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, ortogonalni, so lastne funkcije ortogonalne, saj so lastni podprostori enodimenzionalni.

Pravkar obravnavani lastni problem je poseben primer *Sturm - Liouvillovega* robnega problema.

Definicija 10.1. *Strum-Liouvillov problem je naslednji robni problem. Poišči lastne funkcije diferencialnega operatorja*

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y$$

pri danih robnih pogojih $B_a(y) = B_b(y) = 0$. Za definicijsko območje operatorja L vzamemo

$$D_L = \{f \in \mathcal{C}^2([a,b]),\ B_a(f) = B_b(f) = 0.\}.$$

Če je $q = p'$, imenujemo operator formalno simetričen in ga lahko zapišemo v obliki $Ly = (py')' + ry$.
Naj bodo robno pogoji oblike

$$B_a(y) = \alpha y(a) - \beta y'(a) = 0, \quad B_b(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{10.1}$$

kjer je $|\alpha| + |\beta| > 0, |\gamma| + |\delta| > 0$. Če je

$$Ly = -(py')' + ry$$

in $p > 0$ na $[a,b]$, imenujemo problem regularen Sturm-Liouvillov problem. Če to ne drži ali je interval neskončen, imenujemo problem neregularen. Če so robni pogoji oblike 10.1 in je še $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, pravimo, da so fizikalni. Sturm-Louvillovem problemu je periodičen, če imajo p, q, r periodo $b - a$ in so robni pogoji periodični,

$$B_1(y) = y(a) - y(b) = 0,\ B_2(y) = y'(a) - y'(b) = 0.$$

Opomba. Če so robni pogoji oblike 10.1, to geometrijsko pomeni, da so v krajišču a za $y \in D_L$ vektorji $(y(a), y'(a))$ proporcionalni (enako za b).

Trditev 10.2. *Če je operator formalno simetričen in so robni pogoji oblike 10.1, je operator* $Ly = (p(x)y')' + r(x)y$ *simetričen. Če so robni pogoji fizikalni,* $p(x) < 0$ *in* $r(x) > 0$ *ima* L *same nenegativne lastne vrednosti.*

Opomba. Ti pogoji so zadostni, ne pa potrebni. Formalno simetrični operatorji so simetrični tudi pri periodičnem Sturm-Louvillovem problemu.

Dokaz. Naj bosta $y, z \in D_L$. Potem je

$$\begin{aligned}(Ly, z) &= \int_a^b ((p(x)y'(x))' + r(x)y(x))z(x)\,dx = \\ &= p(x)y'(x)z(x)\Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)\,dx + \int_a^b r(x)y(x)z(x)\,dx = \\ &= p(b)y'(b)z(b) - p(a)y'(a)z(a) - (py', z') + (ry, z).\end{aligned}$$

Če je konstanta β v pogoju B_a enaka 0, potem je pogoj v a enak $B_a = y(a) = 0$ in v tem primeru člen $p(a)y'(a)z(a)$ odpade. Če je še $\delta = 0$, odpade še člen $p(b)y'(b)z(b)$. Privzemimo, da sta $\beta, \delta \neq 0$. Potem dobimo

$$(Ly, z) = p(b)(\gamma/\delta)y(b)z(b) - p(a)(-\alpha/\beta)y(a)z(a) - (py', z') + (ry, z).$$

Operator je simetričen. Privzemimo, da sta $\beta, \gamma \neq 0$ in izračunajmo še (Ly, y) za lastni par (y, λ) :

$$\begin{aligned}(Ly, y) &= p(b)y'(b)y(b) - p(a)y'(a)y(a) - (py', y') + (ry, y) = \\ &= -p(b)\frac{\delta}{\gamma}y(b)^2 - p(a)\frac{\alpha}{\beta}y(a)^2 - (py', y') + (ry, y) = \\ &= \lambda(y, y).\end{aligned}$$

Ker je $p < 0$, so vsi členi v vsoti nenegativni, zato mora biti $\lambda \geq 0$. ♢

Izrek 10.3. *Naj bo* $Ly = -(p(x)y')' + r(x)y$ *diferencialni operator s fizikalnimi robnimi pogoji na intervalu* $[a, b]$, $p > 0$ *razreda* $\mathcal{C}^1([a, b])$, $r \in \mathcal{C}([a, b])$. *Potem ima* L *števno mnogo lastnih vrednosti* $\{\lambda_n\}$ *z limito* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Lastne funkcije tvorijo kompleten sistem za običajen skalarni produkt*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Lastni podprostori so enodimenzionalni (in lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so ortogonalne).

Dokaz. Dokažimo, da so lastni podprostori enodimenzionalni. Naj bosta y, z lastni funkciji za lastno vrednost λ. Funkciji y in z sta rešitvi iste diferencialne enačbe

$$L_\lambda y = Ly - \lambda y = 0,$$

ki zadoščata danima robnima pogojema. Naš cilj je dokazati, da je njuna determinanta Wronskega $w = y'z - yz'$ enaka 0 vsaj v eni točki. V točki a je pri fizikalnih robnih pogojih izraz

$$y'(a)z(a) - y(a)z'(a) = (\alpha/\beta)(-y(a)z(a) + y(a)z(a)) = 0,$$

zato sta rešitvi linearno odvisni povsod. Drugače: pri fizikalnih robnih pogojih sta vektorja $(y(a), y'(a))$, $(z(a), z'(a))$ proporcionalna, zato je $w(a) = 0$. $\diamondsuit$

Diferencialni operator, ki smo ga definirali v izreku 10.3., je za običajen skalarni produkt simetričen na definicijskem območju

$$D_L = \{f \in \mathcal{C}^2([a, b]),\ B_a(f) = B_b(f) = 0\}.$$

Kaj pa v primeru, ko operator ni simetričen? Potem pa lahko popravimo skalarni produkt, tako da bo simetričen v novem skalarnem produktu.

Trditev 10.4. *Naj bo*

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y$$

diferencialni operator s robnimi pogoji 10.1 na intervalu $[a, b]$, $p > 0$ *razreda* $\mathcal{C}^1([a, b])$, $q, r \in \mathcal{C}([a, b])$. *Naj bo*

$$w(x) = \frac{1}{p(x)} e^{\int_a^x \frac{q(t)\,dt}{p(x)}}$$

utež. Potem je operator L *simetričen za skalarni produkt*

$$(f, g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx,$$

ima števno mnogo lastnih vrednosti in lastne funkcije tvorijo kompleten sistem za ta skalarni produkt. Lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so ortogonalne.

Definicija 10.5. *Naj bo* L *diferencialni operator. Rešitev enačbe* $Ly = \delta_0$ *imenujemo fundamentalna rešitev.*

2. Primeri diferencialnih operatorjev drugega reda

Velikokrat pri reševanju raznih enačb naletimo tudi na neregularne Sturim-Liouvillove probleme. Kljub temu se v določenih primerih da dobiti bazo ortogonalnih lastnih funkcij.

1. Fourierov diferencialni operator je operator

$$Ly = -y''.$$

Pojavi se pri reševanju valovne, toplotne in Laplacove enačbe. Njegova fundamentalna rešitev je

$$y = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ -x, x > 0 \end{cases}.$$

Naj bo $l > 0$ in naj bo

$$D_L = \{y \in \mathcal{C}^{(2)}[-l, l]; \quad y(-l) = y(l), \quad y'(-l) = y'(l)\}$$

definicijsko območje operatorja L. prostor V_L je gost podprostor v $L^2[-l, l]$, saj so neskončnkokrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem goste v $L^2[-l, l]$. Operator $L : V_L \to L^2[l, l]$ je simetričen in pozitiven, ni pa injektiven: za poljubna $y, z \in V$ velja

$$(Ly, z) = \int_{-l}^{l} (-y'')z dx = \int_{-l}^{l} y'z' dx.$$

Odtod sledi, da je $(Ly, z) = (Lz, y)$ in $(Ly, y) \geq 0$. Operator $L : V_l \to L^2[l, l]$ ni injektiven, ker ima v jedru konstantno funkcijo 1.

Lastne vrednosti so $\lambda_k = -(k\pi/l)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Lastni podprostor za $\lambda_0 = 0$ je enodimenzionalen in genereriran s konstantno funkcijo 1. Če je $k = 1, 2, \ldots$, potem je lastni podprostor za λ_k dvodimenzionalen in generiran z $\cos \frac{k\pi x}{l}$ in $\sin \frac{k\pi x}{l}$.

2. Legendrov diferencialni operator je operator

$$Sy = -((1 - x^2)y')'$$

Pojavi se pri reševanju Laplacove enačbe (na sferi). Njegove lastne funkcije za lastno vrednost $\lambda(\lambda + 1)$ so Legendrove funkcije P_λ in Q_λ. Za $n \in \mathbb{N}_0$ dobimo pri pogoju $y(0) = 1$ polinome P_n, ki jih imenujemo Legendrovi polinomi. Velja

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right].$$

Prvih nekaj polinomov je

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Polinomi so ortogonalni za skalarni produkt

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

in so tako kompleten sistem v $L^2([-1,1])$.

3. **Hermitov diferencialni operator** je operator

$$Hy = -y'' + 2xy',$$

definiran na

$$D_H = \{f \in C^{(2)}(\mathbb{R}) : \quad f(x), f'(x), f''(x) \in L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})\}.$$

Množica D_H je gost vektorski podprostor prostora $L^2[-\infty,\infty;e^{-x^2}]$. Prostor $L^2[-\infty,\infty;e^{-x^2}]$ je prostor s skalarnim produktom

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx.$$

Za poljubni funkciji $y, z \in D_H$ velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}Hy(x)z(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2}y'(x))'z(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}y'(x)z'(x)\,dx,$$

kjer vsi integrali obstajajo. Operator H je na D_H simetričen in pozitivno definiten operator. Hermitov polinom H_n je lastna funkcija operatorja H za lastno vrednost $2n$. Velja

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

Prvih nekaj polinomov je

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= 1\\
H_1(x) &= 2x\\
H_2(x) &= 4x^2 - 2\\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x\\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Polinomi so ortogonalni za gornji skalarni produkt in so kompleten ortogonalen sistem v $L^2[-\infty, \infty; e^{-x^2}]$.

4. **Laguerrov diferencialni operator** je operator

$$Ly = -xy'' + (x - \alpha - 1)y'$$

z definicijskim območjem

$$D_L = \{f \in C^{(2)}([0, \infty)) : \ f(x), f'(x), f''(x) \in L^2([0, \infty), x^\alpha e^{-x})\}.$$

Pojavi se pri reševanju Schrödingerjeve enačbe. Množica D_L je gost vektorski podprostor prostora $L^2[0, \infty; x^\alpha e^{-x}]$. Laguerrov operator je simetričen in pozitivno definiten. Njegove lastne funkcije so Laguerrovi polinomi

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right)$$

ki so ortogonalni za skalarni produkt

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x) g(x) x^\alpha e^{-x}\, dx.$$

Tvorijo kompleten ortogonalen sistem za $L^2[0, \infty; x^\alpha e^{-x}]$. Prvih nekaj polinomov pri $\alpha = 0$ je

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1\\
L_1(x) &= -x + 1\\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)\\
L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)\\
L_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. **Besslov diferencialni operator** je operator, definiran z

$$B_\nu y = -y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{\nu^2}{x^2}y$$

(ν-ti Besslov diferencialni operator, $\nu > 0$). Pojavi se pri reševanju Laplacove enačbe v cilindričnih koordinatah. Lastne funkcije Besslovega diferencialnega operatorja so rešitve enačbe

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

ki jih imenujemo Besslove funkcije. Rešitve, ki so omejene v 0, imenujemo Besslove funkcije prve vrste in jih označimo z J_α :

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\tfrac{1}{2}x\right)^{2m+\alpha}.$$

Imajo števno ničel.

Besslove funkcije druge vrste ali Neumannove funkcije imajo pol v 0. Običajno jih označimo z N_α. Velja

$$\int_0^1 xJ_\alpha(xu_{\alpha,m})J_\alpha(xu_{\alpha,n})dx = \frac{\delta_{m,n}}{2}[J_{\alpha+1}(u_{\alpha,m})]^2 = \frac{\delta_{m,n}}{2}[J'_\alpha(u_{\alpha,m})]^2,$$

torej so Besslove funkcije (pri pravilno izbranih parametrih) ortogonalne v $L^2([0,1],x)$.

11. LDE 2. reda v dveh spremenljivkah

1. Kanonična forma

Definicija 11.1. *Splošna oblika linearne diferencialne enačbe drugega reda je*

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{x,y} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f = 0,$$

kjer so $a, b, \ldots, f$ *gladke funkcije.*

Prizemimo, da a, b, c nimajo skupnih ničel in si oglejmo operator, ki ga sestavljajo členi, kjer odvodi nastopajo z najvišjim redom

$$L_0 u = au_{xx} + 2bu_{x,y} + cu_{yy}.$$

Imenuje se glavni del operatorja L. Izkaže se, da so glavne lastnosti rešitev določene z glavnim delom operatorja, natančneje z diskriminanto $\Delta = \Delta(L) = b^2 - ac$.

Poskusimo z uvedbo novih koordinat enačbo prevesti na preprostejšo obliko. Naj bosta ξ in η novi spremenljivki. Zapišimo glavni del transformirane enačbe.

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
u_{x,x} &= u_{\xi,\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} &= u_{\xi,\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\
u_{y,y} &= u_{\xi,\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Ko to vstavimo v operator $L(u)$ dobimo linearno diferencialno enačbo drugega reda

$$L(u) = Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + Du_{xi} + Eu_\eta + F = 0,$$

kjer je

$$
\begin{aligned}
A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\
B &= a\xi_x\xi_y + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\
C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.
\end{aligned}
$$

Z uporabo linearne algebre se ta zapis poenostavi. Pišimo

$$
G(L) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}
$$

Potem je

$$
\begin{aligned}
A &= (G \operatorname{grad} \xi, \operatorname{grad} \xi), \\
B &= (G \operatorname{grad} \xi, \operatorname{grad} \eta) \\
C &= (G \operatorname{grad} \eta, \operatorname{grad} \eta).
\end{aligned}
$$

Pravilo za uvedbo nove spremenljivke za koeficiente A, B, C je mogoče zapisati v matrični obliki:

$$
\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix}.
$$

Naj bo

$$
J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}
$$

Jakobijevka transformacije (ξ, η) in $\det J$ njena determinanta. Naš cilj je doseči, da bo kakšen od členov A, B ali C enak 0. Poskusimo uničiti A. Dobimo enačbo

$$
a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0
$$

Delimo z ξ_y^2 in dobimo

$$
a\frac{\xi_x}{\xi_y} + 2b\frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0.
$$

Potem je

$$
\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.
$$

Če enako naredimo za člen C, dobimo čisto enako enačbo za kvocient η_x/η_y. Rešitve enačbe so odvisne od znaka pod korenom. Ločimo tri primere. Privzemimo najprej, da je $b^2 - ac > 0$. Potem dobimo enačbi

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Dobili smo dve linearni diferencialni enačbi 1. reda, ki nam data rešitvi ξ in η. V novih koordinatah ima enačba obliko

$$u_{\xi\eta} + \text{ členi nižjega reda } = 0.$$

Če v enačbi členi nižjega reda ne nastopajo, potem je rešitev enačbe

$$u_{\xi\eta} = 0$$

dana z D'Alembertovo formulo

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Recimo, da je $b^2 - ac = 0$ na neki odprti množici. Potem imamo eno dvojno ničlo enačbe in $c = b^2/a$. Naj bo

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b}{a},$$

Na ta način dosežemo, da je $A = 0$. Ker je

$$B = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a\xi_x + b\xi_y \\ b\xi_x + b^2/a\xi_y \end{bmatrix}.$$

Ker je funkcija ξ rešila enačbo $\xi_x/\xi_y = -b/a$, je $a\xi_x + b\xi_y = 0$ in

$$b\xi_x + \frac{b^2}{a}\xi_y = \frac{b}{a}(a\xi_x + b\xi_y) = 0,$$

zato bomo za η izbrali karkoli funkcijsko neodvisnega od ξ. Enačba ima obliko

$$u_{\eta\eta} + \text{ členi nižjega reda } = 0.$$

Če v enačbi členi nižjega reda ne nastopajo, potem je rešitev enačbe

$$u_{\eta\eta} = 0$$

dana s formulo

$$u(\xi,\eta) = \eta f(\xi) + g(\xi).$$

Ostal nam je še zadnji primer, $b^2 - ac < 0$. Rešitve so kompleksne. Naj bo

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b + i\sqrt{|b^2 - ac|}}{a} \text{ in } \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-b - i\sqrt{|b^2 - ac|}}{a}.$$

Imamo enak sistem kot v hiperboličnem primeru, le da so funkcije kompleksne. Na ta način enačbo prevedem na

$$u_{\xi\eta} + \text{ členi nižjega reda } = 0.$$

Če uvedemo novi spremenljivki

$$\tilde{\xi} = \operatorname{Re}\xi,\ \tilde{\eta} = \operatorname{Im}\xi,$$

se enačba prevede na

$$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \text{ členi nižjega reda } = 0.$$

Vidimo, da so oblike enačb odvisne od znaka determinante matrike $G(L)$. Iz pravila za računanje determinant tudi vidimo, da se pri uvedbi novih koordinat znak determinante ohrani. Zato enačbe klasificiramo glede na znak determinante.

Definicija 11.2. *Če ima $G(L)$ v točki (x,y) pozitivno determinanto, pravimo, da je operator eliptičen v točki (x,y) ($\Delta(L) < 0$), če je determinanta $G(L)$ negativna, je operator hiperboličen v točki (x,y) ($\Delta(L) > 0$), če pa je determinanta 0, je operator paraboličen v točki (x,y) ($\Delta(L) = 0$). Enačba je eliptična na območju U, če je eliptična v vsaki točki tega območja. Enako velja za hiperboličnost in araboličnost.*

Posledica 11.3. *Tip enačbe je neodvisen od koordinat.*

2. Primeri

1. Prevedimo Tricomijevo diferencialno enačbo

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0,\ x < 0$$

na kanonično obliko. Za $x < 0$ je enačba hiperbolična. Enačbi za novi spremenljivki sta

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \sqrt{-x},\ \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\sqrt{-x}.$$

Rešitvi sta

$$\pm\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = y + c,$$

oziroma

$$\xi = (-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y,\ \eta = (-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}y.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{3}{2}u_\xi(-\sqrt{-x}) - \frac{3}{2}u_\eta\sqrt{-x} \\
u_{xx} &= \frac{94}{u\ \xi\xi}(-x) - \frac{94}{2}u_{\eta\xi}x + \frac{9}{4}u_{\eta\eta}(-x) + \frac{3}{2}u_\xi\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{3}{2}u_\eta\frac{-1}{2\sqrt{-x}} \\
u_y &= \frac{3}{2}(-u_\xi + u_\eta), \\
u_{yy} &= \frac{9}{4}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - \frac{9}{2}u_{\xi\eta}.
\end{aligned}$$

in vstavimo v enačbo

$$u_{xx} + xu_{yy} = \frac{9}{4}u_{\xi\xi}(-x+x) + \frac{9}{4}u_{\eta\eta}(-x+x) - 9xu_{\eta\xi} + \frac{3}{4\sqrt{-x}}(u_\xi + u_\eta) = 0.$$

Delimo z $-9x$, upoštevamo $\xi + \eta = 2(-x)^{\frac{3}{2}}$ in dobimo

$$u_{\xi\eta} - \frac{u_\xi + u_\eta}{6(\xi + \eta)} = 0.$$

2. Dokažimo, da je enačba

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$$

parabolična in poiščimo njeno kanonično formo. Ena spremenljivka je $\eta = xy$, druga pa npr. $\xi = x$. Parcialni odvodi so

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\eta y + u_\xi, \\
u_{xx} &= u_{\eta\eta}y^2 + 2u_{\eta\xi}y + u_{\xi\xi} \\
u_{xy} &= u_{\eta\eta}xy + u_{\xi\eta}x + u_\eta \\
u_y &= u_\eta x \\
u_{yy} &= u_{\eta\eta}x^2
\end{aligned}$$

Poglejmo faktorje pri posameznih členih:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &: \quad x^2y^2 - 2xy \cdot xy + x^2y^2 = 0. \\ u_{\eta\xi} &: \quad 2yx^2 - 2xy \cdot x = 0, \\ u_{\xi\xi} &: \quad x^2 = \xi^2, \\ u_{\xi} &: \quad x = \xi, \\ u_{\eta} &: \quad xy + xy - 2xy = 0. \end{aligned}$$

Enačba je $\xi^2 u_{\xi\xi} + \xi u_{\xi} = 0$ in ima ločljive spremenljivke. Rešitev je

$$u(x,y) = f(xy)\ln x + g(xy).$$

Nalogo lahko rešimo še drugače. Glavni del diferencialnega operatorja spominja na popolni kvadrat. Izračunajmo izraz

$$(xD_x - yD_y)^2 = x^2D_{xx} - 2xyD_{xy} + y^2D_{yy} + xD_x + yD_y.$$

Vidimo, da je naša enačba ravno

$$(xD_x - yD_y)^2u = (xD_x - yD_y)((xD_x - yD_y)u) = 0.$$

V jedru operatorja je $\xi = xy$ in s tem tudi vsaka funkcije $f(xy)$, zato je notranji oklepaj oblike

$$(xD_x - yD_y)u = f(xy).$$

Poiščimo eno partikularno rešitev. Simuliramo variacijo konstant. Recimo, da je oblike $u(x,y) = g(y)h(xy)$:

$$xg(y)h'(xy)y - yh'(xy)xg(y) - yg'(y)h(xy) = f(xy).$$

Najenostavnejša rešitev je $h(xy) = f(xy)$ in $-yg'(y) = 1$, oziroma $g(y) = -\ln y$. Dobimo

$$u(x,y) = -\ln y f(xy) + g(xy).$$

Prepričaj se, da je gre za isto rešitev, kot po prejšnjem postopku.

3. Prevedimo Tricomijevo diferencialno enačbo

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0,\ x > 0$$

na kanonično obliko. Za $x > 0$ je enačba eliptična. Enačbi za novi spremenljivki sta

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = i\sqrt{x},\ \frac{\eta_x}{etai_y} = -i\sqrt{x}.$$

Rešitvi sta

$$\pm i\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = y + c,$$

realni in imaginarni del pa

$$\xi = x^{\frac{3}{2}},\ \eta = \frac{3}{2}y.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3}{2}u_\xi(\sqrt{x}) \\ u_{xx} &= \frac{94}{u}_{\xi\xi}(x) + \frac{3}{2}u_\xi\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ u_y &= \frac{3}{2}u_\eta, \\ u_{yy} &= \frac{9}{4}u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

in vstavimo v enačbo

$$u_{xx} + xu_{yy} = \frac{9}{4}u_{\xi\xi}(x) + \frac{9}{4}u_{\eta\eta}(x) + \frac{3}{4\sqrt{x}}u_\xi = 0.$$

Delimo z $9x/4$, in dobimo

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{3\xi} = 0.$$

12. Laplacova enačba

1. Osnovne lastnosti

Laplacova enačba je enačba

$$\triangle u = 0,$$

kjer je

$$\triangle u = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}.$$

Opisuje npr. stacionarno porazdelitev temperature. Rešitvam Laplaceove enačbe pravimo harmonične funkcije. Harmonične funkcije zadoščajo principu maksimuma: če je D odprto omejeno območje in f nekonstantna harmonična funkcija na D, ki je zvezna na $\overline{D}$, zavzame f maksimum (in minimum) na robu. Harmonične funkcije imajo tudi lastnost povprečne vrednosti: za vsaka a, r za katera je $B(a,r) \subset D$, velja

$$f(a) = \frac{1}{vol(B(a,r))} \int_{B(a,r)} f dV.$$

Fundamentalna rešitev za Laplacov operator je

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{2\pi} \log|x| \text{ v dveh dimenzijah in} \\ N(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n |x|^{n-2}} \text{ za } n > 2, \end{aligned}$$

kjer je ω_n površina enotske sfere v $\mathbb{R}^n$.

2. Reševanje z integralskimi transformacijami

Kadar je območje D ravnina, polravnina, kvadrant, pas ali polpas se lotimo Laplacove enačbe na D z eno od treh Fourierovih transformacij. Izbor je odvisen od robnih pogojev. Ponovimo osnovne formule:

$$\mathcal{F}\left(f\right)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-izx}\,dx,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left(f\right)(z)e^{izx}\,dz,$$
$$\mathcal{F}_s\left(f\right)(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin zx\,dx,\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \mathcal{F}_s\left(f\right)(z)\sin zx\,dz,$$
$$\mathcal{F}_c\left(f\right)(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos zx\,dx,\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \mathcal{F}_c\left(f\right)(z)\cos zx\,dz.$$

Predpostavili smo, da sta tako funkcija f kot njena transformiranka v L^1. Pri računanju inverzne transformiranke si pogosto pomagamo s formulo

$$\mathcal{F}\left(f*g\right)(z) = \mathcal{F}\left(f\right)(z)\,\mathcal{F}\left(g\right)(z), \quad (f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du$$

ali pa z izrekom o residuih. Drugi odvodi se transformirajo takole:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f''\right)(z) &= -z^2\mathcal{F}\left(f\right)(z),\\
\mathcal{F}_s\left(f''\right)(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)z - z^2\mathcal{F}_s\left(f\right)(z),\\
\mathcal{F}_c\left(f''\right)(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) - z^2\mathcal{F}_s\left(f\right)(z).
\end{aligned}$$

Pri tem smo predpostavili, da je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$, kar je recimo res v primeru, ko $f, f', f'' \in L^1$.

Primer. Naj bosta $a, b > 0$. Rešimo enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \in \mathbb{R}, 0 \le y \le a$ pri robnih pogojih

$$u(x,0) = e^{-b|x|}, \quad u(x,a) = 0.$$

Rešitev. Uporabimo Fourierovo transformacijo

$$v(z,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)e^{-izx}dx.$$

Transformirana enačba enačba se glasi

$$-z^2v(z,y) + v_{yy} = 0,$$

Njena splošna rešitev je

$$v(z,y) = A(z)e^{-zy} + B(z)e^{zy}.$$

Transformirani robni pogoji so

$$v(z,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2b}{b^2+z^2}, \quad v(z,a) = 0.$$

Od tod izračunamo

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{b^2+z^2} \frac{e^{az}}{\operatorname{sh} az}, \quad B(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{b^2+z^2} \frac{e^{-az}}{\operatorname{sh} az},$$

$$v(z,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2b}{b^2+z^2} \frac{\operatorname{sh}(a-y)z}{\operatorname{sh} az}.$$

Inverzno transformiranko

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(z,y)e^{izx}dz.$$

lahko določimo s pomočjo residuov. Za vsak $x > 0$ velja

$$u(x,y) = i\sqrt{2\pi}\left(\operatorname{Res}(v(z,y)e^{izx}, ib) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}(v(z,y)e^{izx}, k\pi i/a)\right).$$

Če ab ni večkratnik π, potem je

$$u(x,y) = \frac{\sin((a-y)b)}{\sin ab} e^{-bzx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b(-1)^k}{(ab)^2 - (k\pi)^2} \sin((a-y)k\pi/a)e^{-k\pi x/a}.$$

Celotno rešitev dobimo tako, da na desni x zamenjamo z $|x|$.

3. Reševanje s separacijo spremenljivk

Enačbe, ki jih dobimo po separaciji spremenljivk, so odvisne od tega, v katerih koordinatah delamo. Obravnavali bomo kartezične koordinate, polarne in cilindrične koordinate ter sferične koordinate.

3.1 Kartezične koordinate.

Kadar je območje D interval, pravokotnik ali kvader, uporabimo pri reševanju Laplacove enačbe na D kartezične koordinate. V teh treh primerih je

$$\triangle u = u''(x), \quad \triangle u = u_{xx} + u_{yy} \text{ oziroma } \triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Po separaciji spremenljivk dobimo eno od trigonometrijskih vrst. Katero, je odvisno od robnih pogojev.

Primer. Naj bosta $a, b > 0$ in $f_1, f_2 \in L^2[0,a]$. Rešimo Laplacovo enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $[0,a] \times [0,b]$ pri robnih pogojih

$$u(x,0) = f_1(x),\ u(x,b) = f_2(x),$$

$$u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0.$$

Resitev. Poskusimo s separacijo $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Dobimo enačbo

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Delimo z XY in dobimo

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0,$$

torej sta izraza X''/X Y''/Y konstantna. Iz robnih pogojev dobimo za funkcijo X pogoja $X(0) = X(a) = 0$, kar pomeni, da imamo v spremenljivki X regularen Sturm-Liouvillov problem in zato kompleten sistem lastnih funkcij. Te so $\sin k\pi x/a$. Splošna rešitev je oblike

$$u(x,y) = \sum (a_k \operatorname{sh}(ck\pi y/a) + b_k \operatorname{ch}(ck\pi y/a)) \sin(k\pi x/a).$$

Pri $y = 0$ dobimo

$$u(x,0) = \sum b_k \sin(k\pi x/a) = f_1(x),$$

pri $y = b$ pa

$$u(x,b) = \sum (a_k \operatorname{sh}(ck\pi b/a) + b_k \operatorname{ch}(ck\pi b/a)) \sin(k\pi x/a) = f_2(x)$$

Iz razvoja f_1 in f_2 v fourierovo vrsto dobimo

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{a}\ \frac{f_{1k} \operatorname{sh}\frac{k\pi(b-y)}{a} + f_{2k} \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}},$$

$$f_{1k} = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(t)\sin\frac{k\pi t}{a}dt, \quad f_{2k} = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(t)\sin\frac{k\pi t}{a}dt.$$

3.2 Polarne koordinate.

Kadar je območje D krog, krožni izsek, zunanjost kroga, izsek zunanjosti kroga, kolobar ali izsek kolobarja uporabimo pri reševanju Laplacove enačbe na D polarne koordinate. V tem primeru je

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.$$

Oglejmo si najprej nekaj primerov, ko je funkcija u odvisna samo od r. V tem primeru zadnji člen v gornji formuli odpade.

Primer. Rešimo Poissonovo nalogo

$$\triangle u = -1$$

na enotskem krogu pri robnem pogoju

$$u(1, \varphi) = 0.$$

Resitev dobimo z integracijo: $u = u(r, \varphi) = \frac{1}{4}(1 - r^2)$.

V primeru, ko je funkcija u odvisna tako od r kot φ, dobimo za rešitev Laplacove enačbe $\triangle u = 0$ s separacijo spremenljivk $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ enačbi

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2\Phi(\varphi) = 0, \;\; r^2R''(r) + rR'(r) - \nu^2R(r) = 0.$$

Glede na robne pogoje določimo ν. V splošnem je nastavek oblike

$$u(r, \theta) = A\log r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^{\nu_n} + B_nr^{-\nu_n})(C_n\cos\nu_n\varphi + D_n\sin\nu_n\varphi), \nu_n \neq 0.$$

Glede na obliko območja D ločimo naslednje možnosti:

(1) Če je območje D krog, zunanjost kroga ali kolobar potem vzamemo $\nu_n = n$. Če je D krog, vzamemo še $A = 0$, $A_n = 1$, $B_n = 0$. Če je D zunanjost kroga, vzamemo še $A_n = 0$, $B_n = 1$. Koeficienta C_n in D_n določimo iz robnih pogojev po r.

(2) Če je območje D izsek kroga, zunanjosti kroga ali kolobarja, kjer φ teče od 0 do φ_0, potem je ν_n odvisen od robnega pogoja po φ:

a) Če je $u(r,0) = u(r,\varphi_0) = 0$, je $A = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 1$ in $\nu_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}$.

b) Če je $u(r,0) = u_\varphi(r,\varphi_0) = 0$, je $C_n = 0$, $D_n = 1$ in $\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}$.

c) Če je $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\varphi_0) = 0$, je $C_n = 1$, $D_n = 0$ in $\nu_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}$. Če je D izsek kroga, je $A = 0$.

V primeru nehomogenih ali mešanih pogojev po φ nastopijo težave. Koeficiente A_n in B_n potem določimo iz robnih pogojev po r. Pri izseku kroga vzamemo $B_n = 0$ in pri izseku zunanjosti kroga vzamemo $A_n = 0$.

Primer. Rešimo enačbo $\triangle u = 0$ na $B^2(0,1)$ pri pogoju

$$u(1,\varphi) = |\varphi|,\ \varphi \in [-\pi,\pi].$$

Kaj lahko poveš o konvergenci dobljene vrste?

Rešitev. Nastavek za rešitev je

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_1^\infty r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Ker je funkcija $|\varphi|$ soda, imamo razvoj po kosinusih.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi \cos n\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\varphi \frac{\sin n\varphi}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin n\varphi \, d\varphi\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos n\varphi \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(-1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

Členi s sodimi indeksi odpadejo, za lihe n pa je $(-1 + (-1)^n) = -2$. Torej je

$$u(r,\varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)\varphi).$$

Vrsta konvergira na vsem krogu enakomerno in absolutno, saj jo majorizira konvergentna številska vrsta $\sum_1^\infty (2n+1)^{-2}$.
V splošnem iz nastavka

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

in robnega pogoja

$$u(1,\varphi) = f(\varphi)\ \varphi \in [-\pi,\pi],$$

dobimo rešitev

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta + \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty r^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta r^n \cos n\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta \sin n\varphi\right]. \end{aligned}$$

Če upoštevamo

$$\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi = \cos(n(\varphi - \theta))$$

in združimo integrala, dobimo

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n(\varphi-\theta))\, d\theta$$

Pišimo $z = e^{i(\varphi-\theta)}$ in zamenjajmo vrstni red seštevanja in integriranja. Dobimo

$$\sum_1^\infty r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n(\varphi-\theta))\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_1^\infty r^n(z^n + z^{-n}).$$

Celotni nastavek je

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left[1 + \sum_1^\infty r^n(z^n + z^{-n})\right] d\theta.$$

Seštejmo vrsti:

$$1 + \sum_1^\infty r^n z^n = \frac{1}{1-rz}$$

in

$$\sum_1^\infty r^n z^{-n} = \sum_1^\infty (r\overline{z})^{-n} = \frac{r\overline{z}}{1-r\overline{z}}.$$

Seštejemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rz}+\frac{r\overline{z}}{1-r\overline{z}} &= \frac{1-r\overline{z}+r\overline{z}(1-rz)}{1+r^2-r(z+\overline{z})}\\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\end{aligned}$$

Potem je

$$u(r,\varphi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\theta$$

Rešitev dobimo s konvolucijo f in *Poissonovega jedra*

$$P(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

4. Lastni problem za Laplacov operator

4.1 Kartezične koordinate.

Pri reševanju nehomogene Laplacove enačbe (Poissonove naloge) na območju ki je interval, pravokotnik ali kvader, si pomagamo z lastnimi funkcijamu Laplacovega operatorja.

Primer. Naj bo $D=[0,a]\times[0,b]$ in $h\in L^2(D)$. Rešimo Poissonovo nalogo

$$\triangle u=-h$$

na območju D pri robnem pogoju $u|_{\partial D}=0$. Izračunajmo tudi koeficiente za $h\equiv 2$.

Resitev. Najprej rešimo lastni problem

$$u_{xx}+u_{yy}=\lambda u,\quad u(x,0)=u(x,b)=u(0,y)=u(a,y)=0.$$

Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti

$$\lambda_{kl}=-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2,\quad v_{kl}(x,y)=\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}.$$

Nato razvijemo $h=\sum_{k,l}h_{kl}v_{kl}$ v $L^2(D)$. Rešitev iščemo z nastavkom $u=\sum_{k,l}c_{kl}v_{kl}$. Dobimo $c_{kl}=-\frac{h_{kl}}{\lambda_{kl}}$. Torej je

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{h_{kl}}{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b},$$

$$h_{kl} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b h(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}dxdy.$$

V primeru $h \equiv 2$ dobimo

$$h_{kl} = \frac{8}{\pi^2 kl}(1-(-1)^k)(1-(-1)^l).$$

4.2 Polarne koordinate.

Ko rešujemo nehomogeno Laplacovo enačbo (Poissonovo nalogo) na območju ki je krog, krožni izsek, kolobar, valj, votel valj in podobno, si pomagamo z zarvojem po lastnih funkcijah.

Primer. Naj bo D krog z radijem a in $f \in L^2(D)$. Rešimo enačbo

$$\triangle u = -f, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Rešitev. Najprej rešimo lastni problem

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \lambda u, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Separiramo spremenljivke $u = R(r)\Phi(\varphi)$ in dobimo

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = \lambda R\Phi.$$

Delimo z $R\Phi$ in dobimo

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = \lambda.$$

Množimo z r^2 in damo člen s ϕ na drugo stran:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Dobimo enačbi

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \lambda r^2 = c, \quad -\frac{\Phi''}{\Phi} = c.$$

Pri drugi enačbi moramo upoštevati periodičnost, zato dobimo periodični Sturm-Liouvillov problem, ki nam da kompleten sistem lastnih funkcij $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$. To nam določi konstanto $c = k^2$. Zato se prva enačba prepiše v

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \lambda r^2 = k^2,$$

ki je Besslova enačba, če jo pomnožimo z R :

$$r^2R'' + rR' + (-k^2 - \lambda r^2)R = 0.$$

Pri fiksnem k dobimo (zaradi pogoja na omejenost v 0) funkcije $J_k(\sqrt{-\lambda}r)$. Ker mora biti vrednost na robu enaka 0, je

$$\sqrt{-\lambda}a = \xi_{kl},$$

kjer je ξ_{kl} l-ta ničla k-te Besslove funkcije. Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vrednosti, vsaki pripadata dva lastna vektorja

$$\lambda_{kl} = -\frac{\xi_{kl}^2}{a^2}, \quad u_{kl}(r,\varphi) = J_k(\xi_{kl}\frac{r}{a})\cos k\varphi, \quad v_{kl}(r,\varphi) = J_k(\xi_{kl}\frac{r}{a})\sin k\varphi.$$

Nato razvijemo funkcijo f po lastnih vektorjih v prostoru $L^2([0,a]\times[-\pi,\pi];r)$ $f = \sum_{k,l}(p_{kl}u_{kl} + q_{kl}v_{kl})$. Če iščemo rešitev z nastavkom $u = \sum_{k,l}(c_{kl}u_{kl} + d_{kl}v_{kl})$, dobimo $c_{kl} = -p_{kl}/\lambda_{kl}, d_{kl} = -q_{kl}/\lambda_{kl}$ in

$$u(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^2p_{kl}\cos k\varphi + a^2q_{kl}\sin k\varphi}{\xi_{kl}^2} J_k(\xi_{kl}\frac{r}{a}),$$

$$a^2p_{kl} = \frac{2}{\pi J_{k+1}(\xi_{kl})}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a rf(r,\varphi)J_k(\xi_{kl}\frac{r}{a})\cos k\varphi\,drd\varphi,$$

$$a^2q_{kl} = \frac{2}{\pi J_{k+1}(\xi_{kl})}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a rf(r,\varphi)J_k(\xi_{kl}\frac{r}{a})\sin k\varphi\,drd\varphi.$$

Če je rešitev neodvisna od kota, je $k = 0$ in dobimo

$$u(r) = \sum A_k J_0(\xi_l r/a).$$

13. Toplotna enačba

1. Definicija

Toplotna ali difuzijska enačba je enačba

$$u_t = \triangle u.$$

Opisuje prevajanje toplote.

Izrek 13.1. *Parabolični princip maksima. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje z robom S in $0 < T < \infty$. Potem obstaja največ ena zvezna funkcija u na $\overline{D} \times [0, t]$, ki se na paraboličnem robu $(\overline{D} \times 0) \cup (S \times [0, T])$ ujema z dano funkcijo in reši enačbo $u_t = \triangle u$. Če je u zvezna na $\overline{D} \times [0, T]$ in reši enačbo $u_t = \triangle u$, zavzame maksimum na paraboličnem robu.*

2. Reševanje z integralskimi transformacijami

Kadar je območje D enako $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{R}^+$, rešujemo difuzijsko enačbo na D bodisi z Laplacovo transformacijo po t bodisi z eno od treh Fourierovih transformacij po x. Prva metoda ima prednost, kadar je začetni pogoj homogen, druga pa kadar je robni pogoj homogen. Laplacovo transformacijo po t bi lahko uporabili tudi v primeru, ko je D končen interval, vendar si v tem primeru raje pomagamo s separacijo spremenljivk.

Primeri.
1. *Prevajanje toplote po neskončni palici.* Rešimo enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnem pogoju

$$u(x, 0) = f(x),$$

kjer je f dana funkcija.

Resitev. Naj bo
$$v(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-izx}dx.$$
Dokaži, da je $v(z,0)=\mathcal{F}(f(x))(z)$ in $v_t=-c^2z^2v$. Odtod sledi, da je
$$v(z,t)=\mathcal{F}(f(x))(z)e^{-c^2z^2t}.$$

Pri računanju inverzne transformiranke potrebujemo še transformiranko funkcije
$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}e^{-x^2/4c^2t},$$
ki je
$$\mathcal{F}(g(x))(z)=e^{-c^2z^2t}.$$
Iz izreka o konvoluciji sledi
$$u(x,t)=f*g=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-(x-u)^2/4c^2t}du.$$
Po substituciji $\xi=(u-x)/2c\sqrt{t}$ dobimo
$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+2c\xi\sqrt{t})e^{-\xi^2}d\xi.$$

Definicija 13.2. *Funkciji*
$$\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$
pravimo toplotno jedro.

2. S pomočjo Fourierove transformacije reši enačbo
$$u_t=u_{xx}$$
na območju $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$ pri pogoju $u(x,0)=xe^{-x^2}$.

Resitev. Privzemimo, da lahko vedno zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja. Če z $v(z,t)$ označimo Fourierovo transformiranko $u(x,t)$ po spremenljivki x, enačba preide v
$$v_t(z,t)=-z^2v(z,t).$$

Za fiksen z je to navadna diferencialna enačba z začetnim pogojem

$$
\begin{aligned}
v(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}e^{-izx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{-izx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\left(-ize^{-izx}\right)dx \\
&= \frac{-iz}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-izx}dx \\
&= \frac{-iz}{2\sqrt{2}}e^{-z^2/4}.
\end{aligned}
$$

Rešitev tega začetnega problema je

$$v(z,t) = \frac{-iz}{2\sqrt{2}}e^{-z^2/4}e^{-z^2 t}.$$

Rešitev originalne enačbe dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} v(z,t)e^{izx}dz \\
&= \frac{i}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}\right)' e^{izx}dz \\
&= \frac{i}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\left(\left[e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}e^{izx}\right]_{z=-\infty}^{z=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}\left(e^{izx}\right)' dz\right) \\
&= \frac{x}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}e^{izx}dz \\
&= \frac{x}{(4t+1)^{3/2}}e^{-x^2/(4t+1)}.
\end{aligned}
$$

3. Reševanje s separacijo spremenljivk

Naj bo D območje z gladkim robom ∂D in $c > 0$ konstanta. Iščemo tako funkcijo $u = u(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \overline{D}$, $t \geq 0$, ki reši nehomogeno difuzijsko enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2}u_t + F(\mathbf{r}, t)$$

pri pogojih

$$u(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \overline{D},$$

$$\alpha(\mathbf{r})u(\mathbf{r},t) + \beta(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r},t) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad t \geq 0.$$

Recept je takle:

(a) Homogenizacija robnih pogojev. Če funkcija g ni identično enaka nič, potem uganemo tako funkcijo $w = w(\mathbf{r})$, ki zadošča pogoju

$$\alpha(\mathbf{r})w(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D$$

in napravimo substitucijo $u(\mathbf{r},t) = \tilde{u}(\mathbf{r},t) + w(\mathbf{r})$. Nova enačba je $\triangle \tilde{u} = \frac{1}{c^2}\tilde{u}_t + \tilde{F}(\mathbf{r},t)$, kjer je $\tilde{F} = F - \triangle w$, nova pogoja pa sta $\tilde{u}(\mathbf{r},0) = \tilde{f}(\mathbf{r})$, kjer je $\tilde{f} = f - w$ in $\alpha(\mathbf{r})\tilde{u}(\mathbf{r},t) + \beta(\mathbf{r})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\mathbf{r},t) = 0$.

(b) Reševanje lastnega problema. S separacijo spremenljivk rešimo lastni problem $\triangle v = \lambda v$, $\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial D} = 0$. Dobimo števno mnogo lastnih vrednosti, ki so vse negativne. Vsaki pripada končno lastnih vektorjev. Naj bo v_n kompleten ortogonalen sistem sestavljen iz lastnih vektorjev.

(c) Razvijemo $\tilde{F}(\mathbf{r},t) = \sum_n F_n(t)v_n(\mathbf{r})$ in $\tilde{f}(\mathbf{r}) = \sum_n f_n v_n(\mathbf{r})$, kjer

$$F_n(t) = \frac{\int_D \tilde{F}(\mathbf{r},t)v_n(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\int_D v_n(\mathbf{r})^2\,d\mathbf{r}}, \quad f_n = \frac{\int_D \tilde{f}(\mathbf{r})v_n(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\int_D v_n(\mathbf{r})^2\,d\mathbf{r}},$$

(d) Rešitev (nove) enačbe je

$$\tilde{u}(\mathbf{r},t) = \sum_n T_n(t)v_n(\mathbf{r}),$$

kjer je funkcija T_n rešitev začetne naloge

$$\lambda_n T_n(t) = \frac{1}{c^2}T_n'(t) + F_n(t), \quad T_n(0) = f_n.$$

Na koncu k $\tilde{u}$ prištejemo w, da dobimo u.

3.1 Kartezične koordinate.

Primer. Naj bo $c, l, T_0 > 0$. Reši toplotno enačbo za palico $[0, l]$, ki ima na začetku v točki $0 \leq x \leq l$ temperaturo $f(x)$ nato pa njeni krajišči držimo pri temperaturi 0. Podrobno bomo obravnavali primere

$$f(x) = T_0, \quad f(x) = T_0 x/l, \quad f(x) = T_0 x(l-x)/l^2,$$

kjer je T_0 konstanta.
Rešitev. Rešiti moramo enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

pri začetnem pogoju

$$u(x,0) = f(x)$$

in robnih pogojih

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Dobimo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi c)^2 t/l^2},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

V primeru $f(x) = T_0$ dobimo

$$f_n = \frac{2T_0}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right),$$

v primeru $f(x) = T_0 x/l$ je

$$f_n = \frac{2T_0}{n\pi} (-1)^{n+1},$$

v primeru $f(x) = T_0 x(l-x)/l^2$ pa

$$f_n = \frac{4T_0}{(n\pi)^3} \left(1 - (-1)^n\right).$$

3.2 Polarne koordinate.

Primer. Rešimo enačbo

$$u_t = \triangle u,$$

za krog $B^2(0,1)$, če ima rob kroga temperaturo 0, začetna porazdelitev temperature pa je

$$u(r,\varphi,0) = f(r).$$

Podrobno bomo obravnavali primera $f(r) = 1$ in $f(r) = 1 - r^2$.

Resitev. Separiramo spremenljivke $u(x,y,t) = T(t)K(x,y)$ in dobimo

$$\frac{T''}{T} = \frac{\triangle K}{K}.$$

Ker sta kvocienta kostantna, dobimo v krajevnem delu lastne funkcije za Laplacov operator v polarnih koordinatah, pri čemer upoštevamo, da je začetna porazdelitev odvisna samo od r. Zato so lastne funkcije 0-te Besslove funkcije z ustreznim argumentom. Naj bo ξ_n n-ta pozitivna ničla funkcije J_0 in

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r), \quad f_n = \frac{2}{J_1(\xi_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\xi_n r) dr.$$

Potem je rešitev naloge

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r) e^{-\xi_n^2 t}.$$

V primeru $f(r) = 1$ dobimo

$$f_n = \frac{2}{\xi_n J_1(\xi_n)},$$

v primeru $f(r) = 1 - r^2$ pa

$$f_n = \frac{8}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)}.$$

3.3 Black - Scholesova enačba. Večina diferencialnih enačb v finančni matematiki je paraboličnih. Kot primer si oglejmo **Black - Scholesovo** diferencialno enačbo, ki popisuje vrednotenje opcij.

Označimo z V vrednost opcije. Vrednost bo funkcija več spremenljivk: izpolnitvene cene E (strike price), dospelosti T (expiry date), trenutnega časa (t), osnovnega instrumenta S (underlying asset), σ in μ, ki sta parametra, povezana z osnovnim instrumentom, r je parameter, povezan z valuto, v kateri je opcija (currency). Mi se bomo omejili le na dve spremenljivki: t in S. Zahtevna izpeljava nas pripelje do Black - Scholesove diferencialne enačbe:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

Gre za linearno parabolično PDE, ki ima **končni pogoj**, tj. pogoj v času T. V primeru nakupne (call) opcije je

$$V(S,T) = \max(S - E, 0).$$

Člen z V_{SS} v DE lahko interpretiramo kot difuzijo v nehomogenem mediju, člen z V_S kot konvekcijo (pri difuziji dima v zraku bi tak člen ponazarjal npr. pihanje vetra), in reakcijo, ki jo predstavlja zadnji člen (enačba $u_t = au$ denimo popisuje radioaktivni razpad). Spomnimo, da ima modelna enačba obliko $u_t - u_{xx} = 0$ z danim z **začetnim pogojem**. S substitucijo

$$V(S,t) = e^{\alpha x + \beta t} U(x,\tau),$$

kjer je

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right), \quad \beta = -\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right), \quad S = e^x \text{ in } t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2},$$

diferencialno enačbo prevedemo na

$$U_t = U_{xx}$$

in pogoj $V(S,T) = \max(S - E, 0)$ na pogoj

$$U(x,0) = \max(e^x - E, 0)e^{-\alpha x}.$$

14. Valovna enačba

1. Definicija in D'Alembertova resitev

Valovna enačba je enačba

$$u_t = \triangle u.$$

V eni dimenziji opisuje nihanje strune, v dveh nihanje membrane itd. Za nihanje neskončne strune

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnih pogojih $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, nam rešitev pove D'Alembertova formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Valovno enačbo na končnem intervalu lahko rešujemo bodisi s separacijo bodisi z Laplacovo transformacijo po t. Računanje Fourierovih koeficientov se nadomesti z računanjem števno mnogo residuov.

2. Reševanje z integralskimi transformacijami

Primer. Rešimo enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju

$$u(0,t) = \phi(t)$$

in pri začetnih pogojih

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Rešitev. Dodatno definirajmo $\phi(t) = 0$ za $t \leq 0$. Z Laplacovo transformacijo po t dobimo

$$u(x,t) = \phi(t - \frac{x}{c}).$$

3. Reševanje s separacijo spremenljivk

3.1 Kartezične koordinate.

Primeri.

1. Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ dani odvedljivi funkciji, ki sta v 0 in l enaki 0 in naj bosta $c, l > 0$ konstanti. Rešimo enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

pri robnih pogojih

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

in pri začetnih pogojih

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $f(x) = 2h\min(\frac{x}{l}, 1 - \frac{x}{l})$, $g(x) = 0$.

(b) $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} 1 & h < x < l-h \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$.

Rešitev. Dobimo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + \frac{g_n l}{n\pi c} \sin\frac{n\pi ct}{l} \right] \sin\frac{n\pi x}{l},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad g_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Rešitev lahko zapišemo tudi v D'Alembertovi obliki

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x+ct) + F(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)ds,$$

kjer funkciji F in G dobimo tako, da funkciji f in g liho nadaljujemo iz $[0, l]$ na $[-l, l]$ nato pa periodično s periodo $2l$ na celo realno os. V primeru (a) dobimo

$$f_n = \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad g_n = 0,$$

v primeru (b) pa

$$f_n = 0, \quad g_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \cos \frac{n\pi h}{l}.$$

2. Rešimo enačbo $u_{tt} = \triangle u$ za vpeto membrano $[-1, 1]^2$, pri pogoju

$$u(x, y, 0) = (1 - x^2)(1 - y^2), \quad u_t(x, y, 0) = 0.$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \;&=\; 16 \sum_{l,n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2l+1)\pi}\right)^3 \left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)^3 (-1)^{l+k} \cdot \\ &\cos\left(\frac{\pi t}{2}\sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2}\right) \cos\left(\frac{(2l+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2}\right). \end{aligned}$$

3.2 Polarne koordinate.

Primer. Naj bosta $f(r)$ in $g(r)$ dani funkciji in $a, c > 0$ konstanti. Rešimo enačbo

$$u_{tt} = c^2 \triangle u$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u(a, t) = 0$$

in pri začetnih pogojih

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r).$$

Podrobno obravnavajmo primera

(a) $f(r) = h(1 - \frac{r^2}{a^2})$, $g(r) = 0$, kjer je $h > 0$ konstanta,

(b) $f(r) = 0$, $g(r) = v_0 \chi_{[0,b]}(r)$, kjer sta $v_0 > 0$ in $0 < b \leq a$ konstanti.

Rešitev. Dobimo

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n \cos \frac{c\xi_n t}{a} + \frac{a g_n}{c\xi_n} \sin \frac{c\xi_n t}{a} \right] J_0(\frac{\xi_n r}{a}),$$

kjer je ξ_n n-ta pozitivna ničla funkcije J_0 in

$$f_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2} \int_0^a r f(r) J_0(\frac{\xi_n r}{a}) dr,\ g_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2} \int_0^a r g(r) J_0(\frac{\xi_n r}{a}) dr.$$

V primeru (a) dobimo

$$f_n = \frac{8h}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)}, \quad g_n = 0,$$

v primeru (b) pa

$$f_n = 0, \quad g_n = \frac{2 v_0 b}{\xi_n a} \frac{J_1(\xi_n b/a)}{J_1(\xi_n)^2}.$$

15. Variacijski račun

1. Primeri

1.1 Brahistokrona. Brahistokrona (brahistos - najkrajši, kronos - čas) je ravninska krivulja, po kateri masna točka z dano začetno hitrostjo iz neke točke $A = (x_a, y_a)$ pride v drugo točko $B = (x_b, y_b)$ v najkrajšem času pod pogojem, da nanjo deluje konstanten gravitacijski pospešek. Trenja ni.

Postavimo telo v izhodišče koordinatnega sistema $A = (0, 0)$ in merimo y navzdol. Po izreku o kinetični in potencialni energiji je

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0.$$

Iz definicije hitrosti

$$v = \frac{ds}{dt}$$

dobimo za čas

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}.$$

Za čas, ki ga potrebuje telo iz začetne do končne točke, dobimo:

$$t = \int_0^{x_a} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_0^{x_a} \frac{ds}{\sqrt{2gy}},$$

kjer je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

kvadrat elementa ločne dolžine. Določiti moramo tir $y(x)$, pri katerem je pri dani začetni in končni točki čas potovanja t najkrajši. Iščemo minimum funkcionala

$$F(y) = \int_0^{x_b} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}.$$

Problem brahistokrone je postavil Johann Bernoulli in zanj leta 1696 prvi objavil rešitev, ki pa naj bi bila v resnici rešitev njegovega brata Jakoba. Probleme te vrste imenujemo variacijski problemi. Johann Bernoulli pa velja za očeta variacijskega računa. Splošno nalogo za brahistokrono je rešil Leonhard Euler leta 1774.

1.2 Izoperimetrični ali Didin problem. Vergil je v Eneidi predstavil naslednji problem.

> His commota fugam Dido sociosque parabat:
> conveniunt, quibus aut odium crudele tyranni
> aut metus acer erat; navis, quae forte paratae,
> corripiunt, onerantque auro: portantur avari
> Pygmalionis opes pelago; dux femina facti.
> Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis
> moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
> mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
> taurino quantum possent circumdare tergo.

Dido je bila Feničanka iz Tira, ki je zbežala pred tiranskim bratom na območje današnje Kartagine (novo mesto po feničansko). Sklenila je kupčijo, po kateri je dobila toliko zemlje ob obali, kolikor jo je lahko omejila s trakom iz ene bikove kože. Mesto naj bi prvotno nosilo ime Byrsa ali bikova koža. Problem si bomo malo poenostavili tako, da bomo izbrali fiksni točki a in b, obala morja pa naj bo ravna. Matematično iščemo ekstrem funkcionala

$$F(y) = \int_a^b y(x)\,dx$$

pri pogoju

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = c.$$

1.3 Geodetke. Dana je ploskev M in na njej točki A in B. Poišči najkrajšo pot od A do B. Taka pot se imenuje geodetka. Na sferi so geodetke krogi z največjim premerom. Iščemo minimum

$$\int_A^B ds,$$

kjer je ds element ločne dolžine krivulje na ploskvi. Oglejmo si primer sfere z radijem R. . Vsako krivuljo med točkama A in B lahko predstavimo s

parametrizacijo
$$\gamma(x) = (x, y(x), \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})$$
kjer je $x \in [a, b] \subset [-R, R]$. Točki določimo tako, da sfero zasukamo tako, da sta točki nad osjo x. Potem je
$$\dot{\gamma}(x) = (1, y', (-x - yy')/\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})$$
in
$$ds = (1 + y'^2 + (x + yy')^2/(R^2 - (x^2 + y^2)).$$
Iščemo minimum
$$F(y) = \int_a^b (1 + y'^2 + (x + yy')^2/(R^2 - (x^2 + y^2))\, dx.$$

2. Euler-Lagrangeva diferencialna enačba

Pri problemu brahistokrone iščemo minimum funkcionala
$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$
pri čemer mora biti $y(a) = A, y(b) = B$. Funkcija f naj bo vsaj enkrat zvezno odvedljiva. Recimo, da je minimum zavzet pri neki funkciji y. Če to funkcijo malo perturbiramo, se mora vrednost povečati. Naj bo η poljubna funkcija, ki ima ničli v a in b. Potem je
$$F(y + t\eta) - F(y) \geq 0$$
za vsak t. Izračunajmo
$$\begin{aligned}
F(y + t\eta) - F(y) &= \int_a^b f(x, y + t\eta, (y + t\eta)') - f(x, y, y')\, dx \\
&= \int_a^b f_y(x, y + \tau_1(x)\eta, y' + \tau_2(x)\eta')t\eta + \\
&\quad + f_z(x, y + \tau_1(x)\eta, y' + \tau_2(x)\eta')t\eta'\, dx \\
&= \int_a^b f_y(x, y + \tau_1(x)\eta, y' + \tau_2(x)\eta')t\eta + \\
&\quad + \int_a^b f_z(x, y + \tau_1(x)\eta, y' + \tau_2(x)\eta')t\eta'\, dx.
\end{aligned}$$

Delimo s t. Izraz
$$\frac{F(y+t\eta)-F(y)}{t}$$
je za negativne t negativen, za pozitivne pa pozitiven. Če obstaja limita, ko gre $t \to 0$, mora biti enaka 0. Ko gre $t \to 0$, gresta τ_1 in τ_2 tudi proti 0, zato dobimo
$$\lim_{t\to 0} \frac{F(y+t\eta)-F(y)}{t} = \int_a^b f_y(x,y,y')\eta + f_z(x,y,y')\eta'\,dx = 0.$$
Naredimo per partes na drugi člen, upoštevamo, da je $\eta(a) = \eta(b) = 0$ in dobimo Prepišemo v drugo obliko
$$\int_a^b (f_y(x,y,y') - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x,y,y'))\eta\,dx = 0.$$
Ker je bila funkcija η poljubna, mora biti
$$f_y(x,y,y') - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x,y,y') = 0.$$
Tej enačbi pravimo Euler-Lagrangeva enačba. Enak razmislek lahko naredimo pri funkcionalih, kjer nastopa še drugi odvod, le da moramo narediti dvakrat per partes. Naj bodo spremenljivke (x,y,z,w). Potreben pogoj, da ima funkcional
$$F(y) = \int_a^b f(x,y,y',y'')\,dx,$$
pri čemer mora biti $y(a) = A, y(b) = B$, minimum pri y je, da je
$$f_y(x,y,y',y'') - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x,y,y',y'') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_w(x,y,y',y'') = 0.$$

2.1 Euler-Lagrangeva enačba za $f = f(x,y)$. V tem primeru je $f_z = 0$, zato je rešitev dana z $f_y(x,y) = 0$. To je implicitna enačba za y.

2.2 Euler-Lagrangeva enačba za $f = f(x,y')$. V tem primeru je $f_y = 0$, zato je rešitev dana z $f_z(x,y) = c$.

2.3 Euler-Lagrangeva enačba za $f = f(y,y')$. V tej funkciji x eksplicitno ne nastopa. Zamenjamo vlogi x in y in pišemo $y' = 1/x'$. Potem je naša funkcija enaka $f(y,1/x')$, integral pa
$$\int_A^B f(y,y')\,dx = \int_a^b f(y,1/x')x'\,dy = \int_a^b L(y,x')\,dy.$$

Po prejšnjem primeru so rešitve oblike $L_{x'}(y,x') = c$. S posrednim odvajanjem dobimo

$$L_{x'}(y,x') = f(y,1/x') - \frac{1}{x'} f_z(y,1/x')x' = c.$$

Euler-Lagrangeva enačba je

$$f(y,y') - y' f_z(y,y') = c.$$

2.4 Brahistokrona. Rešimo problem brahistokrone. Funkcija f je enaka

$$f(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

Euler-Lagrangeva enačba je

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{(2gy)(1+y'^2)}} = c$$

Poenostavimo in dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{(2gy)(1+y'^2)}} = c.$$

Kvadriramo in premečemo:

$$y = \frac{1}{2gc^2(1+y'^2)}.$$

Pišimo $C^2 = 2gc^2$ in vstavimo $y' = \operatorname{ctg}(p/2)$. Potem je

$$y = \frac{1}{C^2}\sin^2(p/2) = \frac{1}{2C^2}(1-\cos p).$$

Iz posrednega odvajana dobimo formulo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dp}{dx/dp} = \operatorname{ctg}(p/2).$$

Izrazimo dx/dp

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dp} &= \frac{\sin p}{2C^2 \operatorname{ctg}(p/2)} \\
&= \frac{2\sin(p/2)\cos(p/2)}{2C^2\cos(p/2)\sin(p/2)} \\
&= \frac{1}{C^2}\sin^2(p/2) \\
&= \frac{1}{2C^2}(1-\cos p).
\end{aligned}$$

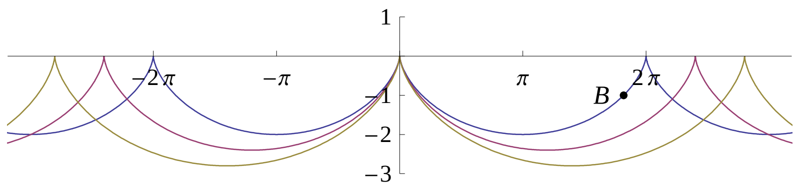
Integriramo in dobimo

$$x = \frac{1}{2C^2}(p - \sin p) + D.$$

Zaradi začetnega pogoja je $D = 0$. Pišimo $1/(2C^2) = R$ in dobimo Dobili smo parametrizacijo

$$x = R(p - \sin p), \quad y = R(1 - \cos p).$$

To je enačba cikloide. Skozi dano točko gre več cikloid. Prava je tista z najmanj volančki. Spomnimo se, da smo y merili navzdol. Naj gre cikloida npr. skozi točko $B = (3\pi/2 + 1, -1)$. Potem je $R = 1$. Graf je prikazan na sliki 15.1.



Slika 15.1: Cikloide pri radijih $1, 1.2, 1.4$

3. Izoperimetrični problem

Izoperimetrični problem je problem vezanega ekstrema. Iščemo minimu funkcionala

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

pri čemer mora biti $y(a) = A, y(b) = B$ pri pogoju

$$g(y) = \int_a^b g(x, y, y')\, dx = c.$$

Funkciji f in g naj bosta razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo minimu zavzet pri funkciji y. Privzeti smemo, da je $c = 0$. Problem bomo rešili tako, da ga bomo prevedli na vezani ekstrem v dveh spremenljivkah. Izberimo funkcijo η, ki ima v krajiščih vrednosti 0 in pišimo $\eta(x) = rz(x) + su(x)$, kjer imata z in s tudi ničli v krajiščih. Naj bo $F_1(r,z) = F(y + rz(x) + su(x))$ in $G_1(r,z) = G(y + rz(x) + su(x))$. Potem ima problem vezanega ekstrema

$$\min F_1(r,s), \quad G_1(r,s) = 0$$

rešitev pri $r = s = 0$. Po klasišni teoriji je to takrat, ko je gradient Lagrangeve funkcije

$$L(r,s,\lambda) = F_1(r,s) - \lambda G_1(r,s)$$

enak 0. Parcialni odvod na λ je ravno vez, parcialna odvoda na r in s pa sta

$$L_r(0,0) = F_{1,r}(0,0) - \lambda G_{1,r}(0,0) = 0, \quad L_s(0,0) = F_{1,s}(0,0) - \lambda G_{1,s}(0,0) = 0.$$

V matrični obliki to pomeni, da je determinanta

$$\begin{vmatrix} F_{1,r}(0,0) & G_{1,r}(0,0) \\ F_{1,s}(0,0) & G_{1,s}(0,0) \end{vmatrix} = 0.$$

Izračunajmo parcialne odvode.

$$\begin{aligned} F_{1,r}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(y + hz(x)) - F(y)) \\ &= \int_a^b (f_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y'))z(x)\,dx. \end{aligned}$$

Enako dobimo za parcialni odvod $F_{1,s}$ in za parcialne odvode $G_{1,r}$, $G_{1,s}$. Dobimo enačbo

$$\int_a^b \left[f_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y') - \lambda(g_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y')) \right] z(x)\,dx = 0$$

oziroma

$$(f_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y')) - \lambda(g_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} g_z(x,y,y')) = 0.$$

Ugotovimo, da iščemo ekstrem funkcionala

$$H(y,\lambda) = F(y) - \lambda G(y) = \int_a^b L(x,y,y',\lambda)\,dx$$

kjer je

$$L(x,y,y',\lambda) = f(x,y,y') - \lambda g(x,y,y').$$

Enačbo, ki smo jo izpeljali, pa lahko napišemo v obliki

$$L_y = \frac{d}{dx} L_z.$$

4. Parametrični variacijski problem

4.1 Euler-Lagrangeva enačba za $f = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Zanima nas minimum funkconala

$$F(x, y) = \int_a^b f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

med funkcijami z $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$, $y(a) = y_a$ in $y(b) = y_b$. Izpeljava je podobna kot v osnovnem primeru, le da moramo pogledati spremembo v dveh spremenljivkah: Naj bosta η_1, η_2 poljubni funkciji, ki imata ničli v a in b in naj ima funkcional minimu pri danih funkcijah x in y. Potem je

$$F(x + t\eta_1, y + s\eta_2) - F(y) \geq 0$$

za vsak t. Izračunajmo izraz

$$I(s, t) = F(x + t\eta_1, y + s\eta_2) - F(y).$$

$$\begin{aligned}
I(s,t) &= \int_a^b f(t, x + t\eta_1, \dot{(x + t\eta_1)}, y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)}) - f(x, y, \dot{y})\, dx \\
&= \int_a^b [f(t, x + t\eta_1, \dot{(x + t\eta_1)}, y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)}) - \\
&\qquad -f(t, x, \dot{x}, y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)})] + \\
&\qquad +[f(t, x, \dot{x}, y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)}) - f(x, y, \dot{y})]\, dx \\
&= \int_a^b [f_x(t, x + \tau_1(t)\eta_1, \dot{x} + \tau_2(t)\dot{\eta}_1, y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)})t\eta_1 + \\
&\qquad +f_{\dot{x}}(t, x + \tau_1(t)\eta_1, \dot{x} + \tau_2(t)\dot{\eta}_1 y + s\eta_2, \dot{(y + s\eta_2)})t\dot{\eta}_1] + \, dx \\
&+ \int_a^b [f_y(t, x, \dot{x}, y + \sigma_1(t)\eta_2, \dot{y} + \sigma_2(t)\dot{\eta}_2)t\eta_2 + \\
&\qquad +f_{\dot{y}}(t, x, \dot{x}, y + \sigma_1(t)\eta_2, \dot{y} + \sigma_2(t)\dot{\eta})t\dot{\eta}_2]\, dx.
\end{aligned}$$

Če vzamemo $\eta_2 = 0$, dobimo po enakem razmisleku kot prej Euler-Lagrangevo enačbo za funkcijo x :

$$f_x = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}},$$

Č pa je $\eta_1 = 0$, dobimo enako enačbo za funkcijo y :

$$f_y = \frac{d}{dt} f_{\dot{y}}.$$

4.2 Splošni primer. Če je funkcij več, se uporablja nekoliko drugačna pisava. Funkcijo f zamenja funkcija L z oznakami

$$L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}).$$

Uvedemo

$$p_i = L_{\dot{q}_i}$$

in Hamiltonovo funkcijo

$$H(t, \vec{q}, \dot{p}) = \vec{p}\dot{\vec{q}} - L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}).$$

Enačbe

$$L_{q_i} = \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i}$$

se prepišejo v

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -H_{q_i}(t, \vec{q}, \dot{p}), \\ \dot{q}_i &= H_{p_i}(t, \vec{q}, \dot{p}). \end{aligned}$$

5. Didin problem

Zdaj imamo na voljo vsa sredstva, da rešimo Didin problem. Združiti moramo parametrični variacijski račun in robni variacijski račun. Funkcional F je

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\, dt,$$

robni pogoj pa

$$G(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2(t)' + \dot{y}^2(t)}\, dt - c = 0.$$

Začetna in končna točka sta dani z $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$, $y(a) = y_a$ in $y(b) = y_b$. Za funkciji x in y dobimo enačbi

$$f_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \lambda(g_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})) = 0$$

in

$$f_y(t, x, y, \dot{x}\dot{y}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{y}}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \lambda(g_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \frac{d}{dt} g_{\dot{y}}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})) = 0.$$

V našem primeru je

$$f_x = \dot{y}/2,\ f_{\dot{x}} = -y/2, g_x = 0,\ g_{\dot{x}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{x}.$$

Prva enačba je

$$\dot{y}/2 + \frac{d}{dt}y/2 + \lambda\frac{d}{dt}((\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{x}) = 0.$$

Integriramo po t :

$$(y - d) + \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{x} = 0.$$

Podobno dobimo pri drugi enačbi. Parcialni odvodi so

$$f_y = -\dot{x}/2,\ f_{\dot{y}} = x/2, g_y = 0,\ g_{\dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{y},$$

enačba pa

$$-\dot{x}/2 - \dot{x}/2 + \lambda\frac{d}{dt}((\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{y}) = 0.$$

Integriramo po t :

$$(x - c) - \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{y} = 0.$$

Dobili smo sistem enačb

$$\begin{aligned}(x - c) - \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{y} &= 0,\\ (y - d) + \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\dot{x} &= 0.\end{aligned}$$

Prvo pomnožimo z $\dot{x}$, drugo z $\dot{y}$ in seštejemo:

$$(x - c)\dot{x} + (y - d)\dot{y} = 0.$$

Integriramo po t in dobimo

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2.$$

Dobili smo družino krožnic z radijem r. Upoštevati moramo še vez in začetne pogoje. Zaradi enostavnosti smemo privzeti, da je $A = (0, 0)$ in $B = (b, 0)$. Očiten pogoj je, da mora biti dolžina C večja od razdalje med točkama, $C > b$. Iz predpostavk sledi, da je $c = b/2$ in $d^2 + (b/2)^2 = r^2$, $d = \pm\sqrt{r^2 - b^2/4}$. Parametrizirajmo krožnice, da bomo laže izračunali, katera ima predpisam obseg. Naj bo $x = c + r\cos\varphi$ in $y = d + r\sin\varphi$. Del krožnice nad osjo x mora imeti obseg enak C. Iz parametrizacije sledi $\varphi_0 = \pm\arccos(b/2r)$. Znak izberemo glede na velikost C. Če je C večji od $\pi b/2$, moramo vzeti minus, ker dobimo več kot polovico kroga, za d pa plus: $\varphi_0 = -\arccos(b/2r)$, $d = \sqrt{r^2 - b^2/4}$. Dolžina je $r(\pi - 2\varphi_0) = C$, oziroma

$$r \sin(C/(2r)) = b/2.$$

Iščemo ničlo funkcije

$$(2r)\sin(C/(2r)) - b.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $C/(2r) = u$ se enačba prepiše v

$$\sin u = \frac{b}{C} u.$$

V splošnem nima analitične rešitve. Zanimajo nas rešitve za $r > C/(2\pi)$, saj je najmanjši možni radij tisti, pri katerem dobimo cel krog. Za spremenljivko u je to interval $(0, \pi]$. Rešitev določimo numerično.

Izberimo še konkretne številke. Naj bo $b = 2$ in $C = 9\pi$. Potem imamo družino krožnic

$$\begin{aligned} x &= 1 + r\cos\varphi, \\ y &= \sqrt{r^2 - b^2/4} + r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Ker je $\pi < 2\pi$, bomo vzeli rešitev

$$\varphi_0 = -\arccos(-1/r).$$

Enačba, ki jo dobimo, je

$$\cos(9\pi/(2r) - \pi/2) = -1/r,$$

oziroma

$$r\sin(9\pi/(2r)) = 1.$$

Poglejmo si ti funkciji na grafu. Funkcija $r\sin(9\pi/(2r))$ ima limito $9\pi/2$ in narašča od nekod dalje (zagotovo od 9 dalje), zato ima s funkcijo 1 končno presečišč. Presečišča so $r_1 = 1$, $r_2 = 1.61443$, $r_3 = 2.084$ in $r_4 = 4.82064$. Minimun za r je dan s pogojem $9\pi/(2\pi) = 4.5$, torej je prava zadnja rešitev.

Pripomnimo še, da v primeru $b = 0$ iščemo krivuljo, ki pri fiksnem obsegu obsega lik z največjo ploščino. Pri $b = 0$ dobimo $c = 0$ in $d = r$, parametrizacija krožnic je

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r + r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Iščemo ničlo funkcije

$$(2r)\sin(C/(2r)).$$

To je seveda pri $C = 2\pi r$.

Didin problem je v resnici malce drugačen. Točka B ni fiksna. Izračunajmo ploščino, ki jo dobimo pri točki $(b, 0)$ in jo izrazimo z r. Spodnja meja za r je $C/(2\pi)$, ko dobimo cel krog, zgornje meje pa nimamo. Ploščina je enaka vsoti ploščin krožnega izseka in trikotnika, če je središče nad osjo. Kot, ki pripada izseku, je C/r.

$$\begin{aligned}
P(r) &= \frac{C}{2\pi r}\pi r^2 + r|\cos(C/2r)r\sin(C/2r)| \\
&= \frac{Cr}{2} + \frac{r^2|\sin(C/r)|}{2} \\
&= \frac{Cr}{2} - \frac{r^2\sin(C/r)}{2},
\end{aligned}$$

saj je v tem primeru $\sin(C/r)$ negativen. Če je središče pod osjo x, je kot, ki pripada izseku pozitiven, vendar moramo v tem primeru ploščino izseka odšteti, tako da dobimo isto formulo. Zanima nas ekstrem funkcije $P(r)$ na intervalu $[C/(2\pi), \infty)$. Zaradi enostavnosti uvedimo novo spremenljivko $u = C/r$. Potem je

$$P(r) = S(u) = \frac{C^2}{u} - \frac{C^2\sin u}{u^2}.$$

Točka, kjer je zavzet ekstrem, je pričakovano neodvisna od C, ampak le od razmerja C/r. Ekstrem u iščemo na intervalu $(0, 2\pi]$. Odvajajmo S in poiščimo ničlo odvoda:

$$S'(u) = -\frac{C^2}{u^2} - \frac{C^2}{u^2}\cos u + \frac{2C^2\sin u}{u^3} = 0,$$

oziroma

$$1 + \cos u - \frac{2\sin u}{u} = 0.$$

Eno rešitev takoj uganemo, in sicer $u = \pi$. To pomeni, da je $C = \pi r$ in da imamo opravka s polovico kroga s ploščino $P = C^2/\pi^2$. Poiščimo še ostale. S prehodom na polovične kote dobimo

$$1 + \cos u - \frac{\sin u}{u} = -2\sin(u/2)(1 + 2\cos(u/2)/u).$$

Izraz v oklepaju je 0 le, če je $\cos(u/2) = -u/2$. Ta enačba pa na intervalu $[0, 2\pi]$ nima rešitve. Poglejmo še vrednosti S v krajiščih. V krajišču 0 ima funkcija S limito 0 :

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{C^2}{u} - \frac{C^2}{u^2}(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots) \\ &= \frac{C^2}{u}(1 - 1 + \frac{u}{3!} + \frac{u^3}{5!} + \ldots) \\ &= 0, \end{aligned}$$

v krajišču 2π pa je

$$S(2\pi) = \frac{C^2}{4\pi^2}.$$

6. Eksistenca minima in goljufije

6.1 Eksistenca minima.

Hilbert je prvi podal pogoje, pri katerih so rešitve Euler-Lagrangevih enačb res stacionarne točke. Pogledali si bomo najenostavnejši primer, ko sta območje in funkcija konveksna. Funkcija dveh spremenljivk razreda C^2 je konveksna, če je Hessejeva matrika pozitivno (nenegativno) definitna.

Izrek 15.1. *Naj bo*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

pri čemer mora biti $y(a) = A, y(b) = B$. Funkcija f naj bo vsaj dvakrat zvezno odvedljiva na y in z. Naj bo definicijsko območje D_f tako, da je množica

$$M_x = \{(y, z),\ (x, y, z) \in D_f\}$$

konveksna in $f(x, \cdot, \cdot)$ konveksna na M_x za vsak x, za katerega je $M_x \neq \emptyset$. Če je y rešitev Euler-Lagrangeve enačbe, ki zadošča robnim pogojem, ima $F(y)$ minimum pri y.

6.2 Goljufija.

Goljufali smo pri brahistokroni. Pri izpeljavi smo zamenjali vlogo x in y, pri rešitvi pa smo na to pozabili. Težava je v tem, da mora biti ciljna točka taka, da je na delu cikloide pred temenom, saj sicer zamenjava koordinat ni več legalna - x-a ne moremo predstaviti kot funkcijo y. Oglejmo si parametrizacijo cikloide:

$$x = R(p - \sin p), \quad y = R(1 - \cos p).$$

Teme ima pri $p = \pi$, v točki $(R\pi, 2R)$. Kvocient

$$K(x(p), y(p)) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1 - \cos p}{p - \sin p}$$

pove naklonski kot premice skozi $(0,0)$ in $(x(p), y(p))$ in je padajoč:

$$\left(\frac{1 - \cos p}{p - \sin p}\right)' = \frac{p \sin p - 2 + 2\cos p}{(p - \sin p)^2} = \frac{\sin p(p - 2\operatorname{tg}(p/2))}{(p - \sin p)^2} \leq 0.$$

Zato mora biti

$$K(B) = \frac{y_b}{x_b} \geq K(R\pi, 2R) = \frac{2}{\pi}.$$

Potem je rešitev prava. Naša rešitev za $B = (3\pi/2 + 1, 1)$ je bila taka, da je ležala na drugi strani temena. Pogoj ni izpolnjen.

$$\frac{1}{2\pi/2 + 1} \doteq 0.175058, \ \frac{2}{\pi} \doteq 0.63662.$$

Za točke levo od temena je izpolnjen pogoj konveksnosti. Zamenjamo vlogo x in y in dobimo

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, dx = \int_A^B \sqrt{\frac{1 + x'^{-2}}{2gy}} x'\, dy = \int_A^B g(y, x, x')\, dy$$

Odvodi so

$$g_{xx} = 0, \ g_{xx'} = 0, \ g_{x'x'} = (x'^2 + 1)^{-3/2} y^{-1/2} > 0.$$

Hessejevka je pozitivno (nenegativno) definitna.

7. Investiranje v podjetjih

Privzemimo, da imamo podjetje, ki je vodeno racionalno [1]. Naj na trgu vlada tekmovanje. Radi bi maksimirali sedanjo vrednost prihodnjega denarnega toka. Ta vrednost je dana s formulo

$$V = \int_0^\infty e^{-R(t)} [P(t)Q - w(t)L(t) - C(I)]\, dt, \tag{15.1}$$

[1] J.P.Gould, Ajdustment Costs in the Theory of Investment of the Firm, The Review of Economic Studies, Vol. 35., No.1. (1986, p.47 - 55)

kjer je

(a) $R(t) = e^{\int_0^t r(s)\,ds}$ diskontni faktor, r pa obrestna mera,

(b) $P(t)$ je vrednost produkta v odvisnosti od časa,

(c) Q je produkt,

(d) $w(t)$ je cena dela,

(e) $L(t)$ je vloženo delo,

(f) $C(I)$ so stroški investiranja v odvisnosti od reda inversitanja I,

(g) $Q = F(K, L)$ je produkcijska funkcija, kjer je K vrednost osnovnih sredstev (kapital),

(h) $I = \dot{K} + D(K)$, kjer je $D(K)$ amortizacija.

Določili bi radi funkciji L in K, da bo vrednost 15.1 maksimalna.

Motivacija za uvedbo tega modela je želja po zmanjšanju (ali eliminaciji) težav, ki nastanejo pri ad hoc dinamični teoriji. Standardni pristop k temu problemu je bil določiti želena osnovna sredstva K^* iz statičnega modela maksimiranja dobička in ga potem uporabiti kot želeni kapital na dolgi rok. Kot primer je modeliranje z enačbo

$$\dot{K} = \gamma(K^* - K).$$

Težava tega pristopa je, da se ne ozira na to, koliko kapitala je v resnici na voljo. Na veliko spremenljivk, ki določajo K^*, npr. plače, dobiček, K^* vpliva in zato ne prikazuje prave želene vrednosti v nobenem trenutku, dokler ni doseženo ravnovesje. Investiranje predstavlja odločitev, ki vpliva na dobiček in mora biti ali upoštevana pri kriterijski funkciji ali pa upoštevana kot omejitev pri dobičku.

Obstaja več načinov, kako rešimo te težave. Izkazalo se je, da v veliko primerih investiranje ustreza enačbi 15.1. Določiti moramo še funkcijo C. Jasno je, da bo odvisna od empiričnih podatkov, ki so različni za različne panoge. Privzemimo nekaj smiselnih lastnosti, ki veljajo splošno.

(a) Za $I > 0$ mora biti $C(I) > 0$, $C'(I) > 0$ in $C(0) = 0$.

(b) Nekaterim avtorjem se zdi smiseln privzetek, da je tudi $C''(I) > 0$.

Najpreprostejša funkcija, ki ima te lastnosti, je funkcija

$$C(I) = q_0 I + q_1 I^2.$$

Privzeli bomo še, da je

$$D(K) = \delta K,$$

odvisna le od kapitala. Produkcijska funkcija naj bo homogena reda 1.

Definicija 15.2. *Funkcija $f(x,y)$ je homogena reda α če je*

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

Primeri funkcij, homogenih reda 1 :

$$ax + by,\ \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{ex + dy},\ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, x\sin(y/x).$$

Če je funkcija f homogena reda 1, so parcialni odvodi homogeni reda 0. Zapišimo f drugače:

$$f(x,y) = f\left(x, x\frac{y}{x}\right) = xf\left(1, \frac{y}{x}\right) = xg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Izračunajmo parcialni odvod na x :

$$f_x(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) - xg'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} = g\left(\frac{y}{x}\right) - g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Prevedimo naš problem v jezik variacijskega računa. Računamo ekstrem funkcionala

$$V = \int_0^\infty H(K, L, \dot{K}, \dot{L})\, dt,$$

$$H(K, L, \dot{K}, \dot{L}) = PF(K, L) - wL - C(\dot{K} + \delta K),$$

pri čemer vrednosti L in K za $t = \infty$ niso dane. Za $t = 0$ že imamo dane vrednosti. Pri računu prve variacije dobimo pogoj, da sta integrala 0 za vsako dopustno funkcijo η :

$$\int_0^\infty H_K(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta + H_{\dot{K}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta'\, dt = 0,$$

in

$$\int_0^\infty H_L(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta + H_{\dot{L}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta'\, dt = 0.$$

Ko naredimo per partes na drugi člen, se zintegrirani del ne uniči nujno:

$$Int_1 = \int_0^\infty [H_K(K,L,\dot K,\dot L) - \frac{d}{dt}H_{\dot K}(K,L,\dot K,\dot L)]\eta\,dt + H_{\dot K}(K,L,\dot K,\dot L)\eta\Big|_0^\infty.$$

Ker so med dopustnimi funkcijami tudi take, ki imajo 0 v neskončnosti, dobimo Euler-Lagrangevo enačbo. Ker pa so vrednosti v krajišču ∞ poljubne, bo zadnji člen enak 0 le, če bo

$$H_{\dot K}(K(\infty),L(\infty),\dot K(\infty),\dot L(\infty)) = 0.$$

Podobno velja za odvode na L in $\dot L$. Tem pogojem pravimo transverzalnostni pogoji. Problem, ki ga imamo, je enostavnejši primer problema s prostimi krajišči. Ker $\dot L$ eksplicitno ne nastopa, so Euler-Lagrangeve enačbe za naš primer

$$H_L = e^{-R(t)}[PF_L - w] = 0 \tag{15.2}$$

in

$$\begin{aligned}
H_K - \tfrac{d}{dt}H_{\dot K} &= e^{-R(t)}(PF_K - C'(\dot K+\delta K)\delta) + \tfrac{d}{dt}e^{-R(t)}C'(\dot K+\delta K)\\
&= e^{-R(t)}\Big(PF_K - C'(\dot K+\delta K)\delta + C''(\dot K+\delta K)(\ddot K+\delta\dot K) -\\
&\quad -R'(t)C'(\dot K+\delta K)\Big)\\
&= e^{-R(t)}\Big(PF_K - C'(\dot K+\delta K)(\delta + r(t)) +\\
&\quad +C''(\dot K+\delta K)(\ddot K+\delta\dot K)\Big).
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Iz enačbe 15.2 dobimo

$$F_L = F_L\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{w}{P}.$$

Od tod dobimo zvezo med K in $L:$

$$\frac{K}{L} = F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right).$$

Ker je tudi odvod na K homogen reda 0, je odvisen le od kvocienta K/L, zato smemo pisati

$$PF_K(K,L) = PF_K\left(\frac{K}{L}\right) = PF_K\left(F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right)\right) = PG\left(\frac{w}{P}\right).$$

Upoštevajmo še, da je $C'(I) = 2q_1 I + q_0$, $C'' = 2q_0$ in poenostavimo

$$\begin{aligned}
\text{zadnji del} &= -C'(\dot K+\delta K)(\delta+r(t)) + C''(\dot K+\delta K)(\ddot K+\delta\dot K)\\
&= -(2q_1(\dot K+\delta K)+q_0)(\delta+r(t)) + 2q_1(\ddot K+\delta\dot K)\\
&= 2q_1\ddot K - \dot K(2q_1(\delta+r(t)) + 2q_1\delta) + K(2q_1(\delta(\delta+r(t))).
\end{aligned}$$

Celotna diferencialna enačba je

$$2q_1\ddot{K} - 2q_1 r(t)\dot{K} + 2q_1\delta(\delta + r(t)) - q_0(\delta + r(t)) + PG\left(\frac{w}{P}\right) = 0.$$

Delimo z $2q_1$ in dobimo

$$\ddot{K} - r(t)\dot{K} + \delta(\delta + r(t)) + \frac{PG\left(\frac{w}{P}\right) - q_0(\delta + r(t))}{2q_1} = 0.$$

Če upoštevamo

$$\dot{I} = \ddot{K} + \delta\dot{K},$$

se enačba prepiše v

$$\dot{I} = (r(t) + \delta)I - f(t),$$

kjer je

$$f(t) = \frac{PG\left(\frac{w}{P}\right) - q_0(\delta + r(t))}{2q_1}.$$

Privzemimo, da so funkcije, ki nastopajo v f take, da je f zvezna, pozitivna in omejena. Splošna rešitev skozi (t_0, I_0) je dana s formulo

$$I(t) = I_0 e^{\int_{t_0}^{t}(r(s)+\delta)\,ds} - \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t}(r(\sigma)+\delta)\,d\sigma} f(s)\,ds.$$

Manjka nam začetni pogoj. Matematik obupa, ekonomist pa poskuša poiskati kak naravni pogoj in izbere začetno točko ∞. Ker je integral

$$\int_{\infty}^{t}(r(s) + \delta)\,ds = -\infty,$$

člen z I_0 odpade in dobimo rešitev

$$I(t) = \int_{t}^{\infty} f(s) e^{-\int_{t}^{s}(r(\sigma)+\delta)\,d\sigma}\,ds.$$

Preverimo še, da rešitev ustreza transveralnostnim pogojem.

$$H_{\dot{K}} = -e^{-R(t)}(2q_1(\dot{K} + \delta K) + q_0) = -e^{-R(t)}(2q_1 I + q_0).$$

Če privzamemo, da je $r > c > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} = 0,$$

moramo dokazati le, da je

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} I = 0.$$

Ker je f po privzetku omejena, recimo z M, in je $R(t)$ naraščajoča, je $R(t) - R(s) \leq 0$ na integracijskem območju in

$$I \leq M \int_t^\infty e^{R(t)-R(s)+\delta(t-s)}\, ds \leq M \int_t^\infty e^{\delta(t-s)}\, ds \leq \frac{M}{\delta}$$

Potem je

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} I = 0.$$

Poiščimo še eksplicitno rešitev za primer, ko so spremenljivke r, w, P konstante. Potem je f konstanta in I je enaka

$$I(t) = I^* = \frac{f}{r+\delta}.$$

Izračunajmo še K. Ta ustreza diferencialni enačbi

$$\dot{K} + \delta K = I^*.$$

Rešitev je

$$K(t) = K_0 e^{-\delta t} + \frac{I^*}{\delta}.$$

Ravnovesna rešitev je

$$K^* = \frac{I^*}{\delta}.$$

Rešitev za L je

$$L = \frac{K}{F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right)} = \frac{1}{F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right)} \left(K_0 e^{-\delta t} + \frac{I^*}{\delta}\right).$$