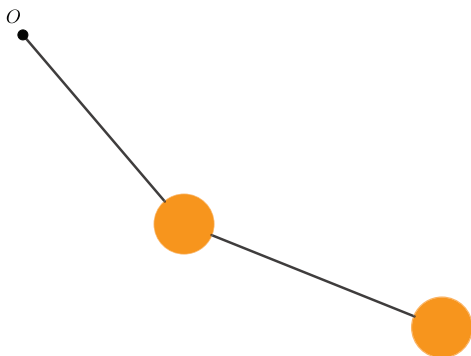


Dvojno nihalo po domače

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Dvojno nihalo tvorita dve običajni nihali, povezani, kot bi rekli po električno, zaporedno. Na utež, ki je z zelo lahko in togo palico pritrjena na strop, je prav s tako palico pritrjena druga utež, glej sliko 1. Obe palici sta na uteži in strop pritrjeni vrtljivo brez trenja.



SLIKA 1.

Sestava dvojnega nihala.

Takega nihala ni prav preprosto narediti, a za zdaj lahko namesto togih palic uporabimo kar vrvico, ki povezuje obe uteži. Na sliki 2 smo z vrvico povezali dve matici, ki smo ju prej prevrtali, da smo lažje pritrčili nanju vrvico. Pri ne prevelikih odmikih od navpične lege, kjer tako nihalo obmiruje, sta vrvici ves čas napeti, razdalji med utežema ter zgornjo utežjo in pritržitščem sta vseskozi enaka. Pozneje, ko bomo obravnavali nihanje z velikimi odmiki, bomo morali namesto vrvice privzeti togi palici.

Slutimo, da bo gibanje nihala pri velikih odmikih zelo zapleteno. Zato se najprej posvetimo nihanju z

zelo majhnimi odmiki. Tudi takrat gibanje ni prav nič preprosto in skoraj nimamo upanja, da bi se ga dalo računsko opisati. A ne obupajmo prezgodaj! Poskusimo najti tako nihanje obeh uteži, kot ga opazimo pri enojnem, to je običajnem nitnem nihalu. Vemo, da le-to niha harmonično, torej se njegov odmik od ravnovesja x_0 da opisati s sinusno ali kosinusno funkcijo časa. Ko izberemo funkcijo kosinus, imamo:

$$\blacksquare x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Pri začetnem času $t = 0$ je nihalo najbolj izmaknjeno iz ravnovesne lege, ta odmik imenujemo amplituda. Hitrost nihala je tedaj enaka nič. Pogostost nihanja meri krožna frekvenca ω , ki je, kot se še spomnimo iz pouka fizike:

$$\blacksquare \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Odmik v navpični smeri je tako majhen, da ga lahko zanemarimo.

Poskusimo najti harmonično nihanje dvojnega nihala z majhnimi amplitudami. Vsaka od uteži naj niha harmonično z enako krožno frekvenco ω , vsaka s svojo amplitudo, denimo x_{01} in x_{02} , torej:

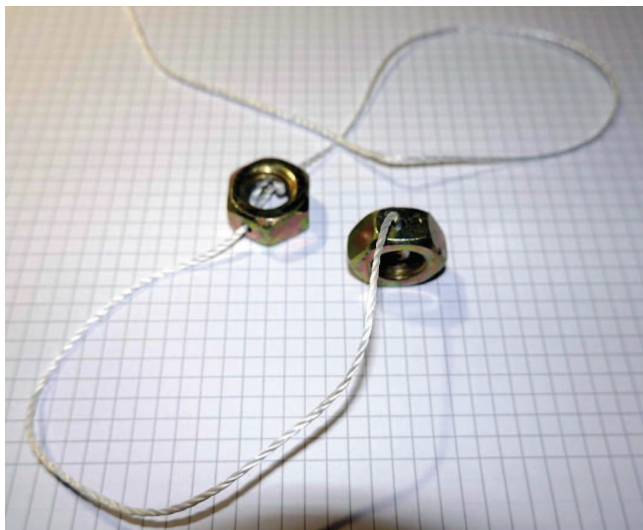
$$\blacksquare x_1(t) = x_{01} \cos \omega t,$$

$$\blacksquare x_2(t) = x_{02} \cos \omega t.$$

V ravnovesni legi sta vrvici napeti z različnima silama, zgornja s silo $F_1 = 2mg$, saj mora nositi obe uteži, za kateri bomo privzeli, da imata enako maso, spodnja s silo $F_2 = mg$, saj nosi le spodnjo utež. Pri majhnih nihanjih bomo privzeli, da sta ti dve sili tudi takrat. Ker imamo obe sili v vrvicah, ni težko napisati Newtonovega zakona za obe uteži. Na zgornjo utež poleg zgornje vrvice deluje še spodnja. Komponenta sile na zgornjo utež v vodoravni smeri sta:

$$\blacksquare F_{x1} = -F_1 \sin \vartheta_1 + F_2 \sin \vartheta_2$$





SLIKA 2.

Dvojno nihalo. Na prevrtanih maticah sta pritrjeni povezovalni vrvti .

in

$$\blacksquare F_{x2} = -F_2 \sin \vartheta_2 .$$

Tu sta ϑ_1 in ϑ_2 kota, ki ju oklepata vrvti z navpičnico, glej sliko 3.

Sinusa kotov lahko izazimo z odmiki obeh nihala:

$$\blacksquare \sin \vartheta_1 = \frac{x_1}{l} ,$$

$$\blacksquare \sin \vartheta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l} .$$

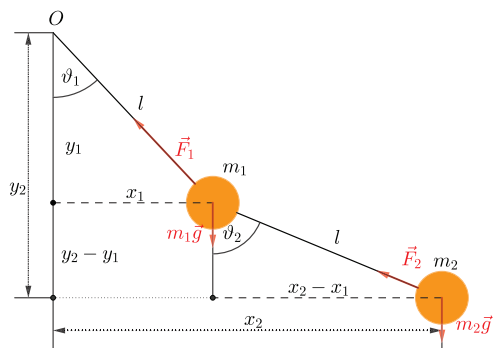
Newtonov zakon za gibanje uteži zapišemo takole:

$$\blacksquare ma_{x1} = F_{x1} = -2mg \frac{x_1}{l} + mg \frac{x_2 - x_1}{l} ,$$

$$\blacksquare ma_{x2} = F_{x2} = -mg \frac{x_2 - x_1}{l} .$$

Sedaj poskusimo s harmoničnim nastavkom za odmika x_1 in x_2 . Pri harmoničnem nihanju je pospešek uteži sorazmeren z odmikom:

$$\blacksquare a = -\omega^2 x .$$



SLIKA 3.

Spremenljivke dvojnega nihala.

Zgornji enačbi sta potem:

$$\blacksquare -\omega^2 x_{01} \cos \omega t = -2g \frac{x_{01}}{l} \cos \omega t + g \frac{x_{02} - x_{01}}{l} \cos \omega t ,$$

$$\blacksquare -\omega^2 x_{02} \cos \omega t = -g \frac{x_{02} - x_{01}}{l} \cos \omega t .$$

Vidimo, da se $\cos \omega t$ pojavi na obeh straneh enačb, torej je harmonično nihanje dvojnega nihala možno. Za amplitudi obeh uteži dobimo tile enačbi:

$$\blacksquare (-\omega^2 + 3\frac{g}{l})x_{01} = \frac{g}{l}x_{02} ,$$

$$\blacksquare \frac{g}{l}x_{01} = (-\omega^2 + \frac{g}{l})x_{02} .$$

Enačbama ni mogoče zadostiti pri poljubeni krožni frekvenci ω , lahko pa pri povsem določeni. Ko izrazimo razmerji $\frac{x_{01}}{x_{02}}$ iz obeh enačb in ju izenačimo, saj morata biti v obeh enačbah enaki, dobimo tole enačbo za ω^2 :

$$\blacksquare \omega^4 - 4\frac{g}{l}\omega^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0 .$$

Ta enačba za ω^2 ima dve rešitvi:

$$\blacksquare \omega_{I,II}^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}) .$$

Le pri teh dveh kotnih frekvencah bosta uteži dvojnega nihala nihali harmonično. Imenujemo ju lastni frekvenci. Iz enačb za amplitudi x_{01} in x_{02} dobimo njuni razmerji pri teh dveh frekvencah

$$\left(\frac{x_{01}}{x_{02}} \right)_I = -(\sqrt{2} + 1),$$

pri višji frekvenci in

$$\left(\frac{x_{01}}{x_{02}} \right)_{II} = (\sqrt{2} - 1),$$

pri nižji.

Na naslednji sliki (slika 4) sta prikazana oba načina harmoničnega nihanja tega nihala. Ko vemo za ti dve nihanji, lahko vsakršno gibanje dvojnega nihala z majhnimi amplitudami sestavimo iz njiju. Če je začetna hitrost uteži enaka nič, velja:

$$x_1(t) = x_{01,I} \cos \omega_I t + x_{01,II} \cos \omega_{II} t,$$

$$x_2(t) = x_{02,I} \cos \omega_I t + x_{02,II} \cos \omega_{II} t.$$



SLIKA 4.

Hitri (I - levo) in počasni način (II - desno) harmoničnega nihanja dvojnega nihala.

Nihalo niha hkrati z obema lastnima frekvencama ω_I in ω_{II} . Razmerji med $x_{01,I}$ in $x_{02,I}$ in $x_{01,II}$ ter $x_{02,II}$ morata biti taki, kot smo omenili zgoraj, pri tem pa amplitudi $x_{01,I}$ in $x_{01,II}$ določimo iz začetnih odmikov uteži od ravnovesne lege.

Do tu se je o dvojnem nihalu dalo kar precej povedati matematično. Sedaj pa se ne bomo več omejevali na majhna nihanja. Pustili bomo, da sta odmika uteži velika. Vrvici, ki povezujeta uteži in pritrdišče, nista več vedno napeti, ju moramo nadomestiti z lahkima in togima palicama. To je lažje reči kot storiti. V nekaterih šolah sicer premorejo tako izvedbo dvojnega nihala, vendar ga doma zelo težko sami izdelamo. Ker bomo opazovali gibanje uteži z zelo velikimi odmiki in hitrostmi, moramo nihalo izvesti tako, da se obe uteži lahko vrtita za polna kroga okrog pritrdišč in se pri tem ne ovirata. Zato bomo gibanju uteži sledili z računalnikom. Potrebujemo le Newtonov zakon in sile, ki delujejo na uteži. Potem bomo z računalnikom izračunavali hitrosti in legi obeh uteži.

Newtonov zakon za gibanje uteži v x smeri smo že zapisali:

$$ma_{x1} = F_{x1} = -F_1 \sin \vartheta_1 + F_2 \sin \vartheta_2,$$

$$ma_{x2} = F_{x2} = -F_2 \sin \vartheta_2.$$

Pri velikih odmikih uteži od ravnovesne lege so sile povezovalnih palic drugačne, kot smo privzeli pri majhnih odmikih, kjer sta to pot F_1 in F_2 neznani sili, s katerima palici delujeta na uteži. Pri velikih nihanjih ne moremo zanemariti dvigov uteži v navpični smeri. S slike 3 pridemo hitro do sil, ki delujejo na uteži v navpični smeri:

$$ma_{y1} = F_{y1} = -mg + F_1 \cos \vartheta_1 - F_2 \cos \vartheta_2,$$

$$ma_{y2} = F_{y2} = -mg + F_2 \cos \vartheta_2.$$

Funkcije kotov ϑ_1 in ϑ_2 , izražene s koordinatami uteži, spet razberemo s slike 6:

$$\sin \vartheta_1 = \frac{x_1}{l},$$

$$\sin \vartheta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l},$$



$$\rightarrow \begin{aligned} \blacksquare \cos \vartheta_1 &= -\frac{y_1}{l}, \\ \blacksquare \cos \vartheta_2 &= -\frac{y_2 - y_1}{l}. \end{aligned}$$

Za računalnik to ne zadošča. Sil F_1 in F_2 ne poznamo. Palici sta lahko bodisi stisnjene bodisi napete. A kako naj pridemo do njiju? Vse, kar vemo o teh dveh silah, je to, da sta posledici togih palic, se pravi, da palici ohranjata svojo dolžino. Prav zaradi te zadrege so v preteklosti iznašli zelo zvit način, kako se izogniti neznanima silama palic. Ta način je znan pod imenom Lagrangeev pristop. Ker tega pristopa ne poznamo, se moramo iz težave izviti po svoje.

Rekli smo, da sta palici togi, torej imata ves čas enako dolžino ne glede na sili, s katerima sta napeti ali stisnjene. Takih palic v naravi seveda ni. Palica se pod vplivom sile nekoliko raztegne ali skrči, ne zelo, malo pa. S prostimi očmi morda teh sprememb ne opazimo, saj sile pri našem poskusu niso prav velike, kljub temu jih ne bomo zanemarili. Privzeli bomo torej, da za palici velja dobro znani Hookov zakon:

$$\blacksquare F = k\Delta s.$$

Tu je F sila, s katero je napeta ali stisnjena palica, Δs pa njen rastezek ($\Delta s > 0$) ali skrček ($\Delta s < 0$). S k smo označili koeficient raztezka. Hookov zakon torej določa sili palic na uteži:

$$\begin{aligned} \blacksquare F_1 &= k \left(l - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right), \\ \blacksquare F_2 &= k \left(l - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right). \end{aligned}$$

Za koeficient k bomo postavili poljubno, a dovolj veliko vrednost. Pri povsem togih palicah bi bil ta koeficient neskončno velik.

Sedaj imamo vse pripravljeno, da gibanje uteži izračunavamo. Kako? Algoritem je prav preprost. Pospešek je po definiciji razmerje spremembe hitrosti v danem času Δt in tem časom, torej:

$$\blacksquare a(t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Ker bomo računali spremenljivke nihala korak po koraku, vsak korak bo za Δt kasneje v času, bomo ustrezno označili tudi spremenljivke, in sicer:

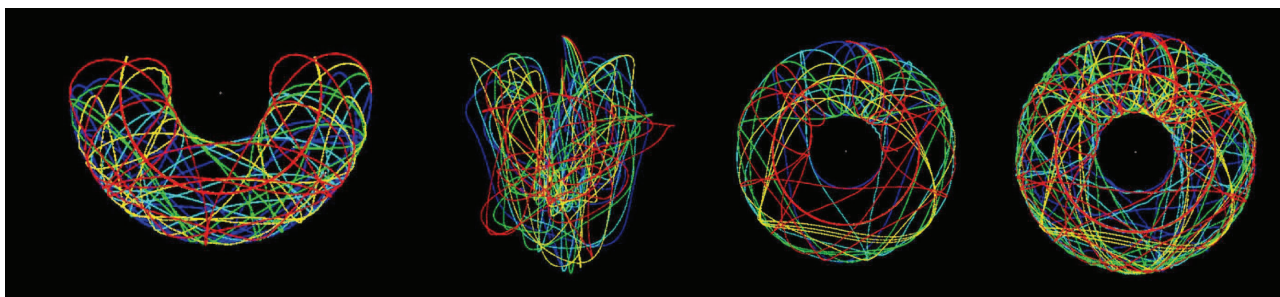
$$\begin{aligned} \blacksquare a(t) &\rightarrow a_n, \\ \blacksquare v(t) &\rightarrow v_n, \\ \blacksquare v(t + \Delta t) &\rightarrow v_{n+1}. \end{aligned}$$

Newtonove zakone za gibanje obeh uteži bomo potem napisali takole

$$\begin{aligned} \blacksquare v_{x1,n+1} &= v_{x1,n} + (-f_{1,n} \sin \vartheta_{1,n} + f_{2,n} \sin \vartheta_{2,n}) \Delta t, \\ \blacksquare v_{y1,n+1} &= v_{y1,n} + (-g - f_{1,n} \cos \vartheta_{1,n} - f_{2,n} \cos \vartheta_{2,n}) \Delta t, \\ \blacksquare v_{x2,n+1} &= v_{x2,n} + (-f_{1,n} \sin \vartheta_{2,n}) \Delta t, \\ \blacksquare v_{y2,n+1} &= v_{y2,n} + (-g + f_{2,n} \cos \vartheta_{2,n}) \Delta t. \end{aligned}$$

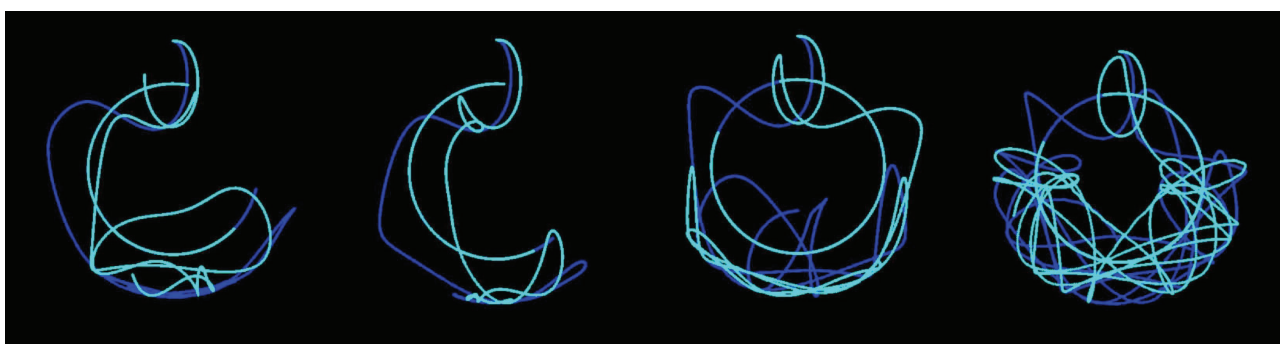


SLIKA 5. Tira uteži pri dvojnem nihalu. Obe uteži sta na začetku za 120° dvignjeni iz mirovne lege. Njuna začetna lega je označena s povezovalnimi palicami.



SLIKA 6.

Dvojno nihalo, postavljeno v navpično lego, torej na glavo - tiri pri različnih začetnih pogojih



SLIKA 7.

Dvojno nihalo - tiri pri dveh različnih, navpično postavljenih nihalah pri različnih začetnih hitrostih zgornje uteži (modro in turkizno)

Zgoraj smo namesto za sil F pisali $F = mf$, da se v enačbah izognemo pogostim ulomkom $\frac{F}{m}$. Funkcije kotov $\vartheta_{1,n}$ in $\vartheta_{2,n}$ določamo iz enačb že podanih zgoraj, kjer uporabimo koordinate $x_{1,n}$, $y_{1,n}$ in prav tako $x_{2,n}$, $y_{2,n}$.

Do koordinat obeh uteži potem pridemo preprosto z

$$\blacksquare x_{1,n+1} = x_{1,n} + v_{x1,n+1}\Delta t$$

in na enak način do preostalih treh koordinat. Mimogrede omenimo, da lahko v zgornjem algoritmu brez večjih sprememb obravnavamo tudi dvojna nihala s poljubno dolžino med utežema in različnima masama uteži.

Na sliki 5 smo prikazali tira obeh uteži pri enem nihaju zgornje uteži. Vidimo, da spodnja utež divje opleta okrog zgornje.

V računalniškem programu določimo začetne lege in hitrosti uteži in nadaljujemo korak za korakom do

izbranega končnega časa t , oziroma končnega $n + 1$. Algoritem je na prvi pogled morda zapleten, a ga je prav lahko programirati. V našem programu smo sproti risali tir obeh uteži, točko za točko. Tir je pri velikih odmikih zelo nepredvidljiv in ga je zabavno gledati. Zgornja utež se sicer zelo omahuje giblje po krožnici, spodnja pa opleta okrog nje. Oglejmo si nekaj tovrstnih slik.

Na zgornjih slikah so tiri narisani z različnimi barvami, različnim barvam pripadajo različni začetni pogoji. Na sliki 6 je začetna lega nihala v navpični legi, ki je za 180° zasukana mirovna lega, ali kot pravimo, nihalo postavimo na glavo in narahlo sunemo zgornjo utež. Začetne hitrosti se od leve proti desni spreminjajo. Pri posameznih slikah se pri tirih, prikazanih z modro in turkizno, začetni pogoji le malo razlikujejo. Kljub temu tira kmalu po startu kreneta vsak svojo pot.

× × ×