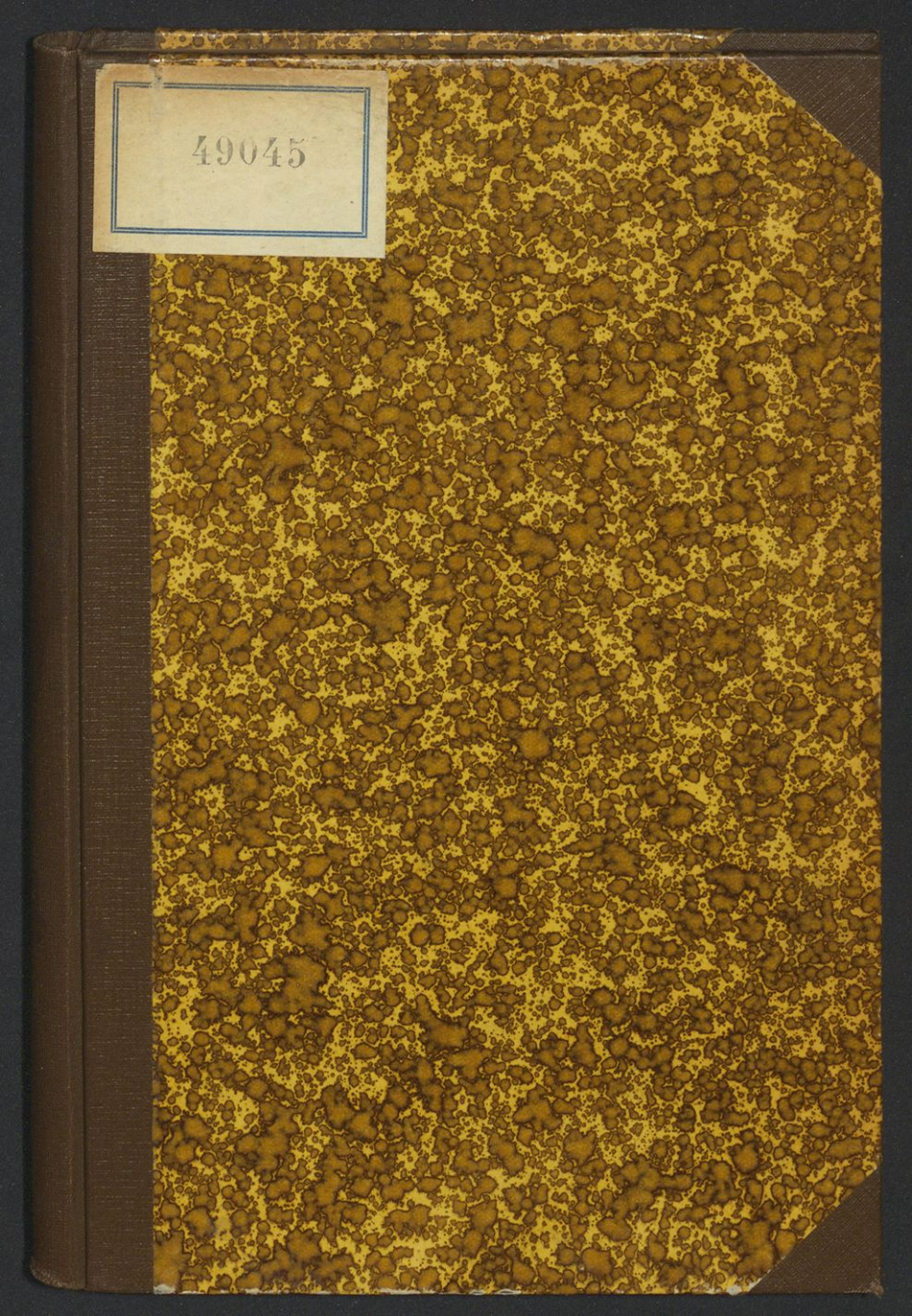
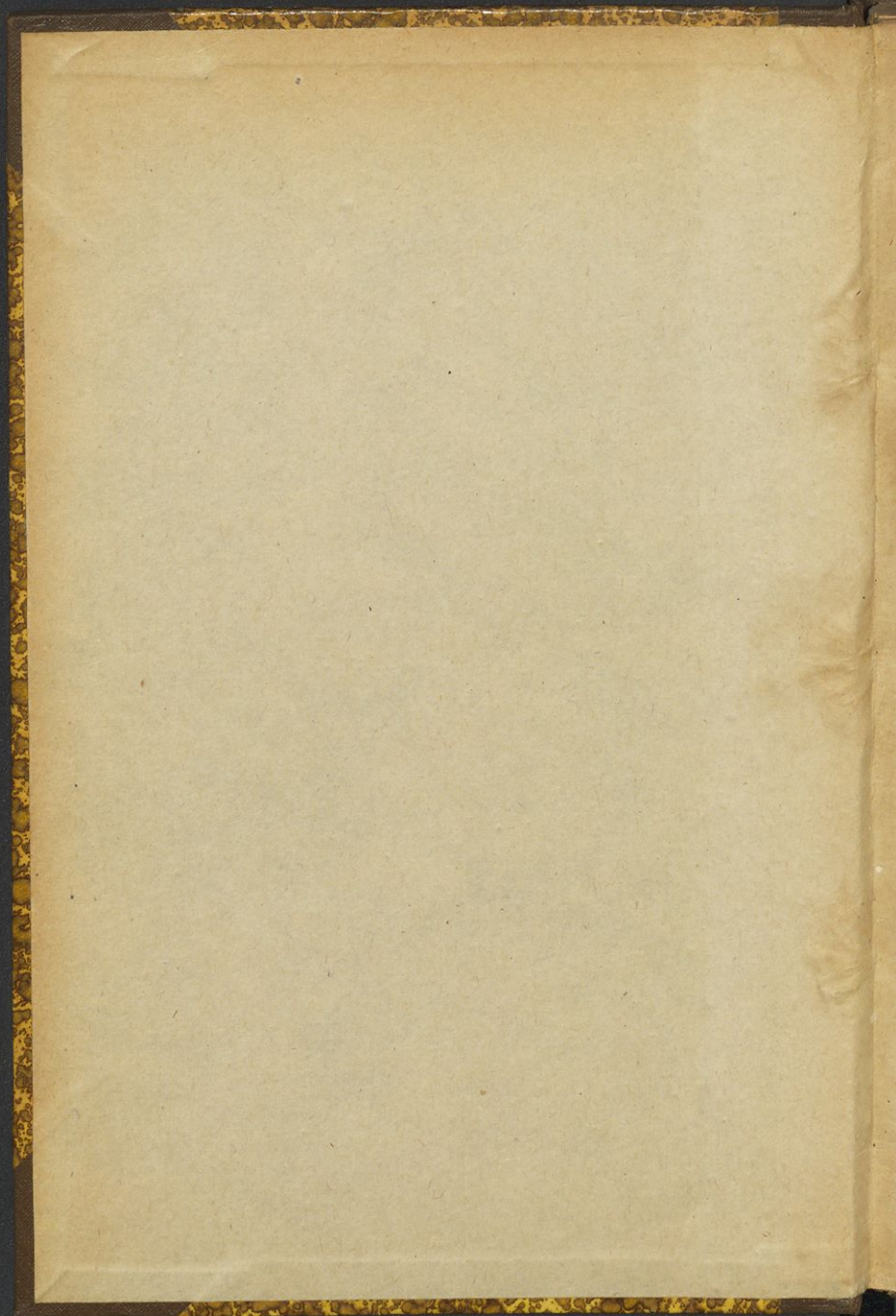


49045

The image shows the front cover of an old book. The spine and the four corners are bound in a dark brown, textured material, likely leather. The main part of the cover is decorated with a marbled paper pattern consisting of numerous small, irregular brown spots on a yellowish-gold background. In the upper left corner, there is a small, rectangular white paper label with a thin blue border. The number '49045' is printed in a black, serif font on this label.











**Josip Mazi**

# **Geometrija**





# Geometrija

za nižje razrede srednjih šol

Priredil

Josip Mazi

ravnatelj drž. realke v Ljubljani

240 slik

Druga, predelana izdaja

Odobrilo poverjeništvo za uk in bogočastje  
dne 13. oktobra 1920, št. 4566

Cena K 30.—



V Ljubljani 1920

Založila Jugoslovanska knjigarna

Natisnila Jugoslovanska tiskarna

**Dodatna naredba poverjenistva za uk in bogočastje o cenah šolskih knjig z dne 28. septembra 1920.**

§ 3. Razen odobrene cene, razvidne na naslovnem listu učne knjige, je dovoljena kvečjemu 20% na sortimentna doklada. Nikakor pa ni dovoljeno, razen te doklade zaračunati kakršnekoli poštno prevozne ali druge stroške. Noben prodajalec torej ne sme nobene učne knjige za srednje ali njim sorodne šole prodajati za višjo ceno nego za odobreno z omenjenim 20% nim poviškom vred.

49045



695  
20



# Vsebina.

## Prvi del.

Stran

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Ogledovanje kocke in krogle . . . . .                                       | 1  |
| II. Glavne lege ravnine in premice. Premikanje prostorskih<br>tvorov . . . . . | 3  |
| III. Risalno orodje. Premica. Merjenje. Krog. Kroglja . . . . .                | 5  |
| IV. Koti in kotna mera . . . . .                                               | 12 |
| V. Kocka. Kvadrat. Kvader. Pravokotnik . . . . .                               | 24 |
| VI. Risanje enostavnih predmetov . . . . .                                     | 31 |
| VII. Piramida. Trikotnik. Prisekana piramida. Trapez . . . . .                 | 35 |
| VIII. Merjenje ploščine in prostornine . . . . .                               | 41 |
| IX. Vaje za ponavljanje . . . . .                                              | 45 |

## Drugi del.

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| X. Simetrija ali somernost (zrcaljenje) . . . . .              | 47  |
| XI. O kotih . . . . .                                          | 56  |
| XII. Trikotnik. Načrtavanje in skladnost trikotnikov . . . . . | 65  |
| XIII. Četverokotnik. Središčna simetrija . . . . .             | 76  |
| XIV. Mnogokotnik. Pravilna prizma in piramida . . . . .        | 84  |
| XV. Valj. Krog. Stožec. Kroglja . . . . .                      | 89  |
| XVI. Načrtovalne naloge . . . . .                              | 101 |

## Tretji del.

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| XVII. Primerjanje in merjenje ploščine premočrtnih likov . . . . .     | 105 |
| XVIII. Površina in prostornina prizme in piramide. Podobnost . . . . . | 124 |
| XIX. Pitagorov izrek in njega uporaba . . . . .                        | 140 |
| XX. Obseg in ploščina kroga . . . . .                                  | 152 |
| XXI. Površina in prostornina valja in kroga . . . . .                  | 161 |
| XXII. Površina in prostornina krogle . . . . .                         | 166 |

---





# Prvi del.

## I. Ogledovanje kocke in krogle.

Geometrija\* je služila prvotno zgolj praktičnim namenom, kar razodeva že ime, ki pomeni toliko kot zemljemerstvo.

Znano je, da nasiplje veletok Nil ob vsakoletni preplavi mnogo rodovitnega blata ob svojih bregovih. Silno rodovitno obrežje so že stari Egipčani porazdelili v polja in zemljišča. Vsakoletne preplave pa so razdejale in zbri-sale meje, zato so bili prisiljeni, jih vedno iznova izmeriti in določiti. Pa ne samo to, tudi z nasipi, prekopi in vodo-toki so izkušali omejiti razdirajočo silo veletoka. Tako so se izurili v zemljemerstvu, ki je še dandanes zanimiv del geometrije, globoko segajoč v naše vsakdanje življenje.

1. V učilnici vidimo različne predmete, kakor klopi, mizo, knjige, desko, peč; ako se ozremo skoz okno, opa-zimo hiše in drevesa. Vse te predmete imenujemo telesa. Njih lastnosti se zelo razločujejo: miza je lesena in oglata, peč železna in okrogla, papir je bel, deska je črna i. t. d.

Geometrija se bavi le z obliko, velikostjo in med-sebojno lego teles, ne ozira se pa na njihovo snov.

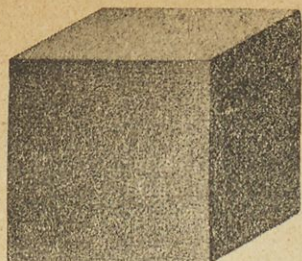
Če primerjamo umetna telesa (n. pr. pohištvo, po-slopja, stroje) z naravnimi (n. pr. s kameni, z rastlinami, drevesi), opazimo, da se po obliki precej razločujejo; zakaj skoraj vsako naravno telo je treba primerno obdelati, preden nam služi v gotove namene.

Pečali se bomo najprej z najenostavnejšimi oblikami teles. Te oblike opazamo na večini predmetov, ki jih rabimo.

---

\* Beseda geometrija je grškega izvora (gē = zemlja, mētreîn = meriti).



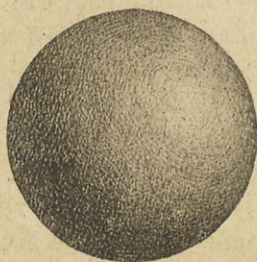


Slika 1.

2. Telesa, ki leže na mizi, že poznaš. Imenuj jih! Kocka (sl. 1.), krogla (sl. 2.) in polkrogla (sl. 3.) zavzemajo določen del prostora, v katerem živimo. Preden moreš na mesto, ki ga zavzema kako telo, postaviti drugo, moraš odstraniti prvo telo.

Vzemi kocko v roko ter jo položi na mizo! Na koliko načinov moreš to izvršiti? Položi roko na kocko, kroglo in polkroglo!

Meje telesa so ploskve. Preštej ploskve na kocki, na krogli in na polkrogli!



Slika 2.



Slika 3.

Kockna ploskev, ki leži na mizi, pokrije popolnoma del ravne mize. Položi knjigo na kocko! Polagaj svinčnik v vsaki kockni ploskvi v različnih legah! Ali se dotika kocke po vsej dolžini? Vsako tako ploskev imenujemo ravno ploskev ali ravnino. Kockne ploskve so torej ravne.

Položi kroglo na mizo! Kako se je dotika? Ali moreš polagati svinčnik na kroglo tako, da bi se po svoji dolžini dotikal ploskve? Krogelna ploskev je torej kriva ploskev. Polkroglo mejita ena ravna in ena kriva ploskev.

Ploskve so ravne in krive.

Na kocki vidiš in tipaš ogle, na krogli ne. Kocka je oglatelo; vse njene ploskve so ravne. Polkrogla in krogla sta okrogli telesi; mejita ju ravna in kriva ploskev, oziroma le kriva ploskev.



Telesa so oglata in okrogla.

3. Položi kocko na tablo ter očrtaj s kredo robe mejne ploskve, ki sloni na tabli! Kockni robi so preme črte.

Položi tudi polkroglo z ravno mejno ploskvijo na tablo ter jo očrtaj! Rob na polkrogli je kriva črta.

Meje ploskve so črte.

Krogla nima robov. Krivi rob na polkrogli imenujemo krožnico.

Črte so preme in krive.

4. Potegni s prstom po kocknem robu! Kje se prst ustavi? Kocka ima oglišča. Koliko? Vsak kocken rob meji dvoje oglišč. Potegni s kredo ob kocknem robu, ki sloni na tabli! Nastalo črto mejita dve točki.

Meje črt so točke.

Vaje.

1. Imenuj oglata in okrogla naravna in umetna telesa!
2. Pokaži ravnine v učilnici!
3. Ali se nahajajo tukaj tudi krive ploskve?
4. Ali imajo vse krive črte tako obliko kakor rob na polkrogli?
5. Imenuj okrogla telesa a) na katerih ne opaziš premih črt, b) na katerih so preme črte!
6. Koliko oglišč ima učilnica? Koliko robov gre skozi vsako oglišče učilnice?
7. Koliko robov ima vsaka mejna ploskev učilnice?

## II. Glavne lege ravnine in preme črte. Premikanje prostorskih tvorov.

1. Položi kroglo na razna mesta mize! Krogla se ne gane, dokler ne nagneš mize. Ravnino mizne ploskve imenujemo vodoravno ali horizontalno ravnino. (Gladina stoječe vode!) Katere ploskve na mizi ležeče kocke so horizontalne? Pokaži v učilnici horizontalne ravnine!

Vsaka prema črta, ki leži v horizontalni ravnini, je horizontalna. Imenuj horizontalne kockne robe! Koliko jih je?

2. Premi črti, ki ima smer svinčnice (modell), t. j. prosto viseče, s svinčeno kroglico obtežene vrvice, pravimo,



da je navpična ali vertikalna prema črta. Pokaži vertikalne kockne robe! Koliko jih je? Pokaži vertikalne robe v učilnici!

Vsako ravnino, položeno skoz vertikalno premo črto, imenujemo navpično ali vertikalno ravnino. Pokaži vertikalne kockne ploskve! Koliko jih je?

3. Preme črte in ravnine, ki niso ne horizontalne, ne vertikalne, imenujemo poševne. Pokaži v učilnici poševne preme črte in poševne ravnine!

4. Obrisali smo s kredo kockno mejno ploskev. Odtis krede na deski nam predočuje točko. Konica krede nariše ob kocknem robu črto. Namaži vrstico s kredo, napni jo ob narisani črti ter preiskuj, ali se da pokriti s prvo črto! To so preme črte.

Nariši preme črte navzgor, na levo, na desno, poševno! Te preme črte imajo različno smer.

Načrtaj krivo črto! Ali moreš določiti njeno smer?

Smer določa prema črta. Kriva črta nima stalne smeri.

Premikajoča se črta nariše vobče ploskev (n. pr. ostrina noža, če z njim prerežeš hleb kruha; ali premikajoči se kazalec na uri), premikajoča se ploskev pa vobče telo (n. pr. list knjige, kadar ga obrneš). Kdaj ne? Ako premikaš telo, nastane zopet telo.

5. Telesa, ploskve, črte in točke imenujemo prostorske tvore.

Pri njih opazovanju in preiskovanju se poslužujemo telesnih vzorcev ali modelov in slik.

*Vaje.*

1. Koliko vertikalnih premih črt, koliko vertikalnih ravnin si lahko mislimo skoz eno točko?

2. Koliko vertikalnih ravnin lahko položimo skoz vertikalno, koliko skoz horizontalno premo črto?

3. Koliko horizontalnih premih črt lahko narišemo skoz vsako točko horizontalne (vertikalne, poševne) ravnine?

4. Kakšne črte narišejo kockna oglišča, ako spustiš kocko na tla?

5. Ako zavrtiš okno v tečajih, kakšen tvor nariše steklena ploskev, kakšen tvor posamezne točke okna?



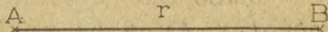
6. Kdaj ima na stenski uri kazalec, ki kaže ure, horizontalno, kdaj vertikalno lego?
7. Kdaj sta oba kazalca vertikalna?
8. Kdaj ima nihalo stenske ure vertikalno lego?
9. Kakšno črto nariše kazalčeva konica?
10. Napravi si svinčnico ter doženi v učilnici, doma in na prostem vertikalne preme!

### III. Risalno orodje. Premica. Merjenje. Krog. Krogla.

1. Pri geometrijskem risanju se poslužujemo ravnila, trikotnikov in šestila. Poleg teh pripomočkov rabimo še precej trd (št. 3), skrbno priostren svinčnik, za brisanje nepotrebnih črt in za čiščenje papirja pa mehko radirko. Zapomni si: Če hočeš risati natančno, varuj skrbno svoje risalno orodje!

Točko upodobimo na ta način, da njeno mesto označimo z malim križcem ali krogom ter pripišemo navadno veliko latinsko črko in čitamo: točka  $A$ ,  $S$ ,  $T$  i. t. d.

Označi na listu točki  $A$  in  $B$  ter nariši od  $A$  do  $B$  več krivih črt! Nato primakni ravnilo prav blizu do obeh točk in nariši premo črto med njima! Primerjaj dolžino narisanih črt s tanko vrvico! Kaj vidiš? Črte skoz  $A$  in  $B$  imajo različno dolžino. Najkrajša je prema črta, ki določa njiju razdaljo. Obojestranski omejeno premo črto imenujemo daljico (sl. 4.). Točki  $A$  in  $B$ , ki mejita daljico, zovemo krajišči. Daljico zaznamujemo s črkama mejnih krajišč, n. pr. daljica  $\overline{AB}$ , ali pa z malo latinsko črko, ki jo zapišemo v sredo nad daljico ali pod njo, n. pr. daljica  $r$ .

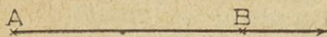


Slika 4.

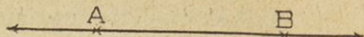
Daljico  $\overline{AB}$  si lahko mislimo podaljšano ali samo preko krajišča  $B$ , tedaj nastane napol omejena prema črta, ki jo imenujemo poltrak (sl. 5.), ali preko obeh krajišč, tedaj nastane neomejena prema črta, ki ji pravimo trak ali premica (sl. 6.). Pregani list papirja! Kakšna črta je nastali rob? Preizkusi svoje ravnilo!

2. Kako izmeriš dolžino daljice? V ravnilo je navadno vrezano tudi merilo; s tem merimo daljice.

Enoto dolžinske mere imenujemo meter; to je dolžina platinaste palice, ki jo hranijo v Parizu.



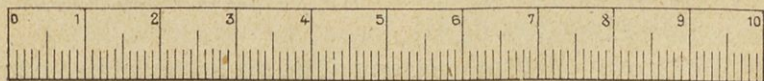
Slika 5.



Slika 6.

Meter ( $m$ ) delimo na 10 decimetrov ( $dm$ ), decimeter na 10 centimetrov ( $cm$ ) in centimeter na 10 milimetrov ( $mm$ ).

1000 metrov je 1 kilometer ( $km$ ), 10.000  $m$  ali 10  $km$  je 1 miriameter ( $\mu m$ ). Merilo na ravnilu je razdeljeno na centimetre in milimetre (sl. 7.).



Slika 7.

Večje razdalje merimo z 10  $m$  dolgimi merskimi vrvicami in verižicami.

Na zemljevidu vidiš merilo, ki kaže, v kakšni dolžini je narisani kilometer. Tako merilo imenujemo zmanjšano merilo, ker je resnična dolžinska enota na njem zmanjšana. (Stavbni črteži.)

Izmerimo dolžino učilnice! Merjenje naj izvrši več učencev. Ali dobe vsi isti znesek? Zakaj ne?

Izmeri tudi dolžino šolske klopi, širino in višino table i. t. d.! Vsako dolžino presodi najprvo po vidu, potem jo šele izmeri z merilom!

Dolžino daljice torej določimo, če preiščemo, kolikokrat se nahaja v njej enota dolžinske mere.

Dolžino dveh daljic primerjaš na ta način, da položiš eno daljico na drugo tako, da se dve krajišči krijeta. Ako se krijeta tudi ostali dve krajišči, tedaj sta daljici enaki, sicer neenaki. To primerjanje daljic izvršimo s šestilom. Kako seštevamo daljice? (Položi jih na premico drugo poleg druge!) Kako dobimo razliko dveh daljic? (Položi manjšo na večjo i. t. d.!)



3. Ali si že opazoval merjevca, kako določa daljice na prostem in kako jih meri?

Zemeljsko površje, kolikor ga vpoštevata pri določitvi in merjenju potov, zemljišč i. t. d., smatra kot ravno in horizontalno ploskev.

Zakoliči daljico na šolskem dvorišču! To izvršiš na ta način, da zasadiš dva do tri metre dolga merska droga (sl. 8.) navpično (s pomočjo svinčnice) ob obeh daljičnih krajiščih. S tem je daljica na prostem popolnoma določena.

Ako je določiti več vmesnih točk zakoličene daljice  $AB$  ali pa podaljšati daljico, izvršiš to na sledeči način.

Stopi tri do štiri korake pred drog  $A$  (sl. 9.) kaže to odspredaj in odzgoraj) in viziraj toliko časa ob isti strani drogov, da zakrije tvojemu očesu drog  $A$  popolnoma drog  $B$ . Pomočnik - sošolec postavi drog  $C$  približno tja, kjer je treba določiti vmesno

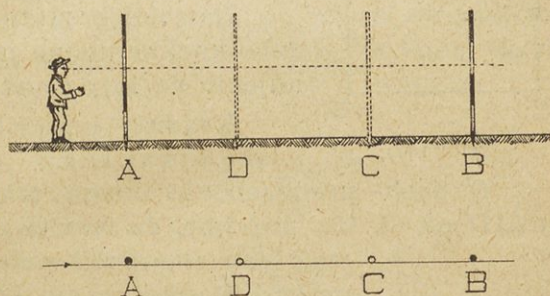
točko, in ga premika primerno tvojim znamenjem, dokler se ne skrijeta tvojemu očesu za prvi drog druga dva droga. Na isti način uravnaš tudi nadaljnje droge, ki so potem vsi v isti smeri. Opazuj urav-

navanje vojaške vrste! Vmesne točke zaznamenuj z manjšimi, 40 do 60 cm dolgimi merskimi količki.

Preden izmeriš daljico, presodi njeno dolžino po vidu in jo premeri s koraki. (Vojaški korak meri 75 cm, torej štirje koraki 3 m ali 130 korakov približno 100 m. Kolik je tvoj korak?) Akoravno taka



Slika 8.



Slika 9.

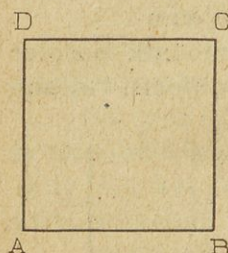


mera ni zanesljiva, vendar nas dostikrat obvaruje občutnih napak, ki se lahko pripete pri merjenju.

Merjenje izvršita dva merjevca, ki držita 20 m dolgo mersko vrstico ali merski trak ob konceh. Prvi merjevec stoji začetkoma pri krajišču *A* ter pazi, da koraka drugi vedno v daljični smeri proti krajišču *B* in da zasadi ob koncu napetega traka količek v zemljo. To opravilo se ponavlja, dokler ne dospeta do krajišča *B*. Končno je prešteti merske količke, da vidiš, kolikrat sta položila cel trak. Dolžino daljice dobiš, ako pomnožiš število zasajenih količkov z 20 in prišteješ dolžino med zadnjim količkom in krajiščem *B*.

Mersko število dolžine, ki ga dobiš pri tem merjenju, ni natančno, zato je treba daljico večkrat izmeriti in potem šele po preudarku določiti povprečni znesek.

4. Izmeri kockne robe! Kaj opaziš? Vsako kockno ploskev mejé štiri enake daljice. Položi kocko s katerokoli mejno ploskvijo na tablo ter obriši to ploskev s kredó! Del ravnine, ki ga popolnoma mejé ravne ali krive črte, imenujemo ravni lik.

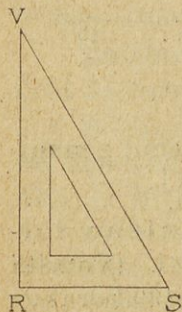


Slika 10.

Na tabli narisani lik nam kaže podobno kockne mejne ploskve (sl. 10.). Imenujemo ga kvadrat.

Kvadrat ima štiri oglišča in štiri enake stranice.

O dveh premicah, ki imata tako lego kakor *AB* in *AD* na sl. 10., pravimo, da tvorita pravi kot, ali da stoji ena na drugi pravokotno ali normalno. Koliko pravih kotov ima kvadrat?



Slika 11.

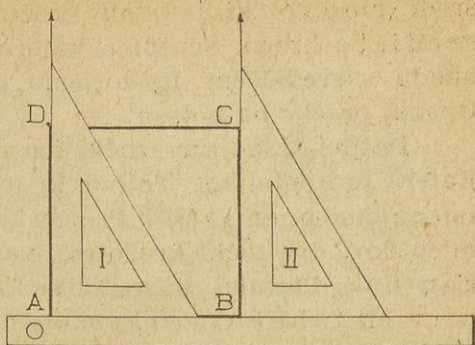
Pravi kot narišemo z ravnilom in trikotnikom (sl. 11.), na katerem je pravi kot.

Narišimo kvadrat, čigar stranica naj meri 5 cm!

Načrtaj poltrak (sl. 12.), krajišče označi s črko *A* in odmeri na njem z merilom 5 cm; tako dobiš točko *B*. Nasloni ravnilo z robom ob poltrak *AB*, položi nanj trikotnik (sl. 11.)



tako, da se ga dotika krak  $RS$ , in pomakni vrh  $R$  pravega kota na mesto  $A$ . Črta ob drugem kraku  $RV$  je pravokotnica  $AD$ . Ako pomakneš trikotnik  $I$  na mesto  $II$ , dobiš pravokotnico skoz točko  $B$ . Na vsaki pravokotnici odmeri navzgor  $5\text{ cm}$ ; dobiš točki  $C$  in  $D$ . Daljica med tema točkama je četrta kvadratova stranica. Prepričaj se s šestilom, da meri  $5\text{ cm}$ !



Slika 12.

Ravnilo nadomešča večinoma drug trikotnik.

Kvadratovi stranici  $AD$  in  $BC$ , kakor tudi stranici  $AB$  in  $DC$  se nikdar ne snideta, če ji še tako podaljšamo. Stranici  $AD$  in  $BC$  ( $AB$  in  $DC$ ) sta vzporedni ali paralelni ( $AD \parallel BC$ ,  $AB \parallel DC$ ). Pokaži vzporednice na tabli, na klopi i. t. d.! Sl. 12. kaže, kako je risati vzporednice s pomočjo ravnila in trikotnika.

Nariši na karton kvadrat  $A_1B_1C_1D_1$ , čigar stranica meri tudi  $5\text{ cm}$ ! Izreži kvadrat in ga položi na prej načrtanega! Kvadrata se popolnoma krijeta, pravimo, da sta skladna (kongruentna).

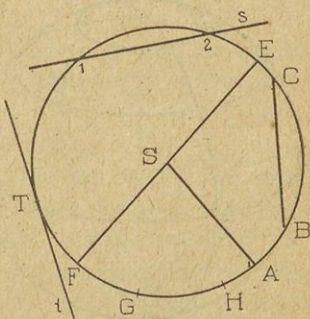
**5. Ravno polkrogelno ploskev** imenujemo krog, krivo črto, ki oklepa krog, pa krožnico ali obod kroga. Za krožnico in krog uporabljamo navadno skupno ime krog.

Imenuj predmete, na katerih si opazil kroge!

Krog je najvažnejša kriva črta; rišemo ga s šestilom.

Označi na listu točko  $S$  in povzemi merilu  $3\text{ cm}$  s šestilom!

Ako zavrtiš šestilo okoli enega kraka, čigar konica sloni na točki  $S$ , tedaj zariše konica drugega kraka krožnico (sl. 13.).



Slika 13.



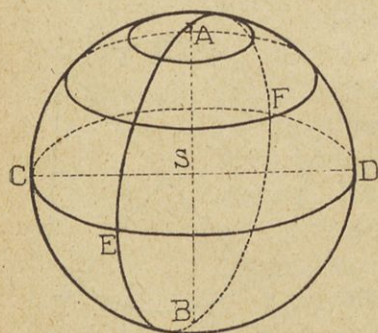
Na krožnici, ki smo jo narisali, leže vse točke ravnine, katerih razdalja od točke  $S$  meri 3 cm. Točka  $S$  leži natančno sredi ploskve, ki jo meji krožnica, zato jo imenujemo središče kroga. Spojnico katerekoli točke na krogovem obodu s središčem imenujemo polmer ali radij ( $AS$ ). Opazuj prečke na kolesu!

Daljici, ki spajajo dve točki krožnice, pravimo tetiva ( $BC$ ). Katera je najdaljša? Tetivo, ki jo narišemo skozi središče, imenujemo premer ( $EF$ ). Premeri istega kroga so enaki. Premico skozi dve točki krožnice imenujemo sečnico ali sekanto ( $s$ ). Premici, ki se dotika kroga, pravimo dotikalnica ali tangenta ( $t$ ) in skupno točko zovemo dotikališče ( $T$ ). Opazuj kolo lokomotive in tračnico, po kateri teče! Vsak posamezen del krožnice imenujemo lok ( $\widehat{GH}$ ).

6. Ako vrtimo krog okoli kateregakoli premera, nastane krogla (sl. 14.). Krogelno obliko imajo: črešnje, jabolka, grah, vodene kaplje, svinčenke i. t. d.

Središče vrtečega se kroga je tudi krogelno središče. Vse točke krogelne ploskve so enako oddaljene od središča.

Zemlja ima približno obliko krogle. Sl. 14. naj nam predloči globus in nekaj črt na njem. Premer, okoli katerega zavrtimo krog, ki nariše kroglo, zovemo os, krajši premera pa tečaja. Pokaži to na globusu! Vrteči se



Slika 14.

krog tvori v vsaki svoji legi krog poldnevnik ali meridianski krog (n. pr.  $AEBF$ ). Krogi poldnevniki so torej enaki. Vsaka točka vrtečega se kroga nariše krog vzporednik, čigar središče leži na krogelni osi. Ali so tudi krogi vzporedniki enaki? Največjega izmed krogov vzporednikov imenujemo ravnik ali ekvator ( $CEDF$ ). Kolik je njegov premer?

Del krogelne ploskve med dvema vzporednikoma imenujemo krogelni pas. Ravnina, položena skozi kro-



gelno središče, razdeli kroglo na dve polkrogli. Kolik je premer kroga, ki meji polkroglo?

Na krogelni ploskvi moremo risati le krive črte. Kroge n. pr. rišemo lahko s šestilom.

### Vaje.

1. Nariši premico ter določi na nji več točk! Koliko jih lahko izbereš? (Premi niz.)

2. Označi točko na listu ter nariši več premic skoz njo! Koliko jih lahko narišeš? (Ravninsko premičje.)

3. Kako se prepričaš z ravnilom o ploskvi, da je ravna? Opazuj mizarja in kamenoseka!

4. Nariši več neenakih daljic v različni smeri, presodi najprej po vidu njih dolžino, potem jih izmeri ter izračunaj pri vsaki, za koliko si pogrešil! (Napravi tablico!)

5. Izmeri dolžino klopi, dolžino in širino šolske table, višino vrat, debelino zidu! (Presodi najprej po vidu i. t. d.!)

6. Izmeri (kilometre) na zemljevidu razdaljo (dolžino zračne črte) Belgrada in Zagreba od Ljubljane!

7. Nariši dve (tri, štiri) daljice ter presodi po vidu njuni dolžini in njuno vsoto! Nato ji izmeri z merilom ter nariši daljico enako vsoti obeh daljic. Za koliko si se zmotil?

8. Nariši 3·4 cm dolgo daljico ter jo podaljšaj za ravno toliko! Nariši trikrat (štirikrat) tako dolgo daljico! (Uporablaj ravnilo z merilom in šestilo!)

9. Nariši 7 cm dolgo daljico ter jo skrajšaj za 3 cm!

10. Nariši 9·5 cm in 4·8 cm dolgi daljici ter določi njuno razliko!

11. Razdeli 9·2 cm dolgo daljico na dva, na tri, na štiri enake dele! (Najprvo po vidu, potem poizkusoma s šestilom in končno z merilom.)

12. Koliko pravih kotov je na kocki?

13. Nariši kvadrat s stranico  $a = 1$  cm (4·5 cm, 7·7 cm, 10 cm)!

14. Nariši krog s polmerom  $r = 4$  cm ter označi na obodu dve točki! Koliko lokov določata točki? Koliko tetiv?

15. Nariši krog s polmerom  $r = 3·5$  cm ter izberi na obodu točko! Preizkusi, kolikrat moreš prenesti polmer kot tetivo počenši pri določeni točki!

16. Nariši krog s polmerom  $r = 2·8$  cm ter potegni skoz katerokoli točko na obodu premer in 4 cm dolgo tetivo!

17. Nariši krogu s polmerom  $r = 3$  cm dve vzporedni tangenti!



18.\* Presodi po vidu dolžino in širino šolskega dvorišča in poslopja, nato izmeri te razdalje z 10 m dolgo vrvico, na kateri zaznamenuj metre z vozli (en meter razdeli z vozli na decimetre)!

19.\* Zakoliči v različni smeri (južni, vzhodni, severozahodni i. t. d.) več neenakih daljic; presodi po vidu njih dolžino in jih potem izmeri!

20.\* Zakoliči daljico ter jo podaljšaj v eno smer za ravno toliko!

21.\* Skrajšaj zakoličeno daljico ob obeh krajiščih za določeno dolžino!

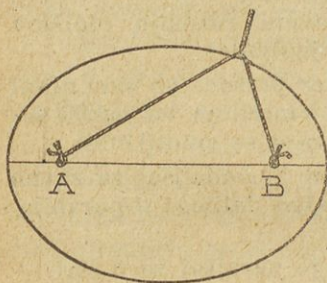
22.\* Razdeli zakoličeno daljico na več enakih delov!

23.\* Začrtaj krog ( $r = 6\text{ m}$ ), označi na njem katerokoli točko ter določi drugo krajišče premera skoz to točko! (Ob koncih vrvice napravi zanki in natakni eno na drog, ki določa krogovo središče, drugo pa na merski količek. Ako napneš vrvico s količkom in količek okoli premikaš, začrta njegova konica krog.)

24.\* Začrtaj krog ter ga razdeli na šest enakih delov!

25.\* Začrtaj krog in označi zunanega točko! Določi presečišči one premice s krogom, ki gre skoz označeno točko in skoz krogovo središče!

26.\* Zakoliči 5 m dolgo daljico  $AB$ ! Ob koncih 10 m dolge vrvice napravi zanki in ji natakni na količka pri  $A$  in  $B$ . Ako napneš vrvico s količkom in količek okoli premikaš, začrta njegova konica krivo črto (krivuljo), ki jo imenujemo elipso (sl. 15.). Opazuj n. pr. vrtnarja pri



Slika 15.

začrtavanju takih gredic! — Odmakni količek  $B$  na razdaljo 6 (7, 8) m in začrtaj elipso! — Primakni količek  $B$  na razdaljo 4 (3, 2) m ter začrtaj elipso! — Opazuj, kako se izpreminja oblika krivulje! — Nariši tudi v zvezku elipso na isti način! Namesto količkov rabiš igli, namesto vrvice pa nit!

#### IV. Koti in kotna mera.

1. Na tabli visi urno kazalo (sl. 16.). Veliki kazalec  $a$  naj kaže minute, mali kazalec  $b$  pa ure.

Nastavi kazalca na 12. uro! Kazalca se krijeta. Postavi kazalca na 3. uro! Minutni kazalec ne izpremeni

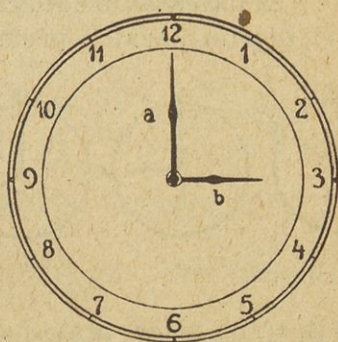
\* Vaje na prostem so označene z zvezdico.



svoje lege, urni kazalec premakneš do števila 3. Kakšno črto nariše konica kazalca pri tem vrtenju? Kaj nariše vrteči se kazalec?

Del ravne ploskve med kazalcema imenujemo kot.

Kje smo že videli tak kot? Položi trikotnik s pravim kotom med kazalca! Kazalca stojita pravokotno drug na drugem: tvorita pravi kot. Nastavi kazalca na 9. uro! Kakšen kot oklepata zopet? Kakšen kot nariše minuti kazalec, ki kaže na 3, po preteku četrte ure?

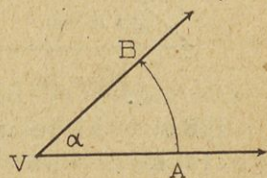


Slika 16.

Podaljšaj minuti kazalec n. pr. na ta način, da zabodeš tanko paličico v kazalčevo konico. Ali je zdaj kot večji? Podaljšaj na isti način tudi drugi kazalec! Se je li zdaj kot izpremenil? Dolžina kazalcev ne vpliva na velikost kota. Postavi kazalca na 4. uro! Kot, ki ga oklepata kazalca, je zdaj večji. Postavi kazalca na 2. uro! Dobimo manjši kot. Narišimo ga (sl. 17.)! Poltraka, ki nadomeščata kazalca, imenujemo kraka, skupno krajišče  $V$  vrh in ploskev med krakoma kot (kotno ploskev.)

Kotu, ki ni pravi kot, pravimo poševni kot.

Znak za kot je:  $\sphericalangle$ . Kot zaznamujemo s črko ob vrhu ali z malo grško\* črko med krakoma ali pa stremi črkami, izmed katerih je ona ob vrhu vedno v sredi (sl. 17.:  $\sphericalangle V$ ,  $\sphericalangle \alpha$ ,  $\sphericalangle AVB$ ). Pravi kot, ki ga rišemo največkrat, bomo zaznamenovali na slikah z malim lokom in točko ob vrhu:  $\perp$ .



Slika 17.

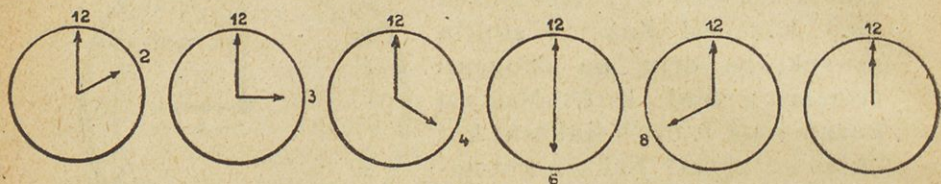
Kot torej nastane, ako zavrtiš poltrak okoli njegovega krajišča. Čim dalje zavrtiš poltrak, tem večji je nastali kot.

\* Grške črke, ki jih bomo rabili, so:  $\alpha$  = alfa,  $\beta$  = beta,  $\gamma$  = gama,  $\delta$  = delta,  $\varepsilon$  = epsilon.

Postavi kazalca na 2., 3., 4., 6., 8. in 12. uro (sl. 18.)!

Kateri kot je manjši nego pravi kot? Narišimo ga! Kot  $\alpha$  (sl. 19.), ki je manjši nego pravi kot, imenujemo ostri kot.

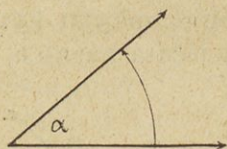
Koliko pravih kotov nariše urni kazalec do 6. ure? Ob tej uri tvorita kazalca premo črto. Kotu, čigar kraka kažeta



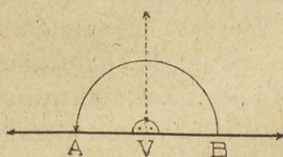
Slika 18.

nasprotno smer, pravimo iztegnjeni kot (sl. 20.). Pravi kot je torej polovica iztegnjenega kota ali iztegnjeni kot je enak dvema pravima kotoma.

Primerjaj kot, ki ga tvorita kazalca ob 4. uri, s pravim in iztegnjenim kotom. Kot  $\beta$  (sl. 21.), ki je večji nego pravi, toda manjši kakor iztegnjeni kot, zovemo topi kot.

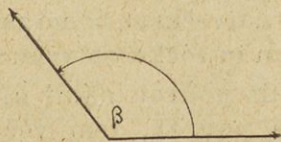


Slika 19.

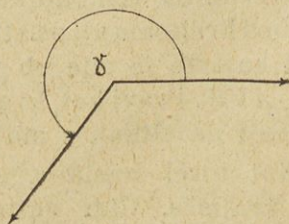


Slika 20.

Kotu, ki je manjši kakor iztegnjeni kot, pravimo votli kot. Votli koti so torej ostri, pravi in topi koti.



Slika 21.



Slika 22.

Kakšen kot oklepata kazalca ob 8. uri? Kot  $\gamma$  (sl. 22.) je večji nego iztegnjeni kot, zovemo ga izbočeni kot.



Ob 12. uri se kazalca krijeta. Konica urnega kazalca nariše tekom 12 ur polni krog, kazalec pa kot, ki mu pravimo polni kot (sl. 23.). Koliko pravih kotov šteje polni kot? Opazuj lego minutnega kazalca, ki jo ima tekom ene ure ob številu 3, 6, 9 in 12, na kazalu!

Pregani list (sl. 24.) po sredi in nato še enkrat!. Ako razganeš list, vidiš štiri prave kote drugega poleg drugega. Izreži enega in ga polagaj na ostale tri: krije se z vsakim!

Pri računanju označujemo pravi kot dostikrat z veliko črko  $R$ .

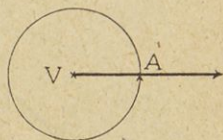
2. Daljično dolžino smo določili, ako smo izmerili daljico. Kako merimo kote?

Nariši na tablo krog n. pr. s polmerom  $r = 5\text{ dm}$  (sl. 25) ter v krogu vertikalni in horizontalni premer! Na koliko delov si razdelil krog? (4.) Razdeli vsako četrtno oboda na tri enake dele in spoji razdelišča s središčem! Koliko delov dobiš? (12.) Na zgornji desni četrtini kroga razdeli po vidu vsako tretjino na tri enake dele! Če bi istotako razdelil ostale četrtine, koliko delov bi imel krog? (36.) Končno razdeli še prvi zgornji del na deset enakih delov, nariši skoz razdelišča polmere ter si misli na isti način razdeljen ves krog! Na koliko enakih lokov bi bil potem razdeljen obod in na koliko enakih kotov polni kot okoli krogovega središča? (360.)

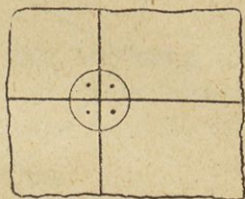
Ako razdelimo krogov obod na 360 enakih delov, imenujemo vsak tak lok ločno stopinjo ( $1^\circ$ ) in če spojimo razdelišča s krogovim središčem, zovemo vsak tak kot kotno stopinjo.

Kotna stopinja je torej 360. del polnega kota in tvori enoto kotne mere.

Izreži iz trdega papirja  $5\text{ dm}$  dolgi kazalec, pritrdi eno krajišče z žebličkom ob krogovem središču ter postavi kazalec navpično! Če bi kazal minute, kje bi se nahajal čez četrto ure? Koliko ločnih stopinj bi narisala



Slika 23.

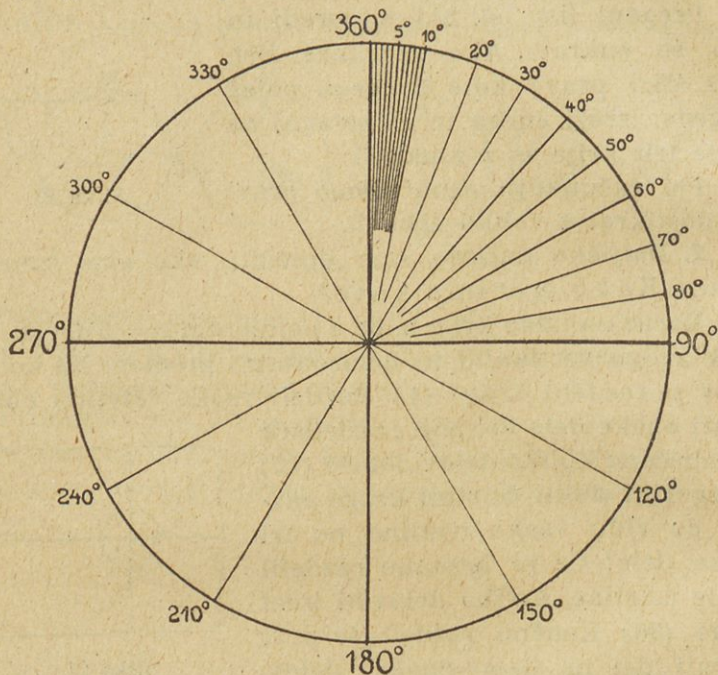


Slika 24.

njegova konica, koliko kotnih stopinj kazalec sam? Zapiši ob obodu  $90^\circ$ !

Pravi kot meri  $90^\circ$ .

Tekom nadaljnje četrt ure nariše kazalec zopet pravi kot ( $90^\circ$ ), tvori torej s prvotno lego iztegnjeni kot.



Slika 25.

Iztegnjeni kot meri  $180^\circ$ .

Kazalec se premika dalje, v četrt ure nariše zopet  $90^\circ$ , torej od početka že  $270^\circ$  in ko se po preteku ene ure vrne v prvotno lego, je narisal polni kot, t. j.  $360^\circ$ .

Polni kot meri  $360^\circ$ .

Kot meri torej n. pr.  $35^\circ$  (kotnih stopinj), ako meri njemu pripadajoči lok, ki ga začrtaš okoli njegovega vrha s kakršnimkoli polmerom, 35 ločnih stopinj.

Od česa je odvisna dolžina loka, ki tvori ločno stopinjo?

Zavrti kazalec, da nariše ostri, topi, izbočeni kot! Ostri kot meri manj nego  $90^\circ$ , topi več kakor  $90^\circ$  in manj nego  $180^\circ$ , izbočeni kot več kakor  $180^\circ$ .



Ako hočemo kote natančneje izmeriti (zemljepisec, zvezdoslovec), razdelimo stopinjo na 60 minut ( $1^\circ = 60'$ ) in minuto na 60 sekund ( $1' = 60''$ ).

Kote merimo s kotomerom ali transporterjem (sl. 26.), t. j. s polkrogom, ki je razdeljen na 180 (na sliki le na 36) enakih delov. Sl. 26. kaže, kako izmeriš kot  $ASB$  s kotomerom.

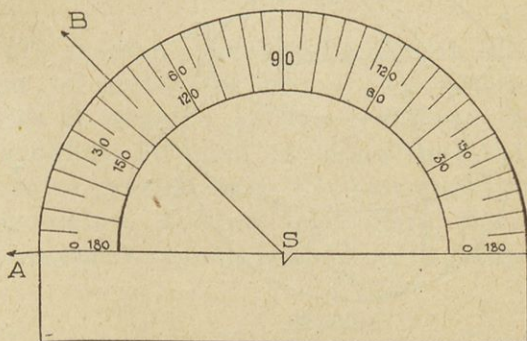
Pri risanju rabimo trikotnika s koti  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  in  $90^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  (sl. 27.).

**3. Zemljepisec** deli ekvator na 360 ločnih stopinj ter polaga skoz vsako stopinjo meridian, ki je polovica meridianskega kroga. En meridian zaznamuje z ničlo in

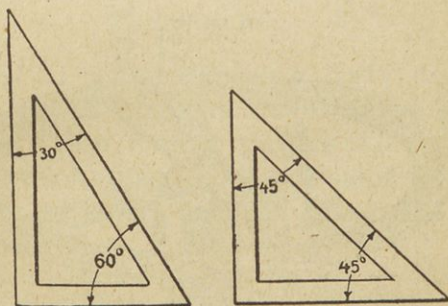
ga imenuje začetnega ( $S_i$  o  $J_i$  na sl. 28.). Meridian (polkrog) razdeli na 180 ločnih stopinj, ki jih šteje od ekvatorja proti tečajema, ter nariše skoz vsako stopinjo vzporednik. Meridiani in vzporedniki tvorijo stopinjsko mrežo zemeljske oble. Kako dolga je ločna stopinja na ravniku?

Ako hoče določiti zemljepisno lego kakega kraja (n. pr.  $L$  na sl. 28.), nariše skoz dotični kraj meridian in vzporednik ter izmeri na meridianu oddaljenost kraja od ekvatorja (zemljepisno širino) in na ekvatorju oddaljenost meridiana od začetnega meridiana (zemljepisno dolžino).

Zemljepisna lega kraja je popolnoma določena, ako vemo, na katerem meridianu in na katerem vzporedniku leži.



Slika 26.

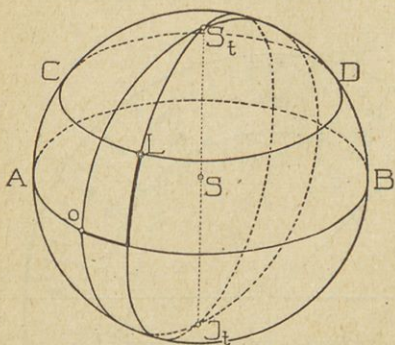


Slika 27.

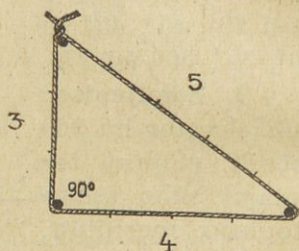
4. Kot zakoličimo na prostem, ako zasadimo ob vrhu in v vsakem kraku po en merski drog.

Zakoliči pravi kot!

Že starim Egipčanom je bilo znano, da je trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 dolžinskih enot pravokoten. Raz-



Slika 28.



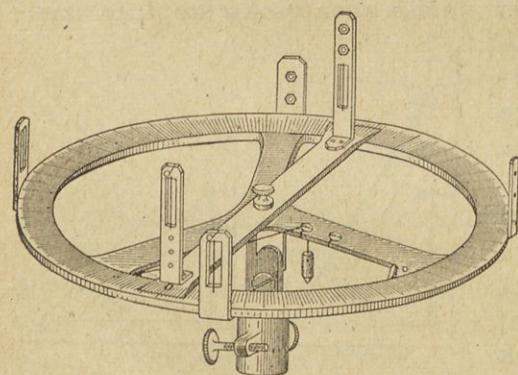
Slika 29.

deli vrvico na dvanajst enakih delov in označi tretje in sedmo razdelišče z vozloma; potem moreš stvoriti pravokotni trikotnik tako, kakor kaže sl. 29. Tesarji še dandanes na ta način do-

ločijo pravi kot; zlože namreč trikotnik z drogi po 3, 4 in 5 m dolgimi.

Najlaže pa zakoličimo prave kote s poljskim kotomerom.

Glavni del poljskega kotomera (sl. 30.) tvori na  $360^\circ$  razdeljen krog. Ob krajiščih dveh pravo-



Slika 30.

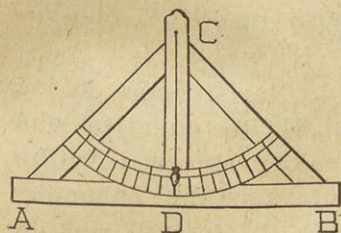
kotnih premerov so pritrjeni nastavki (vizirji). Nastavka pri  $0^\circ$  in  $90^\circ$  imata po dve gledalni luknjici (očnici), onadva pri  $180^\circ$  in  $90^\circ$  ( $270^\circ$ ) pa vsak pravokotno okence (predmetnico), ki ima po sredi



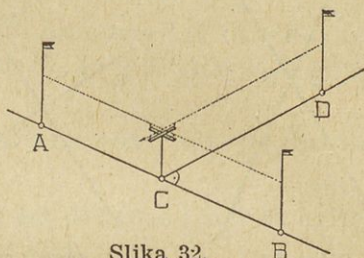
napeto nitko ali las. Premera z nastavki, skoz katere merimo, imenujemo ziral. Pravokotni ziral tvorita ziralni križ. Poleg teh dveh ziral je na kotomeru še eno, okoli krogovega središča vrtljivo ziral; pravimo mu kazalec.

Pri uporabi nasadiš kotomer na vertikalno palico (stojalo) tako, da je krogova ravnina horizontalna ali pa vertikalna. Prvo dosežeš z grebljico\*, drugo s svinčnico.

Grebljica (sl. 31.) je lesen pravokotni trikotnik  $ABC$  z enakima stranicama  $AC$  in  $BC$ . Ob vrhu  $C$  je pritrjena svinčnica. Razpolovišče  $D$  stranice  $AB$  tvori majhna izdolbina za svinčeno kroglico. Stranica  $AB$  je horizontalna, ako krije vrstica svinčnice pravokotnico  $CD$ , oziroma ako udarja kroglica v izdolbino. Kakšno lego mora imeti ravnina grebljice pri uporabi? Imenuj rokodelce, ki rabijo grebljico!



Slika 31.



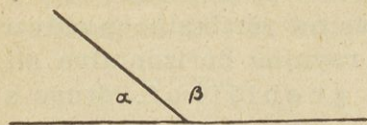
Slika 32.

Pravokotnico v točki  $C$  zakoličene daljice  $AB$  določiš s kotomerom, če ga postaviš navpično nad točko  $C$  (sl. 32.), zavrtiš eno ziral v smer daljice  $AB$  ter viziraš nato skoz vizirja pravokotnega zirala. Pomočnik zasadi na dano znamenje v tej smeri drog  $D$ .  $DC$  določa pravokotnico.

Na isti način zakoličiš skoz točko  $D$  (sl. 32.) pravokotnico na daljico  $AB$ . Najprvo določiš po vidu podnožišče  $C$  zahtevane pravokotnice in postaviš tja kotomer tako, da ima eno ziral smer daljice  $AB$ . Nato premikaš kotomer, ne da bi izpremenil smer prvega zirala, toliko časa na desno ali levo, da gre smernica drugega zirala skoz drog  $D$ .

\* Še natančneje določimo horizontalno lego z libelom (model!).

S kotomerom pa lahko izmeriš vsak zakoličeni kot. Kotomer postaviš v vrh kota tako, da ima ziralno skoz  $0^{\circ}$  in  $180^{\circ}$  smer enega kraka. Ako zavrtiš nato kazalec v smer drugega kraka, vidiš na kotomeru, kolik kot tvorita kraka.

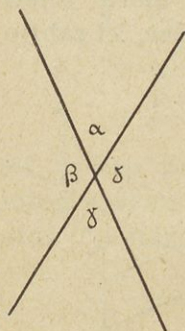


Slika 33.

$\alpha$  in  $\beta$  imenujemo sokota. Določenemu kotu narišeš torej sokot, ako podaljšaš en krak preko vrha. Katerega? Kako se izpreminja sokot  $\beta$ , ako kot  $\alpha$  zmanjšaš ali povečaš?

Ako sta sokota enaka, kolik je vsak izmed njiju?

Sokota tvorita iztegnjeni kot. ( $\alpha + \beta = 180^{\circ} = 2R$ .)



Slika 34.



Slika 35.

Nariši zopet kot  $\alpha$  (sl. 34.) ter podaljšaj oba kraka preko vrha! Koliko kotov nastane? Zaznamej jih! Imenuj sokota kota  $\alpha$ ! Kot  $\gamma$ , ki leži kotu  $\alpha$  nasproti, zovemo

sovršni kot kota  $\alpha$ . Določenemu kotu narišeš sovršni kot, če podaljšaš oba kraka preko vrha. Izmeri kota  $\alpha$  in  $\gamma$ !

Sovršna kota sta enaka. ( $\alpha = \gamma$ .)

Ako se sekata dve premici, določata štiri kote. Imenuj po dva kota, ki sta sokota, ter po dva, ki sta sovršna kota!

Ako tvorita premici štiri enake kote (sl. 35.), tedaj je vsak kot pravi kot in pravimo, da se sekata premici pravokotno ali da sta pravokotni ali normalni ( $a \perp b$ ).

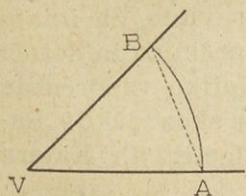
Nariši pravi kot ter potegni v kotni ploskvi skoz vrh poltrak! Pravi kot si razdelil na dva kota  $\alpha$  in  $\beta$ . Kakšna kota sta? Koliko meri eden, koliko drugi? Pravi



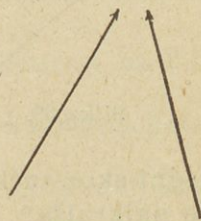
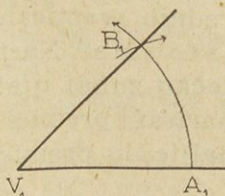
kot moremo razdeliti le na dva ostra kota. Kota, katerih vsota meri  $90^\circ$ , imenujemo komplementarna kota. ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ .)

Kota  $\alpha$  in  $\beta$ , katerih vsota meri  $180^\circ$ , zovemo suplementarna kota. ( $\alpha + \beta = 180^\circ = 2R$ .)

6. Kot  $AVB$  (sl. 36.) hočemo prenesti na poltrak  $V_1A_1$ . Načrtaj okoli  $V$  in  $V_1$  loka z istim polmerom in povzemi



Slika 36.



Slika 37.

s šestilom razdaljo točk  $A$  in  $B$ ! Ako narišeš okoli  $A_1$  lok, ki seka že načrtanega v točki  $B_1$ , je poltrak  $V_1B_1$  drugi krak prenesenega kota.

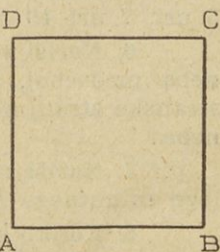
Določen kot torej preneseš, če preneseš kotu pripadajoči lok.

Izreži en kot ter ga položi na drugega! Ker se krijejo njiju kraki, sta kota  $V$  in  $V_1$  enaka.

Nariši več kotov, izreži jih in položi ob skupnem vrhu drugega poleg drugega! Kako seštevamo kote? Nariši dva različna kota, izreži ju ter položi manjšega na večjega tako, da se krijeta dva kraka! Kako določiš razliko dveh kotov?

7. Nariši premici, ki se sekata (sl. 34.)! Koliko skupnih točk imata? Skupno točko imenujemo presečišče.

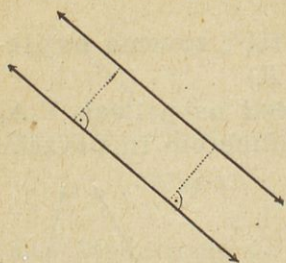
Glej premici na sl. 37.! Kje leži presečišče, kako ga najdeš? Pa še drug slučaj je mogoč.



Slika 38.

Nariši kvadrat  $ABCD$  (sl. 38.)! Ali se sekata stranici  $AB$  in  $CD$ ? Ali bi se sekali, če bi ji podaljšal za 100 m, za 1000 m? Kako smo imenovali dve nasprotni stranici kvadrata?

Proga južne železnice vodi n. pr. iz Ljubljane do Zaloga naravnost proti vzhodu. Ako smatramo tračnici kot premici, se li kdaj snideta? Zakaj ne? Kako široka je proga med tračnicama?



Slika 39.

Premici, ki ležita v isti ravnini in se nikdar ne snideta, sta vzporedni ali paralelni (sl. 39.). O vzporednih premicah pravimo, da imajo isto smer. Nariši premico in določi točko zunaj nje! Koliko vzporednic narisani premici gre skozi točko? Potegni skozi točko več daljic do premice! Izmeri jih! Katera je najkrajša?

Razdaljo dveh vzporednic določa pravokotnica med njima.

### Vaje.

1. Izmeri kote svojih trikotnikov!
2. Kakšen kot nariše minutni kazalec v 5, 12, 15, 30, 45 minutah?
3. Nariši po vidu kote, ki naj merijo  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $22\frac{1}{2}^\circ$ ,  $37^\circ 30'$ , ter jih potem izmeri s kotomerom! Za koliko si pogrešil? Tablica!
4. Kdaj tvorita kazalca ure kot  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ?
5. Kolik kot določata kazalca ure ob 3., 4. uri 30 minut, 6. uri, 7. uri 10 minut, 9. uri?
6. Nariši vetrovnico! Kakšne kote tvorijo a) glavne strani neba medseboj, b) stranske strani neba z glavnimi, c) medstranske strani neba s sosednimi glavnimi in stranskimi stranmi neba?
7. Nariši urno kazalo ter zaznamenuj na krožnem obodu lego minutnega kazalca od dveh do dveh minut!
8. Koliko stopinj meri lok, ki ga nariše sonce v eni uri?
9. Nariši več kotov v različni legi, presodi po vidu njih velikost, potem jih izmeri! Za koliko si pogrešil? Napravi tablico!
10. Presodi po vidu kot, ki ga oklepata urna kazalca 12 minut po 12. uri in 48 minut po 11. uri! Izmeri kota!
11. Nariši ob krajiščih 7 cm dolge daljice kota  $\alpha = 30^\circ$  in  $\beta = 60^\circ$ !



12. Nariši s kotomerom kote, ki jih tvorita urna kazalca ob 1., 2., 3., ... 12. uri!

13. Nariši kot  $36^\circ$  ter mu prištej s kotomerom kot  $142^\circ$ , ti vsoti kot  $58^\circ$  in nastali vsoti še kot  $124^\circ$ ! Kakšen kot dobiš?

14. Nariši in izreži neenaka kota  $\alpha$  (večji) in  $\beta$  ter določi njiju vsoto  $\alpha + \beta$  in njiju razliko  $\alpha - \beta$ !

15. Nariši oster kot ter ga podvoji, potroji!

16. Nariši pravi kot ter ga razdeli na dva, tri, štiri, pet enakih delov po vidu in s kotomerom!

17. Nariši kot  $60^\circ$  ter ga razdeli s kotomerom na 2 (3, 4, 5, 6, 12) enakih delov!

18. Kakšen kot je sokot ostrega, kakšen sokot topega kota? Napravi sliko!

19. Kolik je sokot kota  $\alpha$ , ki meri  $5^\circ$  ( $10^\circ$ ,  $12\frac{1}{2}^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $175^\circ$ )?

20. Kot  $\alpha$  meri  $150^\circ$ ; za koliko stopinj se razlikuje njegov sokot od pravega kota?

21. Nariši sovršna kota, ki merita po  $40^\circ$ , ter izmeri sokota!

22. En kot ob presečišču dveh premic meri  $35^\circ$ ; izračunaj, po koliko merijo ostali koti!

23. Kot  $\alpha$  meri  $8^\circ$  ( $10\frac{1}{2}^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $84^\circ$ ); izračunaj komplementarni kot!

24. Izračunaj kótoma  $\alpha = 37^\circ 18'$  in  $\beta = 73^\circ 26' 13''$  suplementarni in komplementarni kot!

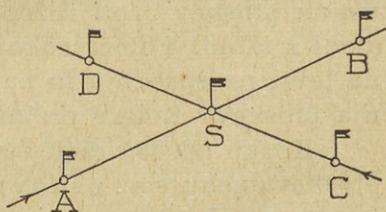
25. Sestavi si ravnilo za risanje vzporednic iz štirih paličic (dveh po 30 cm dolgih in dveh prečnih po 8 cm dolgih), ki se dajo pregibati v členkih. Nariši s tem ravnilom vzporednice z razdaljo 4 cm, 6 cm, 7 cm! (Glej sliko 121.1)

26.\* Zakoliči na prostem skoz določeno točko poldnevnic (spojnico severne in južne obzoro-rove točke)! Kje leži vzhod, kje zahod? Zakoliči to smer!

27.\* Določi presečišče zakoličenih premic skoz AB in CD! [Prvi merjevec vizira v smeri AB, drugi v smeri CD (sl. 40).

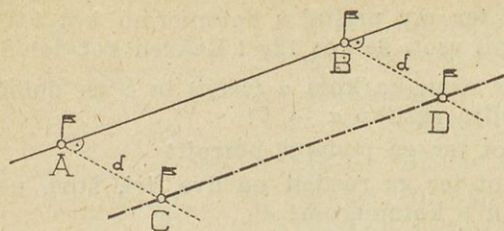
Pomočnik, ki stopi z merskim drogom tja, kjer je približno presečišče S, premika drog, dokler ni v smeri obeh merjevcev, ter ga zasadi na dano znamenje.]

28.\* Zakoliči kot, ki ga tvorita na polju dve ravni poti! (Presodi kot najprvo po vidu, potem ga izmeri!)



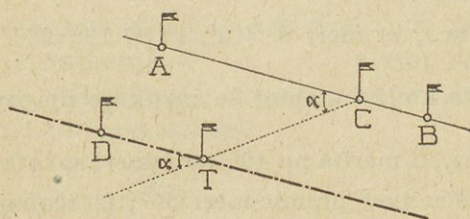
Slika 40.

29.\* Zakoliči premici  $AB$  vzporednico v določeni razdalji  $d$ ! [Določi skoz  $A$  in  $B$  pravokotnici na daljico  $AB$  in od-



Slika 41.

ga tvori  $TC$  z  $AB$ , ter ga primerno prenesi ob vrhu  $T$  na podaljšano daljico  $CT$  (sl. 42.)! Razreši nalogo tudi tako,



Slika 42.

določi drugo krajišče premera skoz to točko, kakor tudi krajišči pravokotnega premera!

33.\* Zakoliči kvadrat s stranico  $a = 10\text{ m}$ !

meri na vsaki razdaljo  $d$ ! Krajišči  $C$  in  $D$  teh pravokotnic določata vzporednico (sl. 41.).

30.\* Zakoliči določeni premici  $AB$  vzporednico skoz točko  $T$ ! [Na daljici  $AB$  določi točko  $C$ , izmeri nato kot  $\alpha$ , ki

ga tvori  $TC$  z  $AB$ , ter ga primerno prenesi ob vrhu  $T$  na podaljšano daljico  $CT$  (sl. 42.)! Razreši nalogo tudi tako, da je kot  $\alpha$  enak  $90^\circ$ ! Kateri način je krajši?]

31.\* Izberi na šolskem dvorišču točko ter izmeri njeno razdaljo od šolskega poslopja!

32.\* Začrtaj krog s polmerom  $r = 7\text{ m}$ , označi na obodu točko ter

## V. Kocka. Kvadrat. Kvader. Pravokotnik.

1. Postavi kocko na mizo tako, da bo obrnjena ena mejna ploskev proti razredu, nasprotna ploskev pa proti steni s tablo! Položi roko na zgornjo ploskev, na desno, na levo, na sprednjo in na zadnjo ploskev! Kje leži spodnja ploskev? Koliko mejnih ploskev našteješ?

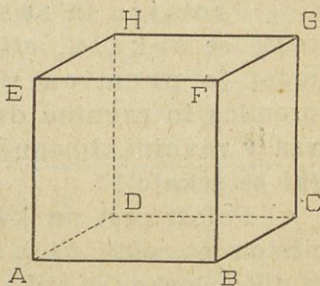
Kocko (sl. 43.) meji šest ploskev. Spodnjo in zgornjo ploskev imenujemo osnovni ploskvi, ostale štiri ploskve pa stranske ploskve. Vse mejne ploskve telesa tvorijo njegovo površino.

Koliko robov ima kocka? Potegni s prstom po zgornjem in spodnjem sprednjem robu! Na kateri ploskvi ležita? Roba  $AB$  in  $EF$  ležita na sprednji ploskvi in sta vzporedna. Imenuj vse vzporedne robe! Koliko skupin vzporednih robov opaziš? Opiši jih!



Položi svinčnik na rob  $BA$ , drug svinčnik pa na rob  $EA$ ! Roba  $BA$  in  $EA$  imata skupno oglišče  $A$ ; pravimo, da se sekata v točki  $A$ . Po koliko robov se stika v vsakem oglišču? Koliko oglišč naštejesh?

Položi svinčnik na desni spodnji rob, drugega pa prisloni ob levi zadnji rob! Ali sta vzporedna, ali se sekata? O robih  $BC$  in  $DH$ , ki nista vzporedna in ki se tudi ne sekata, pravimo, da sta mimo-bežna. Imenuj roba, s katerima je še mimobežen rob  $BC$ ! Poišči v učilnici mimobežne robe!



Slika 43.

2. Položi knjigo na zgornjo kockno ploskev! Primerjaj njeno lego s spodnjo ploskvijo, ki leži na mizi! Pokaži v učilnici steni, ki imata tako lego! Zgornja in spodoja kockna ploskev nimata nobene skupne točke, če ji tudi razširimo. Ravnini brez skupnih točk imenujemo vzporedni ali paralelni ravnini. Imenuj ostale vzporedne kockne ploskve, vzporedne stene v učilnici!

Pravokotnica med vzporednima ravninama je najkrajša daljica med njima ter določa njuno razdaljo. Pokaži to na kocki, v učilnici!

Spodnja in sprednja ploskev imata skupni rob  $AB$ . Pokaži ga! Ravnini, ki imata skupne točke, sekata druga drugo. Skupne točke dveh ravnin leže vedno v premi črti, ki jo zovemo presečnico. Imenuj kockne ploskve, ki se sekajo!

Odpri knjigo ter jo prisloni na kocko tako, da krije levo in zadnjo kockno ploskev! Odmakni kocko!

Kockni ploskvi, ki se sekata v robu, tvorita pravokotni ploskovni kot, t. j. prostor, ki ga deloma mejita dotični ploskvi. Koliko ploskovnih kotov ima kocka?

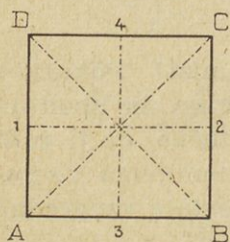
Ravnini, ki tvorita pravokotni ploskovni kot, sta pravokotni ali normalni. Pokaži pravokotne ravnine v učilnici!

Podloži kocki knjigo, ob levi sprednji rob pa prisloni svinčnik! Odmakni kocko! Rob  $AE$  in ploskev  $ABCD$

imata skupno točko (presečišče)  $A$ ; rob  $AE$  stoji pravokotno na ploskvi  $ABCD$ . Rob  $AE$  in ploskev  $BCGF$  nimata skupne točke. Rob  $AE$  leži v ploskvi  $ABFE$ . Pokaži s svinčnikom in knjigo!

Premica in ravnina imata ali eno skupno točko, tedaj se sekata, ali pa nimata nobene skupne točke, tedaj je premica vzporedna ravnini. Ako imata premica in ravnina dve skupni točki, tedaj leži premica vsa v ravnini. Imenuj robe in ploskve, ki so vzporedni (ki se sekajo)!

Položi prst na katerokoli kockno oglišče! Potegni s prstom po robih, ki se stikajo v tem oglišču! Koliko jih je? Koliko ploskev se stika v tem oglišču? Položi odprto knjigo

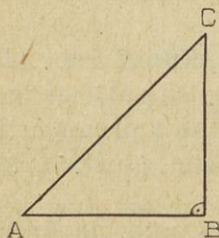


Slika 44.

ob zadnjo in levo ploskev ter odmakni kocko! V vsakem kocknem oglišču se stikajo po trije robi in po tri ploskve. Prostor, ki ga mejé tri v kocknem oglišču stikajoče se ploskve, imenujemo pravokotni tristranični ogel ali trirobnik. Koliko jih ima kocka?

**3. Mejne kockne ploskve so skladni kvadrati.**

Kvadrat (sl. 44.) ima štiri enake stranice in štiri prave kote. Vsota stranic določa kvadratov obseg. Daljico, ki spaja dvoje nasprotnih oglišč, imenujemo prekotnico ali diagonalo. Koliko diagonal ima kvadrat? Izmeri jih!



Slika 45.

Vzemi kvadrat, ki smo ga nedavno načrtali in izrezali, ter nariši v njem diagonalo! Tako nastaneta dva trikotnika. Ako preganeš kvadrat po diagonalni,

vidiš, da se trikotnika krijeta, da sta skladna. Diagonala deli kvadrat na dva enaka dela.

V trikotniku  $ABC$  (sl. 45.), ki je polovica kvadrata  $ABCD$ , je kot  $B$  pravi kot; njegova kraka  $AB$  in  $BC$  sta enaka, kakor sta tudi enaka kota  $A$  in  $C$ .

Trikotnik  $ABC$  imenujemo enakokraki pravokotni trikotnik. Stranico  $AC$ , ki leži pravemu kotu



nasproti, zovemo hipotenuzo, stranici  $AB$  in  $BC$ , ki tvorita pravi kot, pa kateti.

Izmeri trikotnikove kote! Kolika je njih vsota?

Pregani kvadrat še po drugi diagonal! Diagonali sta enaki, sekata se pravokotno in razpolavljata druga drugo. Nariši krog, ki mu je presečišče diagonal središče in ki gre skoz oglišča kvadrata! Presečišče diagonal imenujemo kvadratovo središče. Koliko trikotnikov določata obe diagonali? Razreži kvadrat po diagonalah ter primerjaj nastale trikotnike!

Razpolovi kvadratove stranice! Daljici med nasprotno ležajočima razpoloviščema zovemo srednjici (sl. 44.: 12 in 34).

4. Oblikovati hočemo kocko iz kartona.

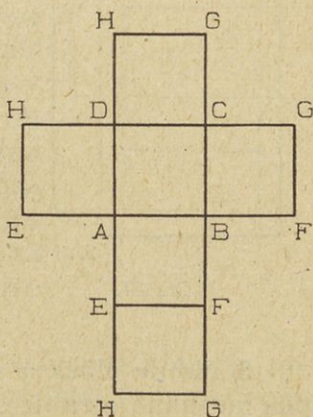
Prisloni kocko na tablo tako, da bo spodnja ploskev vzporedna tlom! O kocki pravimo potem, da ima vzporedno lego glede na stene učilnice.

Očrtaj s kredo kockno ploskev, ki sloni na tabli ( $ABCD$  na sl. 46.), nato zvrni kocko zaporedoma okoli vsakega roba te ploskve na tablo ter očrtaj zvrnjene kvadrate ( $BFGC$ ,  $CGHD$ ,  $DHEA$  in  $AEFB$  na sl. 46.)! Ako kocko v zadnji legi ( $AEFB$ ) zvrneš še enkrat navzdol, očrtaš zvrnjeni kvadrat, si dobil lik, ki tvori v ravnino razgrnjene mejne kockne ploskve in ki ga imenujemo kockno mrežo (sl. 46.)

Oblikuj kocko z robom  $a = 10\text{ cm}$ !

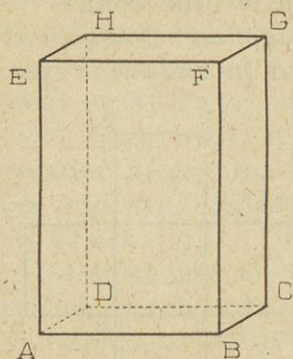
Nariši na kárton kockno mrežo, t. j. šest kvadratov s stranico  $a = 10\text{ cm}$  drugega poleg drugega, kakor to vidiš na sliki 46.! Nato izreži mrežo, jo nekoliko nareži po robih  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  in  $EF$ , sestavi kocko ter jo zlepi po robih (ali pa vbodi z iglo ob prostih ogliščih luknjice in zveži oglišča z nitjo)!

Kocka ima skladne mejne ploskve, enake robe, enake ploskovne kote in enake ogle. Kocka je pravilno telo.



Slika 46.

5. Ogledati si hočemo telo (sl. 47.), ki stoji na mizi poleg kocke. Imenujemo ga kvader ali pravokotni paralelepiped. Oblikatega telesa nam je znana, ker se pogostoma uporablja. (Opeka, škatlice za vžigalice, zaboji, učilnica i. t. d.)

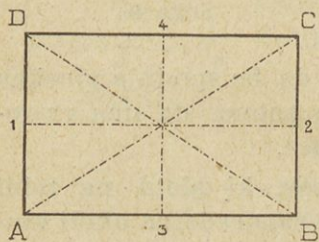


Slika 47.

Kakor kocka ima tudi kvader osem oglišč, dvanajst robov in šest mejnih ploskev. Medsebojna lega robov in ploskev je ista kakor pri kocki. Loči se pa od kocke po različni dolžini robov.

Pokaži na kvadru vzporedne robe in ploskve, pravokotne robe in mimobežne robe!

6. Mejne ploskve so liki, ki imajo po štiri prave kote, toda neenake stranice. Enaki in vzporedni sta le po dve nasprotni stranici. Take like imenujemo pravokotnike (sl. 48.).



Slika 48.

Nariši pravokotnik, izreži ga ter se prepričaj s pregibanjem: 1. da ima pravokotnik dve enaki diagonali, ki se razpolavljata, a se ne sekata pravokotno, marveč poševno; 2. da vsaka diagonalna deli pravokotnik na dva skladna pravokotna trikotnika!

Tudi pravokotnik ima dve srednjici (sl. 48.: 12 in 34).

Mrežo kvadra (sl. 49.) dobimo na isti način kakor mrežo kocke.

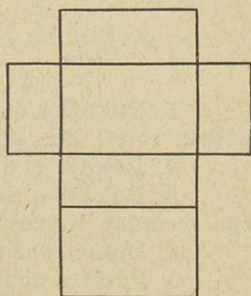
7. V tej knjigi vidiš nazorne slike teles; kako jih rišemo?

Narišimo nazorno sliko kocke, kakor jo kaže slika 43.!

Vzemi kocko, ki smo jo oblikovali iz belega kartona, drži jo, obrnjen proti tabli, v vzporedni legi pred seboj,



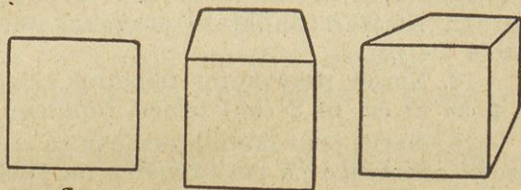
v višini desnega očesa ter jo opazuj samo s tem očesom! Katere ploskve vidiš, katere ne? Od črne table odseva le sprednja ploskev, ki je tabli vzporedna. Nariši tak kvadrat kot kockno sliko (sl. 50. a)! Premakni kocko, ne da bi izpremenil njeno vzporedno lego tako, da vidiš tudi zgornjo ploskev! Zdi se ti, da nastane na tabli obris kocke, kakor ga vidiš na sliki 50. b. Premakni kocko v vzporedni legi končno še tako, da vidi tvoje oko sprednjo, zgornjo in desno ploskev! Na tabli opaziš kockno sliko, ki jo kaže slika 50. c. Kako se ti zdijo podobe kocknih vzporednih robov, ki so pravokotni na tabli? Nevzporedne so in krajše.



Slika 49.

Opazuj fotografično sliko šolskega poslopja! Na poslopju so vzporedni robi. Pokaži jih! Kateri imajo vzporedne slike, kateri ne? Če bi torej hotel narisati kocko, kakor jo vidi oko (perspektivna slika), bi slike vzporednih robov, ki niso vzporedni tabli, ne smele biti vzporedne.

Radi enostavnega načrtovanja pa rišemo v nazornih slikah vzporedne robe kot vzporedne daljice.

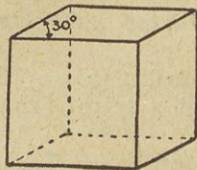


a

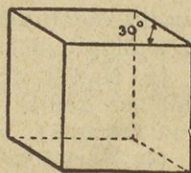
b

c

Nazorno sliko kocke v vzporedni legi dobiš, če načrtaš sprednjo ploskev v pravi obliki, robe, ki so pravokotni na tabli (na listu), pa kot vzporedne, n. pr. na polovico skrajšane daljice,



d



e

Slika 50.

naklonjene sliki zgornjega oz. spodnjega sprednjega horizontalnega kocknega roba v kotu n. pr.  $30^\circ$ . Slika 50. d kaže

tako podobo kocke, kakor jo vidiš z desne od zgoraj, slika 50.e pa kakor jo vidiš z leve od zgoraj.

Telo je neprozorno, zato rišemo nevidne robe črtkano. Nariši nazorno sliko kvadra! Glej sliko 47.!

### Vaje.

1. Pokaži z dvema svinčnikoma, kolikero medsebojno lego moreta imeti dve premici!

2. Pokaži z dvema kartonoma glavni legi dveh ravnin!

3. Pokaži s svinčnikom in kartonom glavne medsebojne lege premice in ravnine!

4. Določi razdaljo vzporednih sten učilnice!

5. Poišči v učilnici robe, ki stoje pravokotno na ravninah!

6. Nariši prostoročno kvadrat ter izmeri nato stranice in kote!

7. Nariši kvadrat ( $a = 10\text{ cm}$ ), razdeli stranice na 10 enakih delov ter spoji nasproti si ležeča razdelišča! Kakšne like dobiš in koliko?

8. Kolika je vsota kvadratovih in kolika vsota pravokotnikovih kotov?

9. Nariši šahovnico (64 kvadratnih polj)! Stranica kvadratnega polja naj meri  $2\text{ cm}$ !

10. Nariši kvadrat ( $a = 5\text{ cm}$ ) ter mu očrtaj in včrtaj krog!

11. Nariši kockno mrežo ( $a = 1\text{ dm}, 1\text{ cm}$ ) ter sestavi kocko!

12. Nariši enakokraki pravokotni trikotnik, ako meri kateta  $5,4\text{ cm}$ !

13. Nariši pravokotni trikotnik, čigar kateti merita  $3\text{ cm}$  in  $4\text{ cm}$  ( $6\text{ cm}$  in  $8\text{ cm}$ )! Izmeri hipotenuzo!

14. Nariši pravokotnik (osnovnica  $= 5\text{ cm}$ , višina  $= 4\text{ cm}$ ), razdeli osnovnico na pet in višino na štiri enake dele ter spoji nasproti si ležeča razdelišča! Kakšni liki nastanejo in koliko?

15. Nariši pravokotnik ( $a = 8\text{ cm}, b = 5\text{ cm}$ ), določi njegov obseg in dolžino diagonale ter izmeri razdaljo oglišč od presečišča diagonal!

16. Nariši v pravokotniku ( $a = 7,3\text{ cm}, b = 4,8\text{ cm}$ ) diagonali ter zapiši vsak kot s tremi črkami in vsako daljico z dvema črkama!

17. Nariši pravokotniku ( $a = 7\text{ cm}, b = 5\text{ cm}$ ) diagonali ter nariši krog, čigar središče je presečišče diagonal in ki gre skozi pravokotnikova oglišča!

18. Nariši kvadrovo mrežo ( $a = 6\text{ cm}, b = 40\text{ mm}, c = 0,8\text{ dm}$ ) ter sestavi telo!

19. Kako je premikati kvadrat, da nariše kocko; kako pravokotnik, da nariše kvader?



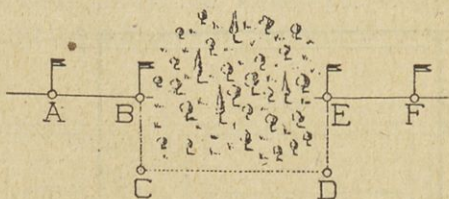
20.\* Zakoliči kvadrat s stranico  $a = 100\text{ m}$ ! Izmeri diagonali!

21.\* Zakoliči pravokotnik s stranicama  $a = 16\text{ m}$  in  $b = 11\text{ m}$ ! Izmeri diagonali in kote, ki jih tvorita!

22.\* Skoz gozdič naj vodi ravna cesta, ki je na eni strani (AB) zakoličena. Ker je zgradba ceste nujna, je pričeti z delom takoj na obeh straneh gozdiča; kako določiš podaljšanje ceste onkraj gozdiča? [Določi

skoz B (sl. 51.) pravokotnico na AB in na njej točko C takó, da lahko zakoličiš skoz njo ob meji gozdiča vzporednico premici skoz AB! Skoz primerno točko D te vzporednice določi na njo pravokotnico DE enako CB ter

zakoliči končno skoz E pravokotnico na ED! EF je podaljšana daljica AB. Kakšen lik je BCDE?]



Slika 51.

## VI. Risanje enostavnih predmetov.

1. Na podlagi tega, kar smo se dozdej naučili, moremo že risati enostavne predmete v enostavnih legah.

Pri mizarju je n. pr. naročiti več zabojev za papir, kakršnega vidiš v kotu poleg mize. Kako narišeš zaboj, da bo mogel mizar po tvoji risbi naročilo izvršiti?

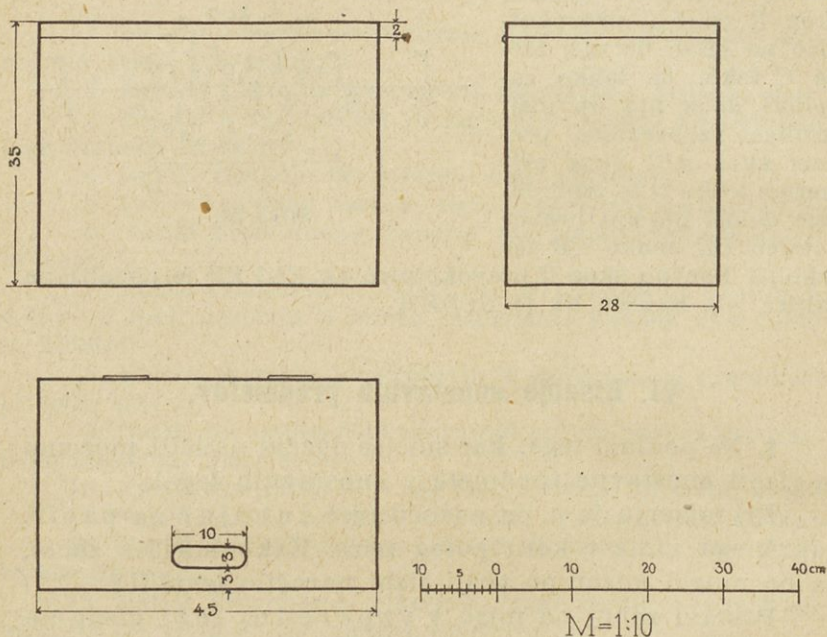
Postavi zaboj na mizo v vzporedni legi glede na stene učilnice.

Ako stopiš v precejšnji razdalji pred zaboj, vidiš le sprednjo zabojevo ploskev, ki ima obliko pravokotnika. Stranici, ki določata ta pravokotnik, sta enaki dolžini in višini zaboja. Če zreš odzgoraj na zaboj, vidiš zopet pravokotnik s stranicama, enakima zabojevi dolžini in širini. Tudi pogled na zaboj od strani kaže pravokotnik, čigar stranici sta enaki zabojevi širini in višini.

Izmeri zaboj: dolžina meri  $45\text{ cm}$ , širina  $28\text{ cm}$  in višina  $35\text{ cm}$ . Ker ne moremo zaboja narisati v tej velikosti v risalne zvezke, rišemo z zmanjšanim merilom. Določimo merilo  $1 : 10$  (beri: ena proti desetim). To pomeni: daljica, ki meri na risbi  $1\text{ cm}$ , je v resnici  $10\text{ cm}$  ali  $1\text{ dm}$  dolga. Kolika je v resnici daljica, ako meri na risbi  $1\text{ mm}$ ?

Na sliki 52. je narisano zaboj v zmanjšanem merilu, kakor ga vidiš od zgoraj, od spredaj in od strani. Slika ni nazorna, vendar pa posname mizar po nji vse ono, kar mora vedeti v svrhu izvršitve naročila.

Risbi prideni zmanjšano merilo 1 : 10!



Slika 52.

2. Na sliki 53. vidimo narisano istotako mizo po merilu 1 : 20. Daljica, ki meri na risbi 1 cm, je v resnici 20 cm ali 2 dm dolga.

Kolika je v resnici debelina mizne plošče in noge ter širina miznice?

3. Slika 54. kaže podobo risalnice, kakor jo vidi oko, ki se nahaja v navpični smeri visoko nad njo. Tako risbo imenujemo črtež.

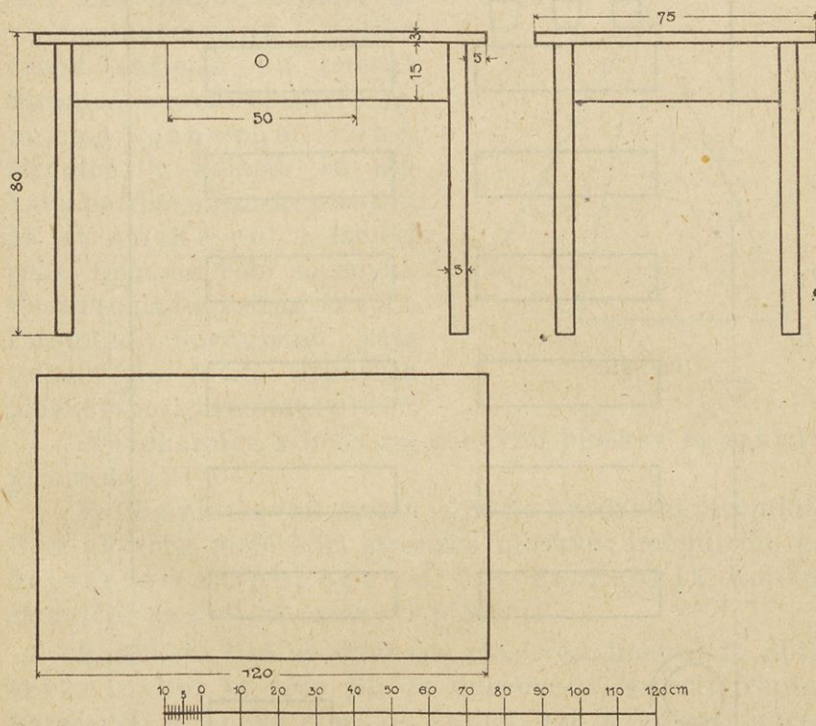
Preden narišemo črtež, izmerimo dolžino in širino risalnice, dolžino in širino predmetov, ki se nahajajo v njej, kakor tudi razdaljo enega predmeta od drugega,



oziroma od sten. Po najdaljši stranici določimo nato primerno zmanjšano merilo. Risalnica je 12 m dolga in 8 m široka.

Črtež risalnice je risan po merilu 1 : 100. 1 cm na risbi pomeni v resnici 100 cm ali 1 m.

Na črtežu vidimo spredaj podij, na katerega stopiš po nizki stopnici. Na podiju so miza, stol, stopnica pred

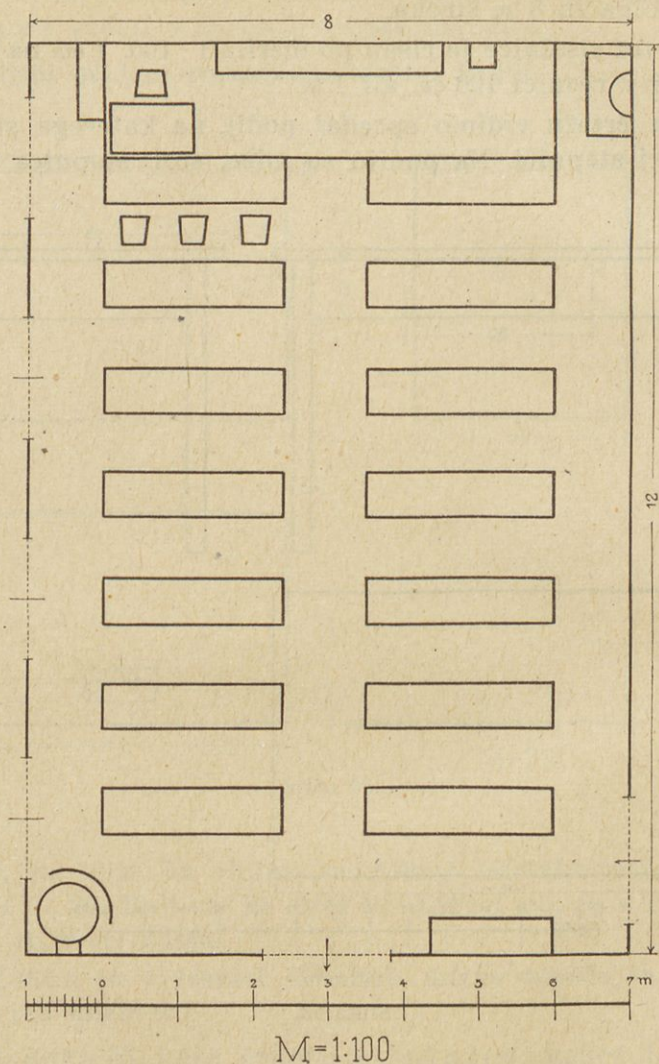


M=1:20

Slika 53.

desko in poleg te stolček za kredo in gobo. Poleg podija na desno stoji umivalnik. V risalnici sta dve vrsti po sedem risalnih miz. Risalnica ima dvoje vrat in štiri okna. Zadaj poleg vrat stoji na levi strani peč, na desni pa omara za modele.

Določi z zmanjšanim merilom dolžino in širino risalnih miz, širino vrat i. t. d.



Slika 54.

### Vaje.

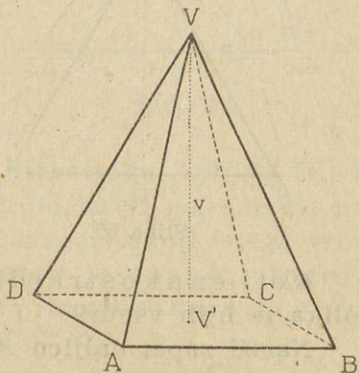
1. Nariši zmanjšana merila 1:4, 1:5, 1:6, 1:50!
2. Nariši atlant po merilu 1:4!
3. Nariši črtež svoje spalnice po merilu 1:50!
- 4.\* Nariši črtež šolskega dvorišča po primernem merilu!



## VII. Piramida. Trikotnik. Prisekana piramida. Trapez.

1. Telo, ki ga vidiš na mizi (sl. 55.), imenujemo piramido. Obliko piramide imajo navadno strešni del stolpov, spomeniki, šotori, konice žrebljev i. t. d.

Piramido (sl. 55.) meji kvadrat  $ABCD$  kot osnovna ploskev, zato ji pravimo kvadratna piramida. Koliko ima stranskih ploskev? Kakšno lego imajo? Stikajo se v piramidnem vrhu  $V$ . Koliko robov našteješ na telesu? Stranice osnovne ploskve imenujemo osnovne robe, stranice, v katerih se stikata po dve stranski ploskvi, pa stranske robe. Izmeri robe! Osnovni robi so enaki, Enaki so pa tudi stranski robi. Piramido imenujemo zato pokončno. Vsota stranskih ploskev tvorí piramidni plašč.



Slika 55.

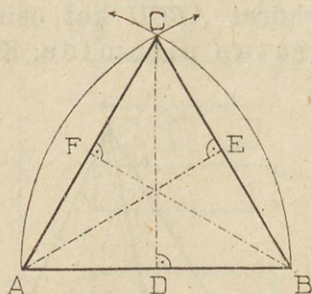
Pravokotnica z vrha na osnovno ploskev je višina piramide ( $VV'$ ).

Koliko ploskovnih kotov vidiš na kvadratni piramidi? Ogel ob vrhu mejé štiri stranske ploskve; imenujemo ga četerostranični ogel ali četerorobnik. Kolikostranični so ogli na osnovni ploskvi?

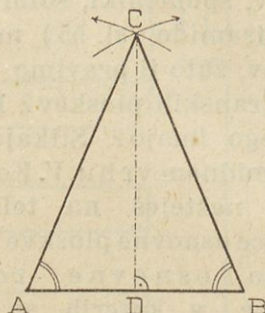
2. Kakšni liki so stranske ploskve? Imenuj in opiši trikotnike, ki smo jih že opazovali! Izmeri stranice katerekoli stranske ploskve! Sestavi tak trikotnik iz treh svinčnikov, katerih dva sta enako dolga! Sestavi trikotnik tudi iz treh enako dolgih svinčnikov! Trikotnik z dvema enakima stranicama smo imenovali enakokraki trikotnik, trikotnik, ki ima vse tri stranice enake, pa zovemo enakostраниčni trikotnik. Načrtajmo ju!

Nariši daljico  $\overline{AB}$  (sl. 56.) ter začrtaj iz njenih krajišč s polmerom, enakim  $\overline{AB}$ , loka, ki se sekata v točki  $C$ ! Nastali trikotnik  $ABC$  je enakostраниčen, ker ima vse tri stranice enake. Izmeri kote! Nariši iz vsakega oglišča

pravokotnico na nasprotno stranico, izreži trikotnik ter ga pregani po pravokotnici  $CD$ ! Kota  $A$  in  $B$  se krijeta. Pregani trikotnik tudi po pravokotnicah  $AE$  in  $BF$ . Krijeta se tudi kota  $B$  in  $C$ , oziroma  $A$  in  $C$ .



Slika 56.



Slika 57.

Koti enakostraničnega trikotnika so enaki. Kolika je njih vsota?

Nariši zopet daljico  $\overline{AB}$  (sl. 57.) in začrtaj iz njenih krajišč s polmerom, različnim od  $\overline{AB}$ , loka, ki se sekata v točki  $C$ . Trikotnik  $ABC$  je enakokrak trikotnik. Enaki stranici  $AC$  in  $BC$  imenujemo kraka, stranico  $AB$  pa osnovnico. Osnovnici nasprotno oglišče  $C$  zovemo vrh trikotnika.

Nariši z vrha pravokotnico  $CD$  na osnovnico, ki ji pravimo višina, ter izreži trikotnik! Pregani trikotnik ob višini! Kaj opaziš? Višina razpolavlja osnovnico in kot ob vrhu, kota  $A$  in  $B$  ob osnovnici pa se krijeta.

V enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici enaka.

Izmeri vse tri kote! Kolika je njih vsota?

**3.** Trikotnik je raven lik, omejen od treh stranic, ki se stikajo v treh ogliščih ter tvorijo tri kote. Imenuj stranice, oglišča in kote trikotnika na sliki 58.! Vsota vseh stranic določa trikotnikov obseg.

Vsaki stranici sta dva kota priležna (n. pr. stranici  $AB$  kota  $\alpha$  in  $\beta$ ), tretji kot pa leži stranici nasproti.

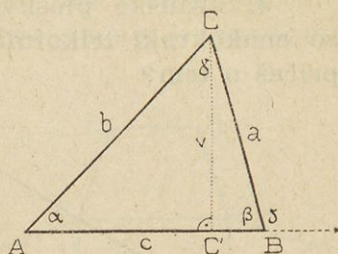
Stranico  $AB$ , na katero si mislimo trikotnik postavljeno, imenujemo navadno osnovnico, osnovnici nasprotno oglišče  $C$  pa trikotnikov vrh. Osnovnica je lahko



vsaka stranica. Pravokotnica  $CC'$  z vrha na osnovnico je višina. Koliko višin ima trikotnik?

Izmeri stranice trikotnika  $ABC$  (sl. 58.)! Trikotnikom brez enakih stranic pravimo raznostranični trikotniki.

Z ozirom na stranice razločujemo torej enakostranične, enakokrake in raznostranične trikotnike.



Slika 58.

Izmeri s kotomerom kote trikotnika  $ABC$  (sl. 58.) in določi njih vsoto! Nariši trikotnik, izreži ga, odtrgaj mu kote ter jih položi drugega ob drugem okoli istega vrha!

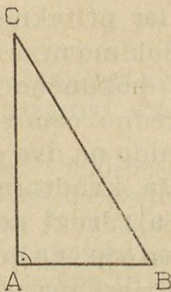
Vsota trikotnikovih kotov je enaka iztegnjenemu kotu ali dvema pravima kotoma.  $(\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = 2 R.)$

Iz dveh znanih trikotnikovih kotov lahko določiš tretjega. Ako je n. pr. kot  $\alpha = 45^\circ$  in kot  $\beta = 80^\circ$ , je kot  $\gamma = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ .

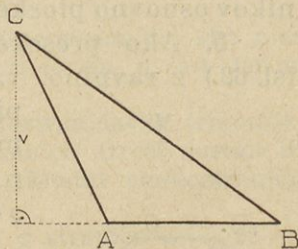
Ali je mogoč trikotnik, ki bi imel dva topa kota ali dva prava kota ali en topi in en pravi kot?

Z ozirom na kote razločujemo ostrokotne (sl. 58.), pravokotne (sl. 59.) in topokotne (sl. 60.) trikotnike.

Koliko ostrih kotov ima ostrokotni, koliko pravokotni in koliko topokotni trikotnik? Kako imenujemo stranice pravokotnega trikotnika? Kateri stranici sta kateti in katera je hipotenuza?



Slika 59.



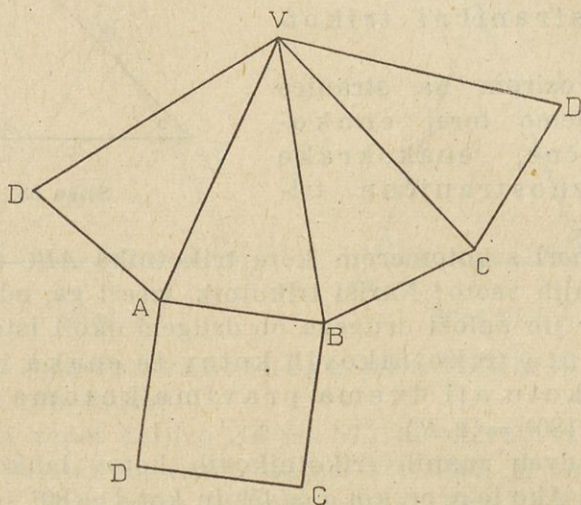
Slika 60.

Kotom  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  pravimo notranji koti.

Ako podaljšaš v trikotniku katerokoli stranico preko oglišča, dobiš kot (n. pr. kot  $\delta$  na sl. 58.), ki mu pravimo

zunanj trikotnikov kot. Primerjaj kot  $\delta$  s kotoma  $\alpha$  in  $\gamma$ ! Kaj opaziš?

4. Stranske ploskve kvadratne pokončne piramide so enakokraki trikotniki. Ali so skladni? Kako se prepričaš o tem?

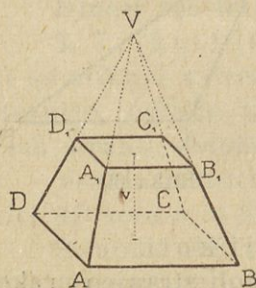


Slika 61.

Piramido meje torej kvadrat in štirje skladni enakokraki trikotniki. Vse te mejne ploskve tvorijo površino piramide.

Ako narišemo stranske trikotnike ob skupnem vrhu drugega poleg drugega ter pritaknemo enemu teh trikotnikov osnovno ploskev, dobimo mrežo piramide (sl. 61.).

5. Ako presekamo pokončno kvadratno piramido (sl. 62.) z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, razdelimo piramido na dva dela. Eden teh delov je manjša kvadratna piramida (dopolnilna), drugi del pa imenujemo prisekano piramido.



Slika 62.

Prisekana piramida ima dve vzporedni osnovni ploskvi. Osnovni ploskvi sta dva neenaka kvadrata; imata torej isto obliko, toda različno velikost.

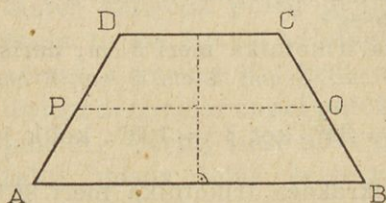
6. Vsaka stranska ploskev prisekane piramide ima po štiri kote, je



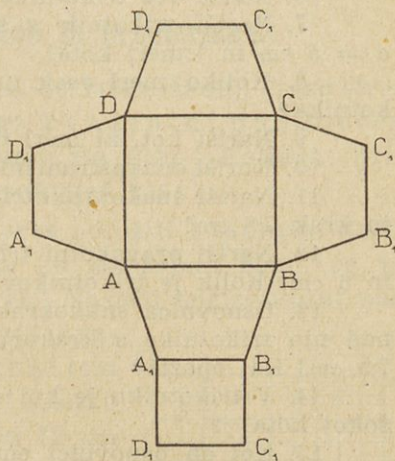
torej četverokotnik. Dve nasprotni stranici vsakega teh četverokotnikov sta vzporedni, drugi dve pa ne.

Četverokotnik, v katerem sta dve nasprotni stranici vzporedni, drugi dve pa ne, imenujemo trapez.

Akosta nevzporedni stranici (kraka) enaki, tedaj je trapez enakokrak (sl. 63.). Eno izmed vzporednih stranic imenujemo osnovnico in pravokotnico med njima višino.



Slika 63.



Slika 64.

Daljico, ki spaja razpolovišči nevzporednih stranic, imenujemo srednjico ( $\overline{PO}$ ).

Slika 64. kaže mrežo prisekane piramide.

### Vaje.

1. Nariši mrežo pokončne kvadratne piramide, ako meri osnovni rob 6 cm in stranski rob 8 cm (5 cm, 6 cm), ter sestavi telo!

2. Nariši skoz vsako oglišče enakostraničnega trikotnika ( $a = 4,5$  cm) vzporednico nasprotni stranici! Izreži nastali lik ter sestavi piramido, ki jo mejé štirje skladni enakostranični trikotniki! (Pravilni tetraeder.)

3. Nariši enakostranični trikotnik s stranico  $a = 12$  cm, razpolovi stranice ter spoji razpolovišča! Kakšne trikotnike dobiš in koliko? Izmeri njih stranice in kote! (Mreža pravilnega tetraedra.)

4. Nariši enakostranični trikotnik s stranico  $a = 9$  cm ter ga izreži! Razdeli vsako stranico na tri enake dele ter spoji po dve razdelišči, ki sta od vsakega oglišča enako oddaljeni!

Koliko in kakšne trikotnike dobiš? Odreži trikotnike ob ogliščih izrezanega trikotnika! Preostali lik, ki ima enake stranice in enake kote, imenujemo pravilni šesterokotnik. Kako mu očrtaš krog? Kje ima središče, kolik je polmer?

5. Koliko merijo koti na vseh mejnih ploskvah pravičnega tetraedra?

6. Nariši več trikotnikov in izmeri njih stranice in kote!

7. Nariši trikotnik s stranicami  $a = 3\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$ ,  $c = 5\text{ cm}$  in izmeri kote!

8. Koliko meri vsak zunanji kot enakostraničnega trikotnika?

9. Nariši kot, ki meri  $60^\circ$  ( $120^\circ$ )! Poglej sl. 56.!

10. Nariši enakostranični trikotnik, čigar obseg meri  $18\text{ cm}$ !

11. Nariši enakokraki trikotnik, ako meri osnovnica  $4,5\text{ cm}$  in krak  $7,8\text{ cm}$ !

12. Nariši pravokotni trikotnik, čigar kateti merita  $5\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$ ! Kolik je trikotnikov obseg?

13. Osnovnica enakokrakega trikotnika meri  $5\text{ cm}$ ; nariši nad njo trikotnike s krakom  $2\text{ cm}$ ,  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$ ,  $5\text{ cm}$ ,  $6\text{ cm}$ ,  $7,5\text{ cm}$ ! Kaj opaziš?

14. V trikotniku je kot  $\alpha = 35^\circ$ , kot  $\beta = 108^\circ$ ; kolik je sokot kota  $\gamma$ ?

15. Kot ob osnovnici enakokrakega trikotnika meri  $36^\circ$ ; kolik je kot ob vrhu?

16. Kolik je vsak kot ob osnovnici enakokrakega trikotnika, ako meri kot ob vrhu  $50^\circ$ ?

17. V pravokotnem trikotniku meri en kot  $30^\circ$ ; kolik je drugi kot?

18. Nariši enakokraka trikotnika tako, da meri osnovnica prvega trikotnika  $4\text{ cm}$  in krak  $6\text{ cm}$ , osnovnica drugega trikotnika pa  $6\text{ cm}$  in krak  $4\text{ cm}$ ! Izmeri in primerjaj kote obeh trikotnikov!

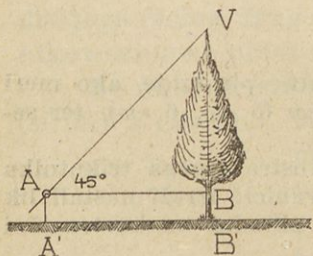
19. Nariši v enakokrakem trikotniku (osnovnica =  $5\text{ cm}$ , višina =  $7\text{ cm}$ ) skoz razpolovišče višine vzporednico osnovnici! Izmeri stranice, diagonali, srednjico in kote nastalega trapeza!

20. S koliko robi kvadratne preseke piramide je mimobežen vsak njen rob?

21.\* Zakoliči trikotnik ter izmeri njegove stranice, višine in kote!

22.\* Zakoliči enakostraničen in enakokrak trikotnik!

23.\* Izmeri višino drevesa! [Naravna kazalec vertikalno stoječega kotomera na črtico pri  $45^\circ$  (ziralo skoz  $0^\circ$  in  $180^\circ$  horizontalno)! Nato premikaj kotomer toliko časa, da lahko viziraš preko kazalca vrh drevesa (sl. 65.)! Višina drevesa je enaka



Slika 65.



$A'B' + AA'$ . Zakaj? Kakšen trikotnik je  $ABV$ ? — Kot  $A$  imenujemo višinski kot. Višino drevesa je seveda najprvo presoditi po vidu in potem šele izmeriti!]

24.\* Določi višino telegrafskega droga, šolskega poslopja, stolpa cerkve!

## VIII. Merjenje ploščine in prostornine.

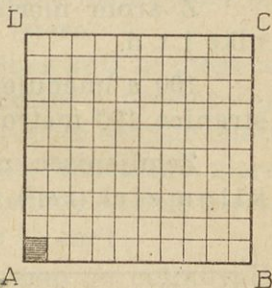
1. Nariši kvadrat  $ABCD$  (sl. 66. zmanjšana), čigar stranica meri 1  $dm$ . Imenujemo ga kvadratni decimeter (1  $dm^2$ ). Izreži ga ter ga polagaj na klop! Kolikrat približno ga moreš položiti, da pokriješ klop?

Izmeri tablo! Kolikrat moreš položiti kvadratni decimeter drugega poleg drugega ob spodnjem robu, če je tabla 15  $dm$  široka? Polagaj ga! Nastali horizontalni pas očrtaj s kredo! Kolikrat moreš kvadratni decimeter zopet položiti nad tem pasom? Očrtaj tudi novi pas! Koliko takih pasov dobiš, če je tabla 12  $dm$  visoka? Koliko  $dm^2$  vsebuje tabla? Ker je enota dolžinske mere 1  $dm$ , je kvadratni decimeter enota ploskovne mere.

Razdeli stranico  $AD$  izrezanega kvadrata na deset enakih delov in nariši skoz razdelišča vzporednice osnovnici  $AB$  (sl. 66.)! Koliko pasov dobiš? Razdeli tudi osnovnico  $AB$  na deset enakih delov ter potegni skoz razdelišča vzporednice stranici  $AD$  samo čez prvi spodnji pas! Na kaj si razdelil pas?

Nariši tak mali kvadrat s stranico 1  $cm$  ter ga izreži! Imenujemo ga kvadratni centimeter (1  $cm^2$ ). Koliko jih je na pasu? Polagaj ga! Koliko jih je v kvadratnem decimetru, če podaljšaš vzporednice do zgornje stranice  $CD$ ? Na vsakem pasu našteješ deset kvadratnih centimetrov in ker je deset takih pasov, je v kvadratnem decimetru  $10\ cm^2 \times 10 = 100\ cm^2$ .

Kvadratni decimeter ima 100 kvadratnih centimetrov.



Slika 66.

Razdeli tudi kvadratni centimeter na isti način, kakor si razdelil kvadratni decimeter! Koliko pasov dobiš? Koliko malih kvadratov na vsakem pasu? Kvadrat s stranico 1 mm imenujemo kvadratni milimeter ( $1\text{ mm}^2$ ).

Kvadratni centimeter šteje 100 kvadratnih milimetrov.

Nariši na tablo kvadrat, čigar stranica meri 1 m! Imenujemo ga kvadratni meter ( $1\text{ m}^2$ ). Koliko  $\text{dm}^2$  dobiš, ako ga razdeliš na prejšnji način?

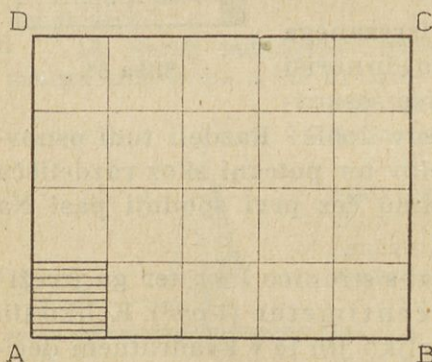
Kvadratni meter šteje 100 kvadratnih decimetrov.

Zakoliči na šolskem dvorišču kvadrat, čigar stranica meri 10 m! Imenujemo ga ar (a). Koliko  $\text{m}^2$  obsega?  $1\text{ a} = 100\text{ m}^2$ .

Z a rom merimo obširne ploskve n. pr. polja, travnike i. t. d.

100 a imenujemo hektar (ha). Hektar je kvadrat s stranico 100 metrov.

Zemljepisec meri ploščino dežel s kvadratnimi kilometri ( $\text{km}^2$ ) in kvadratnimi miriametri ( $\mu\text{m}^2$ ).



Slika 67.

2. Nariši pravokotnik, ki je 5 cm dolg in 1 cm visok! Koliko  $\text{cm}^2$  meri njegova ploščina? Nariši pas kvadratnih centimetrov!

Zvišaj pravokotnik za 1 cm! Koliko  $\text{cm}^2$  meri zdaj? Nariši nov pas! Zvišaj pravokotnik še za 2 cm ter nariši pasa!

Nastali pravokotnik s stranicama 5 cm in 4 cm

(sl. 67.) je sestavljen iz štirih pasov po pet kvadratnih centimetrov, torej iz  $5\text{ cm}^2 \times 4 = 20\text{ cm}^2$ . Ploščina pravokotnika meri  $20\text{ cm}^2$ . Število 20 imenujemo mersko število ploščine.



Nariši pravokotnik, ki je 46 mm dolg in 4 mm visok, ter ga razdeli na pase, pase pa na kvadratne milimetre! Kolika je ploščina?

Nariši pravokotnik z dolžino 5 cm in višino 7 mm! Koliko meri njegova ploščina?

Koliko merijo tla naše učilnice?

Da določim pravokotniku ploščino, določim ploščino enega pasu, potem določim število pasov in končno njih ploščino. Ali na kratko:

Pravokotniku določimo ploščino, ako pomnožimo mersko število njegove dolžine z merskim številom njegove višine.

Ako je pravokotnik 5 cm = 50 mm dolg in 7 mm = 0.7 cm visok, je ploščina  $50 \text{ mm}^2 \times 7 = 350 \text{ mm}^2$  ali  $5 \text{ cm}^2 \times 0.7 = 3.5 \text{ cm}^2$ .

3. Ako izmerimo prostor, ki ga obdajajo mejne ploskve, dobimo prostornino ali volumen telesa.

Daljice smo merili z daljicami, kote s koti in ploskve s ploskvami; telesa merimo s telesi (prostor s prostorom).

Enota telesne mere je kocka, z robom enakim enoti dolžinske mere. Ako določimo za enoto dolžinske mere 1 cm, je kocka z 1 cm dolgim robom enota telesne mere. Imenujemo jo kubični centimeter ( $1 \text{ cm}^3$ ).

Določimo prostornino kocke, ki smo jo oblikovali! Rob meri 1 dm. Kolika je ploščina osnovne ploskve?  $100 \text{ cm}^2$ . Koliko kubičnih centimetrov moreš položiti na njo? Dobiš plast, ki vsebuje  $100 \text{ cm}^3$ . Koliko takih plasti moraš položiti drugo na drugo, da izpolniš kocko? Ker meri višina 10 cm, je v kocki 10 plasti po  $100 \text{ cm}^3$ , to je  $100 \text{ cm}^3 \times 10 = 1000 \text{ cm}^3$ . Prostornina kocke meri  $1000 \text{ cm}^3$ . Število 1000 je mersko število prostornine. Kocko, ki ji meri rob 1 dm, zovemo kubični decimeter ( $1 \text{ dm}^3$ ).

Oblikuj kubični centimeter ter pokaži, da moreš položiti na osnovno ploskev 100 malih kock z robom 1 mm in da izpolni 10 takih plasti kubični centimeter. Kocko, ki ji meri rob 1 mm, imenujemo kubični milimeter ( $1 \text{ mm}^3$ ).  $1 \text{ cm}^3 = 100 \text{ mm}^3 \times 10 = 1000 \text{ mm}^3$ .

Nariši kvadratni meter! Koliko kubičnih decimetrov ga pokrije? Koliko takih plasti po  $100 \text{ dm}^3$  moraš položiti

drugo nad drugo, da dosežeš višino enega metra? Kakšno telo nastane? Kocko z robom enakim 1 m imenujemo kubični meter ( $1 m^3$ ).

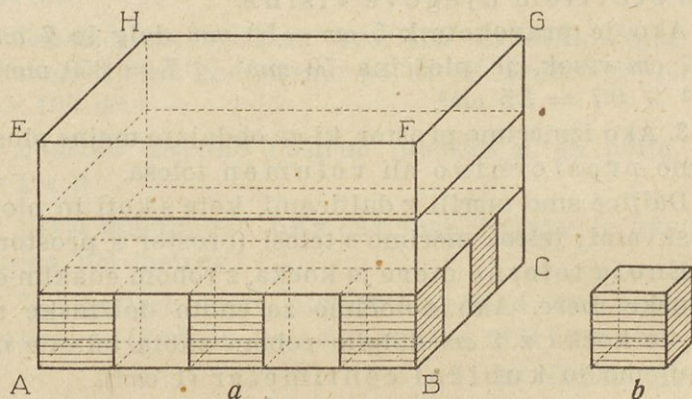
$$1 m^3 = 1000 dm^3, 1 dm^3 = 1000 cm^3, 1 cm^3 = 1000 mm^3.$$

Ako merimo tekočine, pravimo kubičnemu decimetru liter (1 l). 100 litrov tvori hektoliter (1 hl).

$$1 dm^3 = 1 l, 100 l = 1 hl = 100 dm^3 = \frac{1}{10} m^3.$$

4. Prostornino kvadra določimo na isti način kakor prostornino kocke.

Dolžina kvadra (sl. 68. a) meri 5 cm, širina 4 cm in višina 3 cm. Telesno enoto tvori kubični centimeter (sl. 68. b).



Slika 68.

Ob robu AB položimo pet takih kock drugo poleg druge; nastala vrsta ima  $5 cm^3$ . Ako združimo ob robu BC štiri take vrste po  $5 cm^3$ , tedaj je osnovna ploskev popolnoma pokrita s  $5 cm^3 \times 4 = 20 cm^3$ . Ker je kvader 3 cm visok, moremo položiti tri plasti po  $20 cm^3$  drugo vrh druge. Prostornina kvadra meri torej  $20 cm^3 \times 3 = 60 cm^3$  ( $5 \times 4 \times 3 = 60$ ). Število 60 imenujemo mersko število.

Učilnica ima obliko kvadra. Določi njeno prostornino!

Prostornino kvadra dobimo, ako zmnožimo merska števila dolžine, širine in višine.

Vaje.

1. Koliko meri kvadratova stranica, ako je ploščina  $9 cm^2$  ( $25 cm^2$ ,  $64 cm^2$ )?



2. Obseg kvadrata meri 12 dm (65·2 cm); kolika je stranica in kolika ploščina kvadrata?

3. Nariši pravokotnik s stranicama 4·5 cm in 6·3 cm ter mu določi obseg in ploščino!

4. Kolik je obseg in kolika je ploščina lista učne knjige? Presodi najprej po vidu in potem šele izmeri!

5. Izmeri tla učilnice! Za koliko učencev je prostora, ako računaš na enega 1·25 m<sup>2</sup>?

6. Ploščina pravokotnika, čigar ena stranica meri 8 cm (12½ cm, 25 cm), je 100 cm<sup>2</sup>; kolika je druga stranica?

7. Obseg pravokotnika meri 72 cm, ena stranica 24 cm; kolika je njegova ploščina?

8. Ploščina pravokotnika, čigar ena stranica meri 111 m, je 4218 m<sup>2</sup>; kolik je obseg?

9. Izračunaj površino in prostornino votle kocke, ako meri rob 4 dm (7 dm, 11 dm, 15·5 cm)! Koliko litrov vode drži kocka?

10. Kolika je površina in kolika prostornina opeke, ki je 29 cm dolga, 13 cm široka in 6·5 cm debela?

11. Kolika je površina kvadra z robu  $a = 10$  cm,  $b = 4$  cm,  $c = 7$  cm (15, 36, 48 cm; 3·6, 4·4, 2·7 dm; 5·2, 8·76, 1·95 m)? Izračunaj tudi prostornino!

12. Z žitom napolnjen zaboj je 50 cm dolg, 75 cm širok in 80 cm visok; koliko litrov žita je v njem?

## IX. Vaje za ponavljanje.

1. Nariši krog s polmerom  $r = 3·5$  cm katerokoli sekanto in tangento ter premico, ki ne seka in se ne dotika kroga! Določi nato razdaljo središča od teh premic in primerjaj te razdalje! Kolika je razdalja tangente od središča?

2. Koliko krogov s polmerom  $r = 3$  cm lahko narišeš skoz določeno točko? Kje ležé središča teh krogov?

3. Nariši v krogu s polmerom  $r = 2·5$  cm dva pravokotna premera in začrtaj iz njiju krajišč kroge skoz središče danega kroga!

4. Nariši v krogu s polmerom  $r = 3$  cm deset po 5 cm dolgih tetiv in iz središča pravokotnico na vsako tetivo! Primerjaj dolžino teh pravokotnic!

5. Nariši daljico  $AB = 7$  cm in določi točko z razdaljo 5 cm od krajišča A in 6 cm od krajišča B! Koliko točk dobiš?

6. Koliko stopinj meri polovica, četrtnina (kvadrant), šestina (sekstant), osmina (oktant) kroga?

7. Koliko minut in koliko sekund meri kvadrant, koliko sekstant in koliko oktant?

8. Koliko časa potrebuje konica kazalca, ki kaže ure, da nariše lok 15°, 30°, 75°, 210°?

9. Izpremeni 30·545° v stopinje, minute in sekunde!

10. Izpremeni  $18'45''$  v stopinje!

11. Izpremeni  $72^{\circ} 15' 17''$  v sekunde!

12. Povej razloček med sokoti in suplementarnimi koti!

13. Nariši horizontalno premico in izberi točko izven nje! Koliko daljic lahko narišeš med točko in premico? Katera daljica je najkrajša in katera najdaljša?

14. Nariši pravokotni premici  $a$  in  $b$  ter načrtaj več krogov s središči na premici  $b$  in s polmeri, ki so enaki razdalji vsakokratnega središča od premice  $a$ ! Kaj je premica  $a$  vsem tem krogom?

15. Koliko višin ima vsak trikotnik? Nariši višine v ostrokotnem, pravokotnem in topokotnem trikotniku! Kaj opaziš?

16. Katere enake lastnosti imata kvadrat in pravokotnik? V čem se ločita? (Opazuj in primerjaj stranice, kote, diagonale in srednjice!)

17. Dolžina vseh kocknih robov meri  $44.4\text{ cm}$ ; koliko meri en kockni rob?

18. Nariši enakokraki pravokotni trikotnik:  $a)$  s kateto  $= 5.8\text{ cm}$ ,  $b)$  s hipotenuzo  $= 8\text{ cm}$ ,  $c)$  z višino (na hipotenuzo)  $= 4.5\text{ cm}$ !

19. Nariši več pravokotnih trikotnikov ob isti  $8\text{ cm}$  dolgi hipotenuzi in načrtaj krog, čigar premer je ta hipotenuza! Kaj opaziš?

20. Nariši več enakokrakih trikotnikov ob isti  $6.5\text{ cm}$  dolgi osnovnici! Kje ležé vrhi vseh teh trikotnikov?

21. Kolika je vsota vseh kotov na mejnih ploskvah kvadratne piramide?

22. Javni vrt nekega trga ima obliko enakokrakega trapeza, čigar vzporedni stranici merita  $80\text{ m}$  in  $100\text{ m}$ , višina pa  $80\text{ m}$ . Nariši črtež vrta po merilu  $1 : 100$ !

23. Obseg pravokotnika, čigar ena stranica meri  $9.2\text{ cm}$ , je  $50\text{ cm}$ ; kako velika je ploščina pravokotnika?

24. Nariši kvadrat, čigar ploščina je enaka ploščini pravokotnika s stranicama  $2\text{ cm}$  in  $8\text{ cm}$ !

25. Koliko kvadratnih deščic ( $a = 2\text{ dm}$ ) rabi mizar za parketna tla v sobi, ki je  $5\text{ m}$  dolga in  $4\text{ m}$  široka?

26. Stavbni prostor,  $36.5\text{ m}$  dolg in  $25\text{ m}$  širok, velja  $45625\text{ K}$ . Koliko velja  $1\text{ m}^2$  prostora?

27. Njivo, ki je  $97\text{ m}$  dolga in  $35\text{ m}$  široka, razdeli posestnik tako na dva dela, da ima en del obliko kvadrata s stranico enako širini njive. Koliko dobi za vsak del te njive, ako zahteva  $6\text{ K}$  za kvadratni meter? Nariši črtež te njive po merilu  $1 : 500$ !



## Drugi del.

### X. Simetrija ali somernost (zrcaljenje).

1. Na večini predmetov naše okolice opazujemo kljub raznoličnosti oblik neko pravilnost, ki vzbuja v nas blagodejen vtisk. Da zasledimo bistvo te pravilnosti, ki jo vsakdo občuti skoro nezavestno, si oglejmo nekatere oblike teles.

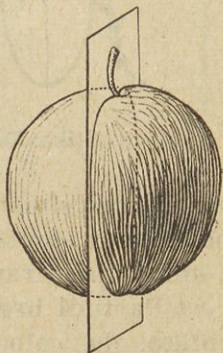
Primerjaj n. pr. obliko gobe za čiščenje table z obliko jabolka in z obliko človeškega telesa!

Na prvem predmetu ne razločiš nobene pravilnosti, medtem ko ti pade v oči na jabolku prikupna okrogla oblika, na človeški postavi pa lepa enakomernost med udi.

Na človeški postavi vidiš, da se popolnoma ujemata leva in desna stran. Levi roki ustreza roka tudi na desni strani, levi nogi desna noga, levemu očesu desno oko i. t. d. Nos je samo eden, pa je zato v sredi obraza, istotako tudi usta. Pravimo: človeško telo je simetrično ali somerno.

Ali so udje človeškega telesa še v simetrični legi, ako dvignemo eno roko ali eno nogo? Med večjim številom ljudi nas zbode pohabljenec brez roke ali noge takoj v oči. Zakaj? Simetrijo teles torej spoznamo, ako moremo najti vsakemu delu drug enako ležeč del.

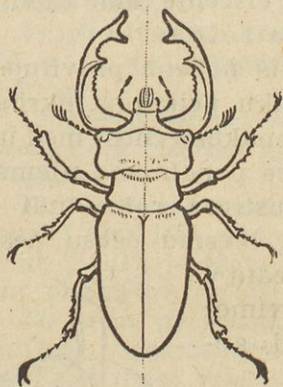
Prereži jabolko preko muhe in reclja čez polovico (sl. 69.)! Vsakemu delu prve polovice najdeš primeren del na drugi polovici. Kaj je obema polovicama skupno? Ali imamo pri človeškem telesu tudi takšno ravnino? Pokaži jo z zamahljajem z roko na sošolcu! Kakšno lego ima ta ravnina? To ravnino imenujemo simetrijsko ravnino ali ravnino somernosti.



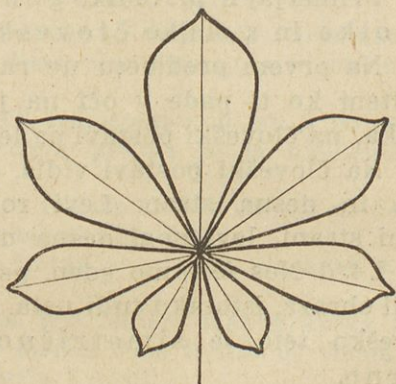
Slika 69.

Ako položiš polovico jabolka s prerezno ploskvijo na ravno zrcalo, vidiš celo jabolko. Polovica jabolka tvori s svojo zrcalno sliko simetrično celoto. Kaj je v tem slučaju simetrijska ravnina? Simetrija ostane tudi, ako odmaknemo jabolko od zrcala! Položi desno roko na zrcalo ter jo nato odmikaj od zrcala! Kaj vidiš v zrcalu? Zato tudi pravimo, da je leva roka zrcalna slika desne. Istotako je ena polovica jabolka zrcalna slika druge polovice. Polovici jabolka moremo zamenjati drugo z drugo, ne da bi opazili zamenjavo. Ali moremo tako zamenjati tudi polovici človeškega telesa? Primerjaj n. pr. desno roko in levo rokavico!

Večina izdelkov človeških rok je simetričnih. Imenuj nekatere take predmete, ki jih vidiš v učilnici! Pokaži



Slika 70.



Slika 71.

vselej lego simetrijske ravnine! Kam moraš pred šolskim poslopjem stopiti, da se krije simetrijska ravnina stavbe s simetrijsko ravnino tvojega telesa?

Pa tudi brez števila živali in rastlin ima simetrično obliko, da, celo med mrtvimi rudninami je izražena simetrija v zelo popolni meri pri kristalih. Slika 70. kaže podobo rogača, slika 71. pa podobo kostanjevega lista. Položi kos kartona z enim robom tako na sliko 70., oziroma sliko 71., da se krije karton s simetrijsko ravnino predmeta.

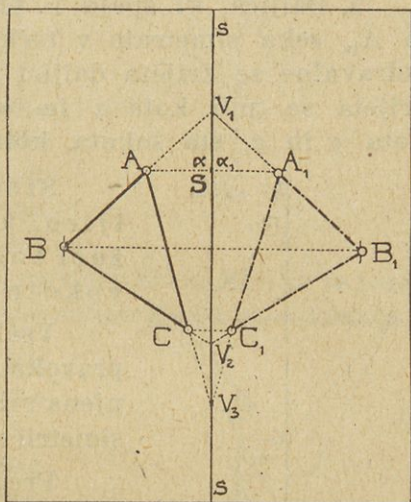
2. Oglejmo si nekatere like v ravnini, n. pr. očrta podob na sliki 70. in sliki 71.! Tudi ta lika sta simetrična. Simetrijo ravnih likov hočemo natančneje opazovati.



Vzemi kos kartona ter ga pregani po sredi! Nastali rob razdeli karton na dva dela. Ako si mislimo ravnino kartona razširjeno na vse strani, deli rob ravnino na dva polomejena dela, ki jima pravimo polravnini. Pri pregibanju kartona vrtimo eno polravnino okoli roba toliko, da pokrije drugo polravnino. Tako vrtenje v prostoru bomo imenovali preobrat. Primerjaj preobrat lista učne knjige!

Vsaka točka vrteče se polravnine nariše krožni lok. Kolik je ta lok? Kakšno lego ima ravnina loka glede na rob, okoli katerega vrtimo polravnino? Kje leži središče loka? Katere točke vrteče se polravnine ne izpremene pri preobratu svoje lege?

Prebodi krijoči se polravnini s konico šestilovega kraka, n. pr. na treh različnih mestih, in razgrni nato karton (sl. 72.)! Ker povzroči vsak vbod dve luknjici, vidiš na vsaki polravnini po tri točke, in sicer  $A, B, C$ , in  $A_1, B_1, C_1$ . Ako spojiš medsebojne točke vsake polravnine, dobiš dva trikotnika.



Slika 72.

Vsaki točki na levi strani roba (sl. 72.) pripada le ena točka na nasprotni strani roba. Tako pripada n. pr. točki  $A$  točka  $A_1$ . Pravimo: točki  $A$  in  $A_1$  ležita simetrično glede na premico (rob)  $s$ , okoli katere preobrnemo eno polravnino na drugo. Premico  $s$  imenujemo simetralo, somernico ali os simetrije. Imenuj ostale simetrično ležeče točke!

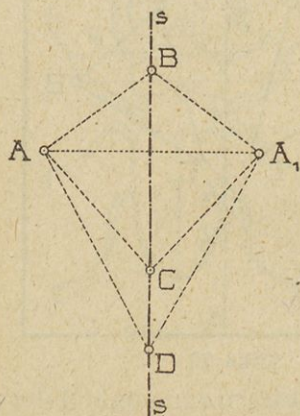
Vidimo pa tudi, da ne ležita le po dve točki, ampak tudi po dve daljici in po dva kota simetrično z ozirom na premico  $s$ . Imenuj simetrično ležeče daljice in kote!

Po preobratu se krijeta po dve simetrično ležeči daljici in po dva simetrično ležeča kota.

Simetrično ležeči daljici sta torej enaki (n. pr.  $AB = A_1B_1$ ), enaka sta tudi simetrično ležeča kota (n. pr.  $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ ). Ali sta enaka tudi simetrično ležeča trikotnika  $ABC$  in  $A_1B_1C_1$ ? Kako to izrazimo?

Prej smo opazili, da sta vsak predmet in njegova zrcalna slika simetrična. Kje bi morala biti zrcalna ravnina in kakšno lego bi morala imeti, da bi bil trikotnik  $A_1B_1C_1$  zrcalna slika trikotnika  $ABC$ ? Prereži karton po robu  $s$  in postavi eno polovico na zrcalo tako, da tvori s svojo zrcalno sliko prejšnjo celoto!

3. Daljica, ki spaja n. pr. simetrično ležeči točki  $A$  in  $A_1$ , seka simetralo v točki  $S$  (sl. 72.). Pri preobratu polravnine se krijeta daljici  $AS$  in  $SA_1$ , zato sta enaki, krijeta se tudi kota  $\alpha$  in  $\alpha_1$ , ki sta torej tudi enaka. Kota  $\alpha$  in  $\alpha_1$  sta sokota, kolik je vsak?



Slika 73.

Simetrala razpolavlja daljico, ki spaja simetrično ležeči točki in stoji na njej pravokotno.

Vsaka daljica je simetričen tvor; pravokotnica, ki jo razpolavlja, je njena simetrala. Ali je tudi premica simetričen tvor?

Pregani kos kartona po sredi, prebodi ga kjerkoli ter ga zopet razgrni (sl. 73.)! Ako spojiš nastali luknjici, dobiš daljico  $AA_1$ , ki ji je rob  $s$  simetrala. Izberi na simetrali več točk, n. pr.  $B, C, D$  ter jih spoji z  $A$  in  $A_1$ ! Če preobrneš katerikoli polravnino na drugo, se krijeta daljici  $AB$  in  $BA_1$ ,  $AC$  in  $CA_1$ ,  $AD$  in  $DA_1$ .

Vsaka točka daljične simetrane je enako oddaljena od daljičnih krajišč.

Podaljšaj na sliki 72. katerikoli simetrično ležeči daljici, n. pr.  $BA$  in  $B_1A_1$ ! Kje leži njiju presečišče? Kakšno lego glede na simetralo imata simetrično ležeči daljici, ki sta vzporedni?

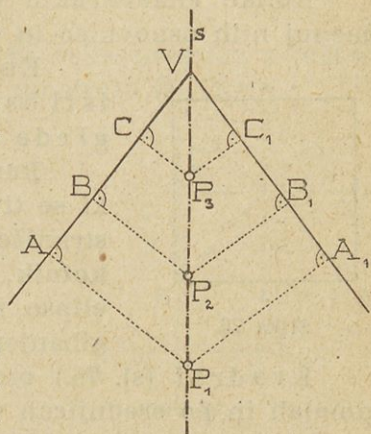


Primerjaj tudi kota, ki ju tvorita simetrično ležeči premici  $BA$  in  $B_1A_1$  s simetralo (sl. 72.)! Kota tvorita skupaj kot  $AV_1A_1$  in se krijeta, ako preobrnemo eno polravnino na drugo.

Kot  $AV_1A_1$  je simetričen tvor, simetrala ga razpolavlja.

Ali je vsak kot simetričen tvor? Kaj je simetrala iztegnjenega kota?

Nariši kot  $AVA_1$  (sl. 74.) ter ga izreži! Ako preganeš kot po sredi, narišeš skoz nekatere točke kotne simetralske pravokotnice na en krak, n. pr.  $P_1A$ ,  $P_2B$ ,  $P_3C$  ter prebodeš nato polravnini v točkah  $A$ ,  $B$  in  $C$ , dobiš pravokotnice  $P_1A_1$ ,  $P_2B_1$ ,  $P_3C_1$  na drug krak. Kolika je torej razdalja katerekoli točke kotne simetralske od obeh krakov?

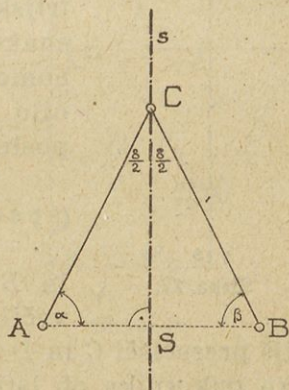


Slika 74.

Vsaka točka kotne simetralske je enako oddaljena od obeh krakov.

4. Ako je znana simetrala  $s$ , določimo točki  $A$  (sl. 75.) simetrično ležečo točko  $B$ , če narišemo skoz  $A$  pravokotnico na simetralo in jo za ravno toliko podaljšamo ( $AS = SB$ ).

Spoji katerokoli točko  $C$  simetralske  $s$  z  $A$  in  $B$  (sl. 75.)! Trikotnik  $ABC$  je enakokrak. Zakaj? Opazuj trikotnikovo osnovnico, osnovnici pripadajočo višino in kot ob vrhu!

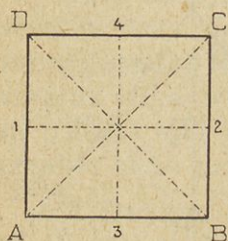


Slika 75.

Enakokraki trikotnik je simetričen lik; simetrala je višina, ki razpolavlja 1. trikotnik, 2. osnovnico, 3. kot ob vrhu.

Primerjaj tudi osnovnici priležna kota in stranici, ki ležita kotoma nasproti!

Koliko enakokrakih trikotnikov vidiš na sliki 73.? Imenuj njih osnovnico in povej, kje leže vrhi!



Slika 76.

Kvadrat (sl. 76.) moremo n. pr. preganiti po diagonalah in po srednjicah tako, da se krijeta polovici.

Kvadrat ima štiri simetrale: obe diagonali in obe srednjici.

5. Razrešiti hočemo nekatere osnovne naloge, ki se vedno ponavljajo pri geometrijskem načrtavanju. Razrešitev teh nalog temelji na simetrijskih lastnostih enakokrakega in enakostraničnega trikotnika. Zazdaj bomo rabili pri načrtavanju samo ravnilo in šestilo, pozneje pa se hočemo posluževati lesenih trikotnikov.

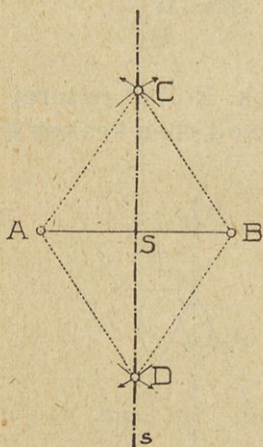
1. Nariši daljico  $AB$  simetralo (središčno pravokotnico)!

Nalogo razrešiš, ako načrtaš iz  $A$  in  $B$  loka (sl. 77.) s polmerom, ki je večji kakor polovica daljice  $AB$ , ter spojiš presečišči  $C$  in  $D$  teh lokov. ( $ABC$  in  $ABD$  sta enakokraka trikotnika ob isti osnovnici.)

Obenem si pa določil tudi daljično razpolovišče ali središče  $S$ . Kako narišeš simetralo daljice, ki leži tik ob robu papirja?

2. Nariši kotu  $\alpha$  simetralo (razpolovnico)!

Nariši iz vrha  $V$  lok (sl. 78.), ki seka kraka v točkah  $A$  in  $B$ , nato načrtaj iz  $A$  in  $B$  loka z enakim polmerom ter



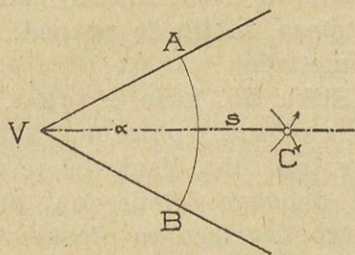
Slika 77.



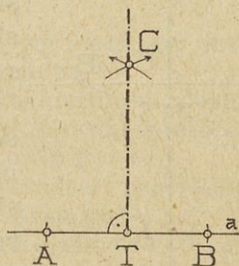
spoji njiju presečišče  $C$  z vrhom  $V$ ! Kotna simetrala razpolavlja tudi lok  $AB$ .

3. Nariši skoz točko  $T$  premice  $a$  pravokotnico na premico!

a) Nariši iz točke  $T$  lok, ki seka premico v točkah  $A$  in  $B$ , ter načrtaj daljici  $AB$  simetralo (sl. 79.)!

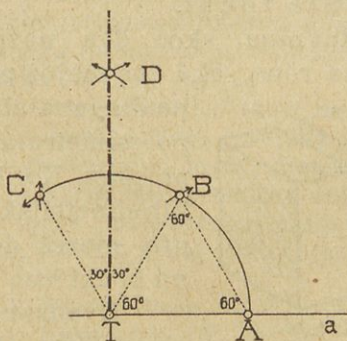


Slika 78.

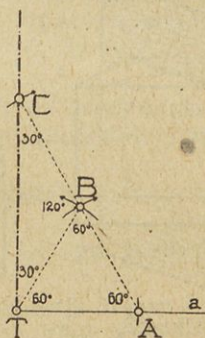


Slika 79.

b) Nariši ob premici  $a$  enakostranični trikotnik  $TAB$  (sl. 80.), ob stranici  $TB$  tega trikotnika enakostranični trikotnik  $TBC$  ter razpolovi kot  $BTC$ !



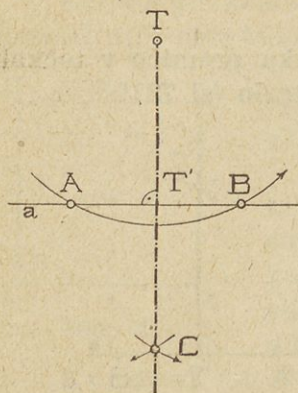
Slika 80.



Slika 81.

c) Ako leži točka  $T$  tik roba risalnega zvezka, razrešiš nalogo takole. Ob premici  $a$  nariši enakostranični trikotnik  $TAB$  (sl. 81.), podaljšaj stranico  $AB$  ter odmeri  $BC = BA$ . Trikotnik  $TCB$  je enakokrak, kot ob vrhu  $B$  meri  $120^\circ$ . Zakaj? Kolika sta kota ob osnovnici  $TC$ ?  $\angle ATC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .

4. Nariši skoz točko  $T$ , ki leži zunaj premice  $a$ , pravokotnico na premico!



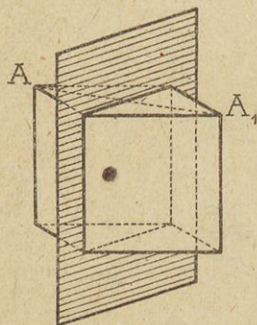
Slika 82.

Nariši iz točke  $T$  lok, ki seka premico  $a$  v točkah  $A$  in  $B$  (sl. 82), ter načrtaj nato daljici  $AB$  simetralo!

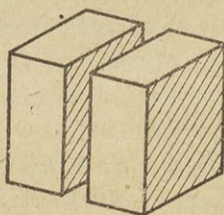
6. Vrnimo se zopet k opazovanju simetričnih teles! Imenuj geometrijska telesa, ki jih že poznaš! Katera so simetrična?

Slika 83. kaže kocko, ki jo seka ravnina, položena skoz dva nasprotna roba. Vsak del je zrcalna slika drugega glede na presečno ravnino kot zrcalno ploskev. Nariši mrežo telesa, ki tvori kockno polovico, sestavi telo ter ga položi tako na zrcalo, da vidiš celo kocko!

Oglišči  $A$  in  $A_1$  ležita simetrično glede na presečno ravnino. Simetrijska ravnina razpolavlja pravokotno daljico, ki spaja točki.



Slika 83.



Slika 84.

Ravnina skoz dva nasprotna kockna roba seka dve mejni ploskvi po diagonalah, torej po simetralah teh ploskev. Koliko takih simetrijskih ravnin moreš dognati na kocki?

Kvadrat pa je simetričen lik tudi

glede na srednjici. Slika 84. kaže kockni polovici, ki ji dobimo, ako presekamo kocko z ravnino po srednjicah. Polovici sta simetrični glede na presečno ravnino. Na koliko načinov moreš tako presekati kocko?

Ako doženeš lege vseh kocknih simetrijskih ravnin, vidiš, da jih je devet. Kako se sekajo te ravnine?

Tudi kvader, pokončna kvadratna piramida, pravilni tetraeder, pokončna kvadratna pri-



sekana piramida in krogla so simetrična telesa. Pokaži s kartonom na modelih teh teles lego simetrijskih ravnin! Koliko jih ima vsako telo?

Ali je zemeljska obla simetrično telo? Opazuj globus ter imenuj kroge, skozi katere gredo simetrijske ravnine!

### Vaje.\*

1. Nariši premico in zunaj nje več točk ter določi simetrično ležeče točke z ozirom na premico!

2. Nariši premico ter načrtaj nekaterim daljicam simetrično ležeče daljice glede na premico! (Porabi presečišča podaljšanih daljic s simetralo! Glej sliko 72.!)

3. Nariši premico in trikotnik (kvadrat, pravokotnik) ter načrtaj simetrično ležeči lik glede na premico!

4. Nariši pravokotnemu trikotniku simetrično ležeči lik glede na hipotenuzo (kateto)!

5. Nariši trikotniku  $ABC$  glede na premico  $a$  simetrično ležeči trikotnik  $A_1B_1C_1$ , temu trikotniku načrtaj zopet simetrično ležeči lik  $A_2B_2C_2$  glede na premico  $b$  ( $a$  in  $b$  nista vzporedni)! Ako postaviš svinčnikovo konico na oglišče  $A$  in jo pomikaš po stranicah od  $A$  preko  $B$  dalje ter v istem redu tudi od  $A_1$  dalje, vidiš, da je eno premikanje drugemu nasprotno. Če se zadnje premikanje ujema z vrtenjem urnega kazalca, potem je prvo vrtenje urnega kazalca nasprotno. Opazuj glede na zmisel istorednega premikanja trikotnika  $A_1B_1C_1$  in  $A_2B_2C_2$  ter tudi trikotnika  $ABC$  in  $A_2B_2C_2$ !

6. Razdeli daljico (kot) na štiri in na osem enakih delov!

7. Nariši sokota (sovršna kota) ter jima določi simetrali! Opazuj medsebojno lego simetral!

8. Nariši več premic v različnih legah in načrtaj iz določene točke pravokotnice nanje!

9. Nariši pravi (iztegnjeni) kot ter ga razdeli na tri enake dele!

10. Razdeli krog na 2, 3, 4, 6, 8 enakih delov!

11. Nariši kot  $15^\circ$ ,  $22^\circ 30'$ ,  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ !

12. Nariši ostremu kotu komplementarni kot!

13. Nariši neenaka kota  $\alpha$  (večji) in  $\beta$  ter določi  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  in  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ !

14. Nariši daljici  $AA_1$  simetralo! Kako določiš nato katerikoli točki  $B$  (daljici  $CD$ ) simetrično ležečo točko  $B_1$  (daljico  $C_1D_1$ ), ako smeš rabiti samo ravnilo? (Spoji točko  $B$  z  $A$  in  $A_1$  ter podaljšaj  $AB$  do simetrale!)

\* Pri načrtavanju rabi samo ravnilo in šestilo!



15. Označi na eni strani premice  $p$  točki  $A$  in  $B$  ter določi na premici točko  $T$  tako, da tvorita daljici, ki spajata  $T$  z  $A$  in  $B$ , enaka kota s premico! (S pomočjo simetrično ležečih točk.)

16. Nariši kot in nato skoz katerokoli točko premico tako, da seka oba kraka v enaki razdalji od vrha!

17. Nariši simetrale enakostraničnega trikotnika, kvadrata in pravokotnika!

18. Nariši! stranicam ostrokotnega (topokotnega, pravokotnega) trikotnika simetrale! Kaj opaziš? Presečišče simetral (središče trikotniku očrtanega kroga) imenujemo prvo znamenito točko trikotnika.

19. Nariši trikotnike kakor v prejšnji nalogi ter določi simetrale kotov! Presečišče kotnih simetral (središče trikotniku včrtanega kroga) imenujemo drugo znamenito točko trikotnika.

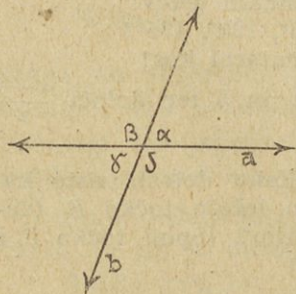
20. Nariši trikotnike kakor prej ter jim določi višine! Presečišče višin je tretja znamenita točka trikotnika.

21. Nariši trikotnike kakor v prejšnji nalogi in določi njih srednjice ali težiščnice (to so daljice, ki spajajo trikotnikova oglišča s središčem nasprotnih stranic)! Presečišče srednjic (težišče) je četrta znamenita točka trikotnika.

22. Načrtaj v raznostraničnem (enakostraničnem, enakokrakem) trikotniku vse štiri znamenite točke! Prva, tretja in četrta znamenita točka leže vedno na isti premici. Kaj opaziš v enakokrakem in kaj v enakostraničnem trikotniku?

## XI. O kotih.

1. Nariši premici  $a$  in  $b$ , ki se sekata (sl. 85.)! Koliko kotov določata? Kako imenujemo kota  $\alpha$  in  $\beta$ , kako kota  $\gamma$  in  $\delta$ ? Koliko dvojic sokotov in koliko dvojic sovršnih kotov najdeš na sliki 85.? Imenuj jih! Kakšen kot tvorita sokota? Kako imenujemo kota, ki merita skupaj  $180^\circ$ ? Ali sta suplementarna kota vedno tudi sokota?



Slika 85.

Mislimo si premico  $b$  nepremično, premico  $a$  pa vrtljivo okoli presečišča (model!). Kako se izpreminjajo koti pri vrtenju? Zakaj zadostuje, ako opazujemo le sokota  $\alpha$  in  $\beta$ ?



Zavrtimo najprej premico  $a$  v zmislu, ki je vrtenju urnega kazalca nasproten, v toliko, da pokrije premico  $b$ . Zdaj je kot  $\alpha = 0^\circ$ , kot  $\beta = 180^\circ$ . Nato vrtimo  $a$  v nasprotnem zmislu n. pr. od  $30^\circ$  do  $30^\circ$ . Kako se manjša kot  $\beta$ , če raste kot  $\alpha$ ? Glej tablico!

Ako se kota izpreminjata, se zmanjša en kot vedno za ravno toliko, za kolikor zraste sokot.

Med katerima mejama se gibljeta sokota? Kdaj sta enaka? Kakšna je lega premic  $a$  in  $b$  v tem slučaju?

Ker pripada vsakemu kotu  $\alpha$  popolnoma določen sokot  $\beta$ , pravimo: sokota sta odvisna drug od drugega. To odvisnost izrazimo tako:

| $\alpha$                      | $\beta$                       |
|-------------------------------|-------------------------------|
| <b><math>0^\circ</math></b>   | <b><math>180^\circ</math></b> |
| $30^\circ$                    | $150^\circ$                   |
| $60^\circ$                    | $120^\circ$                   |
| <b><math>90^\circ</math></b>  | <b><math>90^\circ</math></b>  |
| $120^\circ$                   | $60^\circ$                    |
| $150^\circ$                   | $30^\circ$                    |
| <b><math>180^\circ</math></b> | <b><math>0^\circ</math></b>   |

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \alpha = 180^\circ - \beta, \beta = 180^\circ - \alpha.$$

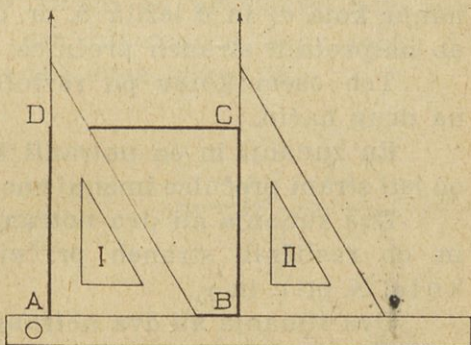
Prvi kot imenujemo neodvisen kot, o sokotu pa pravimo, da je od prvega kota odvisen.

Razširi tablico tudi na kota  $\gamma$  in  $\delta$ !

**2.** Premico  $a$  pa moremo premikati še na drug način. Spomni se, kako smo risali kvadrat z ravnilom in trikotnikom! Glej sliko 86.!

Prisloni trikotnik z eno kateto na ravnilo (ali na drug trikotnik) in nariši ob

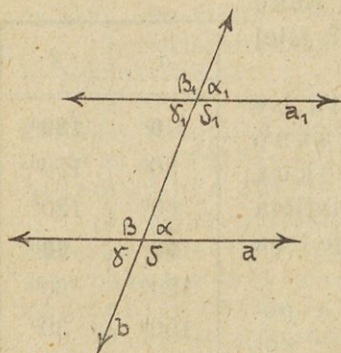
drugi kateti premo črto, nato premakni trikotnik ob ravnilu v novo lego ter zopet nariši premico ob isti kateti! Pri tem premikanju se premakne vsaka točka na trikotniku za eno in isto razdaljo (n. pr. je  $AB = DC$ ). Označi na trikotniku, ki ga premikaš, nekatere točke in se prepričaj o tem s šestilom!



Slika 86.

Izkušnja nas uči, da se premice, ki jih rišemo na ta način, nikdar ne snidejo, da so vzporedne. Zato hočemo imenovati tako premikanje vzporedno premikanje.

(Opazuj premikanje vizitke, ko jo vtikaš v pismen zavitek, ali v prostoru premikanje železniškega voza po ravnem tiru!)



Slika 87.

Premaknimo premico  $a$  vzporedno po premici  $b$  v lego  $a_1$  (sl. 87.)! Premici  $b$  pravimo zdaj prečnica, premicama  $a$  in  $a_1$ , ki ju seka prečnica, pa presekanji premici.

Koliko kotov tvori prečnica spresekanima premicama? Kote  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$ , ki leže med vzporednicama, zovemo notranje kote, kote  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  pa zunanje kote.

Opazuj lego notranjih in zunanjih kotov glede na prečnico! Po dva notranja ali po dva zunanja kota ležita ob isti strani ali pa ob nasprotnih straneh prečnice. Zunanja kota  $\alpha_1$  in  $\delta$  ležita n. pr. ob isti strani,  $\alpha_1$  in  $\gamma$  pa ob nasprotnih straneh prečnice.

Teh osem kotov pa razločujemo po dva in dva še na drug način.

En zunanji in en notranji kot ob različnih vrhah pa ob isti strani prečnice imenujemo protikota. N. pr.  $\alpha$  in  $\alpha_1$ .

Dva zunanja ali dva notranja kota ob različnih vrhah in ob različnih straneh prečnice zovemo izmenična kota. N. pr.  $\alpha$  in  $\gamma_1$ .

Dva zunanja ali dva notranja kota ob različnih vrhah in ob isti strani prečnice imenujemo prikota. N. pr.  $\alpha$  in  $\delta_1$ .

Imenuj protikote, izmenične kote in prikote, ki jih še vidiš na sliki 87!

Ako premaknemo premico  $a$  vzporedno do  $a_1$ , se krijejo koti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  s koti  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$ . Torej je  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$ ,  $\gamma = \gamma_1$ ,  $\delta = \delta_1$ . Enaki so tudi koti, ki so bili pred vzporednim premikanjem sovršni koti. Torej je  $\alpha = \gamma_1$ ,  $\beta = \delta_1$ ,  $\gamma = \alpha_1$ ,  $\delta = \beta_1$ . Opazujmo še kota  $\alpha$  in  $\delta_1$ ! Ker je bil kot  $\delta_1$



pred premikanjem sokot kotu  $a$ , sta kota  $a$  in  $\delta_1$  suplementarna. Torej je  $a + \delta_1 = 180^\circ$ ,  $\beta + \gamma_1 = 180^\circ$ ,  $\gamma + \beta_1 = 180^\circ$ ,  $\delta + \alpha_1 = 180^\circ$ .

Ali se izpremeni kaj na tem, če vrtimo prečnico okoli katerekoli njene točke?

Vzporedne premice tvorijo z vsako prečnico enake protikote, enake izmenične kote in suplementarne prikote.

Obratno moremo trditi:

Ako tvorita premici s prečnico dva enaka protikota ali dva enaka izmenična kota ali dva suplementarna prikota, sta premici vzporedni.

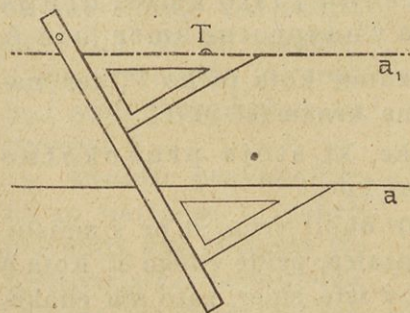
Kakšno lego imata premici glede na prečnico, če sta n. pr. dva protikota prava kota?

Premice, ki stoje pravokotno na isti premici, so vzporedne.

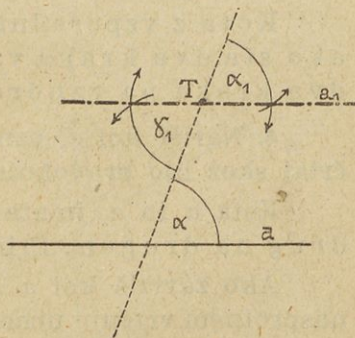
*Naloga.* Nariši skoz točko  $T$  vzporednico premici  $a$ !

Nalogo razrešimo lahko na dva načina: a) s trikotnikom in ravnilom, b) s šestilom in ravnilom.

a) Položi trikotnik s hipotenuzo ob premico  $a$  (sl. 88.), prisloni ravnilo ob eno kateto in premakni trikotnik vzporedno v toliko, da gre hipotenuza skoz točko  $T$ ! (Ravnalo nadomešča navadno drug trikotnik.)



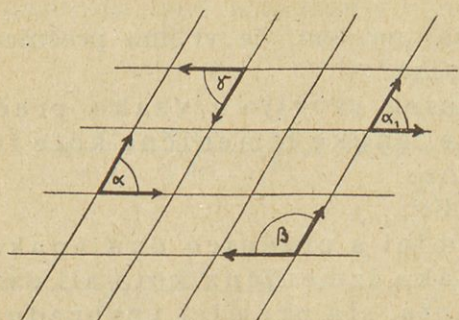
Slika 88.



Slika 89.

b) Skoz točko  $T$  nariši prečnico (sl. 89.) in prenesi kot  $a$  kakor izmenični ali pa kakor protikot ob vrh  $T$

3. Presekaj več vzporednih premic z nekaterimi vzporednimi prečnicami (sl. 90.)! Koliko različnih kotov glede na velikost nastane? Primerjaj kota  $\alpha$  in  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1$  in  $\gamma$  ter  $\alpha$  in  $\beta$ ! Kota  $\alpha$  in  $\alpha_1$  imata vzporedne krake v isto smer. Ali sta kota enaka? Kako premakneš kot  $\alpha$  z dvakratnim vzporednim premikanjem na kot  $\alpha_1$ ?



Slika 90.

Kota  $\alpha_1$  in  $\gamma$  imata vzporedne krake v nasprotno smer. Ali sta kota enaka? Kako moraš kot  $\alpha_1$  dvakrat vzporedno premakniti, da postane kotu  $\gamma$  sovršni kot?

Kota  $\alpha$  in  $\beta$  imata dva kraka vzporedna v isto smer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno smer. Ali sta tudi kota  $\alpha$  in  $\beta$  enaka? Kako moraš kot  $\alpha$  dvakrat vzporedno premakniti, da postane kotu  $\beta$  sokot?

Kota z vzporednimi kraki sta enaka, ako sta obe dvojici krakov vzporedni v isto smer, ( $\alpha$  in  $\alpha_1$ ) ali pa obe dvojici krakov vzporedni v nasprotno smer ( $\alpha_1$  in  $\gamma$ ).

Kota z vzporednimi kraki sta suplementarna, ako sta dva kraka vzporedna v isto smer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno smer ( $\alpha$  in  $\beta$ ).

4. Nariši kot  $\alpha$ , označi zunaj kota točko  $V_1$  ter načrtaj skoz njo pravokotnici na kraka (sl. 91.)!

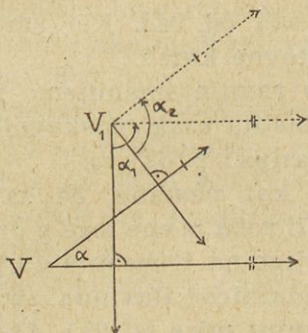
Kota  $\alpha$  in  $\alpha_1$  imata krake, ki stoje pravokotno drug na drugem. Primerjaj kota!

Ako zavrtiš kot  $\alpha_1$  za  $90^\circ$  okoli vrha, n. pr. v zmislu, nasprotnem vrtenju urnega kazalca, pride v lego  $\alpha_2$ . Kota  $\alpha$  in  $\alpha_2$  imata vzporedne krake v isto smer, zato sta enaka. Kaj smemo torej trditi o kotih  $\alpha$  in  $\alpha_1$ ?

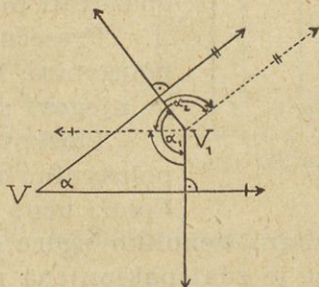
Nariši zopet kot  $\alpha$ , označi točko  $V_1$  znotraj kota ter načrtaj skoz njo pravokotnici na kraka (sl. 92.)! Kakšno lego imajo torej kraki kotov  $\alpha$  in  $\alpha_1$ ?



Ako zavrtiš kot  $\alpha_1$  za  $90^\circ$  okoli vrha, n. pr. v zmislu vrtenja urnega kazalca, pride v lego  $\alpha_2$ . Kota  $\alpha$  in  $\alpha_2$  imata



Slika 91.



Slika 92.

dva kraka vzporedna v isto smer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno smer. Kakšna kota sta? Kaj moremo trditi o kotih  $\alpha$  in  $\alpha_1$ ?

Kota, katerih kraki stoje pravokotno drug na drugem, sta enaka ali pa suplementarna.

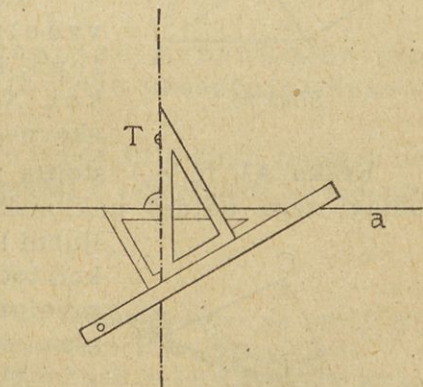
Na tem izreku temelji risanje pravokotnic s trikotnikom in ravnilom.

*Naloga.* Nariši skoz točko  $T$  pravokotnico na premico  $a$ !

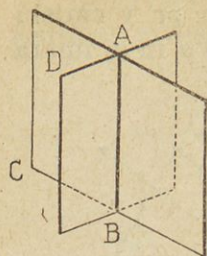
Položi trikotnik s hipotenuzo ob premici  $a$  (sl. 93.), prisloni ravnilo ob eno kateto ter zavrti trikotnik za  $90^\circ$ ; hipotenuza trikotnika v novi legi stoji pravokotno na premici  $a$ .

Risanju pravokotnic na ta način se je dobro privaditi, ker je naglo izvršljivo in ker popolnoma ustreza praktičnim potrebam. (Ravnalo nadomestuje navadno drug trikotnik.)

5. Na izreku o kotih, katerih kraki stoje pravokotno drug na drugem, temelji tudi naprava za merjenje naklonskih ali ježnih kotov.



Slika 93.



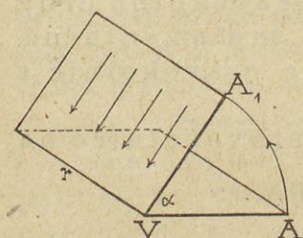
Slika 94.

Ako se sekata dve ravnini, razdelita prostor na štiri dele, ki jim pravimo ploskovni koti (sl. 94.). Kje smo že opazovali ploskovne kote?

Presečnico ravnin imenujemo rob, polravnini, ki mejita vsak ploskovni kot, pa njegovi stranski ploskvi.

Ploskovni kot nastane, če zavrtiš polravnino okoli roba iz ene lege v drugo.

Položi učno knjigo na horizontalno mizo ter vzdigni nekoliko zgornjo platnico! Ravnina zgornje platnice je zdaj naklonjena ravnini mize (sl. 95.). Ako položiš kroglico kjerkoli na naklonjeno ravnino, zdrči vselej v isti smeri navzdol.

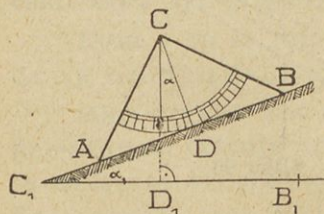


Slika 95.

Premicam naklonjene ravnine, ki imajo tako smer, pravimo navzdolnice ali padnice. Pokaži roba platnice, ki imata smer navzdolnic! Kakšna je njiju lega glede na hrbet (rob), okoli katerega vrtimo platnico? Vse navzdolnice narišejo isti kot, ako zavrtimo platnico.

Kot  $AVA_1$ , ki ga tvori navzdolnica s svojo prvotno lego, imenujemo naklonski kot. Naklonski kot je mera ploskovnega kota.

Kraka  $AV$  in  $A_1V$  stojita pravokotno na robu  $r$ . Na podlagi tega najdeš naklonski kot dveh ravnin v poljubni legi, če narišeš skoz katerokoli točko njiju presečnice v vsaki ravnini pravokotnico na presečnico.



Slika 93.

Ako je ena ravnina horizontalna, določimo naklonski kot z grebljico. V ta namen je pritrjen na grebljico del kotomera z zarezo  $0^\circ$  pri  $D$  (sl. 96.). Če položimo

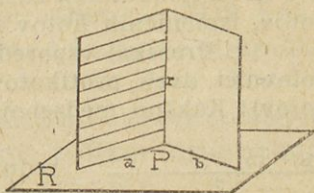
grebljico z osnovnico  $AB$  v smeri navzdolnic na naklonjeno ravnino, tvori svinčnica s pravokotnico  $CD$  naklon-



ski ali kakor tudi pravimo ježni kot  $\alpha$ . Zakaj? Kakšna kota sta  $\alpha$  in  $\alpha_1$ ?

Kakšno medsebojno lego imata ravnini, ako meri njiju naklonski kot  $90^\circ$ ?

Postavi nekoliko odprto knjigo tako na horizontalno ravnino, kakor kaže slika 97. Rob  $r$  stoji pravokotno na spodnjih robih  $a$  in  $b$  platnic.



Slika 97.

Kakšno lego ima rob  $r$  glede na horizontalno ravnino? Pravimo:

Premica stoji pravokotno na ravnini, ako je pravokotna na dveh skoz njeno podnožišče v ravnini načrtanih premicah. Glej lego prečk na kolesu glede na os, okoli katere se vrti kolo!

Koliko ravnin moremo položiti skoz rob  $r$ ? Kakšna je lega teh ravnin glede na ravnino  $R$ ? Opazuj lego posameznih listov knjige!

Vsaka ravnina, položena skoz premico, ki stoji pravokotno na določeni ravnini, stoji pravokotno na tej ravnini.

Jasen je tudi izrek:

Ako stojita dve ravnini pravokotno na tretji ravnini, stoji tudi njiju presečnica pravokotno na tej ravnini.

Opazuj medsebojno lego robov in mejnih ploskev na kocki in kvadru ter se prepričaj o resničnosti navedenih izrekov! Učilnica!

*Vaje.*

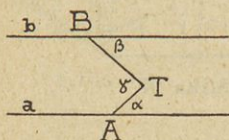
1. Kot  $\alpha$  meri  $120^\circ 15' 42''$  in vzraste petkrat po  $25^\circ 37' 6''$ ; kolik je v vsakem slučaju njegov sokot? Sestavi tablico!
2. Nariši premice v različnih legah in skoz določeno točko s trikotnikoma vzporednice!
3. Nariši trikotnik  $ABC$  in ga premikaj vzporedno toliko časa, da se krije oglišče  $A$  z določeno točko  $A_1$ !
4. Nariši trikotnik  $ABC$  ter ga zavrti okoli oglišča  $A$  ( $B, C$ ) za  $180^\circ$ ! Primerjaj lego kotov obeh trikotnikov! Zavrti trikotnik okoli razpolovišča stranice  $AB$  za  $180^\circ$ ! Primerjaj lego kotov in stranic obeh trikotnikov!



5. Nariši več vzporednic z razdaljo 1 cm (1,5 cm, 2 cm)!

6. Presekaj vzporedni premici s prečnico (nobena teh premic ni horizontalna), zaznamenuj kote ter sestavi tablico protikotov, izmeničnih kotov in prikotov!

7. Presekaj vzporedni premici s prečnico ter načrtaj razpolovnici dveh protikotov (dveh izmeničnih kotov, dveh prikotov)! Kakšno medsebojno lego imata razpolovnici?



Slika 98.

8. Nariši skoz določeni točki vzporedni premici! Za koliko moraš zavrteti premici okoli teh točk v istem zmislu, da se krijeta?

9. Nariši skoz določeni točki vzporedni premici ter ju zavrti okoli teh točk v nasprotnem zmislu v toliko, da se krijeta! Kolika je vsota obeh vrtežev!

10. Nariši skoz določeni točki vzporedni premici ter ju vrti okoli teh točk v istem zmislu vedno za enako stopinj! Opazuj, kako se izpreminja razdalja vzporednic! Kdaj je razdalja največja, kdaj najmanjša?

11. En kot, ki ga tvori prečnica s presekanima vzporednima premicama, meri  $35^{\circ} 43' 12''$ ; koliki so ostali koti?

12. Nariši vzporedni premici  $a$  in  $b$  ter označi točko  $T$  med njima (sl. 98.)! Ako spojiš točko  $T$  s katerimakoli točkama  $A$  in  $B$  vzporednic, je kot  $\gamma$  enak vsoti kotov  $\alpha$  in  $\beta$ . Zakaj?

13. Nariši premice v različnih legah ter načrtaj na nje s trikotnikoma pravokotnice skoz določeno točko!

14. Nariši kot  $\delta$  (n. pr.  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ) ter označi točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  kot vrhe treh kotov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ! Nariši krake teh kotov s trikotnikoma tako, da imata kota  $\delta$  in  $\alpha$  vzporedne krake v isto smer, kota  $\delta$  in  $\beta$  vzporedne krake v nasprotno smer in kota  $\delta$  in  $\gamma$  dva kraka vzporedna v isto smer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno smer!

15. Ako stoji ena dveh vzporednih premic pravokotno na tretji premici, kaj smemo trditi tudi o drugi premici?

16. Nariši kot  $\delta$  in označi točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  kakor vrhe treh kotov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , katerih kraki stoje pravokotno na krakih kota  $\delta$ ! Nariši s trikotnikoma te kote tako, da imata kota  $\alpha$  in  $\gamma$  vzporedne krake v isto smer, kota  $\alpha$  in  $\beta$  pa dva kraka vzporedna v isto smer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno smer!

17. Nariši v pravokotnem trikotniku višino na hipotenuzo! Ako meri en kot, ki ga tvori višina z eno kateto, n. pr.  $27^{\circ} 48' 2''$ , koliki so koti, ki jih še vidiš na trikotniku?

18.\* Napravi iz trdega papirja grebljico s kotomerom ter določi naklonski kot šolske klopi, vzpetost (strmino) stopnic šolskega poslopja, vzpetost naklonjene ceste i. t. d.!

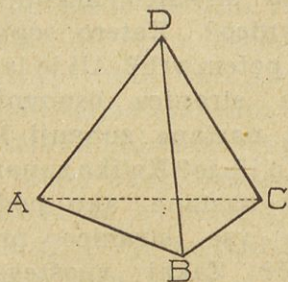
19.\* Določi s poljskim kotomerom naklonski kot strehe šolskega poslopja! Opazuj različne oblike streh!



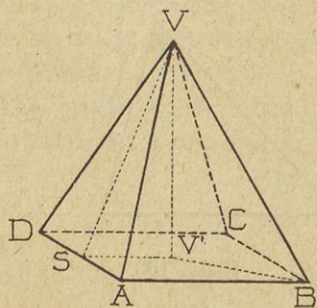
## XII. Trikotnik. Načrtavanje in skladnost trikotnikov.

1. Imenuj telesa, na katerih si že opazil trikotnike! Kakšni trikotniki meje pravilni tetraeder (sl. 99.)? Kakšni trikotniki tvorijo plašč pokončne kvadratne piramide (sl. 100.)?

Telo, ki ga mejita vzporedni in skladni osnovni ploskvi ter ob straneh toliko paralelogramov, kolikor stranic ima vsaka osnovnih ploskev, imenujemo prizmo.

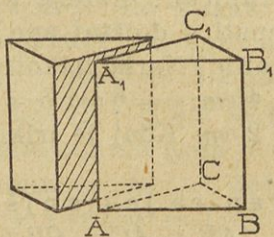


Slika 99.

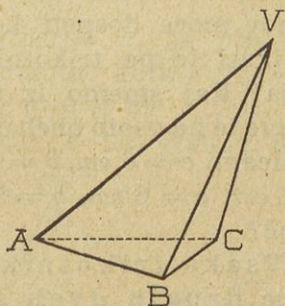


Slika 100.

Ako presekamo kocko po dveh nasprotnih robih, dobimo dve pokončni tristranični prizmi (sl. 101.).



Slika 101.



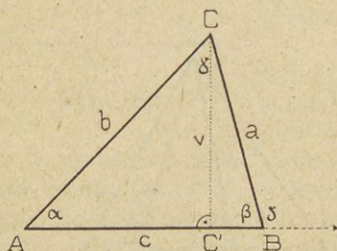
Slika 102.

Kakšna trikotnika sta osnovni ploskvi? Kakšni prizmi dobiš, če presekaš kvader po dveh nasprotnih robih?

Tu vidimo telo (modell), čigar osnovna in stranske ploskve so trikotniki (sl. 102.). Telesu pravimo poševna tristranična piramida. Izmeri osnovne in stranske robe! Kakšni trikotniki so mejne ploskve? Raznostranične trikotnike hočemo natančneje opazovati.

2. Ako označimo tri točke  $A, B, C$ , ki ne leže na isti premici, ter jih spojimo z daljicami, dobimo vobče raznostranični trikotnik (sl. 103.). Oglišča, stranice in kote bomo tako zaznamenovali, kakor kaže slika. Znak za trikotnik je:  $\triangle$ .

Koliko kotov je v trikotniku? Kako jim pravimo? Koliko stranic oklepa vsak kot? Kaj leži vsaki stranici in kaj vsakemu kotu nasproti? Kako imenujemo kota,



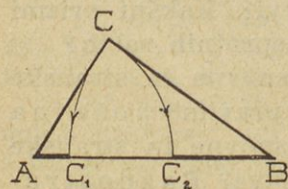
Slika 103.

ki ležita ob isti stranici? Katero stranico imenujemo osnovnico? Katero oglišče tvori potem vrh? Ali je lahko vsaka stranica osnovnica? Kako nastane zunanji kot? Koliko jih je? Koliko zunanjih kotov nastane, ako podaljšamo vse stranice preko oglišč? Zakaj vpoštevamo

samo tri? Kaj je v trikotniku višina? Koliko jih ima vsak trikotnik?

Primerjajmo trikotnikove stranice! Postavi svinčnikovo konico na trikotnikovo oglišče  $A$ ! Na koliko načinov more dospeti konica na oglišče  $B$ , ako jo smeš premikati le po trikotnikovih stranicah? Katera pot je krajša? Kaj smemo iz tega sklepati o dolžini ene stranice glede na vsoto obeh drugih stranic? Nariši trikotnike s stranicami  $c = 6\text{ cm}$ ,  $b = 5\text{ cm}$ ,  $a = 4\text{ cm}$ ;  $c = 6\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$ ,  $a = 2\text{ cm}$ ;  $c = 6\text{ cm}$ ,  $b = 3\text{ cm}$ ,  $a = 2\text{ cm}$ . Kdaj je trikotnik mogoč?

Vsaka trikotnikova stranica je manjša od vsote drugih dveh stranic. ( $AB < AC + CB$  i. t. d.).



Slika 104.

Nariši trikotnik  $ABC$  (sl. 104.), ki mu je  $AB$  največja stranica! Ako zavrtiš stranico  $BC$  okoli  $B$  v lego  $BC_1$ , vidiš, da je razlika ( $AC_1$ ) stranic  $BA$  in  $BC$  manjša od tretje stranice  $AC$ . Ravnotako je razlika stranic  $AB$  in  $AC$  manjša od tretje stranice  $BC$ .



Vsaka trikotnikova stranica je večja od razlike drugih dveh stranic. ( $AC > AB - BC$  i. t. d.)

Združi oba izreka o trikotnikovih stranicah v en izrek!

Kako razločujemo trikotnike glede na stranice? Kako imenujemo stranice enakokrakega trikotnika? Preizkusi izreka o stranicah tudi na enakokrakem in enakostraničnem trikotniku!

**3. Primerjajmo trikotnikove kote!** Kaj smo dognali glede na njih vsoto, ko smo jih izmerili s kotomerom? Ali je to merjenje popolnoma zanesljivo?

Nariši trikotnik  $ABC$  (sl. 105.), spoji središči stranic  $AC$  in  $BC$  ter načrtaj skoz nji pravokotnici na osnovnico  $AB$ ! Ako trikotnik izrežeš ter preobrneš ogle (kote) okoli črtkanih daljic, tvorijo koti  $\alpha, \beta, \gamma$  iztegnjeni kot z vrhom  $C'$ . ( $C'$  je podnožišče višine na osnovnico.)

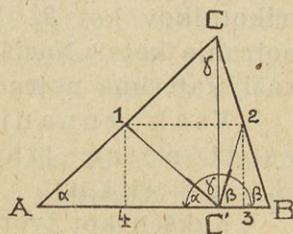
Še na drug način se lahko prepričaš o tem dejstvu. Ako premakneš v trikotniku  $ABC$  (sl. 106.) kot  $\alpha$  vzporedno prvotni legi v toliko, da se krije vrh  $A$  z ogliščem  $B$ , je  $BB_1 \parallel AC$ . Kota  $\alpha$  in  $\alpha'$  sta enaka kakor prikota, kota  $\gamma$  in  $\gamma'$  pa enaka kakor izmenična kota ( $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ ,  $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$ ). Koti  $\beta, \gamma'$  in  $\alpha'$  so združeni ob vrhu  $B$  ter tvorijo iztegnjeni kot ( $\beta + \gamma' + \alpha' = 180^\circ$ ).

Ako zamenjamo kota  $\alpha'$  in  $\gamma'$  s kotoma  $\alpha$  in  $\gamma$ , dobimo  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = 2R$ .

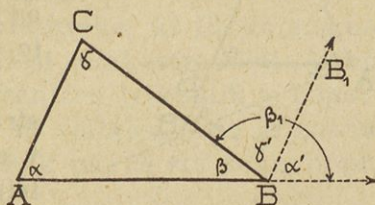
Vsota trikotnikovih kotov je enaka iztegnjenemu kotu ali dvema pravima kotoma.

Kako določiš iz dveh znanih trikotnikovih kotov tretjega? Ako je kot  $\alpha = 45^\circ$ , kot  $\beta = 72^\circ$ , kolik je kot  $\gamma$ ?

Koliko pravih in koliko topih kotov more imeti trikotnik? Kako razločujemo trikotnike glede na kote? Kako imenujemo stranice pravokotnega tri-



Slika 105.



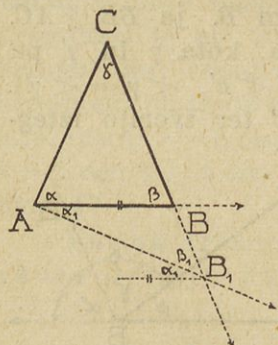
Slika 106.

kotnika? En ostri kot v pravokotnem trikotniku meri  $35^\circ$ , kolik je drugi? Kota ob hipotenuzi sta komplementarna. Napiši to v znakih! Ako raste en ostri kot, kako se izpreminja drugi? V kakšnem trikotniku je vsota dveh kotov enaka tretjemu kotu? Zakaj sta kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika ostra? Ako raste kot ob osnovnici enakokrakega trikotnika, kako se izpreminja višina na osnovnico? Primerjaj kot ob vrhu enakokrakega trikotnika s kotom ob osnovnici ter izkusi določiti odvisnost, ki je med njima! (Nariši višino na osnovnico!) Ako se strinjata dva trikotnika v dveh dvojicah kotov, kaj smemo trditi o tretji dvojici kotov?

Kota  $\alpha'$  in  $\gamma'$  (sl. 106.) pokrijeta popolnoma zunanji trikotnikov kot  $\beta_1$ . Kolik je zunanji kot  $\beta_1$  glede na notranje kote? Nariši tudi kotu  $\alpha$  ( $\gamma$ ) zunanji kot ter pokaži, katerima notranjima kotoma je enak!

Vsak zunanji trikotnikov kot je enak vsoti notranjih kotov, ki mu nista sokota. ( $\beta_1 = \alpha + \gamma$  i. t. d.)

Kakšen kot tvorita zunanji in notranji kot ob istem oglišču? Kolika je torej vsota vseh zunanjih in notranjih kotov? Kaj dobiš, če odšteješ od vsote vseh teh kotov vsoto notranjih kotov?



Slika 107.

Vsota zunanjih trikotnikovih kotov je enaka  $360^\circ$  ali štirim pravim kotom. ( $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ = 4R$ .)

4. Primerjajmo tudi kote s stranicami! Znano nam je že, da so v enakostraničnem trikotniku vsi trije koti enaki in da sta v enakokrakem trikotniku krakoma nasprotiležečakota enaka. (Simetrija!)

V trikotniku ležijo enakim stranicam enaki koti nasproti.

Ali smemo trditi tudi obratno?

Nariši trikotnik s stranicami 7 cm, 3 cm in 6 cm! Presodi kote, potem jih izmeri! Kateri je največji, kateri



najmanjši? Primerjaj velikost kotov z ozirom na lego in dolžino stranic!

Podaljšaj stranici  $AB$  in  $CB$  enakokrakega trikotnika  $ABC$  preko oglišča  $B$  (sl. 107.) ter zavrti podaljšano osnovnico  $AB$  okoli oglišča  $A$ , n. pr. v lego  $AB_1$ ! Stranica  $CB$  je vzrastle za  $BB_1$ , stranici nasproti ležeči kot  $\alpha$  se je povečal za kot  $\alpha_1$ . Če torej raste trikotnikova stranica, raste tudi stranici nasproti ležeči kot.

V vsakem trikotniku leži večji stranici večji kot nasproti.

Ali smemo trditi tudi obratno? Za koliko se je zmanjšal neizpremenjeni stranici  $AC$  nasproti ležeči kot  $\beta$ ?

Katera stranica pravokotnega (topokotnega) trikotnika je najdaljša? Ako meri en ostri kot v pravokotnem trikotniku  $60^\circ$ , je trikotnik polovica enakostraničnega trikotnika. Krajša kateta je enaka polovici hipotenuze. Nariši primerno sliko!

Ako spojiš zunaj premice ležečo točko z različnimi točkami premice, katera teh daljic je najkrajša? Zakaj? Kaj določa ta pravokotnica?

5. Merjevec hoče narisati črtež na polju zakoličenega trikotnika. Kako določi njegovo obliko in velikost? Ali mora izmeriti vse tri stranice in vse tri kote (sestavine trikotnika), ali pa že zadostuje za določitev trikotnika manj merjenj? Razrešitev tega vprašanja je za načrtavanje trikotnikov nadvse važna.

Oglejmo si v tem oziru trikotnike, ki jih že znamo narisati! Kako smo n. pr. narisali enakostranični, kako enakokraki trikotnik? Enakostraničen trikotnik je popolnoma določen glede na obliko in velikost, ako je znana ena stranica, enakokrak trikotnik pa, če sta znani n. pr. osnovnica in en krak.

Ali zadostuje tudi za določitev raznostraničnega trikotnika manjše število sestavin?

Ako je znana samo ena stranica ali samo en kot, moremo načrtati brez števila različnih trikotnikov. Nariši nekatere!

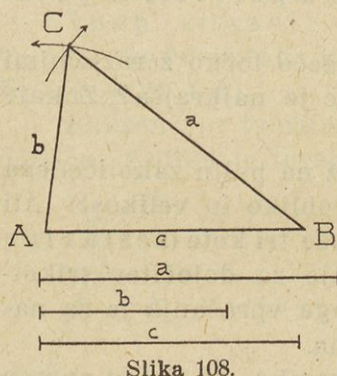
Ali je trikotnik določen, če sta znani samo dve stranici ali samo dva kota ali en kot in ena stranica?

Prepričaj se z načrtavanjem trikotnikov iz teh sestavin, da dve sestavini še ne določata trikotnika po obliki in velikosti!

Pri risanju rabiš dva pravokotna trikotnika. Kakšne kote vidiš na enem in kakšne na drugem trikotniku? Tudi tvoji sošolci rabijo trikotnike z istimi koti; ali so pa vsi ti trikotniki enaki? Primerjaj jih! Trije koti torej ne določajo trikotnika glede na velikost.

Po tri sestavine moremo še na sledeči način sestaviti: I. tri stranice, II. dve stranici in kot, ki ga oklepata, III. ena stranica in dva kota, IV. dve stranici in kot, ki leži eni teh stranic nasproti. Preizkusimo, ako je mogoče narisati trikotnik iz teh sestavin!

I. Načrtaj trikotnik, ako so znane vse tri stranice! N. pr.  $a = 8\text{ cm}$ ,  $b = 5\text{ cm}$ ,  $c = 7\text{ cm}$ .



Slika 108.

Nariši daljico  $AB = c = 7\text{ cm}$  (sl. 108. zmanjšana) ter načrtaj iz krajišča A lok s polmerom  $b = 5\text{ cm}$  in iz krajišča B lok s polmerom  $a = 8\text{ cm}$ ! Loka se sekata v tretjem trikotnikovem oglišču C.

Nariši na karton trikotnik  $A_1B_1C_1$  iz istih sestavin ter ga izreži! Ali se trikotnika  $ABC$  in  $A_1B_1C_1$  v čem razlikujeta?

Ali moreš položiti izrezani trikotnik  $A_1B_1C_1$  na trikotnik  $ABC$  tako, da ga popolnoma pokrije? Ali moreš z izrezanim trikotnikom pokriti trikotnik, ki ga je narisal iz istih sestavin ta ali drugi sošolec? Preizkusi!

Vidimo, da tri stranice popolnoma določajo trikotnik glede na obliko in velikost.

Kako torej določi merjevec obliko in velikost zakoličenega trikotnika? Izmeri le trikotnikove stranice in nariše trikotnik v zmanjšanem merilu.

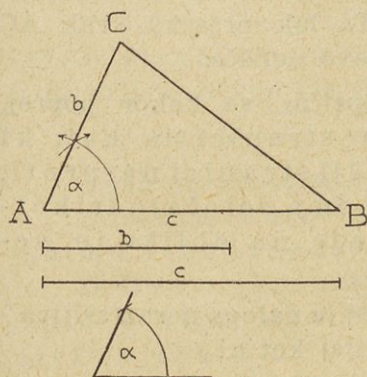
Nariši trikotnik s stranicami  $a = 8\text{ cm}$ ,  $b = 5\text{ cm}$ ,  $c = 2\text{ cm}$ ! Zakaj to ni mogoče?



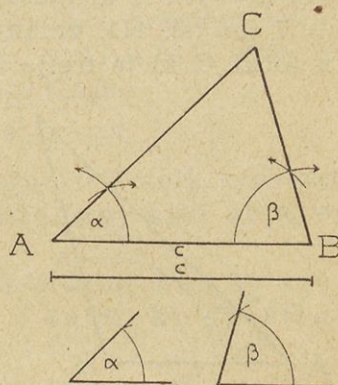
II. Načrtaj trikotnik, ako sta znani dve stranici in kot, ki ga oklepata stranici! N. pr.  $b = 5\text{ cm}$ ,  $c = 8\text{ cm}$ ,  $\alpha = 65^\circ$ .

Nariši kot  $\alpha = 65^\circ$  (sl. 109. zmanjšana) ter odmeri od vrha na krakih stranici  $AB = c = 8\text{ cm}$  in  $AC = b = 5\text{ cm}$ ; daljica, ki spaja točki  $C$  in  $B$ , je tretja trikotnikova stranica.

Nariši na karton trikotnik iz istih sestavin, izreži ga ter se prepričaj kakor poprej, da dve stranici in kot, ki ga oklepata, popolnoma določajo trikotnik glede na obliko in velikost!



Slika 109.



Slika 110.

Kdaj je razrešitev te naloge nemogoča? Izpreminjaj kot  $\alpha$ !

Kdaj določi merjevec trikotnik na ta način? Glej praktično vajo 13.!

III. Načrtaj trikotnik, ako je znana ena stranica in njej priležna kota! N. pr.  $c = 7\text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$ .

Nariši stranico  $AB = c = 7\text{ cm}$  (sl. 110. zmanjšana) ter načrtaj ob krajišču  $A$  kot  $\alpha = 45^\circ$  in ob krajišču  $B$  kot  $\beta = 75^\circ$ . Presečišče krakov je tretje trikotnikovo oglišče  $C$ .

Prepričaj se kakor poprej, da ena stranica in stranici priležna kota popolnoma določajo trikotnik glede na obliko in velikost!

Ako je eden znanih kotov stranici priležen, drug pa stranici nasproten, določi najprej tretji kot ter načrtaj

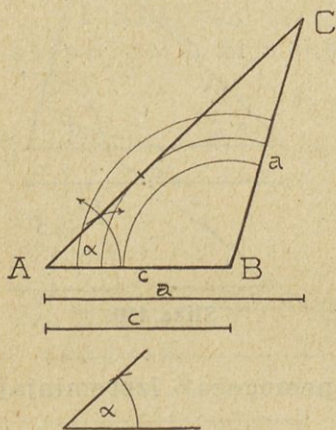
nato trikotnik kakor poprej. N. pr.  $c = 7 \text{ cm}$ ,  $a = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

Izpreminjaj kota! Kdaj je naloga nerazrešljiva?

Kdaj določi merjevec trikotnik na ta način? Glej praktično vajo 14.!

IV. Načrtaj trikotnik, ako sta znani dve stranici in kot, ki leži eni teh stranic nasproti! N. pr.  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Nariši ob krajišču  $A$  krajše stranice  $AB = c = 5 \text{ cm}$ , kot  $\alpha = 45^\circ$ , iz krajišča  $B$  pa načrtaj lok s polmerom  $a = 7 \text{ cm}$  (sl. 111. zmanjšana)! Ta lok preseka krak  $AC$  v točki  $C$ , ki je tretje trikotnikovo oglišče.



Slika 111.

Prepričaj se kakor poprej, da dve stranici in kot, ki leži večji stranici nasproti, popolnoma določajo trikotnik glede na obliko in velikost!

Kdaj je naloga nerazrešljiva? Izpreminjaj kot  $\alpha$ !

Načrtaj trikotnik iz sestavin  $a = 3,5 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ! V tem slučaju preseka lok s polmerom  $a$  krak  $AC$  v dveh točkah. Če še bolj zmanjšaš stranico  $a$ , se ga dotika ali pa nima nobene skupne točke s krakom (sl. 111.). Vobče

torej trikotnik ni določen, ako sta znani dve stranici in kot, ki leži krajši stranici nasproti.

Iz nalog, ki smo jih razrešili, sledi, da je trikotnik popolnoma določen glede na obliko in velikost, ako so znane sledeče tri sestavine:

I. tri stranice, II. dve stranici in kot, ki ga oklepata, III. ena stranica in dva kota, IV. dve stranici in kot, ki leži večji stranici nasproti.

Pazi na to, da je med tremi sestavinami vselej vsaj ena stranica!



Ako je znanih manj sestavin, je naloga nedoločena, če je znanih več sestavin, tedaj so nekatere ali nepotrebne, ali pa ne ustrezajo nalogi.

Koliko sestavin že določa pravokoten, koliko enakokrak in koliko enakostraničen trikotnik?

6. V zgoraj navedenih slučajih smo se vsakikrat prepričali, da moremo trikotnike, načrtane iz istih sestavin, položiti drugega na drugega tako, da se krijejo. Like, ki imajo isto obliko in velikost, smo imenovali skladne. Trikotnika  $ABC$  in  $A_1B_1C_1$  sta torej skladna ali kongruentna. V znakih:  $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$ .

Stranicam in kotom, ki se krijejo, pravimo istoležne stranice, oziroma istoležni koti. Ako se n. pr. krijeta trikotnika  $ABC$  in  $A_1B_1C_1$ , je

$$a = a_1, b = b_1, c = c_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1.$$

Z ozirom na sestavine, ki določajo trikotnik, pravimo:

I. Dva trikotnika sta skladna, ako se ujemata v vseh stranicah.

II. Dva trikotnika sta skladna, ako se ujemata v dveh stranicah in v kotu, ki ga stranici oklepata.

III. Dva trikotnika sta skladna, ako se ujemata v eni stranici in dveh kotih.

IV. Dva trikotnika sta skladna, ako se ujemata v dveh stranicah in v kotu, ki leži večji stranici nasproti.

Kakšni koti ležijo v skladnih trikotnikih enakim stranicam in kakšne stranice enakim kotom nasproti?

Izreke o skladnosti dveh trikotnikov uporabljamo dostikrat, ako hočemo pokazati enakost dveh daljic ali enakost dveh kotov.

Vaje.

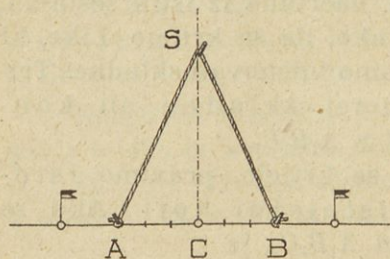
1. V trikotniku je kot  $\alpha = 45^\circ$  in kot  $\beta = 70^\circ$  ( $\alpha = 120^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ ;  $\alpha = 50^\circ 3' 45''$ ,  $\beta = 63^\circ 57' 12''$ ); kolik je kot  $\gamma$ ?

2. Nariši trikotnik in skoz vrh premico vzporedno osnovnici! Pokaži, da je vsota trikotnikovih kotov enaka  $180^\circ$ !

3. V enakokrakem trikotniku je kot ob osnovnici  $\alpha = 45^\circ$  ( $30^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $63^\circ 15' 2''$ ); kolik je kot ob vrhu?

4. V enakokrakem trikotniku je kot ob vrhu  $\gamma = 80^\circ$  ( $45^\circ, 120^\circ, 75^\circ 43' 58''$ ); kolik je kot ob osnovnici?

5.\* Zakoliči skoz določeno točko  $C$  zakoličene premice pravokotnico na premico! — Kako smo nalogo že razrešili? — Odmeri na premici na vsako stran točke  $C$  n. pr. po tri metre (sl. 112.) in pritrdi konca merske vrvice v točkah  $A$  in  $B$ ! Ako primeš vrvico v njenem razpolovišču  $S$  in jo napneš, je  $SC$  pravokotnica. Zakaj?



Slika 112.

6. Trikotnikov kot  $\alpha$  meri  $30^\circ$  ( $76^\circ 30' 15''$ ) in kot  $\beta$   $45^\circ$  ( $52^\circ 4' 37''$ ); kolik je kot  $\gamma$  in koliki so zunanji koti  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ?

7. Zunanji trikotnikov kot  $\beta_1$  meri  $105^\circ 12' 48''$ , notranji kot  $\alpha$  pa  $57^\circ 35' 14''$ ; kolik je notranji kot  $\gamma$ ?

8. Zunanji kot ob osnovnici enakokrakega trikotnika meri  $125^\circ$ ; koliki so notranji koti?

9. Zunanji kot ob vrhu enakokrakega trikotnika meri  $90^\circ$ ; izračunaj notranje kote!

10. Zunanja trikotnikova kota  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  merita  $150^\circ$ , oziroma  $85^\circ$ ; kolik je vsak notranjih kotov?

11. Notranji trikotnikov kot  $\alpha$  meri  $22\frac{1}{2}^\circ$ , kot  $\beta$  pa  $75^\circ$ ; nariši kot  $\gamma$ !

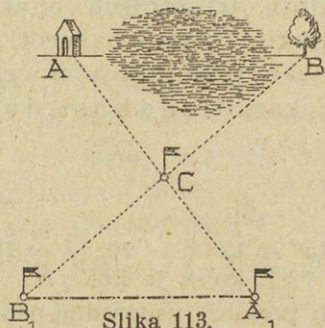
12. Nariši trikotnik, ako je:

a)  $a = 6.5 \text{ cm}$ ,  $b = 5.3 \text{ cm}$ ,  $c = 7.8 \text{ cm}$ ;

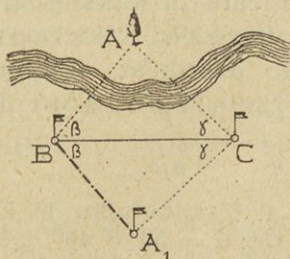
b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 4.6 \text{ cm}$ ,  $\beta = 60^\circ$ ;

c)  $a = 5.7 \text{ cm}$ ,  $\beta = 35^\circ$ ,  $\gamma = 115^\circ$ ;

č)  $a = 7.6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 100^\circ$ !



Slika 113.



Slika 114.

13.\* Določi razdaljo točk  $A$  in  $B$ , ako so n. pr. tla med njima močvirna! — Poišči točko  $C$  tako, da moreš iz nje vizirati proti  $A$  in

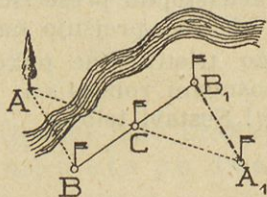


$B$  (sl. 113.)! Ako podaljšaš  $AC$  in  $BC$  tako, da je  $A_1C = AC$  in  $B_1C = BC$ , je daljica  $A_1B_1$  enaka  $AB$ .  $\triangle A_1B_1C \cong \triangle ABC$  (II.).

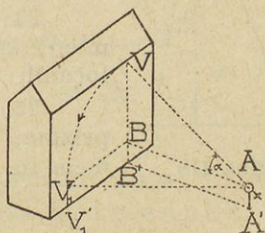
14.\* Določi razdaljo točk  $A$  in  $B$ , ako je točka  $A$  nedostopna! — a) Zakoliči daljico  $BC$  (sl. 114.), izmeri nato kota  $\beta$  in  $\gamma$  ter ju prenesi ob nasprotno stran daljice  $BC$ ! Potem je  $BA_1 = BA$ . —  $\triangle A_1BC \cong \triangle ABC$  (III.). — b) Zakoliči daljico  $BB_1$  pravokotno na  $AB$  (sl. 115.), razpolovi daljico  $(C)$  ter zakoliči skoz  $B_1$  pravokotnico na  $BB_1$ ! Krajišče  $A_1$  te pravokotnice določi tako, da moreš vizirati skoz  $A_1$  preko  $C$  in  $A$ ! Potem je  $A_1B_1 = AB$ . —  $\triangle A_1B_1C \cong \triangle ABC$  (III.).

15\*. Določi širino reke ali širino ribnika! Glej vajo 14. b!

16. Nariši trikotnik ter ga prenesi ob določeno premico! Na koliko načinov moreš razrešiti nalogo? Kateri način je najkrajši?



Slika 115.



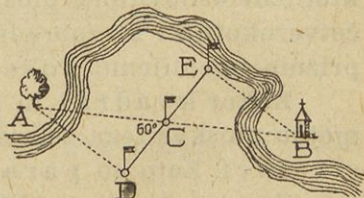
Slika 116.

17.\* Določi višino šolskega poslopja! — Kako smo to nalogo že razrešili? Označi v precejšnji razdalji od poslopja točko  $A'$  (sl. 116.), postavi tja kotomer ter izmeri višinski kot  $\alpha$ ! Ako zavrtiš nato kotomer v horizontalno lego in določiš z viziranjem presečišče kraka  $AV_1$  s poslopjem, je višina poslopja enaka  $B'B + B'V_1'$ . Zakaj?

18. Nariši pravokotni trikotnik (c je hipotenuza), ako je

- |                                                                     |                                                 |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $a = 5 \text{ cm}$ , $b = 3,8 \text{ cm}$ ;                      | c) $a = 7 \text{ cm}$ , $\beta = 30^\circ$ ;    |
| b) $c = 6 \text{ cm}$ , $a = 4,5 \text{ cm}$ ;                      | č) $c = 5,8 \text{ cm}$ , $\alpha = 60^\circ$ ; |
| d) v (višina na hipotenuzo) $= 3 \text{ cm}$ , $\beta = 60^\circ$ ! |                                                 |

19.\* Določi dolžino daljice  $AB$ , ako sta krajišči nedostopni! — Poišči točko  $C$  (sl. 117.) tako, da leži na daljici  $AB$ , ter zakoliči ob  $AB$  kot  $60^\circ$  z vrhom  $C$ . Nato določi skoz  $A$  in  $B$  pravokotnici na  $DE$ . Potem je  $AB = 2 \cdot CD + 2 \cdot CE$ . Zakaj?



Slika 117.

20. Nariši enakokraki trikotnik (c je osnovnica, v višina na osnovnico), ako je

a)  $c = 4.2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 65^\circ$ ;

č)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 65^\circ$ ;

b)  $c = 5.5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ;

d)  $c = 5.4 \text{ cm}$ ,  $v = 7 \text{ cm}$ ;

c)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 75^\circ$ ;

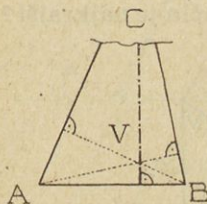
e)  $a = 5.7 \text{ cm}$ ,  $v = 5 \text{ cm}$ ;

f)  $v = 3 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$  ( $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ )!

21. Nariši enakokraki pravokotni trikotnik, ako je a)  $c = 7.5 \text{ cm}$ , b)  $v$  (višina na hipotenuzo)  $= 5 \text{ cm}$ !

22. Nariši enakostranični trikotnik, ako je a)  $a = 6.5 \text{ cm}$ , b)  $v = 6 \text{ cm}$ !

23. Nariši skoz nedostopni vrh  $C$  trikotnika  $ABC$  pravokotnico na osnovnico  $AB$ ! — Načrtaj skoz  $A$  pravokotnico na  $BC$  in skoz  $B$  pravokotnico na  $AC$  (sl. 118.) in nato skoz njiju presečišče  $V$  pravokotnico na  $AB$ ! ( $V$  je presečišče trikotnikovih višin!)



Slika 118.

24. Nariši skoz katerokoli točko premico, ki gre skoz nedostopno presečišče določenih premic  $a$  in  $b$ ! Glej prejšnjo nalogo!

25. Nariši mrežo tristranične pokončne prizme, ako merijo osnovni robi  $4 \text{ cm}$ ,  $5 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$  in višina  $7.5 \text{ cm}$ ! Sestavi telo!

### XIII. Četverokotnik. Središčna simetrija.

1. Imenuj telesa, na katerih smo opazovali četverokotnike! Kakšne četverokotnike torej že poznaš? Koliko oglišč, stranic, kotov in diagonal ima vsak četverokotnik?

Kvadrat in pravokotnik imata po dve nasprotni vzporedni ali paralelni stranici, zato ju imenujemo paralelograma.

Eno izmed paralelogramovih stranic zovemo osnovnico, pravokotnico z nasprotno stranico na njo pa višino.

Slika 119. kaže prizmo, ki so ji stranski robi naklonjeni osnovnima ploskvama. Mejne ploskve telesa so četverokotniki z vzporednimi nasprotnimi stranicami. To prizmo imenujemo poševni paralelepiped.

Kakor kvadrat in pravokotnik, imajo torej tudi mejne ploskve tega telesa po dve vzporedni nasprotni stranici. Zato so paralelogrami.

Sestavi kvadrat  $ABCD$  iz štirih paličic, ki se dajo pregibati v členkih (sl. 120.)! Ako pritrdiš stranico  $AB$  in potisneš kvadrat ob oglišču  $D$  proti desni, nastane četverokotnik  $ABC_1D_1$ . Ali so stranice tega četverokotnika





Paralelograme delimo glede na stranice v enakostranične (kvadrat in romb) in v raznostranične (pravokotnik in romboid), glede na kote pa v pravokotne (kvadrat in pravokotnik) in poševnokotne (romb in romboid).

Opazuj diagonali v rombu in romboidu ter primerjaj njih lego in dolžino z diagonalami v kvadratu in pravokotniku!

Tudi romb in romboid imata po dve srednjici. Določi ji!

2. Znano nam je že, da sta kvadrat in pravokotnik simetrična lika. Koliko simetral ima kvadrat in koliko pravokotnik?

Nariši romb, izreži ga ter se prepričaj s pregibanjem po diagonalah, da ima dve simetrali: obe diagonali. Kako deli vsaka diagonalna kota ob ogliščih, ki ji spaja? Diagonali, ki se sekata pravokotno, razpolavljata druga drugo.

Ali moreš romboid tako preganiti, da se krijeta oba dela?

Lik, ki ga razdeli premica (simetrala, os) na dva simetrično ležeča dela, imenujemo osjesimetričen lik, simetrijo pa osjo simetrijo.

Razen osje simetrije razločujemo še središčno simetrijo.

Nariši na karton paralelogram  $ABCD$  z obema diagonalama (sl. 122.) ter ga izreži! Položi nato paralelogram na risalni zvezek in ga občrtaj s svinčnikom! Ako zabodeš konico šestila v presečišču diagonal ter zavrtiš paralelogram za  $180^\circ$ , se popolnoma krije s svojo prvotno lego. Pravimo:

Paralelogram je središčnosimetričen lik glede na presečišče diagonal kot središče.

S katerim ogliščem se krije oglišče  $A$  in s katerim oglišče  $B$ ?

Točki  $A$  in  $C$ , oziroma točki  $B$  in  $D$ , ležita simetrično glede na točko  $S$ , ki razpolavlja daljico  $AC$ , oziroma  $BD$ . ( $AS = SC$ ,  $BS = SD$ .)

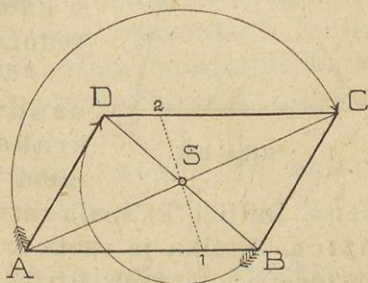


Kako torej določiš katerikoli točki simetrično ležečo točko, ako je znano središče simetrije? Kako določiš središče, ako sta znani simetrično ležeči točki?

Po vrtežu paralelograma okoli središča za  $180^\circ$  pokrije stranica  $AB$  nasprotno stranico  $CD$ . Nasprotni stranici ležita simetrično glede na središče  $S$ .

Središčnosimetrični daljici sta enaki in vzporedni.

Nariši v paralelogramu katerokoli daljico skoz središče  $S$  (na sliki 122. daljica  $\overline{12}$ ) ter zavrti paralelogram za  $180^\circ$  okoli  $S$ ! Kam pade krajišče 1 in kam krajišče 2 te daljice?



Slika 122.

Središče razpolavlja v središčnosimetričnem liku vsako daljico, ki gre skoz središče.

Prereži paralelogram po eni diagonalni, n. pr.  $AC$ ! Ako zavrtiš trikotnik  $ABC$  za  $180^\circ$  okoli središča  $S$ , pokrije trikotnik  $CDA$ . Trikotnika  $ABC$  in  $CDA$  sta središčnosimetrična glede na središče  $S$ .

Središčnosimetrični trikotniki so skladni.

Iz simetrijskih lastnosti paralelogramov sledijo torej sledeči izreki:

a) V vsakem paralelogramu so nasprotne stranice enake in vzporedne.

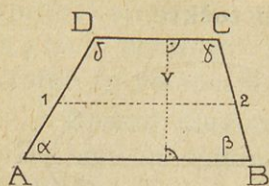
b) V vsakem paralelogramu so nasprotni koti enaki.

c) V vsakem paralelogramu razpolavljata diagonalni druga drugo.

č) V enakokrakem paralelogramu se sekata diagonalni pravokotno in razpolavljata kote ob ogliščih.

d) V pravokotnem paralelogramu sta diagonalni enaki.

3. Kako smo imenovali like, ki tvorijo stranske ploskve kvadratne priskekane piramide?

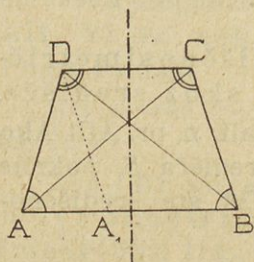


Slika 123.

Trapez (sl. 123.) je četverokotnik, v katerem sta po dve stranici vzporedni, drugi dve pa ne.

Vzporedni stranici imenujemo osnovnici, nevzporedni stranici pa kraka. Pravokotnica med vzporednima stranicama je trapežova višina. Daljici, ki spaja razpolovišči krakov, pravimo srednjica. Kolika je vsota kotov ob vsakem kraku? Kolika je torej vsota vseh štirih kotov?

Ako sta kraka enaka, imenujemo trapez enakokrak (sl. 124.). Kakšen trikotnik nastane, ako podaljšaš kraka  $AD$  in  $BC$ ? Nariši enakokraki trapez, izreži ga ter ga pregani po daljici, ki spaja razpolovišči vzporednih stranic! Polovici krijeta druga drugo.

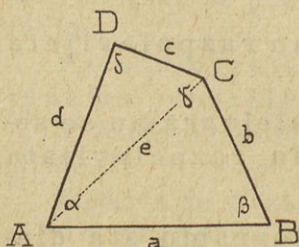


Slika 124.

Enakokraki trapez je osjesimetričen lik.

Primerjaj diagonali in kota ob vsaki vzporednih stranic! Diagonali sta enaki kakor tudi kota ob vsaki vzporednih stranic.

Nariši skoz oglišče  $D$  (sl. 124.) enakokrakega trapeza vzporednico drugemu kraku! Na kakšna lika razdeli ta vzporednica trapez? Kakšen trikotnik je  $AA_1D$ ? Primerjaj trikotnikovo osnovnico  $AA_1$  z vzporednima stranicama! Vidiš, da je  $AA_1 = AB - DC$ . Preizkusi, ako velja to tudi za trapez vobče!



Slika 125.

Vrti podaljšani krak  $BC$  okoli oglišča  $B$ ! Kdaj nastane iz trapeza paralelogram, kdaj trikotnik?

4. Ako nekoliko zavrtimo eno vzporednih trapezovih stranic, dobimo četverokotnik brez vzporednih stranic. Imenujemo ga trapezoid (sl. 125.). Nariši nekatere!



Izmeri jim stranice! Vsota stranic tvori četverokotnikov obseg.

Izmeri jim kote! Kaj dobiš? Kako doženeš vsoto kotov na kvadratu, pravokotniku, rombu in romboidu? Kolika je? Nariši trapezoidu eno diagonalo! Koliko trikotnikov nastane? Kolika je vsota notranjih kotov obeh trikotnikov? Kolika je tedaj vsota četverokotnikovih kotov?

Vsota četverokotnikovih kotov je enaka  $360^\circ$  ali štirim pravim kotom. ( $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ = 4R$ )

Ako je znan en kot, kolika je vsota ostalih treh kotov?

Podaljšaj četverokotnikove stranice v istem zmislu preko oglišč! Kakšni koti nastanejo? Kolika je vsota četverokotnikovih zunanjih kotov?

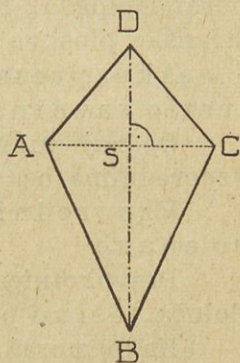
Na sliki 126. vidimo trapezoid  $ABCD$ , v katerem sta stranici, ki se stikata v oglišču  $B$ , kakor tudi stranici, ki se stikata v oglišču  $D$ , enaki. Tak četverokotnik imenujemo deltoid.

Na kakšna trikotnika razdeli deltoid ona diagonalna, ki spaja stikališči neenakih stranic? Nariši deltoid ter ga izreži! Ako ga preganeš po diagonalni, ki spaja stikališči enakih stranic, krijeta polovici druga drugo.

Deltoid je osjesimetričen lik. Kota, ki ju tvorita neenaki stranici, sta enaka. Diagonali se sekata pravokotno.

5. Koliko sestavin potrebuješ, ako hočeš načrtati popolnoma določen četverokotnik? Za kateri lik smo že razrešili to vprašanje? Nariši v četverokotniku diagonalo, n. pr.  $AC$  na sliki 125.! Koliko sestavin določuje trikotnik  $ABC$ ? Kaj imata trikotnika  $ABC$  in  $ACD$  skupnega? Torej sta potrebni za določitev trikotnika  $ACD$  samo še dve sestavini.

Četverokotnik je popolnoma določen, ako poznamo pet medsebojno neodvisnih sestavin.



Slika 126.

Za določitev četverokotnikov posebne vrste zadostuje seveda manjše število sestavin: za trapez štiri sestavine, za deltoid, enakokraki trapez in romboid tri sestavine, za pravokotnik in romb dve sestavini in za kvadrat ena sestavina.

Ali moreš načrtati določen četverokotnik, ako so znani samo koti? Pri nalogah o četverokotnikih bomo zaznamenovali stranice, kote i. t. d., kakor kaže slika 125.

6. Koliko oglišč, robov in mejnih ploskev vidiš na poševnem paralelepipedu (sl. 119.)? Imenuj osnovne in stranske ploskve, osnovne in stranske robe! Pokaži robe, ki se sekajo, ki so vzporedni, in robe, ki so mimobežni!

Koliko ravnin moreš položiti n. pr. skoz rob  $D_1C_1$ ? Ali je lega ravnine določena, ako jo položiš skoz rob  $D_1C_1$  in oglišče  $B_1$  ali skoz roba  $D_1C_1$  in  $C_1B_1$  ali skoz roba  $D_1C_1$  in  $A_1B_1$ ?

Lego ravnine torej popolnoma določajo:

a) tri točke, ki ne leže na isti premici ( $B_1C_1D_1$ ); b) premica in točka zunaj nje ( $D_1C_1$  in  $B_1$ ); c) dve premici, ki se sekata ( $D_1C_1$  in  $C_1B_1$ ); d) dve vzporedni premici ( $D_1C_1$  in  $B_1A_1$ ).

Kakšno lego imata po dve nasprotni mejni ploskvi paralelepipeda? Kakšno lego imata presečnici n. pr. vsake stranske ploskve z osnovnima ploskvama?

Ako presekamo dve vzporedni ravnini s tretjo ravnino, sta presečnici vzporedni.

Opazuj tudi dolžino stranskih robov, ki leže med vzporednima osnovnima ploskvama!

Vzporednice med vzporednima ravninama so enake.

Pravokotnica med osnovnima ploskvama (n. pr.  $A_1A'_1$ ) določa višino paralelepipeda.

Kako moraš premikati paralelogram, da nastane pokončni, in kako, da nastane poševni paralelepiped?

Vaje.

1. Nariši kvadrat, ako je a) stranica  $a = 5$  cm; b) diagonalna  $e = 6$  cm; c) obseg  $o = 18$  cm!

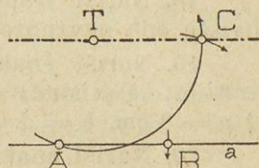
2. Nariši kvadrat ( $a = 3$  cm), podaljšaj eno stranico za 4 cm ter vrti nato kvadrat okoli krajišča podaljšane stranice od  $45^\circ$  do  $45^\circ$ !



3. Nariši pravokotnik, ako je a)  $a = 3.5 \text{ cm}$ ,  $b = 5.8 \text{ cm}$ ; b)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $e = 8 \text{ cm}$ ; c)  $a = 6.5 \text{ cm}$ ,  $o = 31 \text{ cm}$ ; d)  $e = 7.6 \text{ cm}$  in en kot, ki ga tvorita diagonalni,  $\epsilon = 30^\circ$ !

4. Nariši pravokotnik ter razpolovi kote! Kakšen četverokotnik tvorijo kotne simetrale?

5. Nariši romb, ako je a)  $a = 5.4 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ; b)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $e = 6 \text{ cm}$ ; c)  $e = 4.5 \text{ cm}$ ,  $f$  (druga diagonalna)  $= 6.5 \text{ cm}$ !



Slika 127.

6. Nariši pravokotnik ter spoji po dve sosedni razpolovišči stranic! Kakšen četverokotnik nastane?

7. Nariši z ravnilom in šestilom skoz točko T vzporednico premici a! — Izberi na premici a točko A ter nariši romb, kakor kaže slika 127.!

8. Nariši romb ter spoji po dve sosedni razpolovišči stranic! Kakšen četverokotnik nastane?

9. Nariši romboid, ako je a)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ; b)  $a = 7.5 \text{ cm}$ ,  $b = 5.6 \text{ cm}$ ,  $e = 7 \text{ cm}$ ; c)  $e = 6 \text{ cm}$ ,  $f = 8 \text{ cm}$  in kot, ki ga tvorita diagonalni,  $75^\circ$ !

10. Nariši romboid ter razpolovi kote! Kakšen četverokotnik tvorijo razpolovnice?

11. Nariši romboid, odmeri v istem zmislu na stranicah od vsakega oglišča daljico, krajšo od manjše romboidove stranice! Kakšen četverokotnik nastane, ako spojiš krajišča teh daljic?

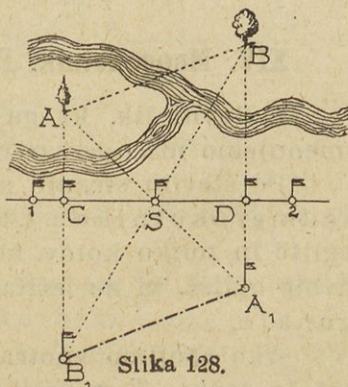
12. Ako meri v paralelogramu en kot  $90^\circ$  ( $43^\circ 18' 49''$ ), koliki so ostali koti?

13. En zunanji paralelogramov kot meri  $56^\circ$  ( $\frac{2}{3} R$ ,  $134^\circ 45' 9''$ ); kolik je vsak notranjih kotov?

14. Nariši paralelogram ter mu načrtaj središčno-simetričen lik glede na določeno točko kot središče!

15. Nariši med krakoma določenega kota (n. pr.  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ) daljico  $d = 3 \text{ cm}$  tako, da je a) pravokotna na enem kraku; b) vzporedna določeni premici!

16.\* Določi dolžino nedostopne daljice AB! — Zakoliči premico  $\overline{12}$  (sl. 128.), spusti na njo iz A in B pravokotnici AC in BD ter razpolovi CD (S)! Ako določiš nato točki  $A_1$  in  $B_1$  tako, da leži  $A_1$  v BD in AS,  $B_1$  pa v AC in BS, je daljica  $A_1B_1$  enaka AB. Zakaj?



Slika 128.

17. Nariši trapez ( $a \parallel c$ ), ako je a)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 4.5 \text{ cm}$ ,

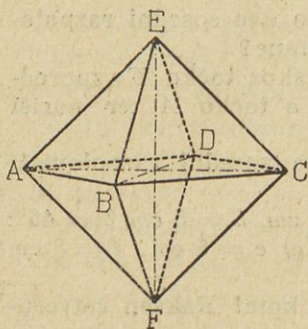


$\beta = 75^\circ$ ; b)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$ ,  $d = 4.5 \text{ cm}$ ; c)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 5.5 \text{ cm}$ ,  $c = 4.5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ !

18. Nariši trapezu središčnosimetričen lik, ako je razpolovišče ene nevzporednih stranic središče simetrije!

19. Nariši enakokraki trapez, ako je a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 3 \text{ cm}$ ,  $v$  (višina)  $= 4 \text{ cm}$ ; b)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 3 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ; c)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = d = 4.5 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ !

20. Nariši enakokraki trapez, razpolovi stranice ter spoji zaporedoma razpolovišča! Kakšen četverokotnik nastane?



Slika 129.

21. Nariši deltoid (sl. 126.), ako poznaš simetralo  $BD = 8 \text{ cm}$ , stranico  $AD = 6 \text{ cm}$  in a) kot  $D = 60^\circ$ ; b)  $AB = 3.5 \text{ cm}$ ; c)  $AC = 5 \text{ cm}$ !

22. Nariši trapezoid, ako je a)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 9 \text{ cm}$ ,  $e = 8.5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = \beta = 120^\circ$ ; b)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4.5 \text{ cm}$ ,  $c = 7 \text{ cm}$ ; d)  $2.5 \text{ cm}$ ,  $f = 6 \text{ cm}$ !

23. V četverokotniku so znani trije koti: a)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 86^\circ$ ,  $\gamma = 110^\circ$ ; b)  $\alpha = 46^\circ 12'$ ,  $\beta = 88^\circ 3' 48''$ ,  $\gamma = 98^\circ 39' 15''$ ; kolik je kot  $\delta$ ?

24. Koliko ostrih, koliko pravih in koliko topih kotov more imeti četverokotnik?

25. Nariši četverokotnik ter ga prenesi ob določeno premico!

26. Nariši dvakrat mrežo enakorobne kvadratne piramide ( $r = 6 \text{ cm}$ ) ter sestavi telesi! Ako položiš eno piramido na drugo tako, da se krijeta kvadratni ploskvi, nastane telo, ki mu pravimo pravilni oktaeder (sl. 129.). Kolika je vsota kotov na vseh mejnih ploskvah tega telesa? Opazuj lego in dolžino daljic, ki spajajo po dve nasprotni oglišči! Ali je oktaeder simetrično telo?

#### XIV. Mnogokotnik. Pravilna prizma in piramida.

1. Ravni lik, ki ga meji več kakor štiri stranice, imenujemo mnogokotnik.

Po številu stranic razločujemo petero-, šestero-, sedmerokotnike i. t. d. Vsak mnogokotnik ima toliko oglišč in toliko kotov, kolikor stranic. Daljico, spajajočo dvoje oglišč, ki ne ležita na isti stranici, imenujemo diagonalo.

Ako spojimo znotraj mnogokotnika  $ABCDE$  (sl. 130.) ležečo točko  $T$  z vsemi oglišči, razpade peterokotnik



na toliko trikotnikov, kolikor je stranic. Vsota notranjih kotov vseh teh trikotnikov je za štiri prave kote, ki jih tvorijo trikotniki ob skupnem vrhu  $T$ , večja nego vsota peterokotnikovih notranjih kotov.

Vsoto notranjih peterokotnikovih kotov izračunamo torej sledeče:  $2R \times 5 = 10R$ ;  $10R - 4R = 6R = 540^\circ$

Za šesterokotnik:  $2R \times 6 = 12R$ ;  
 $12R - 4R = 8R = 720^\circ$ .

Vsota notranjih kotov vsakega mnogokotnika je tolikrat po dva prava kota, kolikor ima mnogokotnik stranic, manj štiri prave kote.

Prepričaj se, da velja to pravilo tudi za trikotnike in četverokotnike!

Ako podaljšamo mnogokotnikove stranice v istem zmislu preko oglišč, dobimo mnogokotnikove zunanje kote.

Kolika je vsota zunanjih kotov? Narišimo mnogokotnik in skoz katerokoli točko vzporednice njegovim stranicam (sl. 131.)!

Koti okoli te točke so enaki mnogokotnikovim zunanjim kotom. Kakšen kot tvorijo?

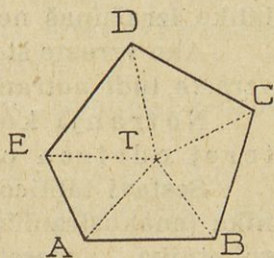
Vsota mnogokotnikovih zunanjih kotov je enaka  $360^\circ$  ali  $4R$ .

Ali se torej izpreminja vsota zunanjih kotov, če izpreminjamo število stranic? Primerjaj tudi vsoto zunanjih kotov v trikotniku in četverokotniku!

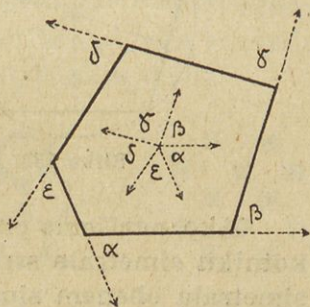
Pravimo: Vsota mnogokotnikovih zunanjih kotov je neizpremenljiva ali stalna.

2. Ako so mnogokotnikove stranice in koti enaki, mu pravimo pravilni mnogokotnik.

Pravilnim likom prištevamo tudi enakostranični trikotnik in kvadrat.



Slika 130.



Slika 131.

Določimo notranji kot nekaterih pravilnih mnogokotnikov!

Notranji kot pravilnega peterokotnika meri  $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ .

„ „ „ šesterokotnika „  $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$ .

„ „ „ osmerokotnika „  $\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$ .

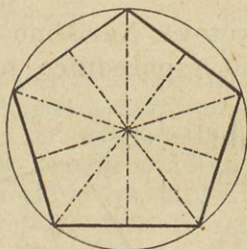
Ker je zunanji kot notranjemu sokot, kako tudi lahko izračunaš notranji kot pravilnega mnogokotnika?

Ako vzraste število stranic pravilnega mnogokotnika, vzraste tudi notranji kot.

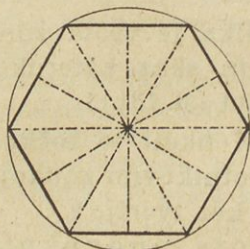
Notranji kot pravilnega mnogokotnika je torej odvisen od števila stranic.

Sestavi tablico notranjih kotov pravilnega trikotnika (enakostraničnega), četverokotnika (kvadrata), peterokotnika, ... deseterokotnika! Število stranic vzraste za eno, kako vzrastejo notranji koti?

3. Slika 132. kaže pravilni peterokotnik, slika 133. pa pravilni šesterokotnik.



Slika 132.



Slika 133.

Ako narišemo pravilnemu peterokotniku ali šesterokotniku simetrane stranic in kotov, vidimo, da je vsaka simetrana obenem simetrana mnogokotnika.

Pravilni mnogokotniki so osjesimetrični liki.

Koliko simetral ima pravilni peterokotnik, koliko pravilni šesterokotnik?

Vsak pravilni mnogokotnik ima toliko simetral, kolikor stranic.

Simetrane se sekajo v točki, ki je enako oddaljena od oglišč in od stranic. Tej točki pravimo mnogokotnikovo središče. Pravilnemu mnogokotniku tedaj lahko krog



očrtamo in krog včrtamo. Kolik je polmer včrta-  
nega kroga?

Ali so pravilni mnogokotniki tudi središčnosimetrični  
liki? Opazuj, kako razdeli središče simetrane pravilnega  
peterokotnika in kako simetrane pravilnega šesterokot-  
nika! Kateri teh dveh likov je tedaj središčnosimetričen?

Pravilni mnogokotniki, ki imajo sodo (6, 8,  
10 itd.) število stranic, so tudi središčnosime-  
trični liki glede na njih središče.

4. Pravilne mnogokotnike rišemo navadno s pomočjo  
očrtanega kroga.

Ako razdelimo namreč krogov obod na 3, 4, 5, 6 i. t. d.  
enakih delov ter spojimo zaporedoma razdelišča, nastanejo  
pravilni mnogokotniki.

Pravilni šesterokotnik narišemo, ako prenesemo pol-  
mer iz katerekoli točke kroga šestkrat kakor tetivo. Zakaj?  
Spoji razdelišča s središčem! Kakšni trikotniki nastanejo?

Razdeli krožnico na šest enakih delov in označi vsako  
drugo razdelišče! Ako spojiš označena razdelišča, dobiš  
pravilni trikotnik.

Krajišča dveh krogovih pravokotnih premerov tvorijo  
oglišča kvadrata. Kako narišeš pravilni osmerokotnik?

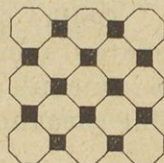
Pravilni peterokotnik včrtamo krog, ako razdelimo  
krog poskusoma s šestilom na pet enakih delov.



Slika 134.



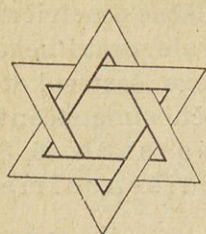
Slika 135.



Slika 136.

Pravilne mnogokotnike uporabljamo kot osnovno  
obliko raznovrstnih okraskov. Slika 134. kaže vzorec kva-  
dratne mreže, slika 135. vzorec mreže iz enakostraničnih  
trikotnikov in pravilnih šesterokotnikov, slika 136. vzorec  
mreže iz kvadratov in pravilnih osmerokotnikov, slika 137.  
pa spojitev dveh enakostraničnih trikotnikov trakaste  
oblike v zvezdast lik.

Opazuj ornamentalne tapetne vzorce, parketna in mozaična tla, različna ženska ročna dela i. t. d.!

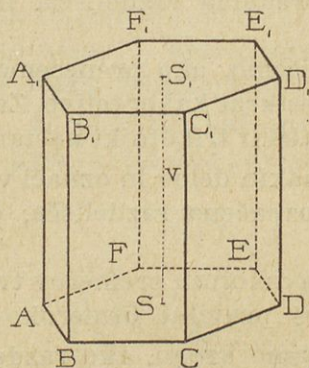


Slika 137.

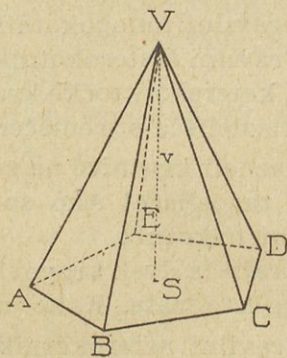
5. Mnogokotniki tvorijo osnovne ploskve mnogostraničnim prizmam in piramidam. Kdaj imenujemo prizmo (piramido) pokončno, kdaj poševno?

Pokončne prizme in piramide, katerih osnovne ploskve so pravilni mnogokotniki, imenujemo pravilne.

Slika 138. kaže pravilno šesterostranično prizmo, slika 139. pa pravilno peterostranično piramido.



Slika 138.



Slika 139.

Obliko šesterostranične pravilne prizme imajo n. pr. nekateri svinčniki, stebri, celice satovja i. t. d.

Imenuj telesa, ki imajo obliko mnogostranične pravilne piramide!

*Vaje.*

1. Izračunaj vsoto kotov sedmero-, osmero- in deseterokotnika!

2. Koliko diagonal lahko narišeš iz enega oglišča peterokotnika (šestero-, sedmero-, deveterokotnika)? — Na koliko trikotnikov razpade mnogokotnik? Kolika je vsota kotov vseh trikotnikov? — Koliko je vseh diagonal v petero-, šesterokotniku i. t. d.?

3. Nariši mnogokotnik ter ga prenesi ob določeno premico! (Potegni iz enega oglišča vse diagonale ter prenesi nastale trikotnike!)



4.\* Zakoliči mnogokotnik ter ga nariši po primernem zmanjšanem merilu!

5. Včrtaj krogu ( $r = 3.5 \text{ cm}$ ) pravilni peterokotnik (šestero-, osmerokotnik) ter nariši vse simetre!

6. Imenuj nekatere pravilne mnogokotnike, ki so samo osjesimetrični liki, in nekatere, ki so osje- in središčnosimetrični liki!

7. Kolik je zunanji kot pravilnega peterokotnika (šestero-, sedmerokotnika i. t. d.)?

8. Razdeli krog ( $r = 4 \text{ cm}$ ) na pet (šest, osem, deset, dvanajst) enakih delov ter spoji po dve razdelišči tako, da preskočiš vedno po eno!

9. Nariši ob daljici  $a = 3 \text{ cm}$  enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petero-, šestero- in osmerokotnik! [ $\alpha_5$  (kot pravilnega peterokotnika)  $= 108^\circ = 90^\circ + 18^\circ$ ,  $90^\circ = 5 \times 18^\circ$ ;  $\alpha_6 = 120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$ ;  $\alpha_8 = 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ .]

10. Nariši pravilni peterokotnik (šestero-, osmerokotnik) s stranico  $a = 2.5 \text{ cm}$  in podaljšaj stranice v toliko, da se po dve stikata!

11. Včrtaj krogu ( $r = 4 \text{ cm}$ ) dva prepletajoča se kvadrata trakaste oblike (glej sliko 137.) tako, da razdele oglišča obeh kvadratov krog na osem enakih delov!

12. Nariši enakostranični trikotnik ( $a = 10 \text{ cm}$ ) ter odreži ogle tako, da nastane pravilni šesterokotnik!

13. Nariši kvadrat ( $a = 8.5 \text{ cm}$ ) ter odreži ogle tako, da nastane pravilni osmerokotnik! (Nariši iz vsakega oglišča kot središče lok s polmerom enakim polovici diagonale!)

14. Nariši mrežo pravilne peterostranične prizme, ako meri osnovni rob  $3 \text{ cm}$  in stranski rob  $5 \text{ cm}$ ! Sestavi telo! — Kolika je vsota kotov na vseh mejnih ploskvah?

15. Kakšen lik dobiš, ako presekaš pokončno prizmo z ravnino, vzporedno osnovnima ploskvama? — Kakšni liki so ravninski preseki skoz katerikoli stranski rob?

16. Nariši mrežo pravilne šesterostranične piramide, ako meri osnovni rob  $2.5 \text{ cm}$  in stranski rob  $4.5 \text{ cm}$ ! Sestavi telo! — Koliko oglišč, robov in mejnih ploskev ima telo?

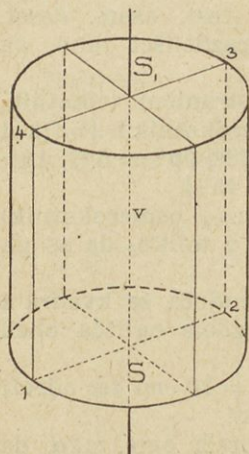
17. Kakšen lik nastane, ako presekaš pokončno piramido z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi? — Kako imenujemo telesi, na kateri razpade piramida? — Kakšni liki so ravninski preseki skoz piramidni vrh?

## XV. Valj. Krog. Stožec. Krogla.

1. Kako imenujemo telesa, katerih mejne ploskve so ravne, in kako telesa, ki jih meje ravne in krive ploskve, oziroma le krive ploskve? Oglejmo si najvažnejša okrogla telesa!

Nariši na karton pravokotnik z eno srednjico ter ga izreži! Ako vbodeš ob krajiščih srednjice luknjici, potegneš skoz nji nit ter vrtiš pravokotnik okoli napete niti, nariše telo, ki mu pravimo pokončni valj ali ciliinder (sl. 140.).

Srednjici vzporedni stranici narišeta valjev plašč, stranici, ki sta pravokotni na srednjici, pa vzporedna in enaka kroga kot valjevi osnovni ploskvi.



Slika 140.

Daljico, okoli katere vrtiš pravokotnik, zovemo valjevo os ( $SS_1$ ).

Koliko robov ima valj? Ali moreš narisati na valjevem plašču preme črte? Koliko in v kateri smeri?

Daljice, ki leže na valjevem plašču med osnovnima ploskvama, imenujemo valjeve stranice (n. pr.  $\overline{14}$ ,  $\overline{23}$ ). Kakšno medsebojno lego imajo stranice? Pokončni valj je enakostraničen, če je stranica enaka premeru osnovne ploskve.

Ako je os naklonjena osnovnima ploskvama, je valj poševen (model!). Pravokotnica (razdalja) med osnovnima ploskvama določa valjevo višino. V pokončnem valju je vsaka stranica, kakor tudi os, enaka višini.

Kako moraš premikati krog, da nariše pokončni valj? Kakšno črto nariše pri tem premikanju krogovo središče? Kakšna je lega krogov glede na to črto? Ali moreš tudi daljico premikati tako, da nariše krivo valjevo ploskev?

Ali je pokončni valj simetrično telo? Opiši lego simetrijskih ravnin!

Obliko valja ima mnogo naravnih in umetnih teles, n. pr. debela rastlin in dreves, okrogli svinčniki, novci, mlinški kameni, osi in valji pri strojih i. t. d.

Ako prerežeš votel pokončni valj po robih ter odstraniš osnovni ploskvi, ostane še plašč. Prereži tudi plašč po eni stranici ter ga razgrni po ravnini! Razgrnjeni plašč je pravokotnik, čigar ena stranica je enaka



dolžini oboda osnovne ploskve in čigar druga stranica je enaka valjevi višini. Dolžina krogevega oboda je približno enaka dolžini niti, ki jo ovijemo osnovni valjevi ploskvi. Primerjaj dolžino oboda s krogovim premerom! ( $3\frac{1}{2}$ .)

Slika 141. kaže mrežo pokončnega valja.

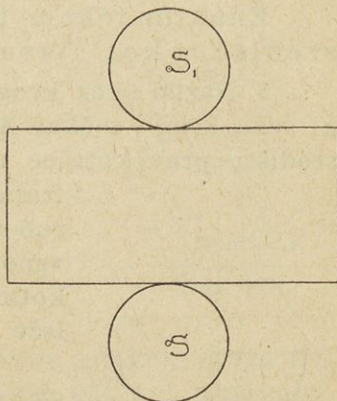
2. Mislimo si v pokončni valj izvrtan drug valj z isto osjo. Nastalo telo imenujemo valjasto cev (n. pr. plinove in vodovodne cevi). Vsako osnovno ploskev valjaste cevi mejita kroga z istim središčem.

Kroga, ki imata isto središče, imenujemo istosrediščna ali koncentrična kroga (sl. 142.). Ploskev, ki jo mejita istosrediščna kroga, zovemo kolobar.

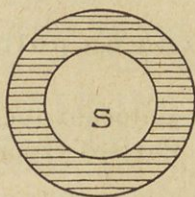
Nariši krog (sl. 143.) in v njem dva polmera  $AS$  in  $BS$ !

Kot  $\alpha$ , ki ga tvorita polmera, imenujemo središčni kot. Vsakemu krogovemu loku pripada en središčni kot in ena tetiva.

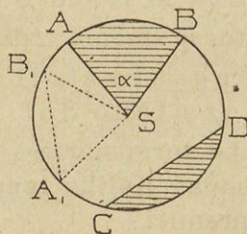
Del kroga, ki ga mejita dva polmera in med njima ležeči lok, zovemo krogov izsek ali sektor (sl. 143.).



Slika 141.



Slika 142.



Slika 143.

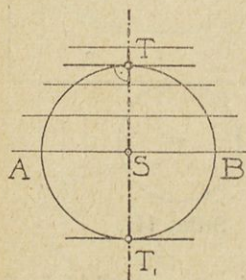
Krogov odsek ali segment (sl. 143.) pa imenujemo oni del kroga, ki ga mejita tetiva in njej pripadajoči lok.

Kako se izpreminjajo središčnemu kotu pripadajoči lok, tetiva, izsek in odsek, ako raste središčni kot? Kolik je n. pr. lok, ki pripada iztegnjenemu središčnemu kotu?

Ako vrtiš krog okoli središča, se premika vedno sam v sebi. Če sta torej loka  $\widehat{AB}$  in  $\widehat{A_1B_1}$  (sl. 143.) enaka, zavrtiš lahko enega tako, da popolnoma pokrije drugega. Potem se krijeta tudi lokoma pripadajoči tetivi, središčna kota, izseka in odseka.

Enakim lokom istega kroga pripadajo enaki središčni koti, izseki in odseki.

3. Nariši skoz krogovo središče  $S$  (sl. 144.) sekanto, ki seka krog v točkah  $A$  in  $B$ ! Ako postaviš skoz krogovo središče pravokotnico na sekanto, je pravokotnica simetr



Slika 144.

trala kroga in sekante. Zakaj? Položi rob ravnila na sekanto ter ga premikaj vzporedno prvotni legi! Ali je pravokotnica še vedno simetr

trala vsake tetive gre skoz krogovo središče.

Kako se izpreminja dolžina tetive, ki leži na premikajoči se sekanti? Opazuj tudi krajišča tetiv! Čim večja je razdalja tetive od središča (središčna razdalja), tem bolj se bližata krajišči drugo drugemu. Ko je središčna razdalja enaka krogovemu polmeru, se strneta krajišči v eno točko. Iz sekante nastane tangenta in iz tetive dotikališče tangente s krogom.

Zatorej smemo trditi:

Tangenta stoji pravokotno na polmeru, ki gre skoz njeno dotikališče.

Kako torej narišeš tangento v določeni točki krogevega oboda? Koliko tangent lahko narišeš vzporedno določeni premici?

Ker je lega premice glede na krog odvisna od njene središčne razdalje, povej, kdaj seka premica krog, kdaj se ga dotika in kdaj nima s krogom nobene skupne točke!

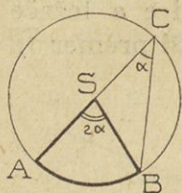
4. Opazuj kot  $\alpha$  na sliki 145.! Kje leži njegov vrh in kaj sta njegova kraka?

Kot, čigar vrh leži na krogovem obodu in čigar kraka sta tetivi, imenujemo obodni kot.

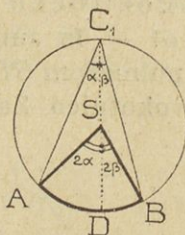


Obodnemu kotu  $\alpha$  pripada med krakoma ležeči lok  $\widehat{AB}$ . Pravimo tudi, da stoji obodni kot  $\alpha$  na loku  $\widehat{AB}$ . Na loku  $\widehat{AB}$  pa stoji tudi središčni kot  $ASB$ . Primerjajmo kota!

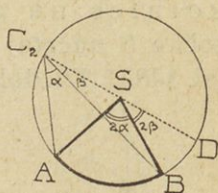
Krogovo središče leži na enem kraku obodnega kota (sl. 145.). Trikotnik  $BCS$  je enakokrak. Zakaj? Ker je



Slika 145.



Slika 146.



Slika 147.

središčni kot  $ASB$  zunanji kot ob vrhu enakokrakega trikotnika, je še enkrat tako velik kakor kot  $\alpha$  ob osnovnici, ali kot  $\alpha$  je enak polovici središčnega kota.

Premaknimo vrh obodnega kota v lego  $C_1$ ! Krogovo središče leži zdaj med krakoma kota (sl. 146.). Ako narišemo premer  $C_1D$ , razpade obodni kot na dva obodna kota, kakor smo jih baš opazovali. Pokaži, da je tudi obodni kot  $AC_1B$  enak polovici pripadajočega središčnega kota  $ASB$ !

Ako premaknemo vrh v lego  $C_2$ , leži krogovo središče na isti strani krakov (sl. 147.). Če narišemo premer  $C_2D$ , ležita ob isti strani premera dva obodna kota ( $\sphericalangle AC_2D$  in  $\sphericalangle BC_2D$ ), kakor smo jih prej opazovali. Vsak teh dveh kotov je enak polovici njemu pripadajočega središčnega kota, zato je tudi njiju razlika ( $\sphericalangle AC_2B$ ) enaka polovici razlike ( $ASB$ ) njima pripadajočih središčnih kotov.

Iz navedenega sledi:

Obodni kot je enak polovici središčnega kota, ki stoji na istem loku.

Obodni koti, stoječi na istem loku, so enaki!

Izpreminjaj lok  $\widehat{AB}$  (sl. 146.)! Kdaj je loku pripadajoči obodni kot oster, kdaj pravi in kdaj top?

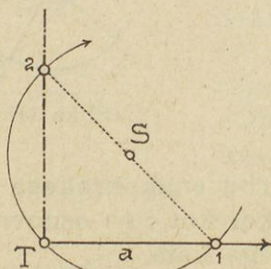
Nariši v krogu premer, spoji njegovi krajišči z različnimi točkami krogevega oboda ter opazuj nastale obodne

kote! Ker je obodnim kotom pripadajoči središčni kot enak iztegnjenemu kotu, meri vsak po  $90^\circ$ . Obodnim kotom pravimo v tem slučaju koti v polkrogu.

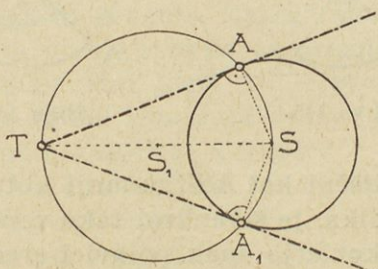
Vsak kot v polkrogu je pravi kot.

S pomočjo kota v polkrogu razrešimo sledeči nalogi.

*Nalogi. a)* Nariši skoz točko  $T$  premice  $a$  pravokotnico na premico! — Iz zunaj premice  $a$  ležeče točke  $S$  načrtaj krog s polmerom  $ST$  ter nariši premer  $\overline{I2}$  (sl. 148.)!  $T2$  določa pravokotnico. Zakaj?



Slika 148.



Slika 149.

*b)* Nariši skoz točko  $T$  tangenti na krog s središčem  $S$ ! — Spoji točko  $T$  s krogovim središčem  $S$  ter načrtaj krog, čigar premer je daljica  $TS$  (sl. 149.)! Presečišči  $A$  in  $A_1$  obeh krogov sta dotikališči tangent  $TA$  in  $TA_1$ . Ako spojiš dotikališči  $A$  in  $A_1$  tangent s krogovim središčem, sta kota pri  $A$  in  $A_1$  prava kota. Zakaj?

$TS$  je simetrala obeh krogov in kota, ki ga tvorita tangenti.

Odseka  $AT$  in  $A_1T$  tangent, ki ji narišemo skoz določeno točko na krog, sta enaka ( $AT = A_1T$ ).

Kako se izpreminja kot, ki ga tvorita tangenti, ako se manjša, oziroma ako raste razdalja vrha  $T$  od središča  $S$ ?

**5.** Mnogokotnik, čigar oglišča ležijo na krogovem obodu, je krogu včrtan. Pravimo mu tetivni mnogokotnik. Mnogokotnik, čigar stranice se dotikajo kroga, je krogu očrtan. Zovemo ga tangentni mnogokotnik.

Znano nam je že, da lahko vsakemu trikotniku in vsakemu pravilnemu mnogokotniku krog včrtamo in krog



očrtamo. Kako jim najdeš središče včrtanega in kako središče očrtanega kroga?

Preizkusiti hočemo, če se dado tudi četverokotnikom krogi včrtati in očrtati.

Nariši krog ter mu včrtaj četverokotnik  $ABCD$  (sl. 150.)! Koti tetivnega četverokotnika so obodni koti. Nasprotnima kotoma n. pr.  $\alpha$  in  $\gamma$  pripadajoča središčna kota sta  $2\alpha$  in  $2\gamma$ . Ker je

$$2\alpha + 2\gamma = 4R, \text{ je}$$

$$\alpha + \gamma = 2R \text{ in } \beta + \delta = 2R.$$

V tetivnem četverokotniku sta po dva nasprotna kota suplementarna.

Krog moremo tedaj očrtati le tistemu četverokotniku, čigar po dva nasprotna kota sta suplementarna. Imenuj paralelograme in trapeze, ki so tetivni četverokotniki! Kako jim določiš središče očrtanega kroga?

Nariši krog ter mu očrtaj četverokotnik  $ABCD$  (sl. 151.)! Ker sta tangentna odseka med določeno točko in dotikališčema enaka, je

$$a = a_1, b = b_1, c = c_1, d = d_1.$$

Vidiš torej na prvi pogled, da je

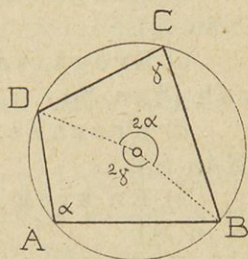
$$AB + CD = AD + BC.$$

V tangentnem četverokotniku je vsota dveh nasprotnih stranic enaka vsoti ostalih dveh stranic.

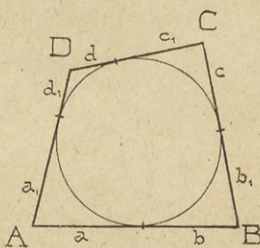
Krog moremo tedaj včrtati le onemu četverokotniku, v katerem je vsota dveh nasprotnih stranic enaka vsoti ostalih dveh stranic.

Imenuj posebne četverokotnike, ki so tangentni četverokotniki! Kako jim določiš središče včrtanega kroga?

6. Kroga z različnima središčema imenujemo raznosrediščna ali ekscentrična kroga (sl. 152.). Daljici, ki spaja središči obeh krogov, pravimo središčnica.



Slika 150.



Slika 151.

Določimo glavne lege dveh raznosrediščnih krogov!

Ako narišeš dva kroga (dva novca), izrežeš enega ter ga premikaš proti drugemu, vidiš, da so mogoče sledeče lege (sl. 152.):

a) En krog leži popolnoma zunaj drugega ( $S$  in  $S_1$ ).

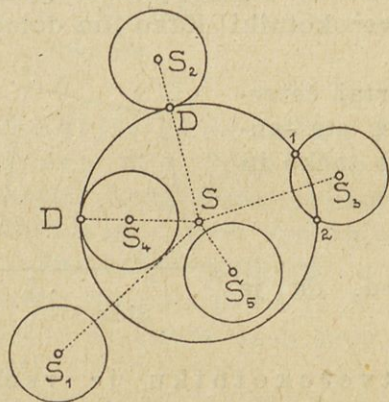
b) Kroga se dotikata drug drugega od zunaj ( $S$  in  $S_2$ ).

c) Kroga sekata drug drugega v dveh točkah ( $S$  in  $S_3$ ).

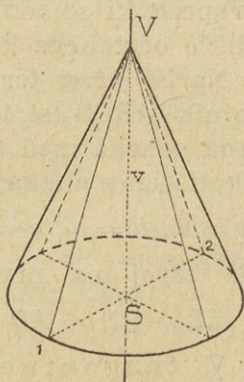
d) Kroga se dotikata drug drugega od znotraj ( $S$  in  $S_4$ ).

e) En krog leži popolnoma znotraj drugega ( $S$  in  $S_5$ ).

Primerjaj v vseh teh slučajih dolžino središčnice s polmeroma obeh krogov! Imenuj premico, ki je simetrala dveh raznosrediščnih krogov!



Slika 152.



Slika 153.

7. Ako vretiš enakokraki trikotnik okoli višine na isti način, kakor poprej pravokotnik, nariše telo, ki ga imenujemo pokončni stožec (sl. 153.).

Pri tem vrtenju narišeta kraka krivo ploskev (stožčev plašč), osnovnica pa krog (osnovno ploskev).

Daljci, okoli katere vretiš trikotnik in ki stoji pravokotno na osnovni ploskvi, pravimo os. Določa razdaljo stožčevega vrha od osnovne ploskve in je stožčeva višina.



Pokončni stožec nastane tudi, ako postavimo v središču kroga pravokotnico ter spojimo njeno krajišče z vsako točko krogovega oboda.

Imenuj telesa, ki imajo obliko stožca!

Na stožčevem plašču lahko rišemo preme črte, ki se stikajo v vrhu  $V$  in ki jim pravimo stranice (n. pr.  $1V$  in  $2V$ ). Koliko stranic gre skoz vsako točko stožčevega plašča? Pokončni stožec je enakostraničen, ako je stranica enaka premeru osnovne ploskve.

Ali je pokončni stožec simetrično telo? Koliko simetrijskih ravnin ima?

Stožec, čigar stranice so neenake, je poševen (model!).

Vsak osnovni ravnini vzporedni presek razdeli stožec na dva dela, na prisekani stožec in na dopolnilni stožec.

Prereži plašč pokončnega stožca po stranici ter ga razgrni v ravnino! Razgrnjeni plašč ima obliko krogovega izseka, čigar polmer je enak stožčevi stranici in čigar lok je enak obodu osnovne ploskve.

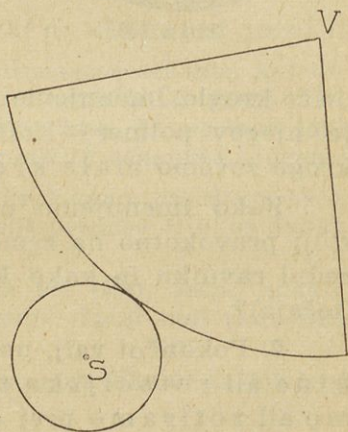
Slika 154. kaže mrežo pokončnega stožca.

**8.** Ako vrtiliš krog okoli kateregakoli premera (osi), nariše krogelno ploskev. Prostor, ki ga oklepa krogelna ploskev, imenujemo kroglo.

Središče vrtečega se kroga je tudi krogelno središče. Daljico, ki spaja središče s katerokoli točko krogelne ploskve, zovemo polmer. Krogelni polmeri so enaki. Daljici, ki spaja dve točki krogelne

ploskve, pravimo tetiva. Tetiva skoz krogelno središče je premer. Ali so tudi krogelni premeri enaki?

Opazuj sliko 144.! Ako vrtiliš krog okoli premera  $TT_1$ , nariše kroglo, na premeru pravokotno stoječe sekante pa ravnine. Ravnina, ki jo nariše tangenta, se dotika krogle



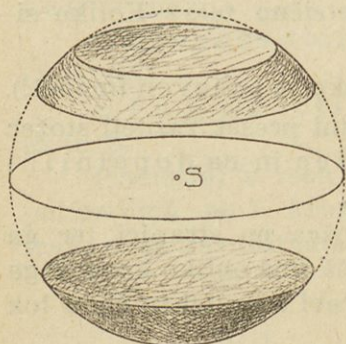
Slika 154.

v točki  $T$  ( $T_1$ ). Tej ravnini pravimo dotikalna ali tangentna ravnina.

Tetive, ki ležijo na sekantah, narišejo kroge, ki ležijo na krogelni ploskvi in v ravnini.

Presečnica krogelne ploskve in ravnine je krog.

Vsak ravninski presek razdeli kroglo na dva dela, ki jima pravimo krogelna odseka. Krogelni odsek (na sliki 155. spodaj) mejita krog in del krogelne ploskve (krogelna kapica). Kdaj sta odseka enaka in kako ju imenujemo?



Slika 155.

Del krogle med dvema vzporednim presekomazovemo krogelno plast (na sliki 155. zgoraj). Mejita jo dva vzporedna kroga in del krogelne ploskve (krogelni pas).

Največji krogelni krog je tisti, čigar ravnina gre skoz središče krogle. Imenujemo ga veliki krogelni krog. Kolik je njegov polmer? Koliko jih je? Vse druge krogelne kroge zovemo male krogelne kroge.

Kako imenujemo na zemeljski obli veliki krog, ki stoji pravokotno na zemeljski osi, kako kroge, ki so vzporedni ravniku in kako kroge, ki gredo skoz krajišči osi (tečaja)?

9. Pokončni valj, pokončni stožec in krogla so vrtenine ali rotacijska telesa, ker nastanejo, če vrtimo ali rotiramo prej omenjene like. Vsako rotacijsko telo je simetrično. Simetrijske ravnine, ki jih je brez števila, se sekajo v rotacijski osi.

### Vaje.

1. Kakšen lik nastane, ako presekaš pokončni valj z ravnino, položeno a) vzporedno osnovnima ploskvama; b) vzporedno valjevim stranicam; c) skoz valjevo os (osji presek)?



2. Nariši mrežo enakostraničnega valja, čigar višina meri 7 cm, ter sestavi telo! Postavi nato telo na mizo ter ga nariši, kakor ga vidiš odspredaj in kakor ga vidiš odzgoraj!

3. Nariši 8 mm širok kolobar, čigar manjši polmer meri 2.5 cm!

4. Nariši pravokotni premici in odmeri od njiju presečišča na vsaki po 3 cm dolgi daljici. Iz krajišč teh daljic načrtaj kolobarje (širina = 5 mm) tako, da se dotikajo premic ter prepletajo drug drugega! Glej tudi sliko 137.!

5. Kolik je središčni kot, ki pripada oktantu, sekstantu, kvadrantu in polkrogu?

6. Nariši v krogu ( $r = 3.4$  cm) sektor, ki mu pripada središčni kot  $\alpha = 60^\circ$  ( $225^\circ$ )!

7. Nariši v krogu ( $r = 3.5$  cm) segment, ki mu pripada 5 cm dolga tetiva!

8. Nariši v krogu ( $r = 3.5$  cm) osem po 4 cm dolge tetive ter določi vsaki središčno razdaljo! Na kakšni črti leže središča teh tetiv?

9. Nariši krog ( $r = 3.5$  cm) in označi znotraj kroga ležečo točko! Koliko tetiv moreš skoz to točko narisati? Katera je najkrajša in katera najdaljša?

10. Nariši krog skoz tri točke, ki ne leže na isti premici!

11. Nariši v krogu ( $r = 3$  cm) posamezne sekante, katerih prva gre skoz središče in ki jo potem vrtiš okoli enega presečišča s krogom od  $15^\circ$  do  $15^\circ$  toliko časa, da postane tangenta! Opazuj medsebojno razdaljo presečišč sekante s krogom!

12. Nariši iz določene točke  $S$  krog tako, da a) gre skoz določeno točko  $A$ ; b) se dotika določene premice  $t$ ; c) se dotika določenega kroga  $k$ !

13. Razdeli krog ( $r = 4$  cm) na pet (šest, osem) enakih delov ter nariši skoz razdelišča tangente! Spoji tudi razdelišča zaporedoma!

14. Nariši krogu tangenti, ki sta a) pravokotni na določeni premici; b) vzporedni tej premici!

15. Nariši kroge s polmerom  $r = 2.5$  cm, ki se dotikajo določene premice  $a$ ! Koliko jih je! Kje leže njih središča? (Ravnalo in novci!)

16. Nariši kroge, ki se dotikajo določene premice  $a$  v določeni točki  $A$ ! Koliko jih je? Kje leže njih središča? (Ravnalo in novci različne velikosti!)

17. Nariši kroge, ki se dotikajo a) dveh vzporednih; b) dveh sekajočih se premic! Koliko jih je? Kje leže njih središča? (Dve ravnili in novci!)

18. Nariši kroge, ki se dotikajo treh nevzporednih premic! Koliko jih je?

19. Kolik je obodni kot, ki stoji na loku  $45^\circ$  ( $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $112^\circ 2' 48''$ )? Kako razdeli razpolovnica obodnega kota njemu pripadajoči lok?

20. Nariši krog ( $r = 3 \text{ cm}$ ) ter načrtaj skoz točko s središčno razdaljo  $c = 6 \text{ cm}$  tangenti na krog! Koliko razrešitev ima naloga?

21. Nariši v krogu ( $r = 4 \text{ cm}$ ) skoz eno krajišče katerega-koli premera tetive, ki merijo  $1 \text{ cm}$ ,  $2 \text{ cm}$ , ...  $7 \text{ cm}$ , ter načrtaj skoz krogovo središče pravokotnice na tetive! Na kakšni črti leže podnožišča teh pravokotnic?

22. Nariši kvadrat (pravokotnik, enakokraki trapez) ter mu očrtaj krog!

23. Nariši kvadrat (romb, deltoid) ter mu včrtaj krog!

24. Določi medsebojno lego dveh krogov (polmera  $r_1$  in  $r_2$ , središčnica  $c$ ) ter ju nariši, ako je a)  $r_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$  ( $6 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ cm}$ ); b)  $r_1 = 1.5 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 3.5 \text{ cm}$ ,  $c = 1 \text{ cm}$  ( $2 \text{ cm}$ )!

25. Nariši kroge ( $r = 3 \text{ cm}$ ), ki gredo skoz določeno točko  $T$ ! Koliko jih je? Kje leže njih središča?

26. Nariši skoz določeni točki  $A$  in  $B$  kroge! Koliko jih je? Kje leže njih središča?

27. Nariši krog s polmerom  $r = 3.5 \text{ cm}$  in nato kroga ( $r_1 = 1 \text{ cm}$ ), ki se dotikata prvega kroga od zunaj, oziroma od znotraj! Kakšno črto narišeta središči manjših krogov, ako se valita kroga po obodu večjega kroga? (Dva novca različne velikosti!)

28. Kakšen lik nastane, ako presekaš pokončni stožec z ravnino, položeno a) vzporedno osnovni ploskvi; b) skoz stožčev vrh; c) skoz stožčevo os (osji presek)?

29. Nariši mrežo enakostraničnega stožca, ako meri višina  $7 \text{ cm}$ , ter sestavi telo! Postavi nato stožec na mizo ter ga nariši, kakor ga vidiš odspredaj in kakor ga vidiš odzgoraj!

30. Nariši kroglo, kakor jo vidiš odspredaj in kakor jo vidiš odzgoraj!

31. Ali moremo razganiti krogelno ploskev v ravnino?

32. Nariši v krogu ( $r = 3 \text{ cm}$ ) kateremukoli premeru vzporedni tangenti! Kakšno ploskev nariše krog in kakšno tangenti, ako vrtiš ves lik okoli tega premera?

33. Nariši v krogu ( $r = 3 \text{ cm}$ )  $4.5 \text{ cm}$  dolgo tetivo, načrtaj v njenih krajiščih tangenti ter spoji presečišče tangents s krogovim središčem! Kakšno ploskev nariše krog in kakšno tangenti, ako vrtiš ves lik okoli njegove simetrale?



## XVI. Načrtovalne naloge.

1. Navedi nekatere načrtovalne naloge, s katerimi si se že baviš, ter povej, kako si jih razrešil!

Nariši daljico  $AB = 5\text{ cm}$  ter poišči točko, ki je oddaljena od vsakega krajišča  $3\text{ cm}$  ( $2,5\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$ ,  $5\text{ cm} \dots$ )! Kako najdeš tako točko? Kje leže? Kako imenujemo to premico? Kakšno lastnost ima torej vsaka točka te premice? Pokaži točke, ki so bližje  $A$ , in točke, ki so bližje  $B$ !

Vse točke, ki so enako oddaljene od krajišč daljice  $AB$ , leže na daljični simetrali (glej sl. 73.). Namesto tega pravimo navadno:

Geometrijsko mesto vseh točk, ki so enako oddaljene od dveh določenih točk, je simetrala točki spajajoče daljice.

Izraz „geometrijsko mesto“ nam torej pove, da imajo vse točke daljične simetrale isto lastnost, da je namreč vsaka enako oddaljena od krajišč daljice  $AB$ , pa tudi, da izven simetrale ni točk s to lastnostjo.

Točka se more nahajati obenem a) na dveh premicah, b) na premici in na krogu, c) na dveh krogih.

Ker se sekata dve premici v eni točki, je lega točke popolnoma določena, ako vemo, na katerih dveh sekajočih se premicah leži. Ker imata premica in krog ali dva kroga, ako se sploh sekata, dve skupni točki, je tudi v tem slučaju določena lega točke.

Ako torej hočemo določiti točko, ki naj ustreza gotovim pogojem, poiščemo presečišče tem pogojem ustrezajočih geometrijskih mest.

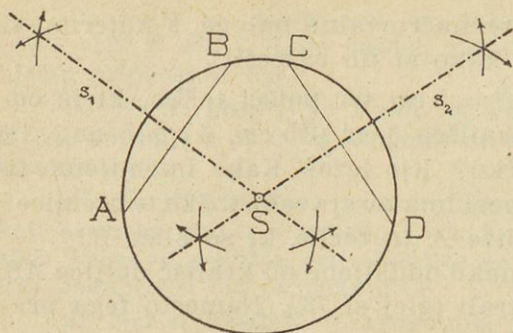
Sledeči nalogi naj to pojasnita.

*Nalogi.* a) Določi središče krogu, ki ga dobiš, če občrtaš s svinčnikom petačo ( $5\text{ K}$ )!

Točka, ki jo iščemo, ima lastnost, da je enako oddaljena od vseh točk krogevega oboda. Spojimo dve točki oboda, n. pr.  $A$  in  $B$  (sl. 156.)! Kje leže vse točke, ki so enako oddaljene od  $A$  in  $B$ ?

Simetrala  $s_1$  je torej eno geometrijsko mesto zahtevane točke  $S$ . Ako narišemo še eni tetivi, n. pr.  $CD$ , sime-

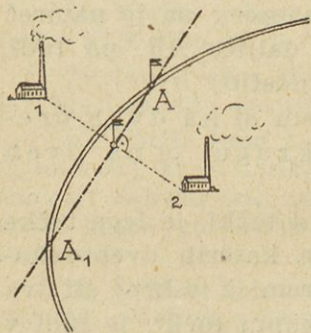
tralo  $s_2$ , dobimo drugo geometrijsko mesto za središče  $S$ . Presečišče obeh geometrijskih mest določa krogovo središče  $S$ . (Ali smeta biti tetivi  $AB$  in  $CD$  vzporedni?)



Slika 156.

b) Ob straneh železniškega tira ležita fabriki 1 in 2. Kje je določiti železniško postajo tako, da sta fabriki enako oddaljeni od nje?

Postaje zgrade seveda le ob tiru, zato je eno geometrijsko mesto zahtevane točke črta železniškega tira (sl. 157.). Fabriki pa morata imeti isto razdaljo do postaje. Sime-trala daljice  $\overline{12}$  je torej drugo geometrijsko mesto zahtevane točke. Ker se sekata geometrijski mesti v točkah  $A$  in  $A_1$ , ustrezata obe točki nalognemu pogoju. Naloga ima v tem slučaju dve razrešitvi. Kje pač zgrade postajo?



Slika 157.

Pri razreševanju sličnih nalog se vselej vprašaj:

1. Katerim pogojem naj ustreza zahtevana točka?

2. Katera geometrijska mesta ustrezajo tem pogojem?

Razmišljuj tudi, koliko razrešitev ima naloga in kdaj je nerazrešljiva!

2. Geometrijska mesta, ki jih pogostoma uporabljamo pri razreševanju geometrijskih načrtovalnih nalog, so:

a) Geometrijsko mesto vseh točk v rav-nini, ki imajo od določene točke  $S$  razdaljo  $r$ , je krog s središčem  $S$  in s polmerom  $r$ .



b) Geometrijsko mesto vseh točk, ki so enako oddaljene od dveh določenih točk  $A$  in  $B$ , je simetrala daljice  $AB$ .

c) Geometrijsko mesto vseh točk, ki imajo od določene premice  $a$  določeno razdaljo  $d$ , sta vzporedni premici z razdaljo  $d$  od  $a$ .

d) Geometrijsko mesto vseh točk, ki so od dveh vzporednih premic  $a$  in  $b$  enako oddaljene, je vzporednica, razpolavljajoča razdaljo premic  $a$  in  $b$ .

e) Geometrijsko mesto vseh točk, ki so enako oddaljene od dveh sekajočih se premic  $a$  in  $b$ , sta simetrali kotov obeh premic.

f) Geometrijsko mesto vrhov vseh pravokotnih trikotnikov s hipotenuzo  $AB$  je krog, čigar premer je hipotenuza  $AB$ .

Glej vaje 15., 16., 17., 25., 26. in 27. v prejšnjem poglavju ter povej, kako se glase geometrijska mesta, ki ustrezajo dotičnim pogojem!

### Vaje.

1. Imenuj geometrijsko mesto središč enakih tetiv istega kroga!

2. Nariši krog ( $r = 3.5\text{ cm}$ ) ter določi geometrijsko mesto krajišč vseh  $4\text{ cm}$  dolgih tangentskih odsekov!

3. Nariši krog, ki se dotika premice  $a$  v določeni točki  $A$  in ki gre skoz določeno zunaj premice ležečo točko  $T$ !

4. Nariši krog, ki se dotika vzporednih premic  $a$  in  $b$  in ki gre skoz določeno točko  $T$ !

5. Nariši krog, ki se dotika dveh sekajočih se premic  $a$  in  $b$ , in sicer premice  $a$  v določeni točki  $A$ !

6. Nariši krog ( $r = 2.5\text{ cm}$ ), ki se dotika dveh sekajočih se premic  $a$  in  $b$ !

7. Nariši krog s središčem na določeni premici  $a$  tako, da a) gre skoz določeni točki  $A$  in  $B$ ; b) se dotika določene premice  $b$  v določeni točki  $B$ ; c) se dotika določenega kroga v določeni točki  $T$ ; d) se dotika dveh določenih premic  $c$  in  $d$ !

8. Nariši iz določenih točk  $S_1$  in  $S_2$  dotikajoča se kroga tako, da a) gre eden skoz določeno točko  $A$ ; b) se eden dotika določene premice  $a$ ; c) se eden dotika določenega kroga!

9. Razpolovi kot, čigar vrh je nedostopen! (Nariši vsakemu kraku znotraj kotne ploskve ležečo vzporednico z isto razdaljo ter razpolovi nastali kot!)

10. Nariši trikotniku  $ABC$  včrtani krog, ako so oglišča nedostopna!

11. Nariši pravokotni trikotnik s hipotenuzo  $c = 7\text{ cm}$  in višino  $v = 2.5\text{ cm}$ !

12. Nariši v krogu dva pravokotna premera ter včrtaj nastalim kvadrantom kroge! (Določi najprej tangente v dotikalščih zahtevanih krogov z danim krogom!)

---



## Tretji del.

### XVII. Primerjanje in merjenje premočrtnih likov.

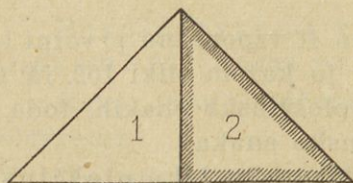
1. Imenuj like, ki jim že znaš določiti ploščino! Kako imenujemo kvadrat, čigar stranica je enaka enoti dolžinske mere? Razloži znake  $m^2$ ,  $dm^2$ ,  $cm^2$ ,  $mm^2$ ,  $a$ ,  $ha$ ,  $km^2$ !

Kako smo določili pravokotnikovo ploščino? Določili smo ploščino enega pasu (sestoječega iz enot ploskovne mere), potem število takih pasov in končno njih ploščino. Pokrivanje pravokotnikove ploskve z enoto ploskovne mere ni vedno izvršljivo. Kako izračunamo kljub temu mersko število njegove ploščine, če so nam znane sestavine, ki določajo pravokotnik?

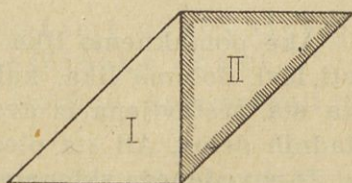
Jasno je, da je nemogoče z enoto ploskovne mere popolnoma pokriti ploskev poševnega paralelograma, trikotnika, trapeza i. t. d. Raziskovali bomo, kako je določiti ploščino tudi tem likom.

Mislimo si tri dvorane, prva ima tla kvadratne, druga pravokotne, tretja okrogle oblike. Kaj sklepamo glede na velikost talnih ploskev, če gre v vsako dvorano enako število ljudi? Drug primer: Ali se razlikujeta ploščini kvadrata s stranico  $a = 4\text{ cm}$  in pravokotnika s stranicama  $a = 2\text{ cm}$  in  $b = 8\text{ cm}$ ?

Ako imata dva lika enako ploščino, pravimo, da sta ploščinsko enaka.



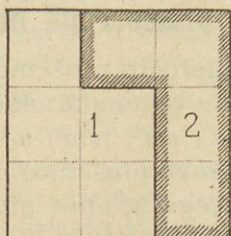
Slika 158.



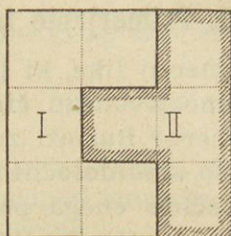
Slika 159.

a) Nariši dva kvadrata, n. pr. s stranico  $a = 3\text{ cm}$ , ter ju izreži! Kako pokažeš, da se lika, ki sta skladna, ne razlikujeta glede na ploščino?

b) Prereži vsak kvadrat po eni diagonali! Kakšne trikotnike dobiš? Sestavi iz dveh trikotnikov enakokraki pravokotni trikotnik (sl. 158., zmanjšana), iz drugih dveh pa poševni paralelogram (sl. 159., zmanjšana)! Ali sta lika ploščinsko enaka? Zakaj? ( $1 = I$ ,  $2 = II$ ;  $1 + 2 = I + II$ )

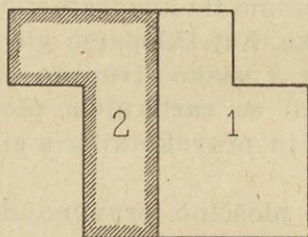


Slika 160.

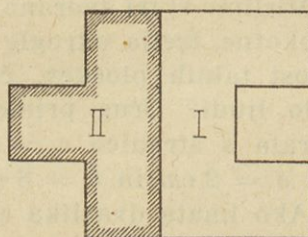


Slika 161.

c) Nariši in izreži zopet dva kvadrata s stranico  $a = 3 \text{ cm}$  ter razdeli vsakega na devet skladnih kvadratov (sl. 160. in sl. 161.)! Razreži nato kvadrata po krepko označenih črtah! Prvi kvadrat razpade na lika 1 in 2, drugi pa na lika I in II. Primerjaj lika 1 in I, kakor tudi lika 2 in II glede na njiju ploščino!



Slika 162.



Slika 163.

Ako pomaknemo lika 2 in II vzporedno prvotni legi proti levi, dobimo lika, kakor ju kažeta sliki 162. in 163. Lika sta sestavljena iz dveh ploščinsko enakih, toda ne skladnih delov. Ali sta ploščinsko enaka?

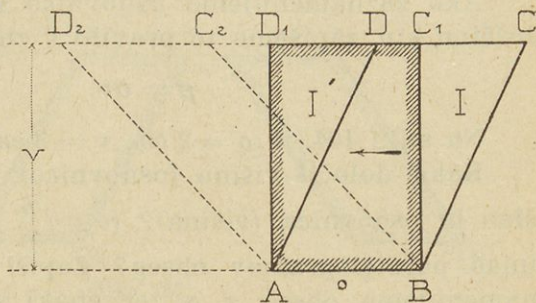
Iz navedenega sklepamo, da sta dva lika ploščinsko enaka:

a) ako sta skladna, b) ako sta sestavljena iz skladnih delov, c) ako sta sestavljena iz ploščinsko enakih delov.



Ali sta dva osjesimetrično ali dva središčno simetrično ležeča lika ploščinsko enaka?

2. Nariši paralelogram  $ABCD$  z osnovnico  $o = 2\text{ cm}$  in z višino  $v = 3\text{ cm}$  ter ga izreži (sl. 164.)! Ako odrežeš liku pravokotni trikotnik  $I$  ter ga pomakneš proti levi v lego  $I'$ , dobiš pravokotnik  $ABC_1D_1$ . Paralelogram  $ABCD$  in pravokotnik  $ABC_1D_1$  sta ploščinsko enaka; oba imata isto osnovnico in enako višino.



Slika 164.

Vsak paralelogram je ploščinsko enak pravokotniku z enako osnovnico in enako višino.

Položi katerikoli paralelogram z osnovnico  $o = 2\text{ cm}$  in z višino  $v = 3\text{ cm}$ , n. pr.  $ABC_2D_2$  (sl. 164.), tako na paralelogram  $ABCD$ , da se krijeta osnovnici! Opazuj trapez  $ABCD_2$  ter trikotnika  $BCC_2$  in  $ADD_2$ ! Ako pomakneš prvi trikotnik vzporedno proti levi, pokrije drugega. Trikotnika sta skladna. Če odvzameš trapezu prvi trikotnik, ostane paralelogram  $ABC_2D_2$ , če mu pa odvzameš drugi trikotnik, ostane paralelogram  $ABCD$ . Odštel si istemu liku vsakokrat enak lik, torej sta tudi ostanka enaka.

Paralelogrami z enakimi osnovnicami in enakimi višinami so ploščinsko enaki.

Kako torej izračunaš ploščino kateregakoli paralelograma?

Pravokotniku določimo mersko število ploščine, če pomnožimo mersko število njegove dolžine z merskim številom njegove višine. Ker je vsak paralelogram ploščinsko enak pravokotniku z enako osnovnico (dolžino) in enako višino, velja za ploščino paralelograma isto pravilo.

Mersko število paralelogramove ploščine je enako produktu iz merskega števila osnovnice in merskega števila višine, ali krajše\*

Ploščina paralelograma je enaka produktu iz osnovnice in višine.

Ako zaznamujemo osnovnico z  $o$ , višino z  $v$  in ploščino s  $p$ , zapišemo to pravilo v znakih

$$p = ov.$$

Na sliki 164. je  $o = 2 \text{ cm}$ ,  $v = 3 \text{ cm}$ ; določi  $p$ !

Kako določiš višino (osnovnico), ako je znana ploščina in osnovnica (višina)? ( $o = \frac{p}{v}$ ,  $v = \frac{p}{o}$ ) Kako izračunaš paralelogramov obseg? Zapiši obrazec, ako zaznamujemo obseg z  $o_1$  ter enaki stranici z  $a$  in  $b$ ! ( $o_1 = 2a + 2b = 2[a + b]$ .)

Pravilo, ki smo ga dognali za paralelogramovo ploščino, velja za cela in ulomljena števila. Zakaj? Bistvenega pomena je le, da so vse dolžinske mere označene v isti dolžinski enoti, n. pr. vse v  $\text{cm}$  ali vse v  $\text{m}$  i. t. d.; ploščina je potem izražena v  $\text{cm}^2$ , oziroma v  $\text{m}^2$  i. t. d.

Določi ploščino lista risalnega zvezka, šolske table, tal učilnice! Ali se dado merska števila dolžine in višine določiti natančno? Zakaj ne? Števila, ki jih dobimo potem merjenja, so nepopolna, zato dajo računi s takimi števili samo približnje rezultate. Nepotrebnega računanja se obvaruješ, ako preudariš rezultat glede na njegovo uporabnost, preden okrajšano računaš.

Glej sliko 164. ter povej, kako načrtaš pravokotnik, ki je ploščinsko enak paralelogramu  $ABCD$  in ki ima isto osnovnico in višino! Takemu načrtavanju pravimo ploščinsko pretvarjanje.

Razrešimo sledečo pretvorno nalogo!

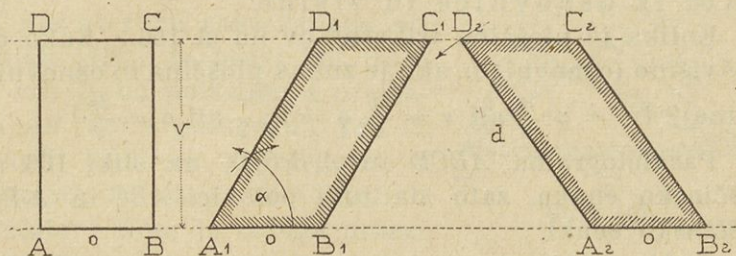
Naloga. Pretvori pravokotnik ( $o = 3 \text{ cm}$ ,  $v = 5 \text{ cm}$ ) v paralelogram z enako osnovnico in a) s kotom  $\alpha = 60^\circ$  ob osnovnici, b) s stranico  $d = 6 \text{ cm}$ !

\* Odslej bomo rabili vobče krajšo obliko.



Ploščinsko enaki paralelogrami, ki imajo enako osnovnico, imajo tudi enako višino.

a) Podaljšaj pravokotnikovo osnovnico  $AB$  (sl. 165.) in nasproti ji ležečo stranico  $CD$ , odmeri na podaljšani osnovnici  $A_1B_1 = 3 \text{ cm}$  ter nariši ob krajišču  $A_1$  kot  $\alpha = 60^\circ$ !

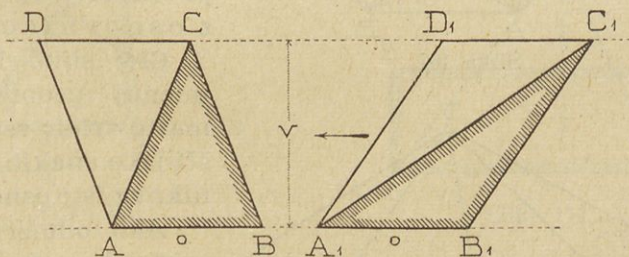


Slika 165.

b) Odmeri osnovnico  $A_2B_2$  kakor poprej (sl. 165.), presekaš vzporednico z lokom (središče  $A_2$ , polmer  $d = 6 \text{ cm}$ ) ter spoji presečišče  $D_2$  z  $A_2$ ! — Koliko razrešitev ima naloga? Ali je vedno razrešljiva?

Določen lik torej pretvorimo v drugega, ako narišemo ploščinsko enak lik tako, da ustreza danim pogojem.

3. Nariši med vzporednicama z razdaljo  $v = 5 \text{ cm}$  paralelograma  $ABCD$  in  $A_1B_1C_1D_1$  z enako osnovnico



Slika 166.

$o = 4 \text{ cm}$  (sl. 166.) ter načrtaj vsakemu paralelogramu eno diagonalo (n. pr.  $AC$  in  $A_1C_1$ )! Diagonala razdeli lik na dva skladna trikotnika (središčna simetrija!), ki imata isto osnovnico in višino kot paralelogram.

Vsak trikotnik je polovica paralelograma z enako osnovnico in enako višino.

Ker je ploščina paralelograma z osnovnico  $o$  in višino  $v$  enaka  $ov$ , sledi ploščina trikotnika

$$p = \frac{ov}{2} \text{ ali } p = o \frac{v}{2} \text{ ali } p = v \frac{o}{2} \text{ ali } p = \frac{1}{2} ov.$$

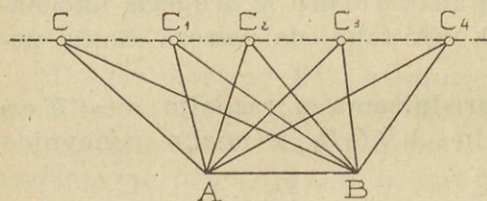
Ploščina trikotnika je enaka polovici produkta iz osnovnice in višine.

Kolika je ploščina trikotnikov na sl. 166.? Kako določiš višino (osnovnico), ako je znana ploščina in osnovnica (višina)? ( $v = p : \frac{o}{2}$  ali  $v = \frac{2p}{o}$ ,  $o = p : \frac{v}{2}$  ali  $o = \frac{2p}{v}$ )

Paralelograma  $ABCD$  in  $A_1B_1C_1D_1$  na sliki 166. sta ploščinsko enaka, zato sta tudi polovici  $ABC$  in  $A_1B_1C_1$  ploščinsko enaki.

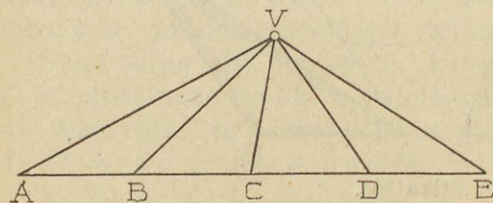
Trikotniki z enako osnovnico in enako višino so ploščinsko enaki.

Pomakni trikotnik  $A_1B_1C_1$  vzporedno proti levi v toliko, da pokrije osnovnica  $A_1B_1$  osnovnico trikotnika  $ABC$  (sl. 166.)! Kakšno črto nariše pri tem pomikanju vrh  $C_1$ ? Spoji še nekatere točke na vzporednici skoz  $C$  z  $A$  in  $B$ !



Slika 167.

Trikotniki z isto osnovnico so ploščinsko enaki, ako leže njih vrhi na premici, vzporedni z osnovnico.



Slika 168.

Glej sliko 167. ter imenuj geometrijsko mesto vrhov vseh ploščinsko enakih trikotnikov z isto osnovnico!

Ako odmerimo na premici več enakih daljic drugo poleg druge ter spojimo njih

krajišča s katerosibodi zunaj premice ležečo točko, dobimo več trikotnikov (sl. 168.). Ali so ploščinsko enaki?

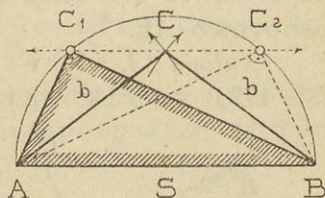
Trikotniki s skupnim vrhom in z enakimi osnovnicami na isti premici so ploščinsko enaki.



Razrešimo nekatere pretvorne naloge!

**Naloga 1.** Pretvori enakokraki trikotnik  $ABC$  (sl. 169.) z osnovnico  $a = 8\text{ cm}$  in krakom  $b = 5\text{ cm}$  v pravokotni trikotnik z isto osnovnico in s pravim kotom ob vrhu!

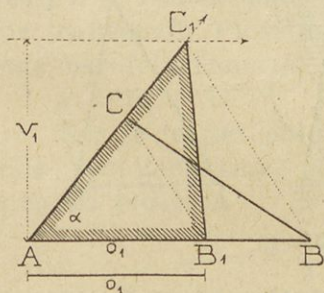
Kot ob vrhu zahtevanega trikotnika  $ABC_1$  je pravi kot, zato leži vrh  $C_1$  na polkrogu s premerom  $AB$  (kot v polkrogu). Vrh  $C_1$  pa leži tudi na vzporednici k osnovnici  $AB$  skoz vrh  $C$ . Koliko razrešitev? Kdaj je naloga nerazrešljiva?



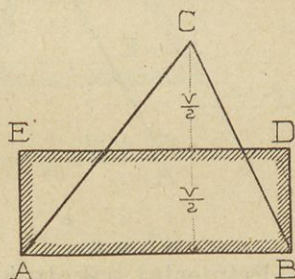
Slika 169.

**Naloga 2.** Pretvori trikotnik  $ABC$  (sl. 170.) v drugega z istim kotom  $\alpha$  in a) z določeno osnovnico  $a_1$ , b) z določeno višino  $v_1$ !

a) Odmeri osnovnico  $a_1 = AB_1$  na osnovnici  $AB$  od točke  $A$ , spoji  $C$  z  $B_1$  ter nariši skoz  $B$  vzporednico z  $B_1C$ ! Presečišče vzporednice s podaljšano stranico  $AC$  je vrh  $C_1$



Slika 170.



Slika 171.

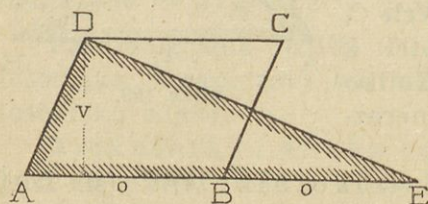
zahtevanega  $\triangle AB_1C_1$ . Trikotnika  $ABC$  in  $AB_1C_1$  sta ploščinsko enaka, ker sta sestavljena iz ploščinsko enakih delov: iz obema skupnega trikotnika  $AB_1C$  in iz ploščinsko enakih trikotnikov  $CB_1B$  in  $CB_1C_1$ .

b) Nariši skoz oglišče  $A$  pravokotnico na osnovnico  $AB$ , enako višini  $v_1$ , in skoz krajišče  $D$  vzporednico osnovnici! Ako spojiš  $C_1$  z  $B$  in narišeš skoz  $C$  vzporednico  $CB_1$  s  $C_1B$ , je  $AB_1C_1$  zahtevani trikotnik.

**Naloga 3.** Pretvori trikotnik  $ABC$  (sl. 171.) v pravokotnik z isto osnovnico!

Ker je vsak trikotnik polovica paralelograma z enako osnovnico in enako višino, razdeli trikotnikovo višino na dva enaka dela, nariši skoz razpolovišče osnovnici vzporednico ter skoz  $A$  in  $B$  pravokotnici  $AE$  in  $BD$  na osnovnico  $AB$ .

**Naloga 4.** Pretvori paralelogram  $ABCD$  (sl. 172.) v trikotnik z isto višino!

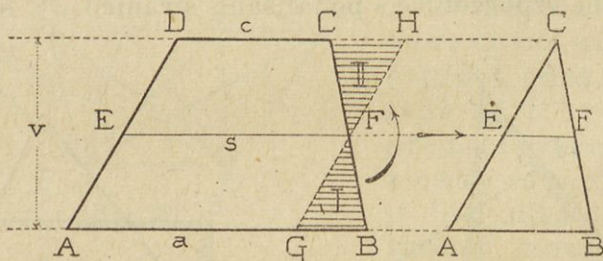


Slika 172.

Ako podaljšaš osnovnico  $AB$  toliko, da je  $BE = AB$ , in spojiš  $E$  z  $D$ , je  $AED$  zahtevani trikotnik. Zakaj?

**4.** Nariši trapez  $ABCD$  (sl. 173.) z osnovnicama  $a = 8\text{ cm}$ ,  $c = 4\text{ cm}$

in višino  $v = 5\text{ cm}$ ! Razpolovi kraka, spoji razpolovišči  $E$  in  $F$  ter načrtaj skoz  $F$  vzporednico kraku  $AD$ !



Slika 173.

Primerjaj trikotnika I in II! Ako odrežeš trikotnik I, ga lahko zavrtiš okoli  $F$  tako, da pokrije trikotnik II. Trikotnika sta kot središnosimetrična lika skladna. Ker je  $FG = FH$ , razpolavlja  $F$  daljico  $GH$ . Kakšna četrkotnika sta torej  $AGFE$  in  $EFHD$ ? Iz tega sledi:

Trapezova srednjica je vzporedna osnovnicama.

Osnovnicama vzporedna premica skoz razpolovišče enega kraka razpolavlja tudi drugi krak.



Primerjaj ploščini trapeza in paralelograma  $AGHD$  (sl. 173.)! Oba lika imata isto višino, paralelogramova osnovnica pa je enaka trapezovi srednjici. Ker sta lika sestavljena iz ploščinsko enakih delov (imenuj jih!), sta ploščinsko enaka.

Vsak trapez je ploščinsko enak paralelogramu z isto višino in z osnovnico, enako trapezovi srednjici.

Ploščino trapeza z višino  $v$  in srednjico  $s$  določimo, ako izračunamo ploščino ploščinsko enakega paralelograma, ki je

$$p = sv.$$

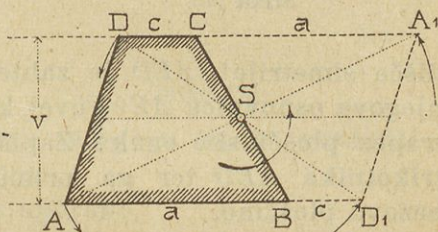
Ploščina trapeza je enaka produktu iz srednjice in višine.

Še na drug način hočemo določiti trapezovo ploščino.

Ako narišemo trapezu  $ABCD$  (sl. 174.) središčno-simetričen lik tako, da je razpolovišče  $S$  kraka  $BC$  središče simetrije, dobimo paralelogram, čigar osnovnica  $AD_1$  je enaka vsoti  $a + c$  obeh osnovnic trapezovih. Ploščina tega paralelograma je

$$p = (a + c) v.$$

Ker je trapez polovica paralelograma, je njegova ploščina



Slika 174.

$$p = \frac{(a + c) v}{2} \text{ ali } p = \frac{a + c}{2} v.$$

Ploščina trapeza je enaka produktu iz polovične vsote obeh osnovnic in višine.

Če primerjamo obrazca

$$p = sv \text{ in } p = \frac{a + c}{2} v,$$

vidimo, da je

$$s = \frac{a + c}{2}.$$

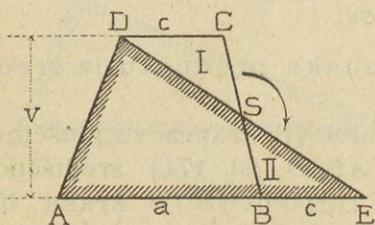
Trapezova srednjica je enaka polovični vsoti obeh osnovnic.

Pokaži to tudi na sliki 174.! Polovično vsoto  $\frac{a+c}{2}$  obeh osnovnic imenujemo tudi aritmetično sredino osnovnic.

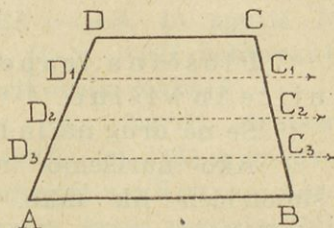
Kako pretvorimo trapez v paralelogram? Glej sliko 173.! Kako pretvoriš trapez v pravokotnik?

*Naloga.* Pretvori trapez  $ABCD$  (sl. 175.) v trikotnik z isto višino!

Razpolovi krak  $BC$ , spoji razpolovišče  $S$  z  $D$  ter nariši trikotniku  $I$  središnosimetričen lik tako, da je  $S$  sre-



Slika 175.



Slika 176.

dišče simetrije!  $AED$  je zahtevani trikotnik. Kolika je njegova osnovnica  $AE$ ? Povej, kateremu trikotniku je vsak trapez ploščinsko enak? Zapiši tudi obrazec za ploščino trikotnika  $AED$  ter ga primerjaj z obrazcema za trapezovo ploščino.

Vrnimo se k sliki 173.! Ako pomikamo krak  $AD$  vzporedno proti desni, se skrajšujeta osnovnici in srednjica enakomerno. Kolika je srednjica, če pomakneš  $AD$  na primer za 1 cm, za 1,5 cm, za 2 cm proti desni? V kakšen lik se izpremeni trapez v zadnjem slučaju? Kolika je njegova osnovnica? Ker leži razpolovišče  $E$  pomikajoče se stranice  $AD$  vedno na srednjici, sklepamo:

Daljšica, ki spaja razpolovišči dveh trikotnikovih stranic, je vzporedna tretji stranici in enaka njeni polovici.

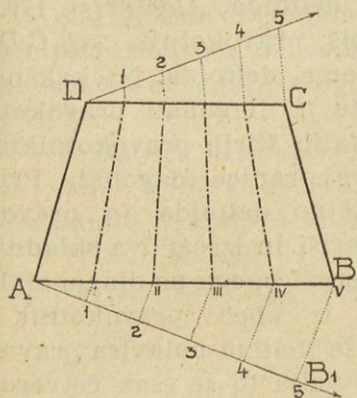
Razdeli krak  $AD$  trapeza  $ABCD$  (sl. 176.) na primer na štiri enake dele! Kako razdelijo vzporednice skoz razdelišča drugi krak? Primerjaj povrstoma srednjice trapezov  $ABC_2D_2$ ,  $D_3C_3C_1D_1$  in  $D_2C_2CD$ !



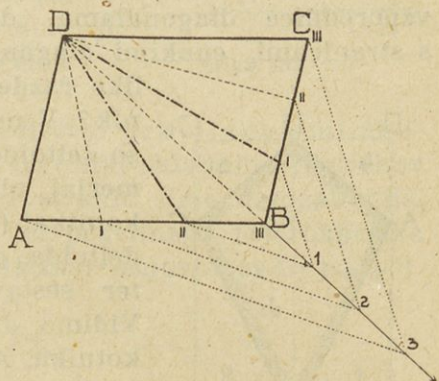
Ako razdelimo v trapezu en krak na več enakih delov in narišemo skoz razdelišča vzporednice osnovnicama, dobimo na drugem kraku istotoliko enakih delov.

Kako se glasi ta izrek, ako premakneš krak  $AD$  (sl. 176.) vzporedno v toliko, da se krijeta oglišči  $D$  in  $C$ ?

Dočim nam je bilo doslej mogoče razdeliti določeno daljico s šestilom in ravnilom le na 2, 4, 8... enakih



Slika 177.



Slika 178.

delov, jo moremo s pomočjo zadnjega izreka razdeliti tudi na 3, 5, 7... enakih delov.

Sledeči nalogi pokažeta uporabo.

*Naloga 1.* Razdeli travnik trapezove oblike  $ABCD$  (sl. 177.) na pet enakih delov tako, da je pot ob meji  $CD$  vsakemu delu neposredno dostopna!

Merjevec razdeli v črtežu travnika vsako osnovnico na pet enakih delov ter spoji istoležna razdelišča. Osnovnico  $AB$  razdeli na pet enakih delov, če nariše n. pr. skoz krajišče  $A$  poltrak  $AB_1$ , odmeri na njem od  $A$  pet enakih delov do  $B_1$  ter spoji  $B_1$  z drugim krajiščem  $B$ . Vzporednice z  $BB_1$  skoz vsako razdelišče določijo na  $AB$  pet enakih delov.

*Naloga 2.* Razdeli vrt romboidne oblike  $ABCD$  (sl. 178.) na tri enake dele tako, da je vodnjak ob oglišču  $D$  neposredno dostopen lastniku vsakega dela!

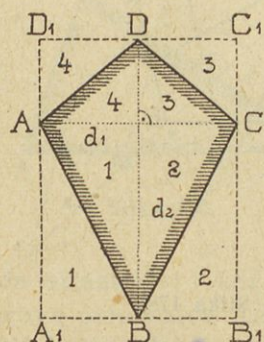
Diagonala skozi oglišče  $D$  razdeli lik na dva enaka dela  $ABD$  in  $BCD$ . Razdeli  $AB$  in  $BC$  na tri enake dele ter spoji vsako drugo razdelišče z ogliščem  $D$ !

5. Trapezoidu vobče določimo ploščino, ako seštejemo ploščini trikotnikov, na katera razdeli vsaka diagonala četverokotnik.

Enostavneje določimo ploščino trapezoida s pravokotnima diagonalama, torej posebno deltoida.

Ako narišeš skozi oglišča deltoida  $ABCD$  (sl. 179.) vzporednice diagonalama, dobiš pravokotnik  $A_1B_1C_1D_1$  s stranicami, enakimi diagonalama deltoida. Na kakšne

like razdelita ti diagonali pravokotnik? V nastalih štirih pravokotnikih so deltoidove stranice diagonale. Primerjaj ploščino deltoida in pravokotnika! (Nariši in izreži dva skladna deltoida, prereži enega po diagonalah ter sestavi iz obeh pravokotnik!) Vidimo, da je deltoid polovica pravokotnika. Ali velja to za vsak četverokotnik s pravokotnima diagonalama? Imenuj paralelograme s pravokotnima diagonalama ter se prepričaj, da velja izrek:



Slika 179.

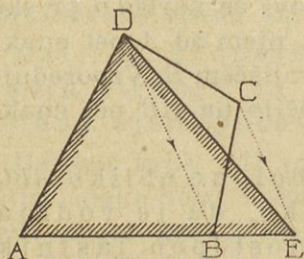
Vsak četverokotnik s pravokotnima diagonalama je polovica pravokotnika, čigar stranice so enake tema diagonalama.

Ako sta deltoidovi diagonali  $d_1$  in  $d_2$ , je ploščina pravokotnika  $A_1B_1C_1D_1$  enaka  $p = d_1 d_2$ , torej ploščina deltoida  $ABCD$

$$p = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Ploščina četverokotnika s pravokotnima diagonalama je enaka polovici produkta obeh diagonal.

Naloga 1. Pretvori trapezoid  $ABCD$  (sl. 180.) v trikotnik!



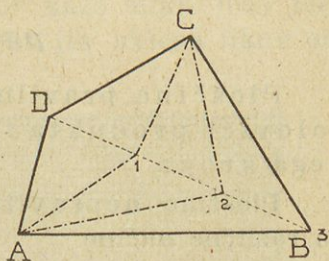
Slika 180.



Ako narišeš diagonalo  $BD$  in pretvoriš trikotnik  $BCD$  v trikotnik  $BDE$  ( $BD$  je osnovnica obeh trikotnikov, medtem ko ležita vrha  $C$  in  $E$  na vzporednici z osnovnico), je  $AED$  zahtevani trikotnik. Pretvori trapezoid še v trikotnik z vrhom  $C$ !

**Naloga 2.** Razdeli trapezoid  $ABCD$  (sl. 181.) na tri enake dele!

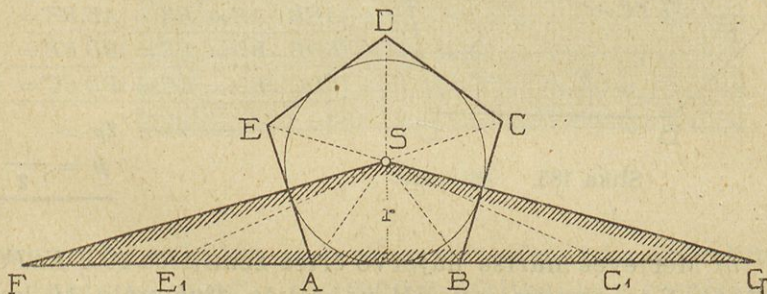
Nariši eno diagonalo, n. pr.  $BD$ , jo razdeli na tri enake dele ter spoji razdelišča z ogliščema  $A$  in  $C$ !



Slika 181.

**6.** Daljice, ki spajajo središče  $S$  pravilnega mnogokotnika z oglišči, razdelelik na toliko skladnih trikotnikov s skupnim vrhom  $S$ , kolikor stranic šteje mnogokotnik.

Trikotnik  $ABS$  je peti del pravilnega peterokotnika  $ABCDE$  (sl. 182.). Ako podaljšamo osnovnico  $AB$  na pet-



Slika 182.

kratno dolžino ( $FG = 5 \cdot AB$ ), je trikotnik  $FGS$  petkrat tako velik kakor trikotnik  $ABS$ , torej ploščinsko enak pravilnemu peterokotniku  $ABCDE$ . Višina  $r$  tega trikotnika je enaka polmeru peterokotniku včrtanega kroga, osnovnica pa je enaka peterokotnikovemu obsegu.

Pretvori na isti način pravilni šesterokotnik v trikotnik!

Pravilni mnogokotnik je ploščinsko enak trikotniku, čigar osnovnica je enaka mnogokotnikovemu obsegu in čigar višina je enaka polmeru mnogokotniku včrtanega kroga.

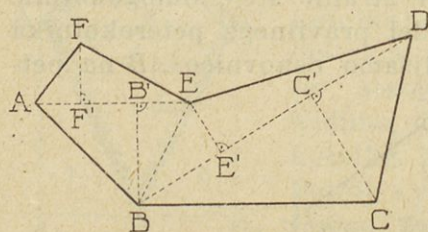
Ako zaznamenujemo mnogokotnikov obseg z  $o_1$  in polmer včrtanega kroga z  $r$ , je ploščina trikotnika in torej tudi ploščina pravičnega mnogokotnika

$$p = \frac{o_1}{2} r = \frac{o_1 r}{2}.$$

Ploščina pravičnega mnogokotnika je enaka polovici produkta iz obsega in polmera včrtanega kroga.

Ploščino nepravilnega mnogokotnika določimo na različne načine.

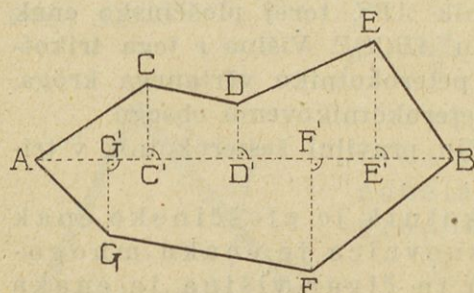
a) Mnogokotnik  $ABCDEF$  (sl. 183.) razdelimo z diagonalami na trikotnike, jim izmerimo osnovnice in višine ter izračunamo vsoto ploščin trikotnikov, kakor kaže tablica.



Slika 183.

| $\triangle$ | $o$    | $v$     | $2p$                  |
|-------------|--------|---------|-----------------------|
| $AEF$       | $AE =$ | $FF' =$ | $AE.FF' =$            |
| $AEB$       | $AE =$ | $BB' =$ | $AE.BB' =$            |
| $BDE$       | $BD =$ | $EE' =$ | $BD.EE' =$            |
| $BDC$       | $BD =$ | $CC' =$ | $BD.CC' =$            |
|             |        |         | $2p =$                |
|             |        |         | $p = \frac{\quad}{2}$ |

b) Merjevec nariše najprvo črtež zemljišča  $ACDEBFG$  (sl. 184.). V ta namen zakoliči najdaljšo diagonalno  $AB$  kot osnovno črto, jo izmeri ter nariše po primernem merilu.



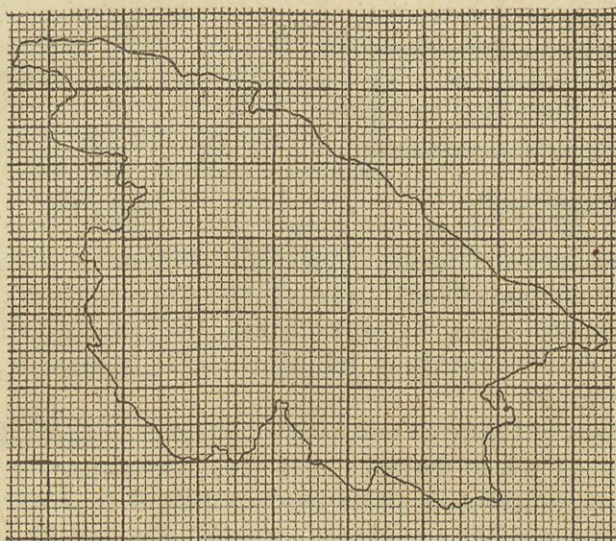
Slika 184.

Nato določi s kotomerom skoz ostala oglišča pravokotnice na osnovnico, jih izmeri kakor tudi razdaljo podnožišč in jih nariše v črtežu.

Ploščino zemljišča določi, ako izračuna ploščine nastalih trikotnikov in trapezov ter jih sešteje.



c) Za praktično uporabo dostikrat dovolj natančen rezultat dobimo, ako pokrijemo lik (tudi krivočrten) s prozornim milimetrskim papirjem (t. j. papirjem, ki je razdeljen na  $mm^2$ , kakor kaže slika 185.) ter seštejemo kvadratne milimetre, ki jih oklepa likov obseg.



Slika 185.

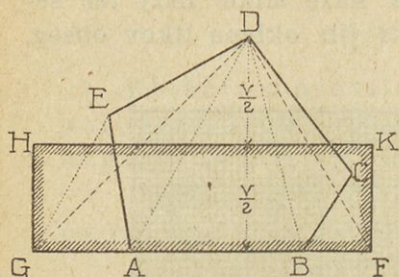
Na sliki 185. je narisana obris Kranjske na milimetrski papir po merilu  $1:2,000.000$ . Kolika je v resnici daljica, ki meri na risbi  $1\ mm$ ? Koliko  $km^2$  pride v resnici na  $1\ mm^2$  risbe? Določi na sliki 185., koliko  $km^2$  meri Kranjsko!

d) Ploščino lika moremo približno določiti tudi s tehtnico. Na precej debel karton narišemo lik in kvadrat s stranico  $a = 1\ dm$  ( $1\ dm^2$ ), nato izrežemo lika, ju iztehtamo ter primerjamo njiju težo.

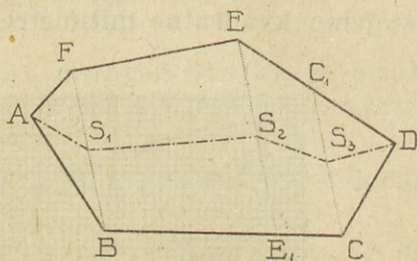
Ako tehta lik n. pr.  $56\ g$ ,  $1\ dm^2$  pa  $16\ g$ , je lik  $\frac{56}{16} = 3,5$  krat tako težak kakor  $1\ dm^2$ . Ker sta oba lika iz iste snovi, je tudi ploščina lika  $3,5$  krat tako velika kakor ploščina kvadrata; meri torej  $3,5\ dm^2$ .

Razrešimo še sledeči načrtovalni nalogi!

**Naloga 1.** Pretvori mnogokotnik  $ABCDE$  (sl. 186.) v pravokotnik!



Slika 186.



Slika 187.

Skozi točko  $C$  nariši vzporednico diagonali  $BD$  do presečišča  $F$  na podaljšani stranici  $AB$ ! Četverokotnik  $AFDE$  je ploščinsko enak peterokotniku  $ABCDE$ . Na isti način pretvori četverokotnik v trikotnik  $GFD$  in tega v pravokotnik  $GFKH$ !

**Naloga 2.** Razdeli mnogokotnik  $ABCDEF$  (sl. 187.) na dva enaka dela!

Spoji oglišču  $A$  najbližnji oglišči  $B$  in  $F$  ter nariši skoz ostala oglišča vzporednice z  $BF$ ! Kakšne like dobiš? Razpolovi vzporednice ter spoji razpolovišča, kakor kaže slika 187.! Zakaj?

Vaje.

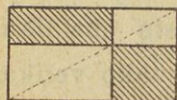
a) Načrtovalne.

1. Pretvori paralelogram  $ABCD$  ( $a = 7.5$  cm,  $b = 4.5$  cm,  $\beta = 45^\circ$ ) v drugega z isto osnovnico in

- s kotom  $\beta = 120^\circ$  ( $90^\circ$ ),
- s stranico  $b = 6$  cm,
- z diagonalo  $AC = 4$  cm,
- z enakimi stranicami!

2. Nariši kvadrat, ki je a) še enkrat tako velik, b) polovica kvadrata s stranico  $a = 4$  cm! (Nariši diagonali kvadrata!)

3. Iz koliko kvadratov (ki jih ne smeš razrezati) moreš sestaviti nov kvadrat?



Slika 188.

4. Nariši skoz katerokoli točko pravokotnikove (paralelogramove) diagonale (sl. 188.) vzporednici stranicam ter pokaži, da sta pravokotnika (paralelograma), ki ju ne seka diagonala, ploščinsko enaka (dopolnilna paralelograma)!



5. Pretvori pravokotnik ( $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ) v drugega a) z osnovnico  $a_1 = 7 \text{ cm}$  ( $5 \text{ cm}$ ), b) z višino  $b_1 = 6 \text{ cm}$  ( $4.5 \text{ cm}$ )! Glej prejšnjo vajo!

6. Pretvori paralelogram ( $a = 5.5 \text{ cm}$ ,  $b = 3.6 \text{ cm}$ ,  $e = 5 \text{ cm}$ ) v trikotnik z isto višino!

7. Pretvori kvadrat s stranico  $a = 5 \text{ cm}$  v pravokotnik z osnovnico  $a = 6 \text{ cm}$ ! (Nalogo razrešiš neposredno s pomočjo 4. vaje ali pa če pretvoriš najprvo kvadrat v paralelogram z isto osnovnico in višino, ter nato paralelogram v pravokotnik!)

8. Nariši kvadrat s stranico  $a = 1 \text{ cm}$ ! Kako se izpreminja kvadratov obseg, ako podvojiš (potrojiš) stranico? Označi odvisnost med obsegom in stranico!

9. Nariši pravokotnik z osnovnico  $a = 2 \text{ cm}$  in višino  $v = 1 \text{ cm}$ ! Podaljšaj višino za 1, 2, 3  $\text{cm}$  in primerjaj ploščine nastalih pravokotnikov! Zavrti nato pravokotnik tako, da menjata osnovnica in višina svoji mesti! Od česa je odvisna ploščina pravokotnikov a) z enako osnovnico, b) z enako višino? Ali velja to za vse paralelograme?

10. Pretvori trikotnik  $ABC$  ( $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 11 \text{ cm}$ ) v drugega z isto osnovnico  $AB$  in

a) s kotom  $\alpha = 90^\circ$  ( $\gamma = 90^\circ$ ),

b) s stranico  $b = 7 \text{ cm}$ ,

c) z enakima stranicama  $a$  in  $b$ ,

d) s srednjico (pripadajočo stranici  $c$ )  $s_c = 8 \text{ cm}$ !

11. Nariši pravokotni trikotnik tako, da je kateta  $a = 3 \text{ cm}$  osnovnica in kateta  $b = 1 \text{ cm}$  višina! Podaljšaj višino za 1, 2, 3  $\text{cm}$  ter povej, kako se izpreminja ploščina! Zavrti nato trikotnik tako, da je osnovnica kateta  $b$ ! Od česa je odvisna ploščina trikotnikov a) z enako osnovnico, b) z enako višino?

12. Pretvori trikotnik  $ABC$  (podatki 10. vaje) v drugega a) z osnovnico  $A_1B_1 = 10 \text{ cm}$  ( $5 \text{ cm}$ ), b) z višino  $v_1 = 9 \text{ cm}$  ( $4.5 \text{ cm}$ )!

13. Pretvori trapez  $ABCD$  ( $a = AB = 7 \text{ cm}$ ,  $c = CD = 4 \text{ cm}$ ,  $v = 5.6 \text{ cm}$ ,  $\beta = 60^\circ$ ) v pravokotni trikotnik z isto višino in z osnovnico na  $AB$ !

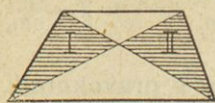
14. Pretvori enakokraki trapez  $ABCD$  ( $a = 8.7 \text{ cm}$ ,  $c = 6 \text{ cm}$ ,  $v = 6.4 \text{ cm}$ ) v pravokotnik z isto višino! (Nariši skoz razpolovišči krakov pravokotnici na osnovnico!)

15. Pretvori trapez  $ABCD$  v pravokotnik, čigar osnovnica je enaka diagonali  $AC$ !

16. Razdeli pravokotnik (romboid, romb) z vzporednicami osnovnici na 3, 4, 5 enakih delov!

17. Razdeli trikotnik  $ABC$  iz oglišča  $A$  na 3, 5, 7 enakih delov!

18. Nariši trapezu (sl. 189.) diagonali ter pokaži, da sta trikotnika I in II ob krakih ploščinsko enaka! (Glej uporabo na slikah 170., 180., 186.!)



Slika 189.

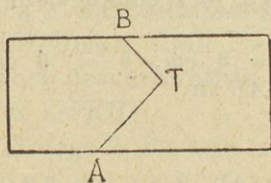
19. Razdeli trikotnik  $ABC$  (n. pr. njivo) iz točke  $T$ , ležeče na stranici  $BC$ , na dva enaka dela! (Razpolovi  $BC$ , spoji razpolovišče in točko  $T$  z ogliščem  $A$  i. t. d.!)

20. Nariši deltoid ter ga pretvori v pravokotnik!

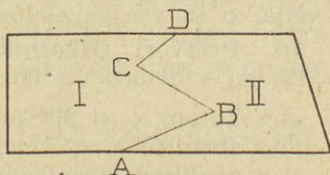
21. Pretvori pravilni peterokotnik (šesterokotnik) v pravokotnik z višino, enako polmeru liku včrtanega kroga, tako, da leži osnovnica na eni stranici!

22. Nariši katerikoli sedmerokotnik ter ga pretvori v pravokotnik! (Pretvori lik najprvo v šesterokotnik, tega v peterokotnik i. t. d.!)

23. Pretvori šesterokotnik a) v enakokraki trikotnik, b) v paralelogram s kotom  $\alpha = 45^\circ$  ( $60^\circ$ ) ob osnovnici!



Slika 190.



Slika 191.

24. Pretvori zobato mejo  $ATB$  (sl. 190.) dveh stavbišč v ravno!

25. Pretvori zobato mejo  $ABCD$  (sl. 191.) dveh stavbišč I in II v ravno!

b) Računske.

1. Koliko cvetlic moreš vsaditi v 10 m dolgo in 2,8 m široko gredo, ako zasadiš na 1  $dm^2$  eno cvetlico?

2. Izmeri dolžino, širino in višino učilnice (risalnice), širino in višino vrat in oken! Koliko stane a) napojitev tal s talnim oljem, če stane 1  $m^2$  250 h, b) preslikanje sten in stropa, če se računa 3,5 K za 1  $m^2$ ?

3. Koliko stane tlakovanje dvorišča kvadratne oblike s stranico  $a = 12,7$  cm, če se za 1  $m^2$  računa 12,80 K? Kolik je obseg dvorišča?

4. Parketovanje sobnih tal z dolžino 5,2 m velja 910 K; kako široka je soba, če stane 1  $m^2$  50 K?

5. Rombov obseg meri 54,32 ... dm, višina 12,58 ... dm, kolika je ploščina?

6. Kako moraš izpreminjati pravokotnikovo (paralelogramovo) a) osnovnico, b) višino, da dobiš dvojno, trojno, četverno ploščino ali polovico, tretjino, četrtino ploščine?



7. Ali se izpremeni paralelogramova osnovnica, ako podvojimo (potrojimo) njegovo ploščino in višino?

8. Kako vzraste paralelogramova ploščina, ako podvojimo (potrojimo) osnovnico in višino?

9. Povej, kako odvisi osnovnica od višine paralelogramov z enako ploščino!

10. Sestavi iz paličic, ki se dado pregibati v členkih, enakostraničen in raznostraničen paralelogram! Kateri izmed vseh enakostraničnih (raznostraničnih) paralelogramov ima največjo ploščino? (Glej slike 120. in 121.)

11.\* Zakoliči na polju kvadrat s ploščino 1 a, 9 a, 16 a!

12. Kolika je ploščina trikotnika z osnovnico 4·58 dm (85·36 ... m) in višino 2·95 dm (50·88 ... m)?

13. Kolika je ploščina pravokotnega trikotnika s katetama 3·5 cm in 5·7 cm?

14. Določi ploščino svojih risalnih trikotnikov!

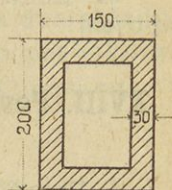
15. Kolika je osnovnica trikotnika z višino 5·2 m (8·6 ... cm) in ploščino 23·4 m<sup>2</sup> (57·9 ... cm<sup>2</sup>)?

16.\* Zakoliči na šolskem dvorišču (na polju) trikotnik ter mu določi ploščino tako, da vzameš zaporedoma vsako stranico kot osnovnico! Primerjaj rezultate!

17. Odgovori za trikotnik na vprašanja v vajah 6., 7., 8., 9.!

18. V trikotniku z dvema neizpremenjenima stranicama se izpreminja kot, ki ga oklepata te dve stranici. Zakaj vzraste ploščina, če vzraste kot? Kdaj je ploščina največja?

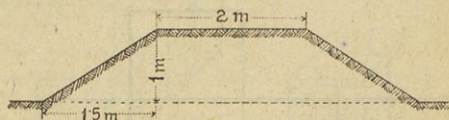
19. Kolika je srednjica in kolika ploščina trapeza z osnovnicama  $a = 17·3$  dm,  $c = 15·7$  dm in z višino  $v = 7·8$  dm?



Slika 192.

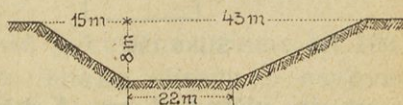
20. Železen votel steber ima poprečni prerez, kakor ga kaže slika 192. Določi merilo slike in ploščino prereza, ako so merska števila mm!

21. Slika 193. kaže poprečni prerez železniškega nasipa v merilu 1 : 100, slika 194. pa poprečni prerez Sueškega prekopa; izračunaj ploščino prereзов!



Slika 193.

22. Kolika je trapezova višina, ako merita osnovnici 5·38 ... dm in 2·37 ... dm, ploščina pa 20·266 ... dm<sup>2</sup>?



Slika 194.

23. Kolika je ploščina romba, če merita diagonali 5·38 cm in 3·74 cm?

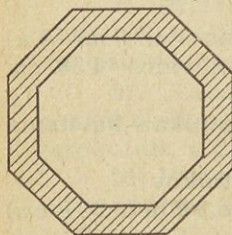
24. Izmeri ploščino deltoida na sliki 179.!

25. Njiva trapezoidove oblike meri po eni diagonali  $46.73 \dots m$ , medtem ko sta razdalji drugih dveh oglišč od te diagonale  $v_1 = 39.65 \dots m$  in  $v_2 = 27.18 \dots m$ . Kolika je ploščina njive?

26. Kolika je ploščina kvadrata z diagonalo  $15.84 m$  ( $7.8 \dots cm$ )?

27. Določi ploščino pravičnega peterokotnika na sliki 182.!

28. Vrtaj krogu s polmerom  $r = 3.5 cm$  pravični šesterokotnik ter mu določi ploščino!



Slika 195.

29. Slika 195. kaže poprečni prerez osmerostraničnega tvorniškega dimnika v merilu  $1 : 200$ . Določi ploščino prereza!

30.\* Zakoliči na prostem mnogokotnik ter mu določi ploščino a) tako, da ga razdeliš z diagonalami skoz eno oglišče na trikotnike, b) tako, da zakoličiš najdaljšo diagonalo in pravokotnice na njo skoz ostala oglišča!

31. Kontroliraj rezultate prejšnjih vaj tudi z milimetrskim papirjem!

## XVIII. Površina in prostornina prizme in piramide.

### Podobnost.

1. Površino ogletega telesa določimo, ako narišemo mrežo in jo izmerimo, ali pa ako izračunamo ploščine vseh mejnih ploskev ter jih seštejemo.

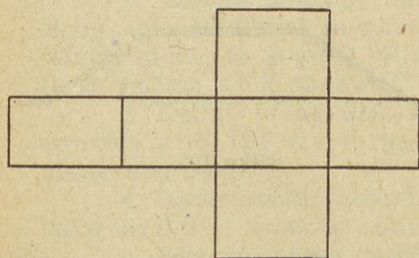
Določiti hočemo površino prizme. Kako razlikujemo prizme? Kateri ploskvi imenujemo osnovni ploskvi

in katerim pravimo stranske ploskve? Kaj tvorijo stranske ploskve?

Posebno važno iz praktičnih ozirnov je merjenje površine pokončnih prizem.

Oglejmo si kvader na sliki 197.! Dolžina meri  $5 cm$ , širina

$4 cm$  in višina  $3 cm$ . Kakšni liki so mejne ploskve? Ali se razlikujeta po dve nasprotni ploskvi glede na



Slika 196.



velikost? Kako dobimo kvadrovo mrežo? Glej zmanjšano sliko 196.!

Spodnja kvadrova ploskev ima stranici 5 cm in 4 cm, njena ploščina je  $(5 \times 4) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$ , torej ploščina spodnje in zgornje ploskve skupaj  $(2 \times 20) \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$ . Dve stranski ploskvi s stranicama 5 cm in 3 cm imata ploščino  $(2 \times 15) \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$ , drugi dve s stranicama 4 cm in 3 cm pa  $(2 \times 12) \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ . Površina kvadra meri torej

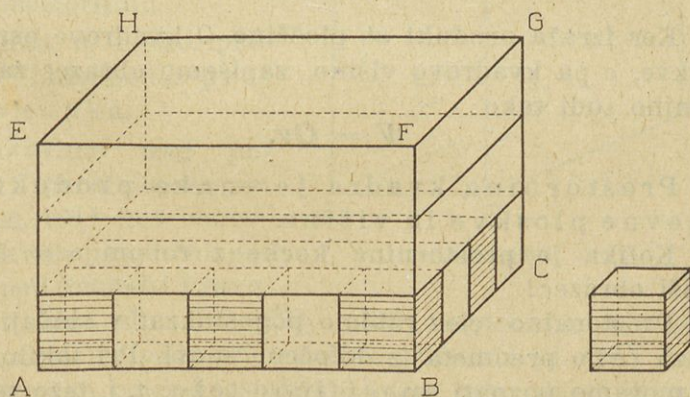
$$(2 \times 20) \text{ cm}^2 + (2 \times 15) \text{ cm}^2 + (2 \times 12) \text{ cm}^2 = 94 \text{ cm}^2.$$

Ako zaznamenujemo površino s  $P$  in robe, ki določajo kvader, z  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , računamo površino kvadra takole:

$$P = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc).$$

Kolika je površina kocke z robom  $a = 5 \text{ cm}$ ? Zapiši obrazec!

Površino pokončne prizme vobče tvorita dva skladna mnogokotnika kot osnovni ploskvi in toliko pravokotnikov kot plašč, kolikor stranic šteje osnovna ploskev.



Slika 197.

V ravnino razgrnjen plašč pokončne prizme (sl. 196.) je pravokotnik z osnovnico, enako obsegu o osnovne ploskve, in z višino  $v$ , enako višini prizme. Ako seštejemo ploščino plašča  $p$ , ki je  $p = ov$ , in ploščini osnovnih

ploskev 2  $O$ , dobimo za površino pokončne prizme vobče obrazec

$$P = 2 O + p.$$

Preizkusi obrazec za kvader, ki smo ga prej opazovali!

Površina pokončne prizme je enaka vsoti dvojne osnovne ploskve in plašča.

2. Imenuj prizme, ki jim že znaš določiti prostornino ali volumen! Kako imenujemo kocko z robom, enakim enoti dolžinske mere? Razloži znake  $m^3$ ,  $dm^3$ ,  $cm^3$ ,  $mm^3$ ! Kaj je enota votle mere za tekočine?

Pokaži na sliki 197., kako smo določili prostornino kvadra z dolžino 5 cm, s širino 4 cm in z višino 3 cm!

Prostornino kvadra dobimo, ako zmnožimo merska števila njegove dolžine, širine in višine. Prostornina našega kvadra je torej

$$(5 \times 4 \times 3) \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3.$$

Ako zaznamenujemo dolžino, širino in višino z  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in prostornino ali volumen z  $V$ , je vobče

$$V = abc.$$

Ker izraža produkt  $ab$  ploščino  $O$  kvadrove osnovne ploskve,  $c$  pa kvadrovo višino, zapišemo obrazec za prostornino tudi tako:

$$V = Ov.$$

Prostornina kvadra je enaka produktu iz osnovne ploskve in višine.

Kolika je prostornina kocke z robom  $a = 5 \text{ cm}$ ? Zapiši obrazec!

Prostornino teles rabimo pogostokrat v slučajih, ko gre za težo predmeta iz določene snovi. Pri takih računih moramo poznati specifično težo, t. j. težo telesne enote ( $1 \text{ cm}^3$ ) dotične snovi.

Specifična teža\* n. pr. litega železa je  $7.21 \dots \text{g}$ , kar pomeni, da

1  $\text{cm}^3$  litega železa tehta  $7.21 \dots \text{g}$ , torej

1  $\text{dm}^3$  „ „ „  $7.21 \dots \text{kg}$ .

\* Glej koncem knjige tablico specifičnih tež nekaterih teles!



Ako meri prostornina železne kocke  $100 \text{ cm}^3$ , je kocka 100krat tako težka kakor  $1 \text{ cm}^3$  železa, torej  $7.21 \dots g \times 100$ .

Če je  $T$  teža,  $V$  prostornina in  $s$  specifična teža telesa, je v znakih

$$T = sV \text{ in } V = \frac{T}{s}, s = \frac{T}{V}. \text{ Z besedami?}$$

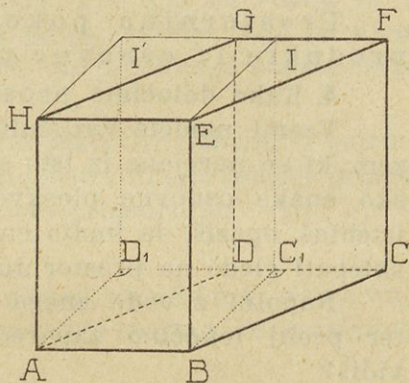
Določi težo lesene kocke, ki jo rabimo za model! (Tudi s tehtnico!)

3. Kakor je nemogoče z enoto ploskovne mere popolnoma pokriti poševni paralelogram, trikotnik, trapez i. t. d., ravno tako nemogoče je s telesno enoto popolnoma izpolniti poljuben paralelepiped, tristranično prizmo i. t. d. Tóda na sličen način kakor prej ploščino premočrtnih likov določimo tudi prostornino prizem.

Ako držita n. pr. votla kocka in steklenica valjaste oblike enako množino kake tekočine, pravimo, da imata posodi enako prostornino.

Telesa z enako prostornino imenujemo prostorno enaka.

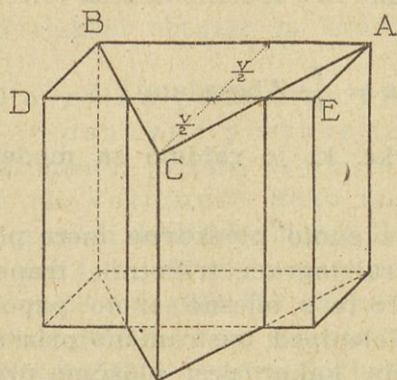
Postavimo nad poševnim paralelogramom  $ABCD$  (sl. 164.) kot osnovno ploskvijo pokončni paralelepiped (model)! Pravokotna ravnina skoz  $BC_1$  ( $BC_1 \perp CD$ ) na osnovno ploskev odreže paralelepipedu tristranično prizmo  $I$  (sl. 198.). Ako pritaknemo to prizmo ostalemu telesu tako, da se krijeta ploskvi  $BCFE$  in  $ADGH$  (lega  $I'$ ), dobimo kvader z isto prostornino, kot jo ima prvotno telo. Pravimo, da smo pretvorili pokončni paralelepiped v kvader.



Slika 198.

Ker moremo pretvoriti vsak premočrtni lik v pravokotnik, moremo pretvoriti tudi vsako pokončno prizmo v kvader. Tako ustreza pretvoritvi trikotnika v pravo-

kotnik na sliki 171. pretvoritev tristranične pokončne prizme v kvader na sliki 199. Pokaži tako pretvarjanje tudi na slikah 179. in 186.,



Slika 199.

ako tvorijo dotični liki osnovne ploskve pokončnih prizem z določeno višino! V vsakem teh slučajev imata pokončna prizma in kvader ploščinsko enaki osnovni ploskvi in enako višino.

Obrazec za prostornino katerekoli pokončne prizme je torej isti kot za prostornino kvadra:

$$V = Ov.$$

Prostornina pokončne prizme je enaka produktu iz osnovne ploskve in višine.

#### 4. Kako določimo prostornino poševne prizme?

Vzemi modele različnih pokončnih in poševnih prizem, ki so narejene iz iste snovi in ki naj imajo ploščinsko enake osnovne ploskve in enako višino. Ako jih iztehtaš, opaziš, da imajo enako težo. Kaj smemo iz tega sklepati glede na prostornino teh prizem?

Napolni z vodo enega votlih modelov istih prizem ter prelij tekočino zaporedoma v ostale prizme! Kaj vidiš?

Iz teh poizkusov sklepamo:

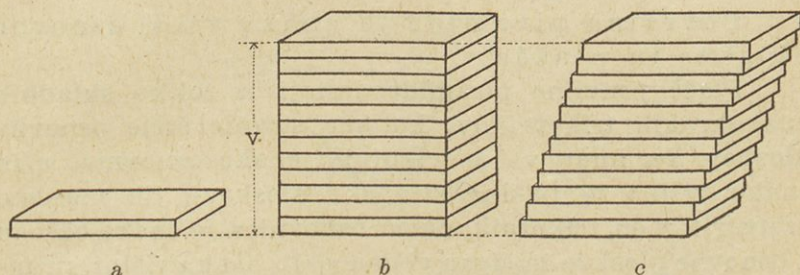
Prizme s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in enakimi višinami so prostorno enake.

Pa še na drug način uvidimo resničnost tega izreka.

Nariši na debel karton pravokotnik s stranicama  $a = 3 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$  ter ga izreži! Izrezani pravokotnik je osnovna ploskev kvadra z višino, enako debeliní kartona (sl. 200. a). Ker so izrezani liki iz kartona iste debelosti, so vsi kvadri prostorno enaki. Ako jih položimo drugega na drugega, dobimo kvader, kakor ga kaže slika 200. b.



Pomaknimo zdaj vsak kvader proti desni tako, da leže oglišča na vzporednicah! Poševno telo, ki ga kaže slika 200. c, ima isto višino in prostornino kot kvader. Mislimo si vsak kvader razdeljen z ravninami, vzporednimi njegovi osnovni



Slika 200.

ploskvi, na 2, 3, 4... enake kvadrčke in te kakor prej razmaknjene v poševno telo! Pri tem se višina in prostornina poševnega telesa ne izpreminja, pač pa njegova oblika, ki se bliža tem bolj oni poševnega paralelepipeda, čim tanjši so kvadrčki.

Na isti način moremo sestaviti pokončno prizmo iz tristraničnih ali sploh mnogostraničnih tankih prizem in iz teh poševno prizmo z isto prostornino.

Velja torej izrek:

Prizme s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in enakimi višinami so prostorno enake.

Ker moremo vsako poševno prizmo pretvoriti v pokončno, to pa v kvader, je obrazec za prostornino katerekoli prizme enak onemu za prostornino kvadra:

$$V = O \cdot v.$$

Prostornina prizme vobče je enaka produktu iz osnovne ploskve in višine.

5. Katera telesa imenujemo piramide? Kdaj je piramida pokončna, kdaj poševna in kdaj pravilna? Kakšni liki meje piramido? Katere mejne ploskve tvorijo plašč? Kako narišemo mrežo pokončne piramide?

Površino piramide tvorita osnovna ploskev in plašč. Površino izračunamo, ako seštejemo ploščini osnovne ploskve  $O$  in plašča  $p$ ; v znakih

$$P = O + p.$$

Površina piramide je enaka vsoti osnovne ploskve in plašča.

Plašč pravilne piramide sestoji iz toliko skladnih enakokrakih trikotnikov, kolikor stranic šteje osnovna ploskev. Ker imajo vsi ti trikotniki enako osnovnico  $a$  in enako višino  $v_1$  (višina stranske ploskve), jih moremo pretvoriti v en trikotnik, čigar osnovnica je enaka obsegu  $o$  osnovne ploskve in čigar višina  $v_1$  je enaka višini stranske ploskve. Ploščina plašča je torej

$$p = \frac{ov_1}{2}.$$

Izračunaj površino piramid, ki jih rabimo za modele!

**6.** Piramide ne moremo razdeliti tako, da bi bilo mogoče sestaviti iz teh delov kvader, zato primerjamo piramide glede na njih prostornino takole:

Ako iztehtamo več pokončnih in poševnih piramid, narejenih iz iste snovi ter s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino, opazimo, da imajo enako težo.

Ako napolnimo z vodo enega votlih modelov istih piramid ter prelijemo tekočino zaporedoma v ostale piramide, vidimo, da drže isto množino vode.

Kaj sklepamo iz teh poizkusov?

Piramide s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino so prostorno enake.

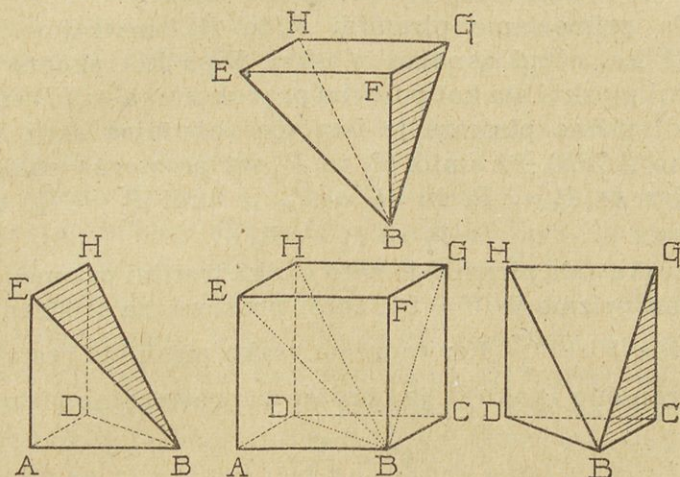
Ako iztehtamo več iz iste snovi narejenih prizem in piramid s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino, se prepričamo, da je teža vsake piramide enaka tretjini teže vsake teh prizem.

Oglejmo si tudi votle modele istih prizem in piramid! Vsako teh prizem napolni voda, ki jo prelijemo iz treh takih piramid.



Iz teh poizkusov sklepamo:

Prostornina piramide je enaka tretjini prostornine prizme s ploščinsko enako osnovno ploskvijo in z enako višino.

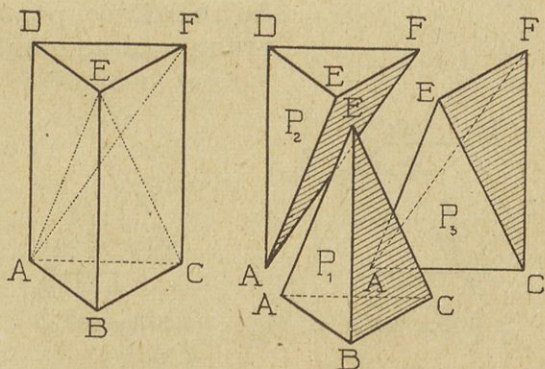


Slika 201.

Ako razrežemo kocko z ravninami tako, kakor kaže slika 201., razpade na tri piramide, ki ima vsaka kockno mejno ploskev za osnovno ploskev in kockni rob za višino. Imenuj osnovno ploskev in višino vsake teh piramid ter pokaži, da so skladne! — Prostornina vsake teh piramid je torej enaka tretjini kockne prostornine.

Prerežimo tristranično pokončno (ali poševno) prizmo  $ABCDEF$

(sl. 202.) z ravninami skozi oglišče  $E$  tako, da gre prva skozi rob  $AC$ , druga skozi diagonalo  $AF$  mejne ploskve



Slika 202.

$ACFD$ ! Prizma razpade na tri tristranične piramide  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (sl. 202.).

Ker imata piramidi  $P_1$  in  $P_2$  ploščinsko enaki osnovni ploskvi ( $ABC$  in  $DEF$  sta osnovni ploskvi prizme) in enako višino (višino prizme), sta prostorno enaki.

Da primerjamo piramidi  $P_2$  in  $P_3$ , smatramo  $AFD$  in  $ACF$  kot njuni osnovni ploskvi,  $E$  pa kot skupni vrh. Osnovni ploskvi sta kot polovici pravokotnika  $ACFD$  enaki, pa tudi višina piramid je ista (pravokotnica skozi  $E$  na ravnino  $ACFD$ ). Piramidi  $P_2$  in  $P_3$  sta prostorno enaki.

Ker je  $P_1 = P_2$  in  $P_2 = P_3$ , je tudi  $P_1 = P_3$ , torej

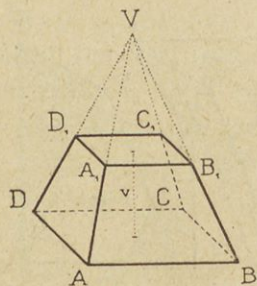
$$P_1 = P_2 = P_3.$$

Vsaka teh piramid je zato enaka tretjini prizme. Prostornina prizme je  $V = Ov$ , torej prostornina tristranične piramide  $V = \frac{Ov}{3}$ . Ker moremo vsako piramido pretvoriti v tristranično (kako?), je obrazec za prostornino piramide vobče

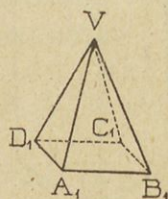
$$V = \frac{Ov}{3}.$$

Prostornina piramide je enaka tretjini produkta iz osnovne ploskve in višine.

7. Ako presekamo n. pr. pokončno kvadratno piramido (sl. 203. a) z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, razpade na dva dela. Kako ju imenujemo? Primerjajmo dopolnilno piramido (sl. 203. b) s prvotno piramido. Piramidi imata isto



Slika 203 a.



Slika 203 b.

obliko, toda različno velikost. Presekaj še druge piramide z ravninami, vzporednimi osnovni ploskvi, in primerjaj obliko dopolnilne piramide s prvotno piramido!

Pravimo: Piramida in dopolnilna piramida sta si podobni. Oglej si tudi kocke, pravilne tetraedre, pravilne oktaedre, krogle različne velikosti! Imenuj podobne predmete svoje okolice!



Imenuj osnovni ploskvi prisekane piramide na sliki 203. a! Osnovni ploskvi sta kvadrata. Sta si torej podobni.

Primerjaj obliko enakostraničnih trikotnikov, enakokrakih pravokotnih trikotnikov (n. pr. trikotnikov, ki jih rabimo pri načrtavanju), kvadratov, pravilnih mnogokotnikov z istim številom stranic, krogov različne velikosti!

Ako sta si dva lika podobna, pravimo tudi, da je eden podoba drugega. Tako je slika 185. zmanjšana podoba obrisa Kranjske, narobe je obris Kranjske v naravi povečana podoba slike 185. Črteži, ki smo jih risali, so podobe dotičnih likov v naravi. Podobni liki se torej razlikujejo samo po merilu, v katerem so narisani.

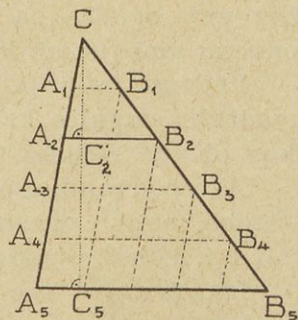
V stranskem trikotniku  $ABV$  piramide na sl. 203. a odreže vzporednica  $A_1B_1$  z osnovnico  $AB$  manjši trikotnik  $A_1B_1V$ . Trikotnik  $A_1B_1V$  je zmanjšana podoba trikotnika  $ABV$ ; trikotnika sta si podobna. ( $\triangle ABV \sim \triangle A_1B_1V$ .) Pokaži, da se ujemata trikotnika v kotih!

Kako razdelimo daljico na liho število enakih delov? Nalogo razrešimo (glej sliko 177.!) z uporabo izreka:

Ako razdelimo v trikotniku eno stranico na več enakih delov in narišemo skoz razdelišča vzporednice drugi stranici, dobimo na tretji stranici istotoliko enakih delov kot na prvi.

Povej, kako doženemo ta izrek?

Nariši trikotnik  $A_5B_5C$  (sl. 204.), razdeli n. pr. stranico  $A_5C$  na pet enakih delov ter načrtaj skoz razdelišča vzporednice stranici  $A_5B_5$ ! Vsaka vzporednica odreže po en trikotnik; vsi ti trikotniki so si podobni. Imenuj jih! Ali se ujemajo vsi trikotniki v kotih?



Slika 204.

Ker je  $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$ , je tudi  $CB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$

$CB_1$  je torej  $\frac{1}{5}$  stranice  $CB_5$ ,

$CB_2$  „  $\frac{2}{5}$  „  $CB_5$  i. t. d.

Opazuj podobna trikotnika  $A_5B_5C$  in  $A_2B_2C$ ! Katere stranice bi se krile, če bi bila trikotnika skladna? Takim stranicam pravimo istoležne stranice, n. pr.  $A_5C$  in  $A_2C$ ,  $B_5C$  in  $B_2C$  ter  $A_5B_5$  in  $A_2B_2$ .

Primerjajmo istoležne stranice teh dveh trikotnikov!

$$CA_2 = \frac{2}{5} CA_5, \quad CB_2 = \frac{2}{5} CB_5$$

Ako narišeš skoz  $B_1$ ,  $B_2$  i. t. d. vzporednice stranici  $CA_5$ , vidiš, da je tudi  $A_2B_2 = \frac{2}{5} A_5B_5$ . Pravimo:

Istoležne stranice podobnih trikotnikov  $A_2B_2C$  in  $A_5B_5C$  imajo enako razmerje 2:5 (ali 1: $\frac{5}{2}$ ).

To razmerje imenujemo merilo, tako izpreminjanje likov v podobne večje ali manjše pa premo povečanje, oziroma zmanjšanje.

Iz navedenega sledi:

Podobna trikotnika se ujemata v kotih ter imata enako merilo istoležnih stranic.

Ali imajo tudi istoležne višine isto merilo, n. pr.  $CC_2$  in  $CC_5$ ?

Ker moremo premočrtne like razdeliti z diagonalami skoz eno oglišče na trikotnike, velja ta izrek tudi za podobne mnogokotnike.

Podvoji, potroji, ... v enakostraničnem trikotniku (kvadratu) stranico, ki meri n. pr. 3 cm! Kako se izpreminja likov obseg? Sestavi tablico!

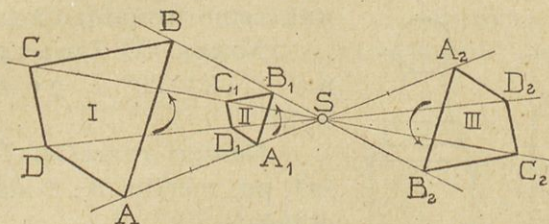
Ako podvojimo, potrojimo i. t. d. eno mnogokotnikovo stranico in ako ohrani lik svojo obliko, se podvoji, potroji i. t. d. tudi njegov obseg.

Razmerje med obsegi podobnih likov je enako merilu dveh istoležnih stranic.

Dva podobna lika moremo tako položiti, da sta po dve istoležni stranici vzporedni (sl. 205.). V tem slučaju se sekajo premice, ki spajajo istoležna oglišča, v eni in isti točki  $S$ . Tako lego podobnih likov imenujemo per-



spektivno lego in točko  $S$  podobnišče. Podobnišče je zunanje, če leži zunaj podobnih likov (n. pr.  $ABCD$  in  $A_1B_1C_1D_1$ ), ali pa notranje, če leži med podobnima likoma (n. pr. pri  $A_1B_1C_1D_1$  in  $A_2B_2C_2D_2$ ). Opazuj lika  $I$  in  $II$ , oziroma  $II$  in  $III$  glede istorednega pomikanja preko oglišč!

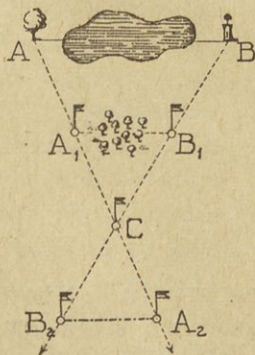


Slika 205.

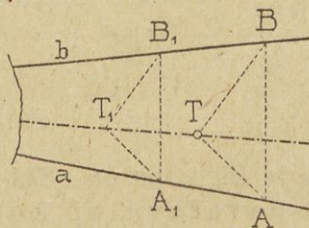
**8. Uporabo podobnosti pokaže razrešitev sledečih nalog.**

*Naloga 1.* Izmeri daljico  $AB$  (sl. 206), ki ni povsem dostopna!

Poišči točko  $C$  tako, da moreš iz nje vizirati proti  $A$  in  $B$ , razpolovi  $AC$  in  $BC$  ter izmeri  $A_1B_1$ ! Potem je  $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$  ali  $AB = 2 \cdot A_1B_1$ . Zakaj? — Če zabranjuje zapreka med  $A_1$  in  $B_1$  merjenje daljice  $A_1B_1$ , odmerimo na podaljšani  $AC$  daljico  $CA_2 = CA_1$  in na podaljšani  $BC$  daljico  $CB_2 = CB_1$  i. t. d. — Ali smo to nalogo že razrešili?



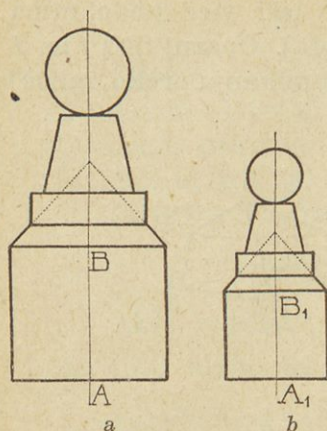
Slika 206.



Slika 207.

*Naloga 2.* Nariši skoz točko  $T$  (sl. 207.) premico, ki gre skoz nedostopno presečišče premic  $a$  in  $b$ !

Nariši katerikoli vzporednici  $AB$  in  $A_1B_1$ , ki sekata dani premici, spoji  $T$  z  $A$  in  $B$  ter načrtaj  $A_1T_1 \parallel AT$  in  $B_1T_1 \parallel BT$ . Premica, ki spaja presečišče  $T_1$  teh vzporednic s  $T$ , ustreza nalogi. (Perspektivna lega trikotnikov  $ABT$  in  $A_1B_1T_1$ !) — Kako smo to nalogo že razrešili?



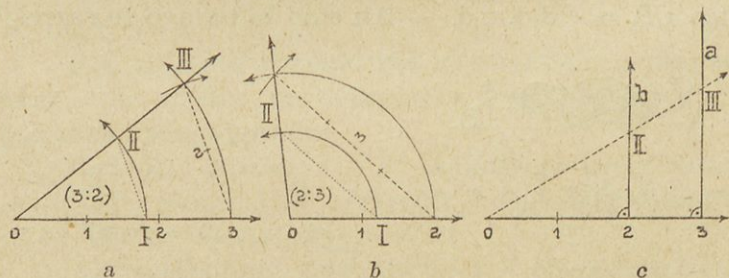
Slika 208.

Naloga 3. Zmanjšaj lik na sliki 208. a po merilu 3 : 2!

Nalogo razrešiš, če zmanjšaš po merilu 3 : 2 daljice, ki določajo lik.

Zmanjševanje daljic izvršiš z zmanjševalnim kotom. Zmanjševalni kot za merilo 3 : 2 dobiš, ako odmeriš na poltraku (sl. 209. a) od krajišča tri enake daljice drugo poleg druge, narišeš s polmerom  $r = 3$  lok ter odrežeš na njem tetivo  $t = 2$ .

Ako narišeš z daljicami lika na sliki 208. a v zmanjševalnem kotu loke, so tem lokom pripadajoče tetive istoležne daljice zmanjšanega lika na sliki 208. b. Tako je n. pr.  $oI = AB$  in  $III = A_1B_1$ .



Slika 209.

Če je lik n. pr. na sliki 208. b po merilu 2 : 3 povečati, rabimo povečevalni kot, ki ga kaže slika 209. b. V tem slučaju je  $oI = A_1B_1$  in  $III = AB$ .

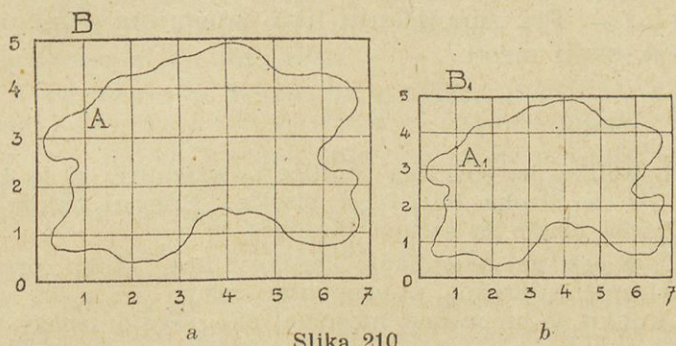
Zmanjšanje, oziroma povečanje daljic moreš izvršiti še na sledeči način. Na poltraku odmeriš od krajišča n. pr. za merilo 3 : 2 in 2 : 3 tri enake daljice (sl. 209. c)



ter narišeš skoz razdelišče 2 in 3 pravokotnici na poltrak. Za sliko 208. je potem  $3 \text{ III} = AB$  in  $2 \text{ II} = A_1B_1$  in narobe.

V praktičnem življenju se pogostoma uporabljajo za zmanjšanje ali povečanje likov (n. pr. ornamentov, črtežev, zemljevidov) kvadratne mreže in pantograf.

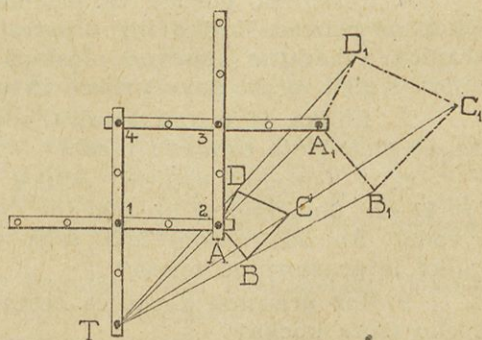
Lik, ki ga hočemo zmanjšati, preprežemo s kvadratno mrežo, ako narišemo pravokotnik, popolnoma



Slika 210.

oklepajoč lik, razdelimo osnovnico na več enakih delov, odmerimo en tak del na višino kolikorkrat mogoče ter načrtamo skoz razdelišča vzporednice stranicam. Nato narišemo podoben pravokotnik po določenem merilu (n. pr. merilu 4 : 3 na sliki 210.), razdelimo osnovnico, oziroma višino na toliko ena-

kih delov, kolikor jih je na prvem pravokotniku, ter zopet načrtamo vzporednice stranicam. V zmanjšanem pravokotniku določimo merilu primerno presečišča lika z mrežo ter narišemo končno podoben lik. Tako je n. pr. na sliki 210. a, b za istoležni



Slika 211.

točki  $A$  in  $A_1$   $A_1B_1 = \frac{3}{4}AB$ . — Prepričaj se, da ustreza merilo zmeraj le dolžinski meri, ne pa ploskovni meri!

Pantograf (model!) je sestavljen iz štirih enako dolgih paličic (sl. 211.), ki tvorijo paralelogram in ki so razdeljene z luknjicami na isto število enakih delov. Paličice se pregibljejo v členkih 1, 2, 3, 4.

Določen lik povečamo, ako pritrdimo pantograf v točki  $T$ , zasadimo v luknjico pri  $A$  žebliček, v luknjico pri  $A_1$  svinčnik ter pomikamo žebličkovo konico po obrisu lika  $ABCD$ . Svinčnikova konica nariše povečani lik  $A_1B_1C_1D_1$ . — Pri zmanjšanju lika zamenjata svinčnik in žebliček svoji mesti.

### Vaje.

1. Kolika je površina škatlice za vžigalice, ki je 4.5 cm dolga, 3.5 cm široka in 1.7 cm visoka? Presodi najprvo po vidu! Nariši mrežo in sestavi škatlico!

2. Kiosk za nalepljanje lepakov ima obliko pravilne šesterostranične prizme z osnovnim robom 0.8 m in višino 3.2 m. Koliko je uporabne ploščine, ako segajo lepaki 0.5 m od tal?

3. Določi površino tristranične pravilne prizme, ki jo rabimo za model!

4. Prepričaj se, če ustreza prostornina učilnice predpisu, ki zahteva za vsakega učenca 3 m<sup>3</sup> zraka!

5. Koliko drži 6 dm dolg, 5 dm širok in 4.5 dm visok lesen zaboj, ako so stranice 1.5 cm debele?

6. Kositrena posoda za petrolej ima obliko kvadratne pokončne prizme. Koliko litrov petroleja drži posoda, če meri stranica kvadratne osnovne ploskve 3.5 dm in višina prizme 5 dm? Nariši mrežo take prizme in sestavi telo!

7. Kolika je višina kvadra s prostornino  $V = 45 \text{ cm}^3$ , ako se zmanjšuje osnovna ploskev od 15 cm<sup>2</sup> na 10, 5, 1 cm<sup>2</sup>?

8. V posodo kvadrove oblike ( $a = 15 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $c = 25 \text{ cm}$ ) položimo težko telo ter napolnimo posodo do vrha z vodo. Ko odstranimo telo, sega voda še 14.5 cm visoko; kolika je prostornina telesa?

9. Rob granitne kocke za cestno tlakovanje meri 20 cm; koliko tehta kocka?

10. Živo srebro, ki napolni kocko z robom 2.7 dm, tehta 267.49 ... kg; kolika je specifična teža živega srebra?

11. Vžigalice imajo obliko pokončne kvadratne prizme z osnovnim robom  $a = 2 \text{ mm}$  in z višino  $v = 37 \text{ mm}$ . Koliko vžigalic da 1 m<sup>3</sup> smrekovine?



12. Plašč pokončne kvadratne prizme meri  $114.432 \text{ cm}^2$ , osnovni rob pa  $3.84 \text{ cm}$ ; kolika je prostornina prizme?

13. Čebelne celice imajo obliko pravilnih šesterostraničnih prizem z osnovnim robom  $a = 3 \text{ mm}$  in z višino  $v = 10 \text{ mm}$ . Koliko celic polnega satovja da približno  $1 \text{ l}$  medu?

14. Železniški nasip ima poprečni prerež, kakor ga kaže slika 193.; koliko grušča potrebuješ na vsakih  $10 \text{ m}$ ?

15. Koliko vode drži približno Sueški prekop s poprečnim prerezom na sliki 194., ako je prekop  $170 \text{ km}$  dolg?

16. Koliko tehta  $2.5 \text{ m}$  dolg železen votel steber s poprečnim prerezom na sliki 192.?

17. Kako se izpreminja prostornina prizme, ako podvojimo, potrojimo i. t. d. a) višino, b) osnovno ploskev?

18. Koliko kartona rabiš za mrežo pokončne kvadratne piramide, ako naj meri osnovni rob  $5 \text{ cm}$  in stranski rob  $6.5 \text{ cm}$ ? Nariši mrežo in sestavi telo!

19. Streho šesterostraničnega stolpa tvori šest enakokrakih trikotnikov z osnovnico  $3.5 \text{ m}$  in z višino  $5.6 \text{ m}$ . Koliko stane bakrena pločevina za kritje strehe, ako stane  $1 \text{ m}$  dolga in  $0.6 \text{ m}$  široka bakrena plošča  $140 \text{ K}$  in se računa za prigrinke in odpadke  $7\frac{0}{10}$  več?

20. Določi površino tristranične pravilne piramide, ki jo rabimo za model!

21. Cheopsova piramida ima osnovni rob  $a = 232 \text{ m}$  in višino  $v = 156 \text{ m}$ ; kolika je njena prostornina?

22. Koliko tehta spomenik iz granita, ki ima obliko četverostranične pravilne piramide z osnovnim robom  $a = 1.59 \dots \text{ m}$  in z višino  $v = 2.43 \dots \text{ m}$ ?

23. Nariši mrežo pravilnega tetraedra (oktaedra) z robom  $5 \text{ cm}$  ( $4.5 \text{ cm}$ ), določi površino in sestavi telo!

24. Od česa odvisi prostornina piramid a) z isto višino, b) z isto osnovno ploskvijo?

25. Kocko moremo razdeliti na šest piramid tako, da so jim osnovne ploskve kockne mejne ploskve in da jim je kockno središče skupni vrh. Primerjaj te piramide drugo z drugo! Koliko meri prostornina vsake teh piramid, ako meri kockni rob  $5.4 \text{ cm}$ ?

26. Kdaj sta si podobna dva enakokraka trikotnika, pravokotnika, romba, romboida, deltoida?

27. Nariši pravokotniku srednjici ter povej, ali so nastali pravokotniki podobni danemu!

28. Stranice na polju zakoličenega trikotnika merijo  $a = 22.5 \text{ m}$ ,  $b = 15 \text{ m}$ ,  $c = 17 \text{ m}$ . Nariši črtež trikotnika tako, da je z  $a$  istoležna stranica  $a_1 = 4.5 \text{ cm}$ ! Katero merilo rabiš?

29. Nariši trikotniku ( $a = 2,5 \text{ cm}$ ,  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $c = 3 \text{ cm}$ ) podobni trikotnik po merilu  $3 : 7$ !

30. Nariši pravilnemu šesterokotniku ( $a = 4,5 \text{ cm}$ ) po merilu  $5 : 2$  podoben lik v perspektivni legi tako, da je podobnišče a) eno oglišče, b) središče mnogokotnika! Koliko meri stranica podobnega lika? Določi obseg obeh likov ter ju primerjaj!

31. Nariši enakokraki trikotnik ( $o = 2 \text{ cm}$ ,  $v = 2 \text{ cm}$ )! Kako se izpreminja osnovnica, ako ostane kot ob vrhu neizpremenjen, pač pa vzraste višina za  $1 \text{ cm}$ ,  $2 \text{ cm} \dots$ ?

32. Nariši katerikoli mnogokotnik ter ga povečaj (zmanjšaj) po primernem merilu! Glej nalogo 3. na str. 136.!

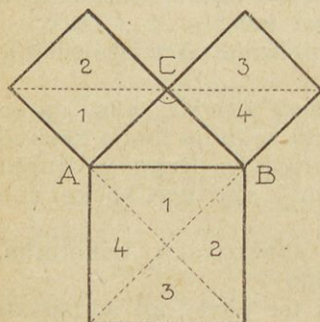
33. Poišči in izmeri na črtežu šolskega kraja najkrajšo pot, ki pelje z doma v šolo! Preizkusi rezultat s koraki! Koliko časa rabiš za pot, ako računaš na minuto 100 korakov?

34. Povečaj s kvadratno mrežo zemljevid Kranjske ( $1 : 4,000,000$ ) po merilu  $2 : 7$ ! Da ne pokvariš zemljevida, nariši mrežo na prozoren papir!

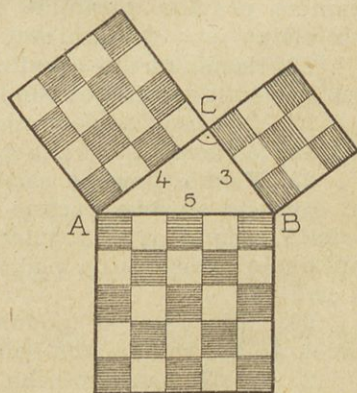
35. Sestavi iz paličic pantograf ter zmanjšaj in povečaj z njim različne like!

## XIX. Pitagorov izrek in njega uporaba.

1. Nariši ob stranicah enakokrakega pravokotnega trikotnika  $ABC$  (sl. 212.) kvadrata! Izreži kvadrata ob katetah, prereži ju po eni diagonali ter pokrij



Slika 212.



Slika 213.

z nastalimi trikotniki kvadrat ob hipotenuzi! Kolik je torej kvadrat ob hipotenuzi z ozirom na kvadrata ob katetah?



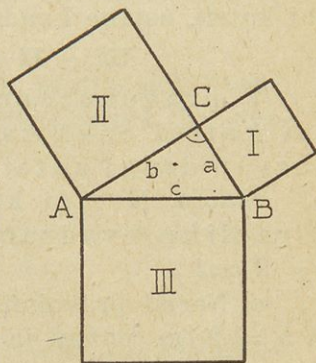
Nariši trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 cm! Kakšen trikotnik dobiš? Načrtaj ob stranicah trikotnika kvadrate (sl. 213.) ter razdeli vsakega na  $\text{cm}^2$ ! Kaj opaziš, ako sešteješ kvadratne centimetre, ki jih obsega kvadrat ob hipotenuzi, in kvadratne centimetre, ki jih obsegata kvadrata ob katetah skupaj?

Nariši katerikoli pravokotni trikotnik  $ABC$  (sl. 214.) in kvadrate ob njegovih stranicah! Načrtaj nato kvadrat s stranico enako vsoti katet  $a$  in  $b$  pravokotnega trikotnika (sl. 215.) in štiri z  $ABC$  skladne trikotnike 1, 2, 3, 4.!

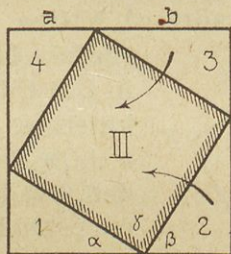
Ako izrežeš te štiri trikotnike ter jih položiš v kvadrat tako, kakor kaže sl. 215., je nepokrita ploskev kvadrat III enak kvadratu ob hipotenuzi  $c$ . Zakaj? ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , torej  $\gamma = 90^\circ$ .) Če pa za-

vrtiš trikotnika 2 in 3 na vznotraj v toliko, da se krijeta njiju hipotenuzi s hipotenuzama trikotnikov 1, oziroma 4, tvorita nepokrito ploskev

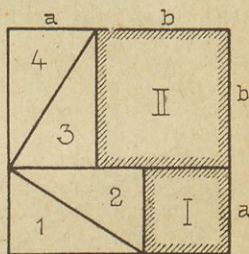
kvadrata I in II ob katetah  $a$  in  $b$  (sl. 216.). Nepokrita ploskev je v obeh slučajih enaka, torej je kvadrat III ob hipotenuzi pravokotnega trikotnika  $ABC$  (sl. 214.) tolik, kot kvadrata I in II ob katetah skupaj.



Slika 214.



Slika 215.



Slika 216.

$$\text{III} = \text{I} + \text{II}$$

Velja torej splošno:

V vsakem pravokotnem trikotniku je kvadrat ob hipotenuzi enak vsoti kvadratov ob katetah.

Ta izrek pripisujejo grškemu matematiku Pitagoru, ki je živel okrog leta 550. pr. Kr. r. Imenujemo ga Pitagorov izrek.

Ako odštejemo kvadratu ob hipotenuzi kvadrat ob eni kateti, ostane kvadrat ob drugi kateti.

$$\text{III} - \text{II} = \text{I} \text{ in } \text{III} - \text{I} = \text{II}.$$

V pravokotnem trikotniku je kvadrat ob eni kateti enak razliki kvadratov ob hipotenuzi in drugi kateti.

*Naloga.* Nariši kvadrat, ki je enak a) vsoti, b) razliki kvadratov s stranicama  $a = 5 \text{ cm}$  in  $b = 2 \text{ cm}$ !

a) Nariši pravokotni trikotnik s katetama  $a = 5 \text{ cm}$  in  $b = 2 \text{ cm}$ , potem je hipotenuza enaka stranici zahtevanega kvadrata.

b) Nariši pravokotni trikotnik s hipotenuzo  $a = 5 \text{ cm}$  in kateto  $b = 2 \text{ cm}$ , potem je druga kateta enaka stranici zahtevanega kvadrata.

2. Nariši zopet ob stranicah pravokotnega trikotnika  $ABC$  (sl. 217.) kvadrate! Višina  $CC'$  na hipotenuzo\*

razdeli  $AB$  na dva odseka  $AC'$  in  $C'B$ . Odsek  $AC'$  je priležen kateti  $AC$ , odsek  $C'B$  pa kateti  $CB$ . Podaljšana višina razdeli kvadrat nad hipotenuzo na pravokotnika 1 in 2.

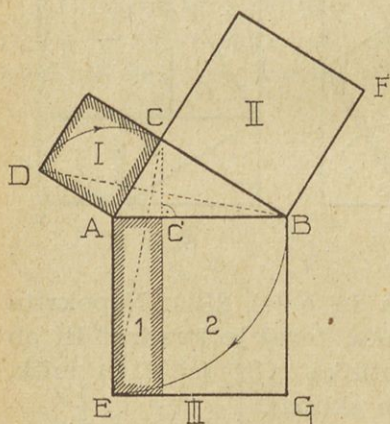
Ako spojiš  $B$  z  $D$  in  $C$  z  $E$ , dobiš trikotnika  $ABD$  in  $AEC$ . Če zavrtiš trikotnik  $ABD$  okoli oglišča  $A$  za  $90^\circ$ , pokrije trikotnik  $AEC$ ; trikotnika sta skladna.

Primerjaj kvadrat I ob kateti  $AC$  s trikotnikom  $ABD$ !

Oba lika imata isto osnov-

nico  $AD$  in isto višino  $AC$ ; torej je kvadrat I dvakrat tako velik kot trikotnik  $ABD$ .

\* Višino na hipotenuzo bomo imenovali na kratko višino pravokotnega trikotnika.



Slika 217.



$$I = 2 \times ABD.$$

Primerjaj tudi pravokotnik 1 s trikotnikom  $AEC$ ! Oba lika imata isto osnovnico  $AE$  in enako višino  $AC'$ ; torej je pravokotnik 1 dvakrat tako velik kot trikotnik  $AEC$ .

$$1 = 2 \times AEC.$$

Ker sta trikotnika  $ABD$  in  $AEC$  ploščinsko enaka, sta tudi kvadrat I ob kateti  $AC$  in pravokotnik 1 s stranicama  $AE = AB$  in  $AC'$  ploščinsko enaka.

$$I = 1.$$

Pokaži, da je tudi kvadrat II ploščinsko enak pravokotniku 2! (Spoji  $A$  z  $F$  in  $C$  z  $G$  i. t. d.)

$$II = 2.$$

Kvadrat ob kateti pravokotnega trikotnika je ploščinsko enak pravokotniku, čigar ena stranica je enaka hipotenuzi in čigar druga stranica je enaka dotični kateti priležnemu odseku hipotenuze. (Izrek o kvadratu ob kateti.)

Kako pokažeš na podlagi tega izreka resničnost Pitagorovega izreka?

Nariši v pravokotnem trikotniku  $ABC$  (sl. 218.) ob višini  $CC'$  kvadrat II, ob kateti  $AC$  kvadrat III in pravokotnik 3 s stranicama, enakima hipotenuzi in kateti  $AC$  priležnemu odseku  $AC'$ !

Po prejšnjem izreku je kvadrat III ploščinsko enak pravokotniku 3.

$$III = 3 = I + 2.$$

Po Pitagorovem izreku je zozidrom na pravokotni trikotnik  $ACC'$

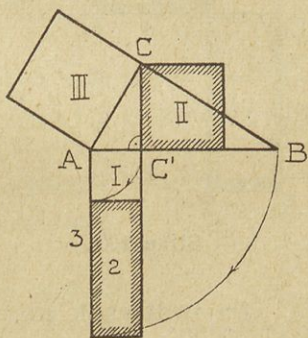
$$III = I + II \text{ ali } II = III - I.$$

Ker sta kvadrat III in pravokotnik 3 ploščinsko enaka, smemo zamenjati drugega z drugim, zato je tudi

$$II = 3 - I.$$

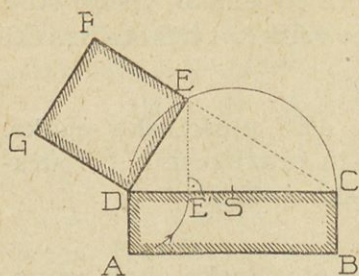
Če pa odštejemo pravokotniku 3 kvadrat I, ostane pravokotnik 2 s stranicama, ki sta enaki odsekoma hipotenuze.

$$II = 2.$$



Slika 218.

Kvadrat ob višini pravokotnega trikotnika je ploščinsko enak pravokotniku s stranicama, ki sta enaki odsekoma hipotenuze. (Izrek o kvadratu ob višini.)

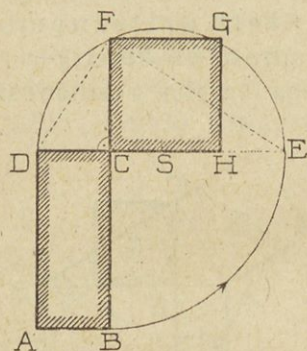


Slika 219.

Na podlagi zadnjih dveh izrekov moremo pretvoriti vsak pravokotnik v kvadrat.

*Naloga.* Pretvori določen pravokotnik v kvadrat!

a) Po izreku o kvadratu ob kateti pretvoriš pravokotnik  $ABCD$  (sl. 219.) v kvadrat, če narišeš pravokotni trikotnik  $DCE$ , v katerem je daljša pravokotnikova stranica  $DC$  hipotenuza in krajša stranica  $DA = DE'$  pa kateti  $DE$  priležni odsek hipotenuze.



Slika 220.

Ako torej narišeš polkrog s premerom  $DC$  in določiš presečišče  $E$  pravokotnice skoz  $E'$  na  $DC$  s polkrogom, je kateta  $DE$  trikotnika  $DCE$  stranica zahtevanega kvadrata  $DEFG$ .

b) Po izreku o kvadratu ob višini razrešiš nalogo, ako narišeš pravokotni trikotnik  $DEF$  (sl. 220.), v katerem sta pravokotnikovi stranici  $DC$  in  $CB = CE$  odseka hipotenuze, torej hipotenuza  $DE$ . Kvadrat  $CHGF$  ob višini  $CF$  ustreza nalogi.

Pa tudi vsak mnogokotnik moremo pretvoriti v kvadrat; pretvorimo ga namreč v pravokotnik in tega v kvadrat.

**3.** Doslej smo se bavili s Pitagorovim izrekom v geometrijski obliki.

Ako so merska števila katet in hipotenuze pravokotnega trikotnika  $a, b, c$  izražena v isti dolžinski enoti, so merska števila ploščine kvadratov ob teh stranicah  $a^2, b^2, c^2$ . Iz  $\text{III} = \text{I} + \text{II}$  (sl. 214.) sledi potem

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ in } a^2 = c^2 - b^2, b^2 = c^2 - a^2.$$

To je Pitagorov izrek v aritmetični obliki.



O velikem pomenu tega izreka se prepričamo že iz sledečih nalog:

**Naloga 1.** Kako dolga je napeta vrv, ki sega od vrha 15 m visoke stavbe do točke, oddaljene 8 m od vznožja stavbe?

Vrv je hipotenuza  $c$  pravokotnega trikotnika s kate-tama  $a$  in  $b$ , enakima višini stavbe, oziroma razdalji vznožja od omenjene točke. Po Pitagorovem izreku je

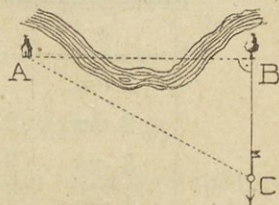
$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ torej } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$c = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17. \text{ Vrv meri } 17 \text{ m.}$$

**Naloga 2.** Izmeri daljico  $AB$  (sl. 221.), ki ni povsem dostopna!

Postavi v enem krajišču, n. pr. v  $B$ , daljice  $AB$  pravokotnico na njo, določi na pravokotnici primerno ležečo točko  $C$  ter izmeri  $AC$  in  $BC$ ! Potem je

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \text{ in } \overline{AB} = \\ &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}. \end{aligned}$$



Slika 221.

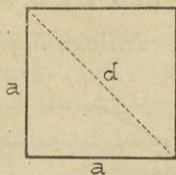
Izračunaj  $AB$ , ako je  $AC = 12348 \dots m$  in  $BC = 2012 m$ !

**Naloga 3.** Kolika je diagonalna  $d$  kvadrata s stranico  $a$ ?

Ker tvori diagonalna s stranicama skoz njeni krajišči pravokoten trikotnik (sl. 222.), je

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ in } d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Izračunaj ter si zapomni:  $\sqrt{2} = 1.4142 \dots$ !



Slika 222.

S čim torej pomnožiš vselej stranico, ako hočeš določiti diagonalno kateregakoli kvadrata? Zakaj neki? Kakšni liki so vsi kvadrati glede na obliko?

**Naloga 4.** Kolika je stranica  $a$ , obseg  $o$  in ploščina  $p$  kvadrata z diagonalno  $d$ ?

V prejšnji nalogi smo dobili

$$d^2 = 2a^2 \text{ ali } a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Torej je

$$a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} \cdot 2} = \frac{d}{2} \sqrt{2}.$$

Obseg je potem

$$o = 4a = \frac{4d}{2} \sqrt{2} = 2d\sqrt{2} \text{ in}$$

ploščina

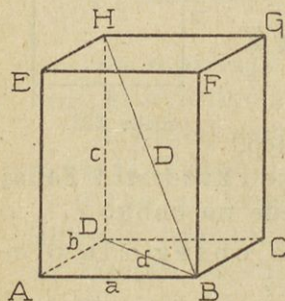
$$p = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Izračunajmo diagonalo, obseg in ploščino kvadrata s stranico  $a = 1 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 3 \text{ cm}, 4 \text{ cm} \dots!$

| $a$  | $d$                    | $o$   | $p$                |
|------|------------------------|-------|--------------------|
| 1 cm | $\sqrt{2} \text{ cm}$  | 4 cm  | 1 cm <sup>2</sup>  |
| 2 cm | $2\sqrt{2} \text{ cm}$ | 8 cm  | 4 cm <sup>2</sup>  |
| 3 cm | $3\sqrt{2} \text{ cm}$ | 12 cm | 9 cm <sup>2</sup>  |
| 4 cm | $4\sqrt{2} \text{ cm}$ | 16 cm | 16 cm <sup>2</sup> |
| .    | .                      | .     | .                  |
| .    | .                      | .     | .                  |
| .    | .                      | .     | .                  |

Glej tablico ter povej, kako raste a) diagonalna, b) obseg in c) ploščina kvadrata, ki mu podvojimo, potrojimo i. t. d. stranico?

Naloga 5. Kolika je diagonalna kvadra z robi  $a, b, c$ ?



Slika 223.

Kvadrovo diagonalno imenujemo daljico, ki spaja dve nasprotni kvadrovi oglišči, n. pr.  $BH$  na sliki 223. Koliko diagonal ima kvader? Primerjaj drugo z drugo!

V pravokotnem trikotniku  $BDH$  je

$$D^2 = d^2 + c^2.$$

Ker je  $d$  hipotenuza pravokotnega trikotnika  $ABD$ , je  $d^2 = a^2 + b^2$ , torej

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ in } D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Če so kvadromi robi enaki (kocka), je

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \text{ in } D = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$(\sqrt{3} = 1.73205 \dots)$$

Naloga 6. Kolika je višina  $v$  in ploščina  $p$  enakostraničnega trikotnika s stranico  $a$ ?

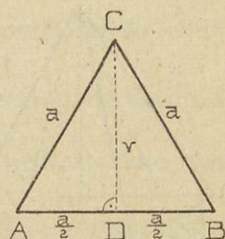
V pravokotnem trikotniku  $ADC$  na sliki 224. je

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ torej}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 0.866 \dots a.$$

Ploščina trikotnika je

$$p = \frac{1}{2} v a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Slika 224.

Ker je  $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.433 \dots$ , je  $p = 0.433 \dots a^2$ .

Izračunaj višino, obseg in ploščino enakostraničnih trikotnikov s stranico  $a = 1 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 3 \text{ cm} \dots$  ter sestavi tablico kakor prej za kvadrat!

Kako raste a) višina, b) obseg in c) ploščina enakostraničnega trikotnika, ki mu podvojimo, potrojimo i. t. d. stranico? Preizkuši isto še za pravilni šesterokotnik, ki razpade v šest enakostraničnih trikotnikov, ako spojiš središče z oglišči!

Ako narišeš raznostraničen trikotnik, razdeliš stranice  $n$ . pr. na pet enakih delov ter načrtas skoz razdelišča vzporednice stranicam, se prepričaš iz nastalih skladnih trikotnikov, da se izpreminjata obseg in ploščina podobnih trikotnikov ravno tako, kakor obseg in ploščina kvadratov, enakostraničnih trikotnikov in pravih šestokotnikov.

Pokaži, da velja isto za podobne mnogokotnike vobče!

Primerjaj obrazce za ploščino kvadrata, enakostraničnega trikotnika, pravih mnogokotnika!

Obrazec za ploščino

kvadrata:  $p = a^2,$

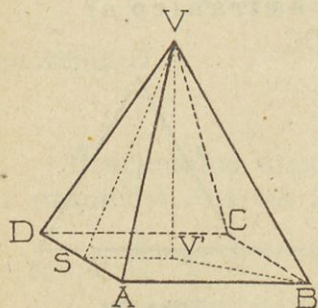
enakostraničnega trikotnika:  $p = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.433 \dots a^2,$

pravilnega

šesterokotnika:

$$p = 6a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2.598 \dots a^2.$$

Ploščine teh likov dobimo, ako pomnožimo kvadrat stranice s stalnim koeficijentom, ki je za kvadrat 1, za enakostranični trikotnik 0.433..., za pravilni šesterokotnik 2.598... Zakaj? Kakšni liki so to glede na obliko?



Slika 225.

*Naloga 7.* Kolika je višina  $v$  in površina  $P$  kvadratne pokončne piramide z osnovnim robom  $a$  in stranskim robom  $b$ ?

Višino  $v$  določimo iz pravokotnega trikotnika  $BV'V$  (sl. 225), v katerem je višina  $VV' = v$  ena kateta, polovica diagonale osnovne ploskve  $BV' = \frac{d}{2}$  druga kateta in stranski rob  $BV = b$  hipotenuza. Po nalogi 3. je

$$d^2 = 2a^2.$$

Potem je

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Obrazec za površino piramide je

$$P = O + p.$$

Ploščini osnovne ploskve  $O = a^2$  je treba prišteti ploščino plašča. Plašč  $p$  sestoji iz štirih skladnih enakokrakih trikotnikov. Izračunajmo ploščino enega teh trikotnikov, n. pr.  $ADV$ ! Osnovnica  $AD$  je enaka osnovnemu robu  $a$ , višino  $SV = v_1$  pa dobimo iz pravokotnega trikotnika  $ASV$ .

$$v_1 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Ploščina trikotnika  $ADV$  je

$$\frac{a}{2} v_1 = \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \text{ in ploščina plašča}$$

$$p = 2a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = 2a \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \left(b - \frac{a}{2}\right)}.$$



Potem je površina piramide

$$P = a^2 + 2a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Vaje.

1. Nariši kvadrat, ki je za 1 cm<sup>2</sup> a) večji, b) manjši kot kvadrat s stranico 3.5 cm!

2. Nariši kvadrat, ki je a) enak polovici, b) še enkrat tako velik kot kvadrat s stranico  $a = 4$  cm!

3. Nariši kvadrat, ki je enak vsoti treh (štirih) določenih kvadratov!

4. Nariši kvadrat, ki je dva-, tri-, štirikrat tako velik kot kvadrat s stranico  $a = 2.5$  cm!

5. Pretvori a) trikotnik, b) četverokotnik, c) mnogokotnik v kvadrat!

6. Nariši kvadrat, ki je enak a) vsoti, b) razliki pravokotnika s stranicama  $a = 6.5$  cm in  $b = 3.5$  cm ter enakostraničnega trikotnega s stranico  $s = 4$  cm!

7. Pokaži pōtem načrtavanja, da je

a)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,

b)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ,

c)  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ,

d)  $(a \pm b)(c \pm d) = ac \pm bc \pm ad \pm bd$ ,

e)  $(a \pm b)(c \mp d) = ac \pm bc \mp ad \mp bd$ !

8. Stranica kvadrata meri 6 cm (1.5 dm; 2 m 9 dm); določi diagonalo!

9. Kako dolga je pot po diagonali čez pravokotni travnik s stranicama 43.6 m in 27.4 m?

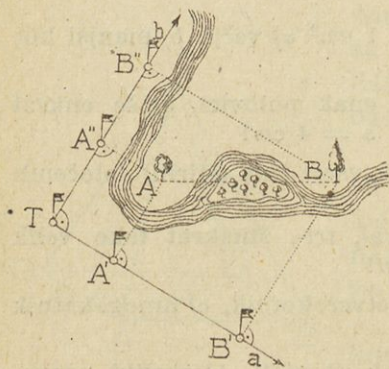
10. Po simetrali daljice  $AB = 4$  cm se pomiče točka T. Kolika je razdalja točke od krajišča A, ko se oddalji od daljice za 0.5, 1, 2.6, 5 cm?

11. Voza električne cestne železnice vozita z enako brzino od križišča v smereh, ki sta pravokotni druga na drugo. Kolika je razdalja med njima, ko prevozita vsak 500 m? Koliko metrov je oddaljen vsak voz od križišča, ko meri razdalja med njima 1050 m?

12. Nariši krogu s polmerom  $r = 2.5$  cm tetivo, enako 2 cm! Kolika je središčna razdalja tetive? Kolika je tetiva, ako meri središčna razdalja 2 cm, 1.5 cm, 1 cm, 0.5 cm? Od česa je odvisna dolžina tetive?

13.\* Izmeri razdaljo dveh nedostopnih točk  $A$  in  $B$  (sl. 226.)! Zakoliči skoz primerno ležečo točko  $T$  premici  $a$  in  $b$ , stoječi pravokotno druga na drugi, ter določi na njih podnožišča  $A'$ ,  $B'$ ,  $A''$ ,  $B''$  pravokotnic, ki jih postaviš skoz  $A$  in  $B$ . Potem je

$$AB = \sqrt{A'B'^2 + A''B''^2}. \text{ Zakaj?}$$



Slika 226.

14. V enakokrakem pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 13 cm; kolik je obseg in kolika je ploščina trikotnika?

15. Kolik je obseg, diagonala in ploščina pravokotnika s stranicama  $a = 50.92 \dots m$  in  $b = 35.14 \dots m$ ?

16. Kolika je ploščina enakostraničnega trikotnika z obsegom 25 cm?

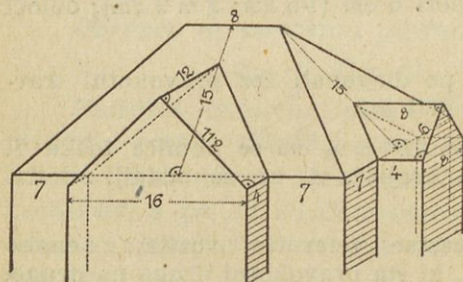
17. Diagonala kvadrata meri 15.6 cm (3.4 m; 0.046 km); določi stranico, obseg in ploščino kvadrata!

18. Kranjska meri približno 10.000 km<sup>2</sup>; kolika je stranica ploščinsko enakega kvadrata?

19. Ploščina kvadrata meri 250 m<sup>2</sup>; kolik je obseg in kolika diagonala kvadrata?

20. Kolika je ploščina kvadrata ob stranici in kvadrata ob višini enakostraničnega trikotnika s stranico 3 cm?

21.\* Zakoliči na polju enakostraničen trikotnik s ploščino 25 a!



Slika 227.

22. Slika 227. kaže zgornji del stavbe, ki ima spredaj in na desni prizidek. Določi ploščino strehe, ako značijo merska števila metre!

23. Ploščina enakokrakega trikotnika meri 50 dm<sup>2</sup> in višina 12 dm; kolika je osnovnica in kolik je obseg?

24. Zapiši obrazec za izrek a) o kvadratu ob kateti, b) o kvadratu ob višini pravokotnega trikotnika! Odseka na hipotenuzi zaznamenuj z  $a'$  in  $b'$ !

25. Kolika je stranica romba z diagonalama a)  $d_1 = 10$  cm in  $d_2 = 24$  cm; b) 6.6 dm in 11.2 dm?



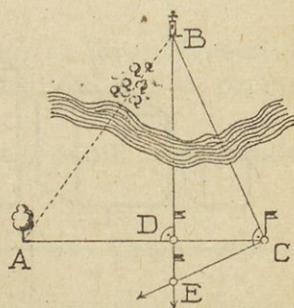
26. Kolika je diagonalna romba, ako meri druga diagonalna  $2.6 \text{ dm}$  in stranica  $8.5 \text{ dm}$ ?

27. Stranica enakostraničnega trikotnika meri  $12.38 \dots m$ ; kolika je diagonalna ploščinsko enakega kvadrata?

28. Kolik je obseg enakokrakega trapeza, ako merita osnovnici  $4 \text{ m}$  in  $2.4 \text{ m}$  ter višina  $1.5 \text{ m}$ ?

29. Hipotenuza pravokotnega trikotnika meri  $52 \text{ cm}$  in ena kateta  $34 \text{ cm}$ ; določi obseg, odseka na hipotenuzi, višino in ploščino trikotnika!

30.\* Določi razdaljo daljice  $AB$  (sl. 228.), ki ji je krajišče  $B$  nedostopno in ki ga iz  $A$  radi neke zapreke ne vidimo!



Slika 228.

Zakoliči skoz  $A$  premico  $AC$ , določi na njo iz  $B$  pravokotnico  $BD$ , postavi v  $C$  na  $CB$  pravokotnico, ki seka  $BD$  v  $E$ ! Izmeri  $AD$ ,  $DC$  in  $DE$ ! Trikotnik  $BCE$  je pravokoten in  $DC$  je višina na hipotenuzo  $BE$ . Zato je po izreku o kvadratu ob višini  $\overline{DC}^2 = BD \cdot DE$  ali  $BD = \frac{\overline{DC}^2}{DE}$ . Iz pravokotnega trikotnika  $ABD$  sledi potem  $AB = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2}$ .

31. Določi obseg, krajšo in daljšo diagonalno ter ploščino pravičnega šesterokotnika s stranico  $a = 5 \text{ cm}$ !

32. Določi diagonalno učilnice, ki ima obliko kvadra!

33. Določi rob, površino in prostornino kocke z diagonalno  $D = 10 \text{ cm}$  ( $18.73 \dots m$ )!

34. Določi rob, diagonalno in prostornino kocke s površino  $36 \text{ cm}^2$  ( $50 \text{ cm}^2$ )!

35. Kolika je površina in prostornina tristranične (šesterostranične) pravilne prizme z osnovnim robom  $a = 2.5 \text{ cm}$  in z višino  $v = 4.8 \text{ cm}$ ?

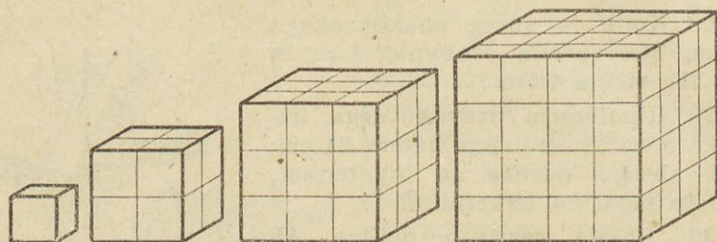
36. Kolika je površina pravilnega tetraedra (oktaedra) z robom  $a = 15 \text{ cm}$ ?

37. Kolike so diagonale treh v istem oglišču se stikajočih mejnih ploskev in kolika je diagonalna kvadra z robi  $a = 5.6 \text{ cm}$ ,  $b = 4.2 \text{ cm}$ ,  $c = 7.8 \text{ cm}$ ?

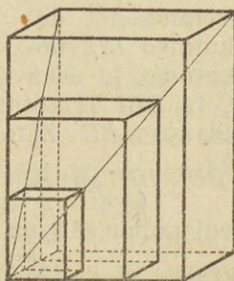
38. Kolika je diagonalna osnovne ploskve, diagonalna stranske ploskve, telesna diagonalna, površina in prostornina kvadratne pokončne prizme z osnovnim robom  $a = 2.45 \text{ dm}$  in višino  $v = 5.92 \text{ dm}$ ?

39. Kolik je stranski rob in kolik je plašč Cheopsove piramide z osnovnim robom  $a = 232\text{ m}$  in z višino  $v = 156\text{ m}$ ?

40. Pojasni geometrijskim pôtem  $\sqrt{2}$  in  $\sqrt{3}$ !



Slika 229.



Slika 230.

41. Kolika je površina in prostornina piramide, ki ima kot osnovno ploskev kvadrat s stranico  $a = 5\text{ cm}$  in kot stranske ploskve enakostranične trikotnike?

42. Kako raste površina in prostornina a) kocke, b) kvadra, ako podvojimo, potrojimo i. t. d. vse robe? Glej sliki 229. in 230.!

43. Kolik je rob votle kocke, ki drži  $100\text{ kg}$  živega srebra?

44. Prostornina kocke meri  $27\text{ cm}^3$  ( $10\text{ dm}^3$ ); kolik je kockni rob, kolika diagonala in površina?

## XX. Obseg in ploščina kroga.

1. Kako smo določili obseg premočrtnih likov? Ali moremo tudi krivočrtne like izmeriti neposredno z merilom? Kako določi merjevec dolžino zakoličene krivulje? Na isti način izmerimo približno tudi narisani krog: razdelimo namreč obod na večje število lokov ter pre-



nesemo njim pripadajoče tetive s šestilom na premico in izmerimo nastalo daljico. Čim manjši so loki, tem natančnejše je mersko število obodove dolžine.

Imenuj telesa, ki so jim krogi deloma mejne ploskve, ter povej, zakaj je potrebna določitev obsega in ploščine kroga!

Krogi so podobni liki. Kako se torej izpreminja krogov obod, ako podvojimo, potrojimo i. t. d. premer (polmer)?

Izmeri na modelih nekaterih pokončnih valjev obode osnovnih ploskev!

Najprvo izmeri z merilom premer in nato s trakom iz tankega papirja (ali tudi z nitjo) obod vsake osnovne valjeve ploskve; rezultate merjenja pa zapiši radi preglednosti v tablico I. ( $o$  = obseg,  $d$  = premer = diameter).

Primerjaj mersko število obsega z merskim številom premera vsakega kroga in določi, kolikokrat daljši je vselej obseg od premera, t. j. poišči število, s katerim bi moral vsakokrat pomnožiti premer, da bi dobil obseg dotičnega kroga!

Na tablici II. vidimo, da je to število pri vseh krogih skoro enako, in sicer nekaj večje kot 3.

2. Nariši krog ter mu očrtaj kvadrat in včrtaj pravilni šesterekotnik (sl. 231.)! Že na prvi pogled opaziš, da je obseg očrtanega lika večji, obseg včrtanega lika pa manjši kot krogov obseg. Stranica kvadrata je enaka krogovemu premeru, kvadratov obseg torej  $o_4 = 4d$ ; stranica pravilnega šesterekotnika pa je enaka polovici premera in obseg  $o_6 = 3d$ .

Včrtaj in očrtaj krogu pravilni šesterekotnik, nato pravilni dvanajsterokotnik, štirindvajseterokotnik i. t. d.

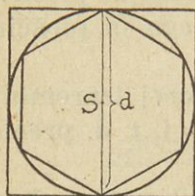
I.

| Krog  | $d$      | $o$      |
|-------|----------|----------|
| $k_1$ | 30.14 cm | 94.53 cm |
| $k_2$ | 23.25 cm | 73.15 cm |
| $k_3$ | 7.80 cm  | 24.49 cm |
| $k_4$ | 5.22 cm  | 16.32 cm |
| .     | .        | .        |
| .     | .        | .        |
| .     | .        | .        |

II.

| Krog  | $o : d$ |
|-------|---------|
| $k_1$ | 3.136   |
| $k_2$ | 3.146   |
| $k_3$ | 3.14    |
| $k_4$ | 3.13    |
| .     | .       |
| .     | .       |
| .     | .       |

ter primerjaj zaporedoma obsege mnogokotnikov s krogovim obodom! Slika pokaže, da so mnogokotnikove stranice tem manjše, čim večje je njih



Slika 231.

števílo, da rastejo obsegi vřrtanih in se manjšajo obsegi ořrtanih mnogokotnikov ter da se oboji bližajo vedno bolj krogovemu obodu. Če je števílo stranic zelo veliko, so stranice tako majhne, da jih ni ločiti od pripadajočih lokov. Ali smemo torej smatrati krog za pravilni mnogokotnik z neizmerno majhnimi stranicami?

Natančnejši račun pokaže, da je na primer obseg vřrtanega 3072- kotnika enak  $d \times 3,141592 \dots$ , obseg ořrtanega 3072- kotnika pa  $d \times 3,141594 \dots$ . Na koliko decimal se ujemata števíli? Kaj sklepamo iz tega glede na krogov obod?

Stalni na pet decimal zaokroženi faktor 3,14159, s katerim moramo pomnožiti krogov premer, da dobimo njegov obod, zaznamenujemo z grško črko  $\pi$  (čitaj: pi!). Imenujemo ga Ludolfovo števílo, ker ga je Ludolf van Ceulen okrog leta 1600. prvi izračunal na 35 decimal.

Krogov obseg določimo, ako pomnožimo mersko števílo premera z Ludolfovim števílom. V znakih

$$o = d\pi \text{ ali } o = 2r\pi.$$

Iz tega sledi

$$d = \frac{o}{\pi} = \frac{1}{\pi} o \text{ in } r = \frac{o}{2\pi}. \text{ Z besedami!}$$

$$\text{Izračunaj } \frac{1}{\pi} = 0,31830 \dots!$$

Zgodovina števíla  $\pi$  sega skoraj 4000 let nazaj. Že v sv. pismu najdemo  $\pi = 3$ , kar je seveda zelo natančno. Natančneje je določil to števílo grški matematik



Arhimed (živel okrog l. 250. pr. Kr. r.) z obsegom krogu očrtanega in včrtanega 96-kotnika, namreč  $\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ .

Zelo poraben je primični ulomek  $\pi = \frac{355}{113}$  ( $= 3.141592 \dots$ ), ki ga je objavil Adrian Metius (1571—1635). (Zapomni si: 113 | 355!) Tudi naš rojak Jurij Vega je izračunal l. 1794. število  $\pi$  na 142 decimalk.

Za praktično uporabo zadostuje dostikrat že  $\pi = 3.14$  ali  $\pi = 3\frac{1}{7}$ .

*Naloga.* Kolik je krogov obod, ako meri premer 9.8 cm?

|                                               |                         |                                          |
|-----------------------------------------------|-------------------------|------------------------------------------|
|                                               | $3.14 \dots \times 9.8$ |                                          |
| $d = 9.8 \text{ cm}$                          | <u>89</u>               |                                          |
| $o = ?$                                       | 28 26                   |                                          |
| $o = d\pi$                                    | <u>251</u>              |                                          |
| <b><math>o = 30.8 \dots \text{cm.}</math></b> | 30.77 ...               | Rezultat določimo na eno decimalko (mm). |

**3.** Znano je, da pripadajo enakim lokom istega kroga enaki središčni koti in obratno. Kako se torej izpreminja lok, če podvojimo, potrojimo i. t. d. pripadajoči mu središčni kot?

Kolik je lok, čigar središčni kot je enak polnemu kotu? Na podlagi tega moremo določiti po sklepnem računu dolžino loka  $l$ , ako je znan pripadajoči središčni kot  $\alpha$  in krogov polmer  $r$ .

Središčnemu kotu  $360^\circ$  pripada obod  $2r\pi$ ,

|   |   |                |   |                             |
|---|---|----------------|---|-----------------------------|
| " | " | $1^\circ$      | " | lok $\frac{2r\pi}{360}$     |
| " | " | $\alpha^\circ$ | " | " $\frac{2r\pi\alpha}{360}$ |

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{180} \quad \left( \frac{\pi}{180} = 0.0175 \dots \right)$$

Kolik je lok  $l$ , ako je n. pr.  $r = 10 \text{ cm}$  in  $\alpha = 45^\circ 18'$ ? Kot  $\alpha$  pretvori v stopinje! Če je kot  $\alpha$  določen v ločnih minutah, razdelimo obod na  $360.60 = 21.600$  delov (minut), potem je

$$l = \frac{r\pi\alpha}{10\,800}$$

Izračunati moremo tudi središčni kot  $\alpha$ , ako je znan pripadajoči mu lok  $l$  in polmer  $r$ , ter polmer  $r$ , če poznamo lok  $l$  in pripadajoči središčni kot  $\alpha$ .

Pokaži a) po sklepnem računu, b) z razrešitvijo enačbe  $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ , da je

$$\alpha = \frac{180 l}{r\pi} \text{ in } r = \frac{180 l}{\alpha\pi}$$

4. Kakor se bližajo obsegi krogu včrtanih in očrtanih pravih mnogokotnikov tem bolj krogovemu obodu, čim manjše in zato tem številnejše so stranice, ravno tako se bližajo tudi njih ploščine bolj in bolj krogovi ploščini. Če je število stranic zelo veliko, jih ne ločimo več od pripadajočih lokov, zato smemo reči, da je krog pravi mnogokotnik z neštetimi neizmerno majhnimi stranicami.

Ploščina kroga je torej kakor ploščina pravi mnogokotnika enaka ploščini trikotnika z osnovnico, enako obodu, in višino, enako polmeru (glej sliko 182.!).

$$p = \frac{or}{2}$$

Ker je  $o = 2r\pi$ , je

$$p = \frac{2r\pi r}{2} = r^2\pi.$$

Krogovo ploščino določimo, ako pomnožimo Ludolfovo število s kvadratom polmera.

Ako je znan premer  $d$ , je  $r = \frac{d}{2}$  in  $r^2 = \frac{d^2}{4}$ , torej

$$p = \frac{d^2\pi}{4}.$$

Iz obrazcev za krogovo ploščino dobimo  $r$ , oziroma  $d$

$$r^2 = \frac{p}{\pi}, \text{ torej } r = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \text{ in } d^2 = \frac{4p}{\pi}, \text{ torej } d = 2\sqrt{\frac{p}{\pi}}.$$

Izračunaj ploščino osnovnih ploskev valjev, ki jih rabimo za modele!

Naloga 1. Pretvori kroga s polmeroma  $r_1$  in  $r_2$  v en krog!



Ploščina kroga s polmerom  $r_1$  je  $p_1 = r_1^2\pi$  in ploščina kroga s polmerom  $r_2$  je  $p_2 = r_2^2\pi$ . Ako zaznamujemo polmer zahtevanega kroga z  $x$ , je po nalognem pogoju

$$x^2\pi = r_1^2\pi + r_2^2\pi = (r_1^2 + r_2^2)\pi \text{ ali}$$

$$x^2 = r_1^2 + r_2^2. \text{ Potem je}$$

$$x = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Polmer  $x$  kroga, čigar ploščina je enaka vsoti ploščin dveh krogov, je enak hipotenuzi pravokotnega trikotnika, ki sta mu kateti polmera danih krogov. (Uporaba Pitagorovega izreka pri krogih, ki imajo stranice pravokotnega trikotnika za polmere.)

Na podlagi navedenega moremo kroge seštevati, odštevati, pomnožiti in deliti tako, da je rezultat zopet krog.

*Naloga 2.* Določi približno Ludolfovo število  $\pi$  s tehtnico!

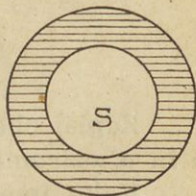
Izrežimo iz tanke cinkove pločevine krog in kvadrat s polmerom oziroma stranico, enako na primer 15 dm! Ploščina kroga je  $p = r^2\pi$  in ploščina kvadrata  $p_1 = a^2 = r^2$ . Potem je

$$\pi = \frac{p}{p_1}.$$

Ako iztehtamo plošči, dobimo za okroglo ploščo 755.64 ... g in za kvadratno ploščo 240.53 ... g. Zato je

$$\pi = \frac{755.64 \dots}{240.53 \dots} = 3.1416 \dots$$

**5.** Kako imenujemo ploskev, ki jo mejita istosrediščna ali koncentrična kroga? Kolobarjevo ploščino dobimo (sl. 232.), ako odštejemo od ploščine večjega kroga (s polmerom  $r_1$ ) ploščino manjšega kroga (s polmerom  $r_2$ ). Torej je



Slika 232.

$$p = r_1^2\pi - r_2^2\pi = (r_1^2 - r_2^2)\pi = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi.$$

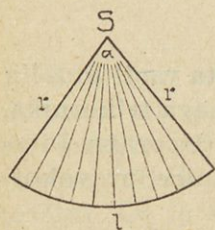
Kolobarjevo ploščino določimo, ako pomnožimo Ludolfovo število z razliko kvadratov obeh polmerov.

$$\text{Povej z besedami tudi } p = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi!$$

Razliko polmerov ( $r_1 - r_2$ ) imenujemo kolobarjevo širino.

6. Kako imenujemo del kroga, ki ga mejita dva polmera in med njima ležeči lok?

Ako razdelimo lok na mnogo prav majhnih lokov ter spojimo razdelišča s središčem  $S$ , razpade izsek ali sektor (sl. 233.) na veliko število trikotnikov s prav majhnimi osnovnicami in z višino, enako polmeru. Izsek smemo torej kot vsoto teh trikotnikov smatrati za trikotnik z osnovnico, enako loku  $l$ , in višino, enako polmeru  $r$ . Ploščina izseka je torej



Slika 233.

$$p = \frac{lr}{2}.$$

Ploščina krogovega izseka je enaka polovici produkta iz loka in polmera.

Lok  $l$  je, kakor dognano

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}, \text{ torej je } p = \frac{r\pi\alpha}{180} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Ker pripadajo enakim lokom istega kroga enaki izseki, moremo določiti izsekovo ploščino tudi po sklepnem računu.

Središčnemu kotu  $360^\circ$  pripada krog  $r^2\pi$ ,

„ „  $1^\circ$  „ izsek  $\frac{r^2\pi}{360}$ ,

„ „  $\alpha^\circ$  „ „  $\frac{r^2\pi\alpha}{360}$ ;

$$\text{torej je } p = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Zapiši obrazca za  $r$  in  $\alpha$  krogovega izseka, če poznaš  $p$  in  $\alpha$ , oziroma  $p$  in  $r$ !

Kako imenujemo del kroga, ki ga mejita tetiva in njej pripadajoči lok?

Kako bi določil ploščino krogovega odseka ali segmenta?

Vaje.

1. Določi dolžino železnih obročev za kolesa štirikolesnega voza, čigar prednji kolesi imata polmer  $r_1 = 3.6 \text{ dm}$  in čigar zadnji kolesi imata polmer  $r_2 = 4.8 \text{ dm}$ !



2. Kolikrat se zavrti krogla s premerom  $d = 18 \text{ cm}$ , ako jo zakotališ po  $15 \text{ m}$  dolgem kegljišču?

3. Izmeri obseg ravnika na šolskem globu in določi njegov polmer!

4. Kako debelo je deblo, ki meri v obsegu  $5 \text{ m}$ ?

5. Nariši krog, čigar obod je enak a) vsoti, b) razliki obodov dveh krogov s polmeroma  $r_1 = 5 \text{ cm}$  in  $r_2 = 1.5 \text{ cm}$ !

6. Kolik je polmer meridianskega kroga, ki meri približno  $40.000 \text{ km}$ ?

7. Koliko meri ločna stopinja (minuta, sekunda) na ravniku, čigar polmer je  $r = 6377 \text{ km}$ ?

8. Kolika je pot katerekoli točke na ravniku v 1 sekundi (minuti)?

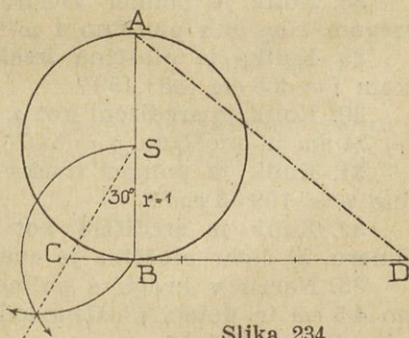
9. Kolik je lok, ki mu pripada v krogu s polmerom  $r = 8 \text{ cm}$  središčni kot  $\alpha = 45^\circ$  ( $60^\circ$ ,  $90^\circ$ )?

10. Kolik je polmer zemeljske oble, ako meri širinska stopinja  $111 \text{ km}$ ?

11. Kolik je polmer kroga, čigar lok ene stopinje meri  $1 \text{ m}$ ?

12. Kolik je polmer kroga, v katerem pripada  $10 \text{ cm}$  dolgemu loku središčni kot  $10^\circ$ ?

13. Nariši daljico, ki je enaka obodu kroga s polmerom  $r = 1 \text{ cm}$  ( $3 \text{ cm}$ )! — Naloge ne moremo natančno razrešiti z ravnilom in šestilom. Najenostavneje jo razrešimo približno, ako odmerimo na premici  $3\frac{1}{4}$  krat premer. Natančnejša je sledeča razrešitev, ki popolnoma ustreza praktičnim zahtevam. Narišimo v krajišču  $B$  premira  $AB$  (sl. 234.) tangento ter jo presekajmo s premico  $SC$ , tvorečo z  $AB$  kot  $30^\circ$ . Ako odmerimo na tangenti daljico  $CD = 3r$  in spojimo  $D$  z  $A$ , je  $AD$  približno polovica krogevega oboda (Kochanski 1685). Preizkusi natančnost z računom! ( $AD$  je hipotenuza trikotnika  $ABD$ ,  $AB = 2$  je ena kateta,  $BD = CD - CB$  je druga kateta. Izračunaj  $CB$  kot polovico stranice enakostraničnega trikotnika z višino  $BS = 1$  i. t. d.)



Slika 234.

14. Koliko časa rabi konica  $11 \text{ mm}$  dolgega kazalca, ki kaže minute, da opiše  $1 \text{ m}$  dolgo pot?

15. Kolika je ploskev vodne gladine okroglega ribnika, ki ga obideš z 250 koraki (1 korak = 0.75 m)?

16. Koliko stopinj meri lok, ki je enak krogovemu polmeru?

17. Pretvori krog s polmerom  $r = 2.5$  cm a) v trikotnik, b) v kvadrat! Glej vajo 13.!

18. Kako se izpreminja a) obseg, b) ploščina kroga s polmerom  $r = 1$  cm, ako ga podvojimo, potrojimo i. t. d.? Tablica!

19. Kolika je ploskev, ki jo mejita krogov obod ( $r = 2.5$  cm) in obseg krogu včrtanega kvadrata (pravilnega šesterokotnika)?

20. Kolik je polmer kroga, ki ima a) isti obseg, b) isto ploščino kakor kvadrat s stranico  $a = 5$  cm!

21. Kvadrat, enakostraničen trikotnik in krog imajo enak obseg  $o = 50$  cm. Izračunaj in primerjaj ploščine teh likov!

22. Krogov obod meri 100 cm; kolik je obod kroga, ki ima še enkrat tako veliko ploščino?

23. Nariši krog, ki je enak a) vsoti, b) razliki krogov s polmeroma  $r_1 = 5$  cm,  $r_2 = 3$  cm! Računaj in riši!

24. Nariši krog, ki je enak vsoti treh (štirih) določenih krogov!

25. Nariši krog, ki je dvakrat (trikrat) tako velik kakor krog s polmerom  $r = 1$  cm!

26. Nariši krog, ki je enak polovici kroga s polmerom  $r = 3$  cm!

27. Železna cev ima notranji premer 20 cm in debelino 1.8 cm; kolika je ploščina in obseg poprečnega prereza?

28. Kolik je polmer kvadranta (sekstanta, oktanta) a) z obsegom 1 m, b) s ploščino 1 m<sup>2</sup>?

29. Kolika je ploščina izseka s polmerom  $r = 7.6$  cm in lokom  $l = 3.8$  cm ( $38^\circ 15'$ )?

30. Kolik je središčni kot  $\alpha$ , ki pripada izseku s polmerom  $r = 7.4$  dm in ploščino  $p = 54.76$  dm<sup>2</sup>?

31. Kolik je polmer izseka z lokom  $l = 14.8$  cm in ploščino  $p = 109.53$  cm<sup>2</sup>?

32. Kolik je središčni kot izseka, a) čigar lok je enak polmeru, b) čigar ploščina je enaka kvadratu polmera?

33. Nariši v krogu s polmerom  $r = 3$  cm tetivo z dolžino 4.5 cm in določi ploščino odseka, ki ga mejita tetiva ter njej pripadajoči lok!

34. Včrtaj krogu s polmerom  $r = 4$  cm a) pravilni šesterokotnik, b) kvadrat in c) enakostraničen trikotnik ter določi ploščino odseka, ki ga mejita v vsakem slučaju likova stranica in nji pripadajoči lok!

35.\* Izmeri dolžino enega dela obrežja kake reke (železniškega tira) ob ovinku! Dolžino krive črte dobiš, ako jo raz-



deliš na več daljic in te izmeriš. Vsota teh daljic določa dolžino krivulje tem natančneje, čim bliže so merski drogi zakoličenih daljic. Ali je določena vsota manjša ali večja kot resnična dolžina krivulje?

## XXI. Površina in prostornina valja in stožca.

1. Kako stvorimo pokončni valj ali cylinder? Kateri ploskvi imenujemo osnovni ploskvi in kateri pravimo plašč? Kako zovemo daljice na plašču, ki leže med osnovnima ploskvama? Kdaj je valj enakostraničen? Imenuj lik, ki tvori osji presek pokončnega valja (enakostraničnega valja)!

Kakšen lik dobimo, če prerežemo plašč pokončnega valja po eni stranici ter ga razgrnemo v ravnino? Ker je ena stranica tega pravokotnika enaka obodu osnovne ploskve, druga stranica pa enaka valjevi višini, je obrazec za ploščino plašča

$$p = 2\pi r v.$$

Ako pridenemo razgrnjene-mu plašču še osnovni ploskvi (sl. 235.), vidimo, da je površina pokončnega valja enaka vsoti iz dvojne ploskve in plašča.

$$P = 2O + p = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v).$$

V enakostraničnem valju je premer osnovne ploskve enak valjevi višini (stranici). Ploščina plašča je potem

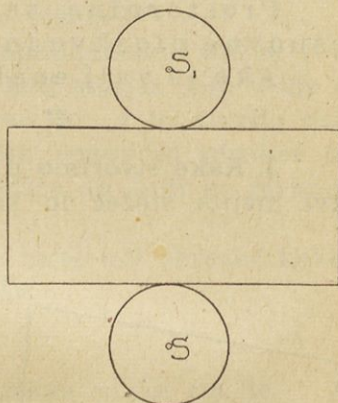
$$p = 2\pi r \cdot 2r = 4r^2\pi,$$

površina valja pa

$$P = 2r^2\pi + 4r^2\pi = 6r^2\pi.$$

2. Kako smo dognali pravilo za prostornino prizme?

Ako iztehtamo več iz iste snovi narejenih valjevih modelov s ploščinsko enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino, vidimo, da je njih teža enaka.



Slika 235.

Votli modeli istih valjev drže enako množino tekočine.

Kaj sklepamo zato o prostornini valjev z enakimi osnovnimi ploskvami in enako višino?

Ako očrtamo in včrtamo pokončnemu valju pravilne prizme, se bližajo tem bolj valju, čim večje je število stranic osnovnih ploskev. Ko je to število zelo veliko, ne ločimo več osnovnih prizmnih ploskev od krogov, stranskih ploskev od plašča in tudi ne prizme od valja.

Za prostornino valja velja torej isti obrazec kakor za prostornino prizme, namreč

$$V = Ov.$$

Ker je ploščina osnovne ploskve enaka  $r^2\pi$ , je

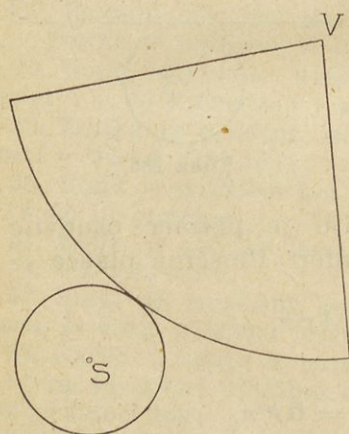
$$V = r^2\pi v.$$

Prostornina valja je enaka produktu iz osnovne ploskve in višine.

Ako je valj enakostraničen, je prostornina

$$V = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi.$$

**3. Kako stvorimo pokončni stožec? Kakšni ploskvi mejita stožec in kako jima pravimo? Kako imenujemo daljice, ki jih moremo narisati na plašču? Kdaj je stožec enakostraničen? Kakšen lik tyori osji presek pokončnega stožca (enakostraničnega stožca)?**



Slika 236.

Kakšen lik dobimo, ako prerežemo plašč pokončnega stožca po eni stranici ter ga razgrnemo v ravnino? Ker je polmer tega izseka enak stožčevi stranici  $s$ , lok pa obodu osnovne ploskve, je obrazec za ploščino stožčevega plašča

$$p = \frac{lr}{2} = \frac{2\pi rs}{2} = r\pi s.$$

Če pridenemo razgrnjenemu plašču še osnovno ploskev (sl. 236.), vidimo, da je površina pokončnega



stožca enaka vsoti iz osnovne ploskve in plašča.

$$P = O + p = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s).$$

V enakostraničnem stožcu je premer osnovne ploskve enak stožčevi stranici. Potem je ploščina plašča

$$p = 2r^2\pi$$

in površina stožca

$$P = r^2\pi + 2r^2\pi = 3r^2\pi.$$

4. Ako iztehtamo več iz iste snovi narejenih stožčevih modelov z enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino, vidimo, da imajo enako težo.

Votli modeli istih stožcev drže enako množino tekočine.

Kaj sklepamo zato o prostornini stožcev z enakimi osnovnimi ploskvami in z enako višino?

Ako očrtamo in včrtamo pokončnemu stožcu pravilne piramide, se bližajo tem bolj stožcu, čim večje je število stranic osnovnih ploskev. Ko je to število zelo veliko, ne ločimo več piramidnih osnovnih ploskev od kroga, stranskih ploskev od plašča in tudi ne piramid od stožca.

Za prostornino stožca velja torej isti obrazec kakor za prostornino piramide, namreč

$$V = \frac{O_v}{3}.$$

Ker je ploščina osnovne ploskve enaka  $r^2\pi$ , je

$$V = \frac{r^2\pi v}{3}.$$

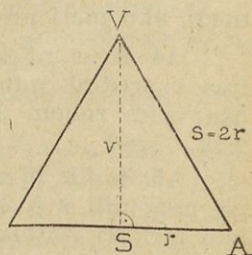
Prostornina stožca je enaka tretjini produkta iz osnovne ploskve in višine.

Ako je stožec enakostraničen, je osji presek enakostraničen trikotnik (sl. 237.). Višino dobimo iz pravokotnega trikotnika ASV

$$v = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Potem je

$$V = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}.$$



Slika 237.

## Vaje.

1. Določi površino in prostornino valjev, ki jih rabimo za modele!

2. Koliko kartona rabiš za mrežo pokončnega valja s polmerom  $r = 4 \text{ cm}$  in z višino  $v = 12 \text{ cm}$ ? Sestavi telo!

3. Kolik je plašč pokončnega valja, ki ima polmer enak višini  $v = 8.6 \text{ cm}$ ? Primerjaj ploščino plašča s ploščino osnovne ploskve!

4. Koliko vode drži  $4 \text{ m}$  globok vodnjak s premerom  $d = 1.2 \text{ m}$ ?

5. Kolika je površina in prostornina valjev, ki nastaneta, ako vrtimo pravokotnik s stranicama  $a = 5.8 \text{ cm}$  in  $b = 8.6 \text{ cm}$  okoli srednjic?

6. Koliko kubičnih metrov lesa da  $4.8 \text{ m}$  dolgo in  $1.2 \text{ m}$  debelo bukovo deblo približno valjaste oblike? Koliko tehta deblo?

7. Valjev osji presek je kvadrat s ploščino  $1.44 \text{ m}^2$ ; kolik je plašč in kolika je višina in prostornina valja?

8. Razgrnjen valjev plašč je kvadrat s stranico  $3 \text{ dm}$ ; kolika je višina in prostornina valja?

9. Kako se izpreminja a) površina, b) prostornina enakostraničnega valja s premerom  $1 \text{ dm}$ , ako podvojimo, potrojimo i. t. d. premer?

10. Kako raste prostornina valja z neizpremenjeno osnovno ploskvijo (višino), ako podvojimo, potrojimo i. t. d. višino (premer)?

11. Kako raste valjeva prostornina, ako podvojimo, potrojimo i. t. d. obenem premer in višino?

12. Kako raste valjeva prostornina, ako ne izpremenimo višine, pač pa podvojimo, potrojimo i. t. d. obseg osnovne ploskve?

13. Kolika je višina  $1 \text{ kg}$  težke uteži valjaste oblike iz medi, ako meri premer  $4.5 \text{ cm}$ ?

14. Brusilni kamen z debelino  $6 \text{ cm}$  in z obsegom  $1 \text{ m}$  ima v sredini izdolbeno luknjo v obliki kvadratne prizme z osnovnim robom  $2.5 \text{ cm}$ ; koliko tehta kamen (specifična teža  $2.42 \dots \text{ g}$ )?

15. Kolik bi moral biti votel enakostraničen valj, da bi ga napolnili s  $512$  tonami živega srebra, ki ga dobavlja na leto idrijski rudnik?

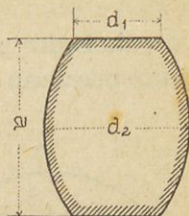
16. Koliko bi tehtala  $2.5 \text{ m}$  dolga železna cev s poprečnim prereзом na sliki 232. ( $1:100$ )?



17. Enakostraničen valj in kocka imata enako površino  $50 \text{ dm}^2$ ; izračunaj in primerjaj prostornini teles!

18. Prostornina soda je približno enaka prostornini pokončnega valja, čigar višina je enaka sodovi dolžini  $a$  in čigar premer  $d$  je enak tretjini vsote iz premera  $d_1$  sodovega dna in dvojne sodove debeline  $d_2$  (sl. 238.).

$$v = a, d = \frac{d_1 + 2d_2}{3}; V = \frac{d^2 \pi a}{4}.$$



Slika 238.

Koliko litrov drži n. pr.  $1.5 \text{ m}$  dolg in  $1.3 \text{ m}$  debel sod, ako meri premer dna  $1 \text{ m}$ ?

19. Koliko kartona rabiš za plašč pokončnega stožca s stranico  $s = 5 \text{ cm}$  in središčnim kotom  $\alpha = 180^\circ$ ? Sestavi telo!

20. Kolika je površina in prostornina pokončnega stožca s premerom  $d = 8 \text{ cm}$  in z višino  $v = 12 \text{ cm}$ ?

21. Kolika je površina in prostornina telesa, ki nastane, ako vrtimo enakokraki pravokotni trikotnik s hipotenuzo  $c = 30 \text{ cm}$  a) okoli katete, b) okoli hipotenuze?

22. Stranica pokončnega stožca meri  $1 \text{ dm}$  in višina  $0.8 \text{ dm}$ ; kolika je površina in prostornina stožca?

23. Odgovori na vprašanja 9., 10., 11. in 12. vaje, ako zamenjaš besedo valj z besedo stožec!

24. Koliko kilogramov voska drži posoda z obliko enakostraničnega stožca s premerom  $d = 20 \text{ cm}$  ( $10.38 \text{ dm}$ )?

25. Osji presek stožca je enakostraničen trikotnik s ploščino  $p = 100 \text{ cm}^2$ ; kolika je površina in prostornina stožca?

26. Streha okroglega stolpa ima obliko pokončnega stožca z višino  $v = 8 \text{ m}$  in z obsegom osnovne ploskve  $o = 24 \text{ m}$ . Koliko stane pleskanje strehe, ki je pokrita z bakreno pločevino, ako se računa  $850 \text{ v}$  za  $1 \text{ m}^2$ ?

27. Kolik je polmer in kolika je površina enakostraničnega stožca s prostornino  $V = 50 \text{ cm}^3$  ( $27.849 \text{ dm}^3$ )?

28. Pri prelitju svinčenega pokončnega valja s polmerom  $r = 10 \text{ cm}$  in z višino  $v = 30 \text{ cm}$  v enakostraničen stožec računamo na izgubo svinca  $5\%$ ; kolik je stožčev premer?

29. Kolika je površina in prostornina pokončnega stožca s polmerom  $r = 21 \text{ cm}$  in s stranico  $s = 35 \text{ cm}$ ?

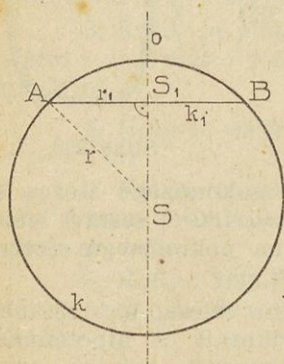
30. Pokaži, da je razgrnjeni plašč enakostraničnega stožca polkrog!

31. Kocka, enakostraničen valj in enakostraničen stožec imajo enako prostornino  $V = 512 \text{ m}^3$ ; primerjaj površine teles!

32. Pokončnemu stožcu s polmerom  $r = 5 \text{ dm}$  in višino  $v = 12 \text{ dm}$  sta vrtani pravilna četrstrostranična in pravilna šesterostranična piramida; izračunaj in primerjaj površine in prostornine teh teles!

## XXII. Površina in prostornina krogle.

1. Kako stvorimo kroglo? Katerim krogelnim krogom pravimo veliki krogelni krog?



Slika 239.

Ako vrtimo okoli osi  $o$  (sl. 239.) krog  $k$  s tetivo  $AB$ , ki je pravokotna na osi, nariše krog krogelno ploskev, tetiva pa krog  $k_1$ , čigar središče  $S_1$  leži na osi. Če je  $r$  krogelni polmer,  $r_1$  polmer in  $s$  središčna razdalja kroga  $k_1$ , je po Pitagorovem izreku

$$r^2 = s^2 + r_1^2, \quad s = \sqrt{r^2 - r_1^2} \quad \text{in} \\ r_1 = \sqrt{r^2 - s^2}.$$

Ali moremo razgrniti krogelno ploskev v ravnino?

Obrazec za krogelno površino si zapomnimo brez utemeljevanja:

$$P = 4r^2\pi.$$

Krogelna površina je enaka štirikratni ploščini velikega krogelnega kroga.

Iz navedenega obrazca sledi

$$r^2 = \frac{P}{4\pi} \quad \text{in} \quad r = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}.$$

Kolika je površina, ako je znan krogelni premer?

2. Ako si mislimo na krogelni ploskvi razdeljen ravnik in en meridijski krog na mnogo prav majhnih delov ter narisane skoz razdelišča meridiane in vzporednike, je krogelna ploskev preprežena z mrežo, sestoječo iz zelo mnogo prav majhnih četverkotnikov, oziroma trikotnikov. Mislimo si oglišča teh likov spojena s krogelnim središčem, potem razpade krogla na zelo mnogo prav tankih piramid, ki imajo omenjene like za osnovne ploskve in krogelni polmer za višino. Namesto vseh teh piramid si mislimo eno samo, ki ima isto višino, za osnovno ploskev pa vsoto osnovnih ploskev vseh teh piramid. Ta



piramida ima isto prostornino kot vse majhne piramide skupaj.

Iz tega sklepamo, da je krogla prostorno enaka piramidi, ki ima osnovno ploskev enako krogelni površini  $P$  in višino, enako krogelnemu polmeru  $r$ .

$$V = \frac{Pr}{3}.$$

Ker je krogelna površina  $P = 4r^2\pi$ , je prostornina

$$V = 4r^2\pi \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Krogelna prostornina je enaka tretjini produkta iz površine in polmera.

Iz obrazca za površino sledi

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Zapiši obrazec za prostornino, ako je znan krogelni premer!

*Vaje.*

1. Kolik je polmer in ploščina krogelnega kroga s središčno razdaljo  $s = 1 \text{ cm}$  (2 cm, 3 cm), ako meri krogelni polmer 5 cm?

2. Kolika je središčna razdalja krogelnega kroga s ploščino  $36,32 \text{ cm}^2$ , ako meri krogelni polmer 8 cm?

3. Določi površino in prostornino šolskega globa!

4. Nariši krog, čigar ploščina je enaka površini krogle s polmerom  $r = 1 \text{ cm}$ !

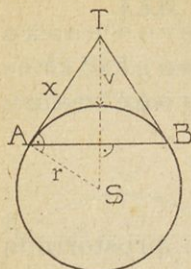
5. Površina zemeljske oble meri  $9,282.000 \text{ km}^2$ ; kolik je zemeljski polmer?

6. Kako raste a) površina, b) prostornina krogle s polmerom  $r = 1 \text{ cm}$ , ako polmer podvojimo, potrojimo i. t. d.?

7. Kolika je površina in prostornina zemeljske oble s polmerom  $r = 6360 \text{ km}$  in kolika je površina in prostornina solne oble, ki ima 108krat tako velik polmer kakor zemlja?

8. Kolika je površina in prostornina slonokoščene biljardne krogle, ki tehta 200 g?

9. Kako daleč bi segal naš pogled s Triglava (2863 m) in kako daleč z Montblanka (4810 m), ako ne bi obzora zakrivale gore i. dr.? (Glej sliko 240.! Če zavrtimo krog okoli  $TS$ , nariše kroglo, tangenta  $TA$  plašč pokončnega stožca in tetiva  $AB$  stožčev osnovni krog [obzor]. Trikotnik  $SAT$  je pravokoten i. t. d.)



Slika 240.

10. Koliko bi tehtala a) krogla iz plute ali probkovine, b) steklena krogla s polmerom  $r = 1\text{ m}$ ? Preden računaš, presodi približno težo!

11. Svinčnica ima obliko pokončnega stožca s polkroglo ob osnovni ploskvi. — Kolika je površina in prostornina telesa, ako meri polmer stožčeve ploskve  $1,5\text{ cm}$  in višina  $4\text{ cm}$ ? Teža?

12. Kolik je plašč krogli ( $r = 1\text{ dm}$ ) očrtanega pokončnega valja? Primerjaj valjev plašč s krogelno površino!

13. Kolik je polmer krogle, ki jo dobimo, ako prelijemo krogli s polmeroma  $r_1 = 12\text{ cm}$  in  $r_2 = 15\text{ cm}$  v eno?

14. Kolik je polmer krogle, ki ima še enkrat tako veliko površino kot krogla s polmerom  $r = 5\text{ cm}$ ?

15. Koliko tehta krogla s premerom  $d = 30\text{ cm}$ , ki se pogrezne ravno do polovice v vodo? (Tehta toliko kot izpodrinjena voda.)

16. Kocka in krogla imata enako prostornino  $V = 20\text{ cm}^3$ ; katero telo ima večjo površino?

17. Pokončni stožec s polmerom  $r = 8\text{ cm}$  in z višino  $v = 12\text{ cm}$  prelijemo v kroglo; kolik je krogelni premer?

18. Iz svinčene kocke ( $a = 1\text{ dm}$ ) vlijemo deset enakih krogel; kolik je polmer vsake krogle, ako računamo  $5\%$  na izgubo svinca pri vlivanju?

19. V votlem pokončnem valju s polmerom  $r = 10\text{ cm}$  sega voda  $8\text{ cm}$  visoko; ako vržemo noter kroglo, vzraste gladina vode do  $15\text{ cm}$ . Kolik je krogelni polmer?

20. Enakostraničnemu valju ( $r = 1\text{ dm}$ ) sta včrtana krogla in pokončni stožec, čigar osnovna ploskev se krije z eno valjevo osnovno ploskvijo in čigar višina je enaka valjevi višini. Izračunaj ter primerjaj prostornino teh teles!



### Specifična teža nekaterih teles (g):

|               |           |                 |           |
|---------------|-----------|-----------------|-----------|
| aluminij      | 290 ...   | pluta           | 0.19 ...  |
| baker         | 888 ...   | slonokost       | 1.92 ...  |
| cink          | 711 ...   | steklo          | 2.57 ...  |
| granit        | 268 ...   | srebro          | 10.53 ... |
| jeklo         | 781 ...   | svinec          | 11.35 ... |
| les (bukov)   | 0.56 ...  | voda (4° C)     | 1         |
| les (lipov)   | 0.54 ...  | vosek           | 0.97 ...  |
| les (smrekov) | 0.55 ...  | zlato           | 19.32 ... |
| marmor        | 2.69 ...  | železo (lito)   | 7.21 ...  |
| med (mesing)  | 8.39 ...  | železo (kovano) | 7.70 ...  |
| platina       | 21.31 ... | živo srebro     | 13.59 ... |









NARODNA IN UNIVERZITETNA  
KNJIŽNICA



00000512045



