

Razvoj matematičnega mišljenja pri reševanju problemov

Prejeto 02.08.2017 / Sprejeto 15.01.2018

Znanstveni članek

UDK 37.02:51+159.955

KLJUČNE BESEDE: matematični problemi, kritično mišljenje, ustvarjalno mišljenje, didaktično-matematična aktivnost, pouk matematike

POVZETEK – Zastavljanje in reševanje problemov kot didaktično-matematična aktivnost pomembno prispeva k napredku posameznika pri učenju matematike. Učitelji naj bi stremeli k temu, da učenci razvijajo kritično in ustvarjalno mišljenje ter zgradijo uporabno znanje, ki omogoča uspešno reševanje (matematičnih) problemov. V prispevku predstavljamo rezultate raziskave, s katero smo ugotavljali, ali so učenci iz eksperimentalne skupine (ES), ki so bili deležni pouka, pri katerem je zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost, uspešnejši pri reševanju vseh vrst matematičnih problemov kot učenci iz kontrolne skupine (KS), ki so bili deležni klasičnega pouka matematike, v katerem se poudarja predvsem trening aritmetičnih operacij. Rezultati so pokazali, da je bila ES statistično pomembno uspešnejša pri reševanju enostavnih problemov iz geometrije z merjenjem (G2) in logike z množicami (L2) ter v reševanju zahtevnejših problemov (tretji nivo znanja) iz geometrije z merjenjem (G3) in logike z množicami (L3). Učenci ES so bili uspešnejši tudi pri reševanju enostavnih problemov iz aritmetike (A2) in zahtevnejših problemov iz aritmetike (A3), vendar razlike niso bile statistično pomembne.

Received 02.08.2017 / Accepted 15.01.2018

Scientific paper

UDC 37.02:51+159.955

KEYWORDS: mathematical problem, critical thinking, creative thinking, didactic-mathematical activity, teaching of mathematics

ABSTRACT – Setting and solving problems as didactic-mathematical activity significantly contributes to the progress of the individual in learning mathematics, where the teacher also plays an important role. Teachers should strive for students to build the knowledge needed to successfully solve mathematical problems and place greater emphasis on developing critical and creative thinking, rather than on merely formal acquisition of knowledge. In the article we present the results of a research, with which we determined whether the students of the experimental group (EG), who received mathematical teaching where setting and solving problems is the leading didactic-mathematical activity, performed better in solving all mathematical problems than the students in the control group (CG), who received classical teaching of mathematics where training of arithmetic operations is predominantly emphasised. The results showed the EG was statistically significantly more successful in solving simple problems in geometry with measuring (G2) and in logic with sets (L2) as well as in solving more demanding problems (third level of knowledge) in geometry with measuring (G3) and logic with sets (L3). The students of the EG were also more successful in solving simple problems in arithmetic (A2) and more demanding problems in arithmetic (A3), the differences were, however, not statistically significant.

1 Uvod

Nacionalne in mednarodne evalvacije opozarjajo na pomanjkljivo znanje matematike in slabo razvite kompetence, zaradi česar se vedno znova postavlja vprašanje o kakovosti učenja in poučevanja matematike (UNESCO, 2012). Tudi v poročilu omrežja Eurydice "Matematično izobraževanje v Evropi: skupni izzivi in nacionalne politike", v katerem so predstavljeni pogledi nacionalnih evropskih politik in primerjalna analiza

poučevanja matematike v Evropi, so navedeni podatki o problematičnih predmetnih vsebinah in spretnostih. Med pogostimi težavnimi področji za učence, poleg algebre in matematičnega sporazumevanja, prepoznano tudi *kontekstualno* reševanje problemov (Kresal Sterniša, Plevnik, 2012).

Rezultati med drugim opozarjajo, da bi v izobraževanju morali stremeti k temu, da učenci pridobijo tudi sposobnost za uspešno reševanje matematičnih problemov in problemov v zvezi z življenjskimi situacijami, se bolj posvetiti razvijanju kritičnega mišljenja, manj pa zgolj formalnemu usvajanju znanja (Jacobs et al., 2007). Omenjeno znanje pa učenci težje pridobijo, kadar so v učenje vključeni zgolj kot pasivni prejemniki znanja. Problemsko znanje učenec gradi skozi različne problemske situacije. Tiste, ki so za učenca nove in jih ne more predvideti, torej niso vnaprej pričakovane, spodbujajo razvoj matematičnega razmišljanja: ustvarjalnega, kritičnega, analitičnega in sistemskega mišljenja (Žakelj, 2003).

Podobno tudi Maričič in Špijunović (2014) menita, da se mora poučevanje matematike usmeriti v razvijanje mišljenja, saj ni pomembno le to, da učenec usvoji neko matematično znanje, ampak da je usposobljen to znanje uporabiti, kritično presojati njegovo uporabo in ustrezno preverjati dobljeni rezultat.

Učenec bi moral prevzeti aktivnejšo vlogo v procesu izobraževanja, saj bi tako lahko postal bolj ustvarjalen in samostojen, hkrati pa bi razvijal logično mišljenje in se usposabljal za reševanje problemov v zvezi z vsakdanjimi problemskimi situacijami, kar predstavlja neposredno uporabo matematike v vsakdanjem življenju. Nasprotno pa poročila Evropske komisije (2007) opozarjajo, da v praksi matematičnega izobraževanja prevladuje formalni pouk, usmerjen na tehnike pomnjenja pravil, ki jih učenci velikokrat ne razumejo. Učenci ne vidijo povezave med novim znanjem in koncepti, ki so jih predhodno usvojili, matematike ne znajo povezovati z vsakdanjim življenjem, pri svojem delu niso samostojni in pogosto le ponavljajo določene dejavnosti ali postopke.

Poučevanje lahko izvedemo tako, da učenec aktivno pridobiva znanje, razvija svoje sposobnosti mišljenja in sklepanja ter tako dobi kvalitetno znanje, ki ga lahko uporabi pri reševanju problemov v vsakdanjem življenju. Ti načini poučevanja običajno slonijo na socio-konstruktivističnem pristopu k učenju (Ernest, 1998) in poudarjajo problemski pristop k poučevanju matematike. Učence motiviramo z izbranimi problemi, ob reševanju le-teh pa spoznajo nove koncepte ali se usposobijo za uporabo že znanih konceptov (UNESCO, 2012).

2 Reševanje problemov kot cilj matematičnega izobraževanja

Reševanje problemov je ena izmed ključnih kompetenc, ki se preverja v mednarodnih raziskavah, kot sta TIMSS in PISA. Prav rezultati teh raziskav so bili eden izmed razlogov za iskanje novih pristopov k učenju in poučevanju matematike, pri čemer naj bi s pridobivanjem faktografskega znanja prešli na razvijanje sposobnosti reševanja problemov in povezovanje matematike z realnim kontekstom. Tako torej reševanje problemov ni le cilj pri učenju matematike, pač pa glavno sredstvo tega učenja (NCTM, 2000).

Reševanje problemov je pomembna veščina, ki je neobhodno potrebna v življenju, saj vključuje analizo, tolmačenje, sklepanje, predvidevanje, ocenjevanje in refleksijo, zato bi moralo biti pglavilni cilj in temeljna sestavina učnega načrta za matematiko (Anderson, 2009). Pri začetnem pouku matematike je ključna izbira vsebin, s katerimi lahko dosežemo določene cilje (Maričić, Špijunović, 2015). Vsebine se morajo navezovati na realne matematične probleme, učenje pa mora biti voden proces odkrivanja matematičnih idej, s katerimi učenec usvaja matematične koncepte z razumevanjem. Ko rešuje probleme, je učenec v središču učenja, saj uporablja že razvite sposobnosti abstrakcije, analize, sinteze, posploševanja ipd., obenem pa te sposobnosti nadgrajuje, s tem pa razvija ustvarjalnost, logično in kritično mišljenje. V takem procesu stalno povezuje teorijo in prakso, razvija strategije reševanja problemov in se uči ob aktivnem procesu izgrajevanja znanja, obenem pa pridobiva znanje, ki ima večjo transferno vrednost pri kasnejšem učenju (Remillard, Kaye, 2002).

3 Metodologija

3.1 Problem in cilji raziskave

V raziskavi smo želeli ugotoviti, ali so učenci iz eksperimentalne skupine (ES), ki so bili deležni matematičnega pouka, pri katerem je zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost, uspešnejši pri reševanju vseh vrst matematičnih problemov kot učenci iz kontrolne skupine (KS), ki so bili deležni klasičnega pouka matematike, v katerem se poudarja predvsem trening aritmetičnih operacij. Uspešnost reševanja smo preverjali z nalogami, ki so merile znanje pri reševanju enostavnih problemov (drugi nivo znanja) in zahtevnejših problemov (tretji nivo znanja), in sicer z vsebinami iz aritmetike, geometrije z merjenjem in logike z množicami.

V ta namen smo sestavili pisna preizkusa: z enim smo preverili uspešnost reševanja problemov na začetku, z drugim pa na koncu šolskega leta. Pri sestavljanju preizkusov smo bili pozorni na občutljivost, objektivnost, zanesljivost in veljavnost.

3.2 Raziskovalna hipoteza

Učenci iz ES, ki bodo deležni matematičnega pouka, pri katerem je zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost, bodo uspešnejši pri reševanju vseh vrst matematičnih problemov kot učenci iz KS, ki bodo deležni klasičnega pouka matematike, v katerem se poudarja predvsem trening aritmetičnih operacij.

3.3 Metoda

V naši raziskavi je bila uporabljena kavzalno-eksperimentalna metoda. Uporabljen je bil pedagoški eksperiment z namernim vnašanjem eksperimentalnega faktorja v raz-

iskovalno situacijo, da smo lahko preučevali vpliv pouka, pri katerem je zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost.

3.4 Vzorec

V eksperimentu je sodelovalo 179 učencev drugega razreda osnovnih šol. Učenci so bili razdeljeni v 2 skupini: v eksperimentalni (ES) jih je bilo 89, v kontrolni skupini (KS) pa 90. Osnovne šole, katerih učence smo vključili v raziskavo, so bile mestne šole z izenačenimi dobrimi pogoji za delo, v razredih je bilo približno enako število otrok, in sicer od 19 do 24.

Začetni in končni test znanja smo za namen raziskave oblikovali sami. Upoštevali smo učni načrt in cilje, ki so v njem. Značilnosti začetnega in končnega testa znanja smo preverili na pilotskem vzorcu 79 učencev drugega razreda naključno izbranih osnovnih šol. Določili smo najvažnejše merske značilnosti: objektivnost, zanesljivost, veljavnost in občutljivost.

Tako začetni kot končni test sta vsebovala po šest nalog: tri za preverjanje uspešnosti reševanja preprostih realnih problemov in tri za preverjanje uspešnosti reševanja zahtevnejših realnih problemov. Vsak sklop treh nalog je vseboval po eno nalogo iz vsake matematične vsebine: aritmetike, geometrije z merjenjem ter logike in jezika. Začetni test smo izvedli na začetku šolskega leta, končni test pa ob zaključku šolskega leta.

4 Rezultati in interpretacija

Rezultate smo tolmačili v skladu z dokazovanjem postavljenih hipotez. Pri preizkusih hipotez smo upoštevali pravilo, da je največje dopustno tveganje za zavrnitev hipoteze 5%, izbrana vrednost za stopnjo pomembnosti je torej 0,05. V tabeli 1 so predstavljeni osnovni statistični parametri uspešnosti reševanja nalog, ki so merile znanje pri reševanju enostavnih problemov (drugi nivo znanja) na končnem testu, in sicer z vsebinami iz aritmetike (A2), geometrije z merjenjem (G2) in logike z množicami (L2), v tabeli 2 pa osnovni statistični parametri uspešnosti reševanja nalog, ki so merile znanje pri reševanju zahtevnejših problemov (tretji nivo znanja) na končnem testu, in sicer prav tako z vsebinami iz aritmetike (A3), geometrije z merjenjem (G3) in logike z množicami (L3).

Če primerjamo razlike v aritmetičnih sredinah vseh spremenljivk med ES in KS (tabeli 1 in 2), ugotovimo, da je bila ES uspešnejša tako pri reševanju enostavnih kot zahtevnejših problemov. Učenci iz ES so veliko bolje kot njihovi vrstniki iz KS reševali probleme iz geometrije z merjenjem, predvsem pa probleme iz logike. Čeprav so v ES uspešnejše kot v KS reševali tudi aritmetične probleme, pa razlike v aritmetičnih sredinah spremenljivk A2 in A3 niso tako velike.

Tabela 1: Osnovni statistični parametri pri nalogah, ki so merile znanje pri reševanju enostavnih problemov (drugi nivo znanja) na končnem testu

Test	Skupina	n	Aritmetična sredina	Dosežki v %	Standardni odklon	Min	Max
A2	ES	89	11,38	87,54	2,00	5,00	13,00
	KS	90	10,29	79,19	2,99	1,00	13,00
G2	ES	89	2,03	67,80	0,96	0,00	3,00
	KS	90	1,53	51,11	1,11	0,00	3,00
L2	ES	89	0,71	70,79	0,46	0,00	1,00
	KS	90	0,09	08,89	0,29	0,00	1,00

Tabela 2: Osnovni statistični parametri pri nalogah, ki so merile znanje pri reševanju zahtevnejših problemov (tretji nivo znanja) na končnem testu

Test	Skupina	n	Aritmetična sredina	Dosežki v %	Standardni odklon	Min	Max
A3	ES	89	8,79	51,70	4,88	0,00	17,00
	KS	90	6,54	38,50	4,86	0,00	16,00
G3	ES	89	1,10	55,00	0,94	0,00	2,00
	KS	90	0,85	42,70	0,96	0,00	2,00
L3	ES	88	0,99	49,43	0,88	0,00	2,00
	KS	90	0,62	31,11	0,82	0,00	2,00

Z analizo kovariance z eno kovariabla (rezultati začetnega testa) smo preverili, v katerih spremenljivkah sta se skupini na koncu eksperimenta statistično pomembno razlikovali. V tabeli 3 so prikazane razlike v končnem stanju po parcializaciji rezultatov začetnega stanja (analiza kovariance) v znanju aritmetike (A2), geometrije z merjenjem (G2) in logike z množicami (L2) na drugi ravni znanja, v tabeli 4 pa v znanju aritmetike (A3), geometrije z merjenjem (G3) in logike z množicami (L3) na tretji ravni znanja.

Tabela 3: Prikaz razlik v znanju na drugi ravni v končnem stanju po parcializaciji rezultatov začetnega stanja

Test	Vir variacije	Vsota kvadratov	Prostostne stopnje	Varianca	F	Raven statistične pomembnosti
A2	v skupini	5,088	1	5,088	1,174	0,280
	med skupinama	758,558	175	4,335		
G2	v skupini	5,734	1	5,734	6,024	0,015
	med skupinama	166,565	175	0,952		
L2	v skupini	17,591	1	17,591	125,979	0,000
	med skupinama	24,576	176	0,140		

Tabela 4: Prikaz razlik v znanju na tretji ravni v končnem stanju po parcializaciji rezultatov začetnega stanja

Test	Vir variacije	Vsota kvadratov	Prostostne stopnje	Varianca	F	Raven statistične pomembnosti
A3	v skupini	19,726	1	19,726	1,504	0,222
	med skupinama	2295,814	175	13,119		
G3	v skupini	3,301	1	3,301	4,006	0,047
	med skupinama	145,102	176	0,824		
L3	v skupini	2,462	1	2,462	4,070	0,045
	med skupinama	105,874	175	0,605		

Iz tabele 3 in 4 je razvidno, da se skupini statistično pomembno razlikujeta v štirih spremenljivkah od šestih, in sicer v G2, L2, G3 in L3. Iz tabel 1, 2, 3 in 4 razberemo, da je ES uspešnejše kot KS reševala tako enostavne kot zahtevnejše probleme iz aritmetike (A2 in A3), čeprav razliki med skupinama nista statistično pomembni. Tako v ES kot v KS so učiteljice izvajale matematični pouk po učnem načrtu, vendar je bil koncept pouka v obeh skupinah bistveno drugače zastavljen. V ES je imel vodilno in osrednje mesto v vseh matematičnih vsebinah matematični problem in z njim povezano reševanje in raziskovanje problemov. Pouk v KS pa je bil bolj naravnana na obvladovanje algoritmov oziroma na poučevanje in učenje določenih receptov in računskih spretnosti. Tudi matematične probleme, ki so bili v glavnem enolično rešljivi in večinoma le iz aritmetike, so učenci KS reševali na tradicionalen način po modelu *račun, odgovor*; manjkala so navodila za reševanje teh problemov na različnih prezentacijskih nivojih in smiselno voden analitično-sintetični proces (Tomić, 1984).

Učenci obeh skupin so zelo dobro reševali enostavne aritmetične probleme, saj se ti najpogosteje pojavljajo v učbenikih in delovnih zvezkih, pa tudi učitelji jih najpogosteje zastavljajo. Tak je na primer naslednji: *Mama je stara 31 let. Hčerka Ana je 20 let mlajša. Koliko je stara Ana?* Tovrstne probleme je pravilno rešilo 87,5% učencev iz ES in 79,2% učencev iz KS.

Tudi enostavne probleme iz logike in geometrije so uspešnejše reševali učenci ES. Pokazalo se je, kako ozek izsek problemov rešujejo učenci v KS, saj so le redkokdaj reševali probleme iz logike in geometrije z merjenjem. Pri enostavnih problemih iz logike so morali učenci razvrščati elemente dane množice glede na dve lastnosti in pri tem uporabljati različne prikaze (na primer Carrollov prikaz). V ES je bilo pri teh nalogah uspešnih kar 70,8% učencev, medtem ko v KS samo 9% učencev, čeprav se taki problemi pojavljajo tudi v predpisanem matematičnem učbeniku za 2. razred.

Učenci ES so pri pouku reševali take matematične naloge preko treh prezentacijskih nivojev, in sicer na nenaktivnem, ikoničnem in simbolnem, medtem ko so jih učenci KS reševali le v delovnem zvezku na ikoničnem ali simbolnem nivoju. Pri slednjih je bila izpuščena konkretna izkustvena aktivnost, ki je na nivoju prvih treh razredov osnovne šole ena od obveznih stopničk k razvijanju kognitivnih procesov. Hkrati pa učenci KS preglednic niso smiselno vključevali v reševanje različnih problemov, tako matematičnih kot nematematičnih.

Pri enostavnih problemih iz geometrije z merjenjem je bilo uspešnih 67,8% učencev ES in 51,1% učencev KS. Čeprav so bili problemi zelo preprosti in bi jih glede na Mialaretovo klasifikacijo (1969) uvrstili v enostavne vodene probleme, so bili učencem KS tuji, saj so sami izjavili, da so bili drugačni od tistih, ki jih rešujejo v šoli. V naših šolah so učenci navajeni, da pri preizkusih znanja v glavnem rešujejo naloge, ki so zelo podobne (ali celo enake) tistim, ki jih rešujejo pri pouku. Ker pri pouku matematike ne razvijamo različnih strategij reševanja matematičnih problemov, so učenci pri reševanju "drugačnih" problemov neobgljeni.

Tudi pri zahtevnejših problemih so bili uspešnejši učenci iz ES. Povprečen dosežek pri reševanju zahtevnejših problemov iz aritmetike je bil 51,78% v ES, v KS pa 38,50%. Pri geometrijskih problemih je bil povprečen dosežek v ES 55%, v KS 42,70%. Ravno tako so bile velike razlike v znanju pri problemih iz logike (ES je dosegla 49,43%, KS pa 31,11%). K zahtevnejšim problemom smo uvrstili sestavljene (vodene in nevodene) probleme:

- ki nimajo zadostnega števila podatkov za rešitev;
- ki imajo več podatkov, kot je potrebnih za rešitev;
- z več rešitvami;
- v katerih dane podatke preberemo iz preglednice.

Poleg tega so morali učenci pri testu reševati še naslednje naloge:

- k dani ilustraciji oblikovati smiselni problem in ga nato rešiti;
- k besedilu problema postaviti smiselno vprašanje in nato problem rešiti;
- izbrati matematični problem, ki sodi k danemu računu.

Učenci iz KS so od naštetih problemov pri pouku matematike reševali predvsem sestavljene probleme, nekoliko manj tudi probleme, kjer so dane podatke prebrali iz preglednice, in naloge, pri katerih so k dani ilustraciji oblikovali smiselni problem. V ES pa so pri pouku reševali vse naštete probleme. Zanimivo je, da so učenci iz obeh skupin najslabše reševali *sestavljene* probleme. V ES je pravilno rešilo te probleme 18,5% učencev, v KS 14,4% učencev. Čeprav te probleme pogosto rešujejo pri pouku matematike, pa so samo nekateri učenci sposobni sami, brez učiteljevega vodenja, sestavljeni problem razstaviti na podprobleme in si pri tem postavljati vmesna vprašanja, ki jih privedejo do rešitve.

Poglejmo, kako uspešno so reševali še druge vrste zahtevnejših problemov (tabela 5):

Tabela 5: Strukturni odstotki uspešnosti učencev ES in KS pri zahtevnejših problemih

Problemi	Dosežki v%	
	ES	KS
ki imajo več podatkov, kot je potrebnih za rešitev	59,5	41,6
ki nimajo zadostnega števila podatkov za rešitev	82,0	63,3
z več rešitvami	20,8	10,0
v katerih so dane podatke prebrali iz preglednice	80,5	71,1
k dani ilustraciji oblikovati smiselni problem	78,4	62,6
k tekstu problema postaviti smiselno vprašanje	54,3	37,4
izbrati matematični problem, ki sodi k danemu računu	71,6	44,4

Iz tabele razberemo, da so bili pri vseh vrstah problemov učenci ES uspešnejši kot učenci KS. Oboji so slabo reševali *probleme z več rešitvami* (v ES je bil dosežek 20,8%, v KS pa 10%), saj so se v večini primerov zadovoljili z eno rešitvijo, čeprav je bilo v nalogi zapisano, naj zapišejo vse možne rešitve. Večina učencev je prepričanih, da ni potrebno iskati drugih rešitev, če poiščeš eno, saj naj bi nalogo pravilno “rešili”. Tudi učiteljice iz ES so ugotovile, da so ravno ti problemi učencem povzročali največ težav. Le najsposobnejši učenci so iskali oziroma poiskali več rešitev tudi, če jih med reševanjem problema učiteljica ni vodila. Rezultati dajo slutiti, da se tudi pri pouku ne rešuje veliko tovrstnih problemov. Nadaljnje spremljanje učencev ES je namreč pokazalo, da učenci, ki so bili v drugem razredu v ES, obiskujejo sedaj četrti razred. V teh razredih poteka pouk matematike še vedno po konceptu, ki smo ga oblikovali v našem eksperimentu. Učiteljice teh štirih četrtih razredov so se namreč na permanentnem izobraževanju in v študijskih skupinah izobrazile za nov koncept matematičnega pouka. Na končnem testu za četrti razred je tovrstne probleme pravilno rešilo 42,2% učencev, kar potrjuje tudi izsledke nekaterih sodobnih raziskav (Siegler, 1991), da s starostjo in primernim poučevanjem napreduje sposobnost vkodiranja komponent problema in načrtovanja reševanja različnih vrst problemov.

Pri problemih, ki imajo več podatkov, kot je potrebnih za rešitev, se je izkazalo, da je kar 59,5% učencev iz ES z razumevanjem prebralo besedilo problema in znalo poiskati tiste podatke, ki so potrebni za rešitev. V KS je pravilno rešilo ta problem 41,65% učencev. Tudi rezultati te naloge pokažejo močan vpliv šolske prakse. Do napačnih rešitev so učenci prišli v glavnem zato, ker so pri reševanju uporabili vse podatke, tudi nepotrebne, saj so v problemih, s katerimi so se srečevali pri pouku, vedno “moral” uporabiti vse podatke.

Zelo uspešni so bili učenci pri reševanju problemov, ki nimajo zadostnega števila podatkov za rešitev, saj je to nalogo uspešno rešilo kar 82% učencev iz ES in 63,3% učencev iz KS. Večina učencev je izjavila, da so jim te vrste problemi najbolj všeč, saj se jim zdi “zelo dobro”, da lahko sami določijo vrednost podatka, ki manjka. Tudi učiteljice so potrdile, da so bili učenci zelo motivirani za reševanje tovrstnih problemov, hkrati pa jih je presenetilo, da so učenci zelo hitro poiskali manjkajoči podatek in mu nato določili zelo smiselne vrednosti.

Poleg teh problemov so učenci iz obeh skupin najraje reševali naloge, ko so morali k dani ilustraciji oblikovati smiselni problem. Kar 80,5% učencev iz ES in 62,6% učencev iz KS je pravilno rešilo to nalogo. Analizirali smo tudi, kako originalni so bili učenci pri oblikovanju svojih problemov. Učenci iz ES so oblikovali zelo raznolike probleme:

- probleme, pri katerih so za njihovo rešitev uporabili množenje, deljenje, seštevanje in odštevanje;
- probleme iz geometrije;
- probleme iz obdelave podatkov.

Pri reševanju tako zastavljenih problemov se od učenca pričakuje ne le matematično znanje, temveč tudi ustvarjalnost, inovativnost, kritično mišljenje in reflektiranje matematičnega znanja. Na tak način zastavljeni problemi ponujajo pogled na (problemsko) situacijo oz. (matematično) vsebino iz različnih perspektiv; od reševalca se pričakuje tako konvergetno kot divergentno mišljenje. V KS so učenci oblikovali samo probleme, ki so jih rešili z računom množenja in seštevanja. Hkrati pa so bili problemi sestavljeni

izključno po modelu iz delovnega zvezka. To opozarja, da imajo naši učenci pri sedanjem pouku matematike malo možnosti za svojstven način reševanja nalog in da se kreativnosti ne spodbuja dovolj. V ES pa so učiteljice razvijale fleksibilno in kreativno mišljenje. Naloge, ki so jih učenci sestavili, kažejo, da so na tej starostni stopnji zmožni ustvarjalno in smiselno sestavljati matematične probleme, če jih učitelj pravilno spodbuja.

Pri naslednji nalogi, ki so jo učenci reševali, so morali k besedilu problema postaviti eno ali več smiselnih vprašanj in nato problem rešiti. Ta problem je uspešno rešilo 54,3 % učencev ES in samo 37,4 % učencev KS. Besedilo problema smo "otežili" še tako, da smo dane številske podatke zapisali z besedami in ne s številkami. Raziskave v svetu (Valenti, 1987) so namreč pokazale, da zapis števila s številko ali z besedo zelo vpliva na razumevanje besedila. Zato mora učitelj poznati vse dejavnike, ki vplivajo na razumevanje problema, in učenca spretno voditi pri reševanju le-tega. V ES so učiteljice učence navajale, da podčrtajo podatke, zapisane s številko ali z besedo. Te vrste nalog, ki jih v pedagoški znanosti imenujejo tudi produktivne naloge (Tomić, 1984), odvrtačajo učence od reševanja nalog po modelu: račun – odgovor

Vzrokov za nižje dosežke pri problemih, pri katerih so morali k besedilu problema postaviti eno ali več smiselnih vprašanj in nato problem rešiti, je seveda lahko več, nekatere dostopne raziskave med drugim opozarjajo tudi na povezanost matematike z jezikom. Secada (1992, v Žakelj 2016) je že v zgodnjih 90. letih prejšnjega stoletja objavil izsledke raziskave, ki kažejo, da sta znanje maternega jezika in uspeh pri matematiki povezana, ne glede na raso, narodnost, družbeni razvoj in jezik. MacGregor in Price (1999) menita, da so obseg besedišča, poznavanje in razumevanje števil, simbolov ter odnosov med njimi, sposobnost branja in razumevanje besedilnih problemov ključni dejavniki za učenje matematike, ter dodajata, da so kognitivne sposobnosti, ki omogočajo razvoj simbolnega procesiranja, potrebne za razvoj jezika in matematike.

Tudi Clarkson in Williams (1994) v svojih raziskavah navajata, da napredovanje pri branju pomeni večje možnosti tudi za napredovanje pri reševanju matematičnih besedilnih problemov, saj v besedilnih problemih oboje, matematično in nematematično besedilo, vpliva na uspešnost reševanja.

Učenci so pri testu reševali tudi nalogo, ki so morali k danemu računu med danimi problemi poiskati problem, ki ga dani račun reši. Tu je šlo za dvoje: razumeti besedilo in imeti dobro usvojene osnovne računske operacije. V vseh danih problemih so "nastopala" enaka števila, tako da so morali učenci zelo pazljivo prebrati vse tri probleme in se nato odločiti za pravilno rešitev. Učenci iz KS so v večini primerov izbrali kar prvi problem, saj je nalogo pravilno rešilo le 44,4 % učencev. To spet potrjuje izsledke raziskave (Valenti, 1987), da učenci ne preberejo celotnega besedila, ampak večinoma le prepisujejo dane podatke in izvedejo tisto računsko operacijo, ki jo takrat pri matematičnem pouku obravnavajo. Učenci ES so zelo dobro reševali dani problem, saj je bilo kar 71,6 % pravih rešitev. Pri pouku matematike v ES smo namreč zelo poudarjali prvo fazo reševanja problema: to je razumevanje problema.

Učenci obeh skupin so zelo dobro reševali probleme, v katerih so dane podatke prebrali iz preglednice. V ES je ta problem pravilno rešilo 80,5 % učencev, v KS 71,1 % učencev. Zadnja leta se pri pouku na razredni stopnji tako pri matematiki kot pri naravoslovju bolj vključuje v pouk branje in zapisovanje raznih oblik preglednic. To nam potrjujejo tudi dobljeni rezultati.

Na podlagi vseh dobljenih rezultatov in po njihovi analizi lahko zaključimo, da je model matematičnega pouka, ki smo ga izvajali v ES in pri katerem je bilo zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost, pozitivno vplival na učne dosežke učencev eksperimentalne skupine. Učenci eksperimentalne skupine (ES) so bili deležni matematičnega pouka, pri katerem sta bili vodilni aktivnosti zastavljanje in reševanje problemov. Oboje razvija poleg matematičnega znanja tudi jezikovno dimenzijo matematike ter ustvarjalno, kritično, analitično in sistemsko mišljenje. Če se opiramo izključno na analitično mišljenje, ostajamo znotraj posameznih vsebin in znanja ne povezujemo; posledici sta raztrgana mreža znanja in njegov slabši prenos. Učencem KS, ki so reševali probleme na tradicionalen način po modelu račun – odgovor, so manjkale izkušnje s predstavitvijo problema na različnih ravneh in z analitično-sintetičnim načinom razmišljanja. Analitično mišljenje poudarja posamezne elemente sistema, analitično napoveduje korak za korakom, spreminja eno spremenljivko, hkrati se opira na natančnost detajlov. Sistemsko mišljenje pa poudarja povezave, izmenjave učinkov med elementi, opira se na opažanja celote in spreminja več spremenljivk hkrati.

Pri problemskih nalogah, pri katerih je bilo potrebno tudi pozorno branje in razumevanje besedila, so imeli težave vsi učenci, vendar rezultati kažejo, da so imeli učenci KS večje težave z razumevanjem besedila kot učenci ES: npr. bolj nepremišljeno so uporabili vse podatke, kar daje slutiti, da matematičnega besedila naloge niso popolnoma razumeli. Dawe (1983) je v eni izmed svojih raziskav pokazal, da so učenci z nizkimi dosežki pri matematiki slabo obvladali tudi materni jezik; poudarjal je, da je uspešno učenje matematike na višji ravni, kar problemi zagotovo so, povezano z dobrim znanjem maternega jezika. Vendar je pri tem treba opozoriti tudi na raziskave, ki opozarjajo, da reverzibilnost ni avtomatična. Ni nujno, da bodo uspešni učenci pri branju uspešni tudi pri matematiki. Branje matematičnih besedil z razumevanjem pogojujejo obvladovanje matematične terminologije, poznavanje in razumevanje matematičnih definicij, izrekov, zakonitosti, pravil idr. ter zmožnost spretnega in hitrega operiranja s simboli in z odnosi med njimi, kar je seveda več kot le jezikovna pismenost.

Iz rezultatov lahko sklepamo, da so bili učenci ES bolj uspešni tudi zaradi aktivnosti, ki so jih bili deležni pri pouku, pri katerem je zastavljanje in reševanje problemov vodilna didaktično-matematična aktivnost. Z izražanjem problemov s svojimi besedami, s postavljanjem vprašanj k odprtim problemskim situacijam pokažemo sposobnost identificiranja bistva problema, problem osvetlimo iz različnih zornih kotov in ga tudi predstavimo na različne, bolj ali manj inovativne načine. Vse te veščine pa se razvijajo postopoma, skozi proces, skozi pridobivanje izkušenj z dejavnostmi, ki so praviloma raznovrstne.

S tem smo potrdili našo specifično raziskovalno hipotezo: ES bo uspešneje kot KS reševala tako enostavne kot zahtevnejše probleme pri vsebinah iz aritmetike, geometrije z merjenjem in logike z množicami.

5 Sklep

Čeprav se že od osemdesetih let prejšnjega stoletja poudarja, da bi moral pouk matematike vključevati reševanje problemov in izpostavljanje uporabo matematike v

vsakdanjem življenju, se zdi, da tak pouk v resnici ni zaživel (Dindyal et al., 2012) in da ostaja eden izmed nedosegljivih ciljev pouka matematike (Stacey, 2005, Kresal Sterniša, Plevnik, 2012). Raziskave namreč kažejo, da je reševanje problemov marginalizirano in da ostaja zgolj sredstvo za vaje pri preverjanju pridobljenih veščin, ne pa kontekst za učenje matematike (Dooley et al., 2014).

Upoštevati moramo, da učenci ne morejo usvojiti znanja, če niso samostojno miselno aktivni in če niso neposredno soudeleženi pri reševanju različnih problemov (Maričić et al., 2013), poleg tega pa prav reševanje skrbno izbranih problemov pripomore k razvoju matematičnega mišljenja (*cultivate and refine*) (Břehovský et al., 2015). Učitelji bi se morali zavedati, da se prav s problemskim poukom lahko doseže ustrezna raven matematičnega znanja in izgrajuje matematična pismenost.

Amalija Žakelj, PhD, Mara Cotič, PhD, Darjo Felda, PhD

The development of mathematical thinking in solving problems

National and international evaluations have been drawing attention to insufficient knowledge of mathematics and poorly developed competences, which raises the question of the quality of learning and teaching mathematics (UNESCO, 2012; Kresal Sterniša & Plevnik, 2012; Maričić & Špijunović, 2014).

In the article, we present the outcomes of the survey with which we determined whether the students in the experimental group (EG), who received mathematical teaching in which setting and solving problems was the leading didactic-mathematical activity, were more successful in solving all types of mathematical problems than the students in the control group (CG), who received classical teaching of mathematics, in which the emphasis is predominantly on training arithmetic operations.

Both in the EG and the CG, the teachers carried out the teaching of mathematics according to the syllabus, the concept of teaching in both groups was, however, designed in essentially different ways. In the EG, the mathematical problem and solving and exploration of problems associated with it was given the leading and central position in all mathematical contents. The teaching in the CG was oriented more towards managing algorithms, i.e. on the teaching and learning specific procedures and computation skills. The students in the CG also solved mathematical problems which were mainly uniformly solvable and to the largest part only from the contents of arithmetic in the traditional way according to the computation, response model; missing were the instructions for solving these problems at different presentation levels and with meaningfully led analytical-synthetic process (Tomić, 1984). The students in the CG solved mathematical tasks across three presentation levels, namely at the enactive, iconic, and symbolic levels, while the students in the CG only solved them in their workbooks at the iconic and the symbolic level. With the latter, concrete-experiential activity was omitted, which at the level of the first three grades of the primary school is a mandatory step in the development of cognitive processes.

The performance of students in solving all types of mathematical problems was checked with tasks that measured the knowledge of solving simple problems (second

level of knowledge) and more demanding problems (third level of knowledge) with contents of arithmetic, geometry with measuring and logic with sets.

Causal experimental method was applied in the survey. Educational experiment was applied with intentionally entering experimental factor into the research situation.

The experimental group (EG) consisted of 89 students and the control group (CG) of 90 students. We designed the initial and the final knowledge test with which the performance in solving problems was checked at the beginning and at the end of the school year by ourselves for the purpose of the survey. The characteristics of the initial and of the final knowledge test were checked on a pilot sample of 79 second-grade students in randomly selected primary schools. The most important measuring characteristics were determined: objectivity, reliability, validity, and sensitivity.

We interpreted the results in accordance with the set hypotheses. In testing the hypotheses, we followed the rule according to which the maximum allowed risk for the rejection of the hypothesis was 5%; the selected value for the level of significance was thus 0.05. We computed the basic statistical parameters about the performance in solving tasks that measured the knowledge in solving simple problems (second level of knowledge) during the final test, namely with contents from arithmetic (A2), geometry with measuring (G2), and logic with sets (L2), as well as the basic statistical parameters of efficiency in solving tasks that measured knowledge in solving more demanding problems (third-level knowledge) during the final test – also from arithmetic (A3), geometry with measuring (G3) and logic with sets (L3).

The results showed that the EG performed statistically better in four variables of six, namely in G2, L2, G3, and L3. The EG performed better than the CG in solving both simple and more demanding arithmetic problems (A2 and A3), although the differences between the two groups are not statistically significant.

The students from both groups were very good at solving simple arithmetic problems, as this kind of problems most frequently appear in textbooks and workbooks and are also most often taught by teachers.

In solving simple logic and geometry problems, the students of the EG performed better than their peers from the CG. It became obvious how narrow the segment the students in the CG usually solve was, as they only rarely solved problems in logic and geometry with measuring. With a simple logic problem, the students were asked to arrange the elements of a given set according to two features and using different displays (e.g. the Carroll diagram). In the EG, as many as 70.8% of the students were successful in these tasks, and only 9% in the CG, although this kind of problems also appear in the prescribed mathematics textbook for the second grade.

With simple geometry problems including measuring, 67.8% of the students from the EG and 51.1% of the students from the CG were successful. Although the problems were very simple and would be classified as simple guided problems according to Mialaret's classification (1969), they were alien to the students from the CG, and they described them as different from those they solve at school. In our schools, students are accustomed to solving tasks during exams that are very similar to (or even the same as) those they solve in the classroom. Because in mathematics classrooms different strategies of solving mathematical problems are not developed, students feel helpless when faced with solving different types of problems.

Also with more demanding problems, the students of the EG were more successful. The average performance in solving more demanding arithmetic problems was 51.78% in the EG and 38.50% in the CG. With geometrical problems, the average performance in the EG was 55% and in the CG 42.70%. Likewise, there were great differences in knowledge with problems in logic (the EG achieved 49.43% and the CG 31.11%). Classified as more demanding were also composite (guided and non-guided) problems: the problems that do not contain enough data for being solved; problems that contain more data than necessary for a solution; problems with multiple solutions; problems in which data are read from the table; problems in which a meaningful problem must be formed to a given illustration and then solved; asking a meaningful question to the text of a problem and then solving it; selecting the mathematical problem that belongs to a given computation.

With problems that contain more data than needed for a solution, it was proved that as many as 59.5% of the students in the CG read the text of the problem with understanding and were able to find the data needed for the solution. In the CG, 41.65% of the students solved this problem correctly. Also, the results of this task indicate a strong influence of school practice. Students mainly arrived at wrong solutions, because in solving the problem they used all the data, including the redundant ones, since in the problems they had encountered in the classroom, they always had to use all the data.

The students were very successful in solving problems that do not have enough data for the solution: as many as 82% of the students from the EG and 63.3% of the students from the CG successfully solved this task.

In addition to these problems, the students of both groups preferred to solve problems in which they were asked to form a meaningful problem to a given illustration. As many as 80.5% of the students in the EG and 62.6% of the students in the CG correctly solved this task. We also analysed how original the students were in forming their problems. In the CG, the students only formed problems that were solved with multiplication and addition. At the same time, the problems were exclusively composed after the model in the workbook. This points to the fact that in today's mathematic teaching, our students have little opportunity for unique ways of solving tasks and that creativity is not promoted enough. In the EG, however, the teachers developed flexible and creative thinking. The tasks the students composed show that at this stage students are able to creatively and meaningfully compose mathematical problems if appropriately encouraged by the teacher. In solving problems set in this way, students are not only expected to demonstrate mathematical knowledge, but also creativity, innovation, creative thinking and reflection of mathematical knowledge. Problems set in this way offer a view of the (problem) situation or (mathematical) content from various perspectives; the solver is expected to demonstrate convergent as well as divergent thinking.

In the next task the students were asked to solve, they had to ask a meaningful question or several meaningful questions to the text of the problem and then solve the problem. This problem was successfully solved by 54.3% of the students from the EG and only 37.4% of the CG. The text of the problem was additionally made "more difficult" by writing the numerical data in words and not in numbers. Research around the world (Valenti, 1987) has namely shown the record of a number with words or with digits has great impact on the understanding of the text. The teacher must therefore know all the factors that affect the understanding of the problem and guide the student skilfully in

solving it. In the EG, the teachers stated they underline the data that are written either in digits or in words. This type of tasks, which in educational science are also called productive tasks (Tomić, 1984), discourage students from solving tasks according to the computation-response model.

During the test, the students also solved a task that required finding the problem among the given problems that is solved with the given computation. Here, it was about two things: understanding the text and having well-acquired basic computational operations. All of the given problems featured the same numbers, so the students had to read all three problems very carefully and then decide which solution was correct. Most students in the CG simply selected the first problem, as only 44.4% of the students solved the task correctly. This corroborates the findings of various studies again (Valenti, 1987) that students do not read the whole text, but mostly copy the given data and then perform the computational operation currently discussed in the mathematics classroom.

We can conclude from the results that the students from the EG were also more successful because of the activities they had been provided in the classroom, where setting and solving problems is the leading didactic-mathematical activity.

With this, we have proved our specific research hypothesis: the EG will solve both simple and more demanding problems in the contents of arithmetic, geometry with measuring and logic with sets more successfully than the CG.

We can conclude that, similarly to the results of other research (such as Maričić et al., 2013; Břehovsy et al., 2015), the results of this research also indicate students cannot acquire in-depth knowledge unless they are autonomously mentally active in building the knowledge. Besides, it is precisely the solving of carefully selected problems which helps develop, cultivate and refine mathematical thinking (Břehovsy et al., 2015). Teachers should be aware that by applying problem teaching, an exactly appropriate level of mathematical knowledge can be achieved and mathematical literacy built.

LITERATURA

1. Anderson, J. (2009). Mathematics curriculum development and the role of problem solving. ACSA Conference <http://www.acsa.edu.au/pages/images/Judy>
2. Břehovský, J., Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J. (2015). Solving problems using experiential strategies. In J. Novotná, H. Moraova (Eds.). Developing mathematical language and reasoning (Proceeding of International Symposium Elementary Math Teaching) (72–81) Prague, the Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.
3. Clarkson, S.P., Williams, W.H. (1994). Are you assessing reading or mathematics? Conference Paper ED 393666. Pridobljeno dne 01.12.2015 s svetovnega spleta: <http://files.eric.ed.gov/full-text/ED393666.pdf>.
4. Dawe, L. (1983). Bilingualism and special education: issues in assessment and pedagogy. Clevedon, England: Multilingual Matters.
5. Dindyal, J., Eng Guan, T., Tin Lam, T., Yew Hoong, L., Khiok Seng, Q. (2012). Mathematical problem solving for everyone: a new beginning, *The Mathematics Educator*, Vol. 13, No. 2, str. 1–20.
6. Dooley, T., Dunphy, E., Shiel, G., Butler, D., Corcoran, D., Farrell, T., Nic Mhuirí, S., O'Connor, M., Travers, J., International Advisor: Professor Bob Pery. (2014). Mathematics in early childhood and primary education (3–8 years), teaching and learning. (NCCA Research Report 18). Dublin: National Council for Curriculum and Assessment.
7. Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, NY: SUNY Press.

8. Jacobs, V.R., Franke, M.L., Carpenter, T.P., Levi, L., Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary schools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), str. 258–288.
9. Maričić, S., Špijunović, K., Malinović Jovanović, N. (2013). The Role of Tasks in the Development of Students' Critical Thinking in Initial Teaching of Mathematics. In J. Novotna, H. Moraova (Eds.). *Task and tools in elementary mathematics (Proceeding of International Symposium Elementary Math Teaching)*. Prague, the Czech Republic: Charles University, Faculty of Education. str. 204–212.
10. Maričić, S., Špijunović, K. (2014). Udžbenici u funkciji razvijanja kritičkog mišljenja učenika u nastavi matematike u mlađim razredima osnovne škole. *Nastava i vaspitanje*. LXIII(4), str. 639–652.
11. Maričić S., Špijunović, K. (2015). Developing Critical Thinking in Elementary Mathematics Education through a Suitable Selection of Content and Overall Student Performance. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 180, Elsevier, str. 653–659.
12. MacGregor, M., Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 30, str. 449–467.
13. Mialaret, G. (1969). *L'apprendimento della matematica*. Seggio di psicopedagogia, Armando, Roma.
14. NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
15. Remillard, J., Kaye, P. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), str. 7–34.
16. Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, str. 341–350.
17. Tomić, A. (1984). *Teorija in praksa matematičnega pouka v nižjih razredih osnovne šole*. Disertacija. Filozofska fakulteta Ljubljana, Ljubljana.
18. UNESCO (2012). *Challenges in basic mathematics education*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, Paris.
19. Valenti, E. (1987). *La matematica nella nuova scuola elementare*. Le Monnier. Firenze.
20. Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava, (K novi kulturi pouka)*. 1. natis. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2003.
21. Žakelj, A. (2016). *Jezikovna dimenzija matematike in pouk matematike*. V: Devjak, Tatjana (ur.), SAKSIDA, Igor (ur.), Dagarin Fojkar, Mateja (ur.). *Bralna pismenost kot izziv in odgovornost*. 1. izd. Ljubljana: Pedagoška fakulteta, 2016.

Dr. Amalija Žakelj (1958), izredna profesorica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.

*Naslov: Podpeška 93 a, 11351 Brezovica pri Ljubljani, Slovenija; Telefon: (+386) 01 300 51 56
E-mail: amalija.zakelj@pef.upr.si*

Dr. Mara Cotič (1954), redna profesorica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.

*Naslov: Budičinova ulica 3, 6000 Koper, Slovenija; Telefon: (+386) 041 449 784
E-mail: mara.cotic@pef.upr.si*

Dr. Darjo Felda (1956), izredni profesor za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.

*Naslov: Korte 18, 6310 Izola, Slovenija; Telefon: (+386) 051 339 018
E-mail: darjo.felda@pef.upr.si*