

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 25 (1997/1998)

Številka 4

Strani 232-237

Sandi Klavžar:

## PRVO SREČANJE S FIBONACCIJEVIMI ŠTEVILI

Ključne besede: matematika, teorija števil, številska zaporedja, Fibonacci, rekurzivne formule.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/25/1340-Klavzar.pdf>

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## PRVO SREČANJE S FIBONACCIJEVIMI ŠTEVILI

Verjetno marsikdo med vami že pozna Fibonaccijeva števila, saj tudi Presek pogosto piše o njih. Tako sta v lanskem letniku izšla dva računalniško obarvana prispevka o izračunavanju posplošenih Fibonaccijevih števil. Gotovo pa so med bralci tudi taki, ki Fibonaccijevih števil še niso srečali. Predvsem njim je namenjen ta prispevek, kar pa seveda še ne pomeni, da ni primeren tudi za poznavalce. V matematiki je namreč tako, da je zelo koristno, če isto strukturo spoznamo z različnih vidikov. Pogosto se nam namreč dozdeva, da neki pojem dobro razumemo, pa se kasneje izkaže, da smo v resnici ta pojem razumeli le delno ali površno.

### Zakaj se ta števila imenujejo Fibonaccijeva

Zgodba se začne leta 1202, ko je Leonardo iz Pise, bolj znan po psevdonimu Fibonacci, napisal knjigo *Liber Abacci* in v njej zastavil sloviti problem o zajcih. Pravzaprav je ohranjena le druga izdaja knjige iz leta 1228. Kakorkoli že, vprašanje je naslednje:

*Par zajcev, ki je star vsaj dva meseca, vsak mesec skoti en par zajcev. Koliko parov zajcev imamo po enem letu, če začnemo z enim parom na novo skotenih zajcev?*

V prvem mesecu imamo torej en par zajcev. V drugem mesecu imamo še vedno samo ta par, saj zajca iz para še nista dopolnila dveh mesecev. V tretjem mesecu imamo nato dva para: začetni par in par, ki sta ga skotila. V naslednjem mesecu imamo tri pare: tista dva iz prejšnjega meseca ter par, ki ga je skotil začetni par. Namesto da sedaj nadaljujemo s takim razmišljanjem, se rajši kar vprašajmo, koliko parov zajcev imamo v 12. mesecu. Najprej ugotovimo, da imamo v 12. mesecu vse pare zajcev, ki smo jih imeli v 11. mesecu (saj v nalogi ni nobenega pogoja o umrljivosti). Koliko pa je novih parov? Vsak par, ki je dopolnil dva meseca, je skotil en par. Takih parov pa je ravno toliko, kot je bilo vseh parov v 10. mesecu. Torej, v 12. mesecu imamo toliko parov, kolikor jih je bilo v 10. in v 11. mesecu skupaj. Celo več, razmislek, ki smo ga naredili, velja za poljuben mesec in ne le za dvanajstega.

Naj bo  $F_n$  število parov zajcev v  $n$ -tem mesecu. Ugotovili smo, da je  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$  in  $F_{12} = F_{11} + F_{10}$ . Celo več, za vsak  $n > 2$  velja  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . *Fibonaccijeva števila* so torej števila, ki so definirana takole:

Prvi dve Fibonaccijevi števili sta enaki 1:  $F_1 = 1$  in  $F_2 = 1$ .

Za vse  $n > 2$  je  $n$ -to Fibonaccijevo število vsota prejšnjih dveh:  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .

Pravimo, da so Fibonaccijeva števila podana z *rekurzivno formulo*. Prvih nekaj Fibonaccijevih števil je:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots$$

Vidimo torej, da imamo v 12. mesecu 144 parov zajcev, po 12. mesecu pa jih je že 233. Skratka, množijo se kot zajci.

## Kje še najdemo Fibonaccijeva števila

### Seštevamo z enicami in dvojki

Za poljubno naravno število  $n$  se vprašajmo, na koliko različnih načinov ga lahko zapišemo kot vsoto samih enic in dvojčk. Na primer, število 5 lahko zapišemo na naslednjih 8 načinov:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 2$$

$$5 = 1 + 1 + 2 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 1 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 2$$

$$5 = 2 + 1 + 2$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

Označimo število zapisov števila  $n$  z  $a_n$ . Gornji primer torej pravi  $a_5 = 8$ . Bralec naj sedaj poskusi zapisati vse načine za število 6, mi pa zapišimo vse načine za števila do 5:

$$1 = 1 \quad (a_1 = 1),$$

$$2 = 1 + 1 = 2 \quad (a_2 = 2),$$

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 \quad (a_3 = 3),$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 \quad (a_4 = 5)$$

Število načinov po vrsti je torej 1, 2, 3, 5, 8, 13; slednje naj bi bralec preizkusil sam. To pa je, z izjemo manjkajočega prvega Fibonaccijevega števila  $F_1$ , prav prvih nekaj Fibonaccijevih števil. Dokažimo, da to velja tudi v splošnem.

Poglejmo si vse zapise števila  $n$  z enicami in dvojkami. Razdelimo zapise v dve skupini: na tiste zapise, ki se začnejo z 1, in na tiste, ki se začnejo z 2. Zapisov, ki se začnejo z 1, je prav toliko, kot je zapisov števila  $n - 1$ , kar sprevidimo z odstranitvijo začetnih enic. In dalje, zapisov, ki se začnejo z 2, je prav toliko, kot zapisov števila  $n - 2$ . Torej imamo zvezo  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Ker je  $a_1 = 1$  in  $a_2 = 2$ , lahko zaključimo, da je število zapisov števila  $n$  z enicami in dvojkami enako  $F_{n+1}$ , na kratko  $a_n = F_{n+1}$ .

### Hodimo po stopnicah

Stopnišče je sestavljeno iz  $n$  stopnic. Na koliko različnih načinov se lahko povzpne do vrha, če na vsakem koraku prestopimo eno ali dve stopnici?

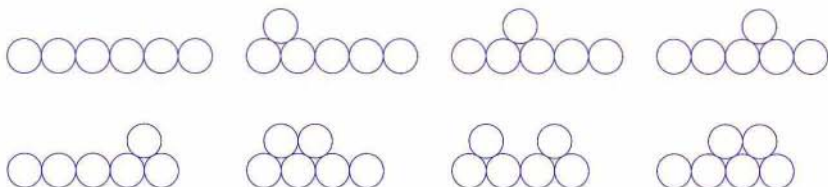
Naj  $b_n$  označuje iskano število. Očitno velja  $b_1 = 1$  in  $b_2 = 2$ . Če smo na prvem koraku prestopili eno stopnico, imamo  $b_{n-1}$  načinov do prihoda na vrh, če pa smo na prvem koraku prestopili dve stopnici, imamo do konca  $b_{n-2}$  možnosti. Torej,  $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$  in zopet lahko zaključimo, da je  $b_n = F_{n+1}$ .

Dodajmo k temu primeru, da ga nam pravzaprav ni bilo potrebno reševati. Dovolj bi bilo uporabiti enega najljubših trikov matematikov: problem prevedemo na že znani, rešeni primer. Vsak naj sam premisli, da je problem s stopnicami pravzaprav samo preoblečen problem z vsotami iz enic in dvojk.



### Zlagamo kovance

Imamo  $n$  enakih kovancev. Zanima nas, na koliko različnih načinov lahko kovance zložimo drugega ob drugega v eno ali dve vrsti. Pri tem mora veljati, da sta pod kovancem v zgornji vrsti vedno dva kovanca v spodnji vrsti. Na sliki 1 imamo prikazanih vseh 8 načinov, kako lahko zložimo 6 kovancev.



Slika 1. Šest kovancev v dve vrsti

S  $c_n$  označimo število načinov, na katere lahko zložimo  $n$  kovancev v dve vrsti. Slika 1 nam torej pove, da je  $c_6 = 8$ . Vsak bo sam brez težav preveril, da je  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 2$ ,  $c_4 = 3$  in  $c_5 = 5$ . Začetek zaporedja števil  $c_n$  se torej ujema s Fibonaccijevimi števili  $F_n$ . V resnici za vsak  $n$  velja  $c_n = F_n$ . Tega tu ne bomo dokazali, omenimo pa, da je ta lastnost Fibonaccijevih števil v tesni zvezi s slavnim Pascalovim trikotnikom.

## Štejemo debele množice

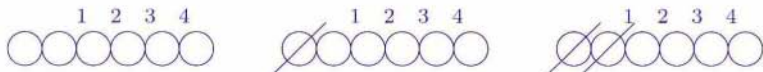
Končno množico naravnih števil imenujemo *debeli*, če je vsak njen element vsaj tako veliko število, kot ima množica elementov. Na primer, množici  $\{4, 7, 12, 99\}$  in  $\{3, 4, 5\}$  sta debeli, medtem ko množici  $\{1, 2\}$  in  $\{2, 99, 100\}$  nista debeli. Dogovorimo se tudi, da prazno množico obravnavamo kot debelo množico.

Z  $d_n$  označimo število debelih podmnožic množice  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Na primer,  $d_4 = 8$ , saj ima množica  $\{1, 2, 3, 4\}$  naslednje debele podmnožice:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \text{ in } \{3, 4\}.$$

Verjetno ne bo nihče posebej presenečen, če kar povem, da je  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 5$ ,  $d_4 = 8$  (kot že vemo) in  $d_5 = 13$ . Kot vse kaže, velja  $d_n = F_{n+2}$ . Kako pa bi to dokazali?

Morda bo najlažje tako, da prevedemo problem debelih množic na zlaganje kovancev v dve vrsti. Idejo, kako to naredimo, razložimo kar na primeru za  $d_4$ . Vzemimo šest kovancev ( $4 + 2$ , tj.  $n + 2$ ), jih postavimo v vrsto in v zgornjo vrsto od drugega mesta dalje zapišimo števila od 1 do 4 (glej sliko 2). Postavitev vseh šestih kovancev v vrsto ustreza prazni množici. Nato prečrtajmo prvi kovanec, ki ga moramo zato postaviti v gornjo vrsto na označena mesta. Če to naredimo na vse možne načine, dobimo množice  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  in  $\{4\}$ . Nazadnje prečrtajmo prva dva kovanca. Na vse možne načine ju postavimo v gornjo vrsto, kar nam da še množice  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$  in  $\{3, 4\}$ . Torej smo ugotovili, da je  $d_4 = c_6 = F_6$ . Razmislek, ki smo ga naredili za ta primer, lahko brez težav ponovimo za poljuben  $n$ , torej res velja  $d_n = F_{n+2}$ .



Slika 2. Z debelih množic do zlaganja kovancev

## Nekaj preprostih lastnosti Fibonaccijevih števil

Seštejmo nekaj prvih Fibonaccijevih števil:

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 2 = 4$$

$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

Če dobljene vsote dobro pogledamo, opazimo, da dobivamo za ena zmanjšana Fibonaccijeva števila. Dokažimo, da to velja za vse  $n$ . Upoštevajmo, da je  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , oziroma  $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ . Zato imamo:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Sedaj seštejemo leve strani in desne strani gornjih enakosti. Na levi dobimo  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , torej izraz, ki nas zanima. Na desni strani pa se skoraj vsi členi paroma odštejejo, ostane nam le  $F_{n-2} - F_2$ . Ker je  $F_2 = 1$ , smo tako pokazali:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Na podoben način, kot smo dokazali zadnjo enakost, lahko dokažemo tudi naslednje lastnosti Fibonaccijevih števil. Bralca vabim, da jih poskuša pokazati sam.

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Npr.:  $1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144$ .

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Npr.:  $1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 88 = 89 - 1$ .

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

Npr.:  $1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 + 13 - 21 + 34 - 55 = -33 = -34 + 1$ .

Sedaj pa seštejmo še kvadrate prvih  $n$  Fibonaccijevih števil. Upoštevajmo, da velja

$$F_n^2 = F_n F_n = F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

in zapišimo:

$$F_1^2 = 1 = F_1 F_2$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_2 F_1$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_3 F_2$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}^2 = F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}$$

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

Seštejemo leve in desne strani pa dobimo

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Npr.:  $1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273 = 13 \cdot 21$ .

Podobnih identitet s Fibonaccijevimi števili je še zelo veliko, vendar naj omenjene za prvo srečanje s temi števili zadoščajo.

Članek smo začeli s problemom o razmnoževanju zajcev. Resnici na ljubo povejmo, da Fibonaccijeva števila nimajo kakega posebnega pomena pri vzreji zajcev, med drugim tudi zato ne, ker problem zanemarja umrljivost. Po drugi strani pa so Fibonaccijeva števila izjemno pomembna v matematiki, saj obstaja posebna veja matematike, ki se ukvarja samo s problemi, povezanimi s temi števili.