

Učenje z odkrivanjem pri pouku geometrije v osnovni šoli

Prejeto 13.04.2019 / Sprejeto 31.08.2019

Znanstveni članek

UDK 373.3.016:514

KLJUČNE BESEDE: pouk geometrije, učenje z odkrivanjem, vizualizacija, geoplošča

POVZETEK – Razumevanje geometrije je odvisno predvsem od lastne prostorske predstavljalnosti, pri katerem ima osrednje mesto vizualizacija geometrijskih konceptov. Z razvijanjem sposobnosti vizualizacije lahko izboljšamo zmogljivost prostorskih predstav. Za oblikovanje prostorskih predstav ne zadošča zgolj zaznavno posnemanje prostora, ampak je nujno predhodno manipuliranje z objekti v tem prostoru, ki zahteva miselno aktivnost otrok. Miselno aktivnost učencev pri pouku geometrije lahko dosežemo z ustreznim pristopom. Zato smo v naši raziskavi oblikovali tak model pouka, pri katerem je aktivno vlogo raziskovalca geometrijskih konceptov prevzel učenec. Učenec si je z lastno miselno aktivnostjo in po lastnih sposobnostih zgradil znanje o lastnostih in odnosih med geometrijskimi elementi. Preveriti smo želeli, ali učenci, deležni pouka z odkrivanjem, kažejo napredek v znanju geometrije po koncu eksperimenta glede na začetno stanje. Ugotovili smo, da se napredek v znanju geometrije kaže le, če so učenci deležni aktivne metode poučevanja, torej, če učenje poteka z odkrivanjem geometrijskih konceptov s pomočjo ustreznih didaktičnih pripomočkov.

Received 13.04.2019 / Accepted 31.08.2019

Scientific paper

UDC 373.3.016:514

KEYWORDS: geometry instruction, discovery learning, visualization, geoboard

ABSTRACT – Our understanding of geometry depends primarily on our own spatial ability, in which the geometric concepts are paramount. By developing the ability to visualize, we can improve our performance in spatial ability tasks. To develop spatial ability, perceptible imitation of the space is insufficient on its own; it is necessary to also manipulate the objects in this space, which requires the mental activity of children. This kind of mental activity can be achieved in geometry instruction using an appropriate approach. For this reason, I have developed a model of instruction in this research study, in which the active role of the researcher of geometric concepts has been taken over by the learner. The learners were able to build knowledge about the properties and relationships between geometric elements with their own mental activity and skills. I wished to check whether the learners, who participated in discovery learning instruction, showed any progress in their geometry knowledge at the end of the experiment compared to their initial state. It has been found that progress in geometry knowledge is indicated only if learners receive active teaching methods, that is, if learning is done by discovering geometric concepts using appropriate didactic tools.

1 Uvod

Od učencev po vsem svetu se pričakuje, da si predstavljajo, konstruirajo, narišejo in opišejo različne geometrijske oblike, opišejo poglede na predmete iz različnih zornih kotov ter rešujejo različne geometrijske probleme (TIMSS, 2015), kjer je potrebna miselna predstava geometrijskih elementov. Vizualizacija pojmov je za učence izjemnega pomena, sicer geometrije ne razumejo in nimajo pravih predstav o geometrijskih pojmihi. Pri pouku matematike je konkretno-izkustvena raven ena od obveznih stopenj v razvoju kognitivnih procesov. Zaradi tega moramo učencem pri oblikovanju geometrijskih predstav ponuditi različna didaktična sredstva in jim omogočiti, da so aktivni pri oblikovanju lastnega znanja (Mešinović idr., 2017a). Ena izmed aktivnih metod pri

konstrukciji lastnega znanja je učenje z odkrivanjem, ki od učencev zahteva, da raziskujejo koncepte, ki naj bi se jih naučili.

2 Teoretična izhodišča

Učenje matematike z odkrivanjem je aktivna metoda učenja, pri kateri učenec oblikuje in spozna matematične pojme ter gradi razumevanje matematičnih konceptov in procedur z lastnim delovanjem (Lowry, 1967). Bruner se je zavzemal za to, da bi čim več pouka potekalo v obliki odkrivanja, saj naj bi bilo tako pridobljeno znanje trajnejše in uporabnejše v novi situaciji, učenci so tako bolj motivirani, razvijeta se samostojnost in kritičnost, poleg vsebine pa se učenci naučijo še metod reševanja problemov (Marentič Požarnik, 2000).

Učenje geometrijskih pojmov in konceptov z odkrivanjem običajno poteka v obliki induktivnega ali deduktivnega sklepanja. Z induktivno metodo učencem omogočimo, da si z obravnavo in generalizacijo specifičnih primerov oblikujejo splošno razumevanje geometrijskih konceptov. Kot primer: učenec nariše različne trikotnike (topokotni, pravokotni, ostrokotni), izmeri notranje kote in izračuna vsoto notranjih kotov ter tako s posploševanjem ugotovi, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180° . Nasprotno induktivnemu sklepanju pa je deduktivno sklepanje, ki učencem omogoča, da na podlagi splošnih geometrijskih konceptov oz. procedur sklepajo o značilnostih konkretnih primerov. Učenec torej sklepa in utemelji, da je vsota notranjih kotov štirikotnika enaka 360° , saj lahko štirikotnik z diagonalo razdelimo na dva trikotnika, vsota notranjih kotov trikotnika pa je enaka 180° . Tako pridobljena nova spoznanja učencu ni potrebno preizkusiti s številnimi konkretnimi primeri, saj je lastnost štirikotnika utemeljil z že znanimi dejstvi o lastnostih trikotnikov.

Poleg induktivne in deduktivne metode učenja in poučevanja matematike z odkrivanjem Lowry (1967) postavi v ospredje tudi sklepanje po analogiji, ki učencem omogoča, da neki geometrijski koncept pojasni tako, da ga primerja z drugim, sorodnim geometrijskim konceptom.

Torej, če je krožnica množica točk, ki so v ravnini enako oddaljene od določene točke, potemtakem je sfera množica točk, ki so v prostoru enako oddaljene od določene točke. Vendar je sklepanje po analogiji pogosto posledica napačnih predstav (npr. vsota notranjih kotov v konveksnem n -kotniku se povečuje s številom kotov). Učenec lahko napačno sklepa, da se vsota zunanjih kotov n -kotnika ravno tako povečuje s številom kotov. Zato je pomembno, da učencem omogočimo voden odkrivanje geometrijskih konceptov – s postavljanjem vprašanj in dajanjem izzivov. Namesto razlage, kako rešiti problem, učitelj poskrbi za ustrezno gradivo in spodbuja učence k opazovanju, oblikovanju hipotez in preverjanju odločitev. Učenci morajo v pravem trenutku dobiti povratno informacijo, če lahko dobljene ugotovitve uporabijo, da lahko nadaljujejo v zastavljeni smeri (Mešinović idr., 2017b).

Samostojno učenje z odkrivanjem je potrebno vpeljati postopoma, saj se moramo zavedati, da lahko učenci uberejo različne poti raziskovanja – nekateri tudi napačne. Vloga učitelja je zato bistveno večja kot pri vodenem odkrivanju. Njegova naloga je,

da prepozna pravilnost idej, ki so si jih učenci oblikovali s samostojnim odkrivanjem, ter poda ustrezno povratno informacijo, da lahko učenec, ki si je oblikoval napačne oz. nepopolne predstave, le-te popravi ali dopolni. Učitelj se mora zavedati tudi, da niso vsi učenci zmožni samostojnega odkrivanja geometrijskih konceptov, zato mora poskrbeti, da takim učencem nudi ustrezno pomoč. Kersh (1962) predlaga pomoč, ki otrokom omogoča, da z lastno aktivnostjo in vodenim odkrivanjem poiščejo ustrezno pot pri reševanju problema.

Ena izmed pomembnejših prednosti učenja z odkrivanjem je ta, da učenci razvijajo sposobnosti raziskovanja in sklepanja ter spoznajo načela raziskovanja. Kersh (1962) trdi, da učenci spoznajo strategije, ki jim omogočajo prepoznavanje teh načel.

Učenje z odkrivanjem ima veliko prednosti, vendar ni primerno v vsaki situaciji (Mešinović idr., 2017b). Bruner (1966; 1971) meni, da je ta način skladen z načini učenja in razvojem ljudi, vendar če želimo koristno uporabiti metodo učenja z odkrivanjem, morajo učenci za to imeti določeno znanje o problemu in morajo vedeti, kako uporabiti strategije pri reševanju problemov (Woolfolk, 2001). Metode so lahko prezahtevne za manj sposobne učence, ker jim primanjkuje predznanja in spretnosti za reševanje problemov, ki jih potrebujejo, da bi bile te metode zanje koristne (prav tam).

3 Problem

Pouk geometrije v osnovni šoli naj bi temeljil predvsem na opazovanju in razvijanju prostorskih predstav (TIMSS, 2015). Izhodišče za usvajanje geometrijskih pojmov sta vedno najprej opazovanje in nato praktično delo s konkretnimi predmeti ter materiali. Prav čutno zaznavanje sveta, predmetov in oblik, ki obdajajo otroka, je temelj za usvajanje osnovnih geometrijskih pojmov. Opazovanje, primerjanje oblik, tipanje, opisovanje, oblikovanje, izrezovanje, risanje in prekrivanje konkretnih oblik ter predmetov so dejavnosti učencev, ki so temelj za kasnejši prehod na abstraktnije vsebine in razvijanje mišljenja na višjih stopnjah.

Pri začetni vizualizaciji so v veliko pomoč modeli geometrijskih oblik in drugih osnovnih elementov v geometriji. Ne glede na stopnjo učenja geometrije je uporaba pripomočkov, skic in računalniških modelov nujna (Van de Walle, 2013). Pri pouku geometrije v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju Učni načrt za matematiko (2011) predlaga uporabo modelov geometrijskih teles, geometrijsko orodje, risanje skic za boljšo predstavljivost in programe dinamične geometrije. Učenci v zadnjem vzgojno-izobraževalnem obdobju se rokujejo s tangramom ali geoploščo, ki omogočata manipuliranje s predmeti in ustrezno vizualizacijo. Uporaba dinamične geometrije je prepuščena odločitvi učitelja, kar pomeni, da je odvisna od učiteljevega znanja in poznavanja ustreznih programov, od odnosa, ki ga ima učitelj do tehnologije, in tudi od opremljenosti šole s programi za vizualizacijo geometrijskih konstrukcij. Predvidevamo lahko, da si naši učenci najpogosteje vizualizirajo geometrijske elemente s skico, kar pogosto ni dovolj, da bi jim približali geometrijo, saj so skice velikokrat vir napačnih predstav (Clements in Battista, 1992).

Če želimo razvijati prostorske predstave učencev, jim moramo dovoliti, da si vizualizirajo osnovne geometrijske pojme in raziskujejo njihove lastnosti ter odnose na način, da bodo miselno aktivni, miselno aktivnost pa bomo dosegli le, če bodo učenci pri pouku geometrije aktivno vključeni v proces dela, kjer bodo manipulirali z različnimi didaktičnimi sredstvi in pripomočki. Le tako bodo lahko reševali tudi kompleksnejše geometrijske probleme. Učitelj bi moral učencem omogočiti raziskovanje geometrijskih problemov z različnimi metodami odkrivanja (indukcija, dedukcija, analogija).

Zato smo v naši raziskavi zgradili problemski pouk geometrije, pri katerem je aktivno vlogo raziskovalca nekaterih geometrijskih konceptov prevzel učenec. Opustili smo transmissijski pouk in učencu omogočili, da je lastnosti in odnose med geometrijskimi elementi opazoval na modelih, ki jih je oblikoval na geoplošči. Na tak način je odkrival nekatere geometrijske pojme, kar mu je omogočalo tudi reševanje geometrijskih problemov.

Z raziskavo smo želeli dokazati, da učenci, deležni učenja geometrije z odkrivanjem, usvojijo osnovne geometrijske koncepte temeljiteje kot učenci, deležni klasičnega transmissijskega pouka, ki v naših šolah še vedno prevladuje. Zato smo si zastavili dve vprašanji:

- Kakšne rezultate so pri testu znanja iz geometrije dosegli učenci, ki so bili deležni pouka z odkrivanjem, in kakšne učenci, deležni transmissijskega pouka?
- Ali učenci, deležni pouka z odkrivanjem, kažejo napredek v znanju geometrije po koncu eksperimenta glede na začetno stanje?

4 Metodologija

V raziskavi smo uporabili deskriptivno in kavzalno eksperimentalno metodo empiričnega pedagoškega raziskovanja. Zasnovali smo enofaktorski model eksperimenta s šolskimi oddelki kot primerjalnimi skupinami z dvema modalitetama. Za primerjalne skupine smo vzeli obstoječe oddelke 7. razreda na različnih osnovnih šolah. Pred eksperimentom ni bila opravljena izenačitev oddelkov do slučajnostnih razlik. Skupino učencev, kjer smo uvedli eksperimentalni faktor, smo poimenovali eksperimentalna skupina (ES), skupino učencev, ki ni bila deležna eksperimentalnega faktorja, pa kontrolna skupina (KS). V raziskavi je sodelovalo 113 učencev 7. razreda štirih slovenskih osnovnih šol. V eksperimentalno skupino je bilo vključenih 62 učencev, v kontrolno skupino pa 51. Sodelovalo je 5 učiteljev matematike, ki so bili v povprečju stari 38,2 leta. Povprečna delovna doba vseh učiteljev v šolstvu je bila 12,8 leta.

Pouk geometrije je v kontrolni skupini potekal po transmissijskem modelu. Učitelji so vsebino najprej frontalno pojasnili, nato pa pred učenci rešili nekaj primerov različnih tipov nalog. Na ta način so učenci usvojili postopke reševanja nekaterih geometrijskih nalog. Uporabljali so standardno geometrijsko orodje, tj. ravnilo, geotrikotnik in šestilo. Učenci 7. razredov eksperimentalne skupine so bili deležni popolnega eksperimentalnega tretmaja, ki je vključeval uporabo geoplošče pri učenju z odkrivanjem nekaterih geometrijskih konceptov. S pomočjo geoplošče so si učenci vizualizirali geometrijske

elemente, odkrivali in raziskovali lastnosti geometrijskih elementov ter reševali geometrijske probleme z lastno aktivnostjo.

Pouk geometrije v eksperimentalni skupini

Za namen raziskave smo oblikovali tri module poučevanja nekaterih geometrijskih konceptov. Pri tem smo upoštevali van Hielove stopnje razvoja geometrijskega mišljenja.

Obravnavali smo naslednje vsebine iz geometrije:

- modul 1: osnovni geometrijski pojmi (daljica, vzporednost, pravokotnost, koti, koti ob vzporednicah),
- modul 2: trikotniki,
- modul 3: štirikotniki.

Pri sestavljanju modulov smo upoštevali faze poučevanja, ki jih je predlagal van Hiele (Usiskin, 1982), in sicer mora učenec skozi pet faz: preverjanje in seznanjanje, vodena orientacija, razlaga, prosta orientacija ter integracija. Na primer: pri obravnavanju trikotnikov v modulu 2 učence seznanimo z vsebino tako, da neformalno oblikujejo in raziskujejo različne trikotnike na geoplošči 5×5 (preverjanje in seznanjanje). Potem z vodenimi aktivnostmi raziskujejo in odkrivajo lastnosti, vrste in skladnost trikotnikov (vodena orientacija). Na podlagi predhodnih izkušenj učenci izrazijo in si med seboj izmenjajo mnenja glede obravnavane vsebine (razlaga), pri tem pa učitelj učencem pomaga le pri uporabi ustrezne terminologije. Nadalje učenci rešujejo in raziskujejo matematične probleme, ki vključujejo pravkar naučene koncepte o trikotnikih (prosta orientacija). Nazadnje povzamejo na novo pridobljeno znanje s tabelo (integracija).

Aktivnosti modulov so bile oblikovane tako, da so učenci osnovne geometrijske pojme vizualizirali na geoplošči in svoje ugotovitve izrazili na slikovni ter pisni način. Figure, ki so jih izdelali na geoplošči, so lahko načrtali na slikovni model geoplošče, ki je bil priložen ob vsaki aktivnosti. Učencem smo pripravili delovni zvezek z aktivnostmi in nalogami, ki je zajemal vse tri module. S pregledovanjem delovnega zvezka je imel učitelj vpogled nad učenčevim razumevanjem obravnavane vsebine.

Modul 1 se nanaša na obravnavo osnovnih geometrijskih pojmov, kot sta daljica in kot. Želeli smo, da učenci raziščejo dolžine daljic na geoplošči, ugotovijo skladnost med nekaterimi daljicami in ponovijo pojma vzporednost in pravokotnost. Poleg tega ponovijo še pojme: kot, vrste kotov, skladnost kotov, sokot in sovršni kot. V tem modulu na novo obravnavajo le kote ob vzporednicah. Poznavanje te vsebine je nujno za razumevanje nekaterih lastnosti trikotnikov in štirikotnikov. Primarni namen modula 1 je bil preveriti in ponoviti znanje o osnovnih geometrijskih pojmi, ki naj bi ga učenci že imeli. Učitelj je bil pozoren predvsem na formalni in neformalni matematični jezik, ki ga učenci uporabljajo. Želeli smo odpraviti morebitne nejasnosti, saj je bila izbrana vsebina temelj za izgradnjo novih, učencem še neznanih geometrijskih konceptov, s katerimi so se srečali z aktivnostmi pri modilih 2 in 3.

Z aktivnostmi modula 2 učenci spoznajo trikotnike in raziščejo njihove lastnosti, kot so oglišča, stranice in notranji ter zunanji koti. Te uporabijo pri razvrščanju trikotnikov glede na dolžino stranic in velikost kotov. Z oblikovanjem različnih trikotnikov na geoplošči spoznajo in uporabljajo vsoto notranjih in zunanjih kotov ter odnose med

notranjimi koti trikotnika in stranicami trikotnika. Poleg geoplošče učenci uporabijo različno dolge paličice, s katerimi spoznajo odnos med dolžinami stranic. Geoplošča je uporabna tudi pri ugotavljanju skladnosti trikotnikov, kar učenci hitro in zanesljivo preverijo s prekrivanjem trikotnikov.

Zadnji modul je namenjen spoznavanju lastnosti štirikotnika, kot so oglišča, stranice, notranji in zunanji koti ter diagonalni. Na geoplošči učenci oblikujejo trapez, enakokraki trapez, paralelogram, romb, pravokotnik, kvadrat in deltoid, in sicer na podlagi danih lastnosti, šele potem pa te like tudi poimenujejo. Zelo pomembno se nam je zdelo, da učenci z vodenimi aktivnostmi raziščejo lastnosti posameznega lika. Razvrščanje štirikotnikov omogoča učencem, da so osredotočeni le na določeno lastnost, kar vodi v poznavanje odnosov med posameznimi liki. Aktivnosti si sledijo v točno določenem vrstnem redu, in sicer najprej učenci spoznajo trapez, enakokraki trapez, paralelogram, romb, pravokotnik, kvadrat in nazadnje deltoid, saj smo želeli, da ima vsak naslednji štirikotnik vsaj eno lastnost predhodnega štirikotnika.

Potek raziskave

V začetni fazi smo preučili literaturo, nabavili didaktične pripomočke, pripravili gradiva za učitelje in oblikovali eksperimentalno ter kontrolno skupino učiteljev. Učitelji eksperimentalne skupine so bili deležni izobraževanja oz. priprav na eksperiment, v okviru katerih so bili organizirani seminarji, delavnice in delovni razgovori. Učiteljem eksperimentalne skupine smo razdelili gradivo in didaktični material (delovni zvezek in geoplošče), ki so ga uporabili v eksperimentu.

Pred vpeljavo eksperimentalnega faktorja v eksperimentalno skupino je bilo izvedeno prvo empirično snemanje, s katerim smo testirali izhodiščno znanje učencev eksperimentalne in kontrolne skupine v oddelkih 7. razreda. Drugo empirično snemanje je bilo izvedeno ob koncu eksperimenta.

Zbiranje podatkov

Podatke smo zbrali kvantitativno, in sicer z dvema testoma znanja iz geometrije. Z začetnim testom v prvem empiričnem snemanju smo zbirali podatke na začetku eksperimenta, s končnim testom v drugem empiričnem snemanju pa na koncu eksperimenta. Pri sestavi obeh testov smo upoštevali učni načrt in cilje, ki so v njem opredeljeni. S končnim testom smo ugotavljali razliko v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino. S faktorsko analizo smo preverili konstruktno veljavnost začetnega in končnega testa znanja. Prvi faktor začetnega testa pojasnjuje 45,57% variance, končnega testa pa 50,19% variance. Tako v prvem kot v drugem testu sta prva faktorja višja od predpostavljene spodnje meje, ki znaša 20% (Čagran, 2004), iz česar lahko sklepamo, da imata oba testa ustrezno konstruktno veljavnost. Vrednost Cronbachovega koeficienta alfa je v začetnem (0,792) in tudi končnem testu (0,820) večja od 0,7, zato lahko zaključimo, da sta oba testa znanja dovolj zanesljiva (Ferligoj idr., 1995, v Cencič, 2009). Objektivnost smo si zagotovili z vidika vrednotenja rezultatov, saj smo

se zgledovali po navodilih za vrednotenje nacionalnega preverjanja znanja (NPZ). Podatke smo analizirali s pomočjo računalniškega programa za obdelavo podatkov SPSS.

Za ugotavljanje razlik v znanju geometrije med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine na začetku eksperimenta smo uporabili t-preizkus. V končnem stanju smo razlike med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine analizirali s t-preizkusom, saj sta bili skupini na začetnem testu izenačeni.

Metode dela in pouk geometrije, ki so ga bili deležni učenci eksperimentalne skupine, so se zelo razlikovali od "klasičnega" pristopa, ki prevladuje v slovenskih šolah pri pouku matematike, in tistega, ki so ga bili deležni tudi učenci kontrolne skupine. Zato nas je še posebej zanimalo, ali so učenci eksperimentalne skupine napredovali v znanju geometrije. Preverili smo tudi napredek učencev kontrolne skupine. S t-preizkusom za odvisni spremenljivki (začetni in končni test) smo analizirali razlike med dosežki začetnega in končnega testa za obe skupini. S tem smo preverili, ali eksperimentalna in kontrolna skupina izkazujeta napredek v končnem testu glede na začetni test, in ugotovili primernost obeh pristopov pri pouku geometrije.

5 Rezultati in interpretacija

Najprej smo preverili, kako so učenci reševali začetni test, ter preverili razlike v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino. V spodnji tabeli (tabela 1) so prikazani osnovni statistični parametri začetnega testa.

Tabela 1: Osnovni statistični parametri začetnega testa pri geometriji

<i>Skupina</i>	<i>N</i>	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Dosežek v %</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Standardna napaka aritmetične sredine</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>
Eksperimentalna skupina	62	17,73	44,3 %	7,864	0,999	4	36
Kontrolna skupina	51	18,04	45,1 %	7,846	1,099	3	35

V začetnem stanju se je pokazala zelo majhna razlika v dosežkih eksperimentalne in kontrolne skupine v znanju geometrije. Nekoliko boljše povprečje glede na dosežke učencev eksperimentalne skupine so imeli učenci kontrolne skupine, saj aritmetična sredina kontrolne skupine znaša 18,04 točke, aritmetična sredina eksperimentalne skupine pa 17,73 točke.

Čeprav je dosežek učencev kontrolne skupine nekoliko višji od dosežka učencev eksperimentalne skupine v začetnem testu, razlike niso statistično pomembne, kar smo potrdili s t-preizkusom ($t(111) = -0,211$, $p > 0,05$) (tabela 2). Kar pomeni, da sta bili eksperimentalna in kontrolna skupina v začetnem stanju izenačeni.

Tabela 2: T-preizkus za preverjanje razlik med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine v začetnem testu pri geometriji

<i>t</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>	<i>Razlika sredin</i>	<i>Standardna napaka</i>
–0,211	111	0,833	–0,313	1,485

V nadaljevanju smo preverili, kako so učenci reševali končni test, in ugotavljali razlike v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino. Najprej prikazujemo osnovne statistične parametre končnega testa (tabela 3).

Tabela 3: Osnovni statistični parametri končnega testa pri geometriji

<i>Skupina</i>	<i>N</i>	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Dosežek v %</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Standardna napaka aritmetične sredine</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>
Eksperimentalna skupina	62	19,99	54,0%	8,880	1,128	2	37
Kontrolna skupina	51	14,57	39,4%	7,580	1,061	2	33

V začetnem testu se je pokazala minimalna razlika v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino, in sicer v prid kontrolne skupine, ki pa ni bila statistično pomembna. Iz tabele 3 lahko razberemo, da so v končnem stanju učenci eksperimentalne skupine v povprečju dosegli višje rezultate kot njihovi vrstniki iz kontrolne skupine, saj so učenci eksperimentalne skupine v povprečju dosegli 19,99 točke, učenci kontrolne skupine pa 14,57 točke.

Ker sta bili eksperimentalna in kontrolna skupina v začetnem stanju izenačeni v znanju geometrije, smo razlike med eksperimentalno in kontrolno skupino v končnem stanju preverili s t-preizkusom. Iz tabele t-preizkusa (tabela 4) lahko razberemo, da so razlike med eksperimentalno in kontrolno skupino v znanju geometrije ob koncu eksperimenta statistično pomembne ($t(111) = 3,382$, $p = 0,001$). Torej so učenci eksperimentalne skupine pomembno boljši pri reševanju geometrijskih nalog po končanem eksperimentu kot učenci kontrolne skupine.

Tabela 4: T-preizkus za preverjanje razlik med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine v končnem testu pri geometriji

<i>t</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>	<i>Razlika sredin</i>	<i>Standardna napaka</i>
3,382	111	0,001	5,318	1,573

Na podlagi dobljenih rezultatov lahko trdimo, da so učenci 7. razredov, deležni pouka geometrije z odkrivanjem in z uporabo geoplošče, s katero si vizualizirajo osnovne pojme in s pomočjo katere raziskujejo lastnosti in odnose med elementi v geometriji, uspešnejši pri reševanju geometrijskih nalog kot učenci, deležni klasičnega transmissijskega pouka geometrije z uporabo skice kot edinega pripomočka za vizualizacijo geometrijskih konceptov.

Če torej želimo s poučevanjem in učenjem geometrije učencu pomagati pri oblikovanju vizualnih predstav in mu hkrati prikazati geometrijo kot koristno orodje v življenju, mu moramo omogočiti učenje geometrije z odkrivanjem ter priskrbeti taka didaktična sredstva, s katerimi bo lahko sam raziskoval geometrijske koncepte. V nasprotnem primeru je poučevanje usmerjeno v naštevanje receptov, ki se jih učenec nauči na pamet, kar pa ne omogoča razvijanje zmožnosti uporabe matematičnih argumentov v novih situacijah (Felda, 2012).

Analizirali smo že razlike v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino v začetnem in končnem stanju. Kot smo že povedali, sta bili skupini pri pouku geometrije deležni različnih pristopov, zato smo analizirali razlike med dosežki začetnega in končnega testa za obe skupini. S tem smo preverili, ali eksperimentalna in kontrolna skupina izkazujeta napredek v končnem testu glede na začetni test, in ugotovili primernost obeh pristopov pri pouku geometrije.

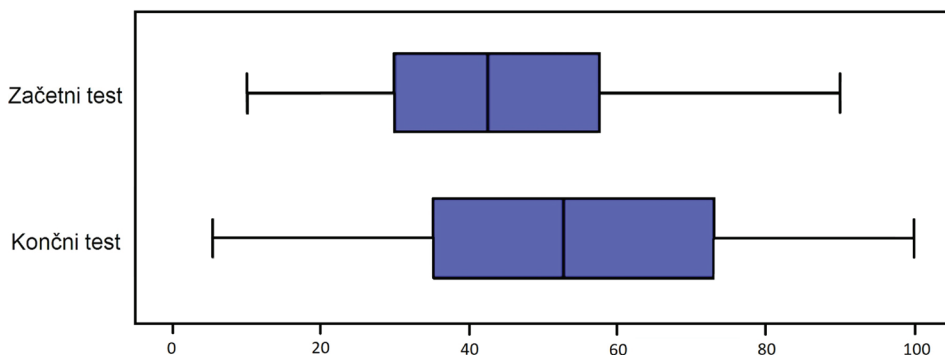
Najprej si v tabeli 5 oglejmo, kakšne rezultate so dosegli učenci eksperimentalne skupine na začetnem in končnem testu.

Tabela 5: Dosežki učencev eksperimentalne skupine na začetnem in končnem testu

<i>Test</i>	<i>N</i>	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Dosežki v%</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>
Začetni test	62	17,73	44,3 %	7,864	4	36
Končni test	62	19,89	53,8 %	8,880	2	37

Glede na povprečje dosežkov na začetnem in končnem testu vidimo, da so učenci eksperimentalne skupine napredovali. Svoj povprečni dosežek 44,3 % vseh točk z začetnega testa so povišali na povprečni dosežek 53,8 % vseh točk na končnem testu. Na sliki, ki prikazuje razpršenost dosežkov (slika 1), lahko opazimo tudi, da na začetnem testu noben učenec iz eksperimentalne skupine ni zbral vseh točk (100%), na končnem testu pa je vse možne točke dosegel en učenec.

Slika 1: Razpršenost dosežkov v deležih na začetnem in končnem testu v eksperimentalni skupini



S t-preizkusom za odvisni spremenljivki (začetni in končni test) smo preverili, ali je napredek, ki se kaže na končnem testu v eksperimentalni skupini glede na začetni test, statistično pomemben. Iz spodnje tabele (tabela 6) lahko razberemo, da so razlike med povprečnima dosežkoma obeh testov statistično pomembne ($t(61) = 4,059$, $p < 0,005$). Na podlagi tega smo ugotovili, da so učenci eksperimentalne skupine pomembno napredovali, saj so svoj povprečni dosežek na končnem testu bistveno izboljšali glede na povprečni dosežek na začetnem testu.

Tabela 6: T-preizkus za odvisni spremenljivki za preverjanje razlik med dosežki na začetnem in končnem testu v eksperimentalni skupini

	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Standardna napaka</i>	<i>t</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>
Končni test Začetni test	9,434	18,300	2,324	4,059	61	0,000

Zaključimo lahko, da so učenci eksperimentalne skupine opazno napredovali v znanju geometrije. Učenci, ki so bili deležni pouka geometrije z odkrivanjem, so si osnovne geometrijske pojme vizualizirali na geoplošči in si izgradili problemski pouk geometrije. Na tak način so učenci poglobili razumevanje osnovnih pojmov in konceptov, kar omogoča postopno prehajanje na višje, bolj abstraktne stopnje mišljenja in s tem reševanje zahtevnejših geometrijskih problemov. Prav reševanje skrbno izbranih problemov pripomore k razvoju matematičnega mišljenja (Žakelj idr., 2018).

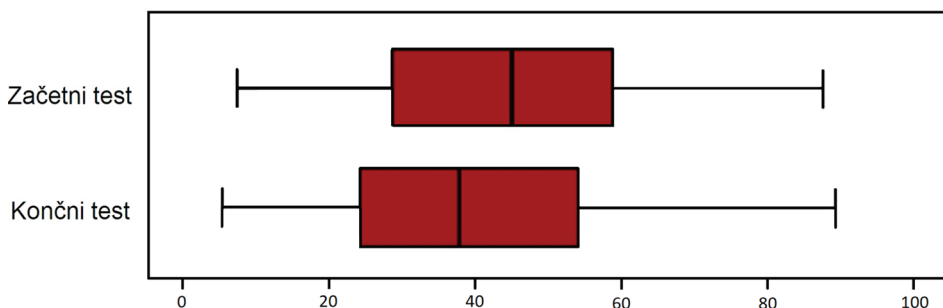
Preverimo še napredek kontrolne skupne v končnem testu glede na začetni test. Dosežke učencev kontrolne skupine na začetnem in končnem testu smo prikazali v spodnji tabeli (tabela 7).

Tabela 7: Dosežki učencev kontrolne skupine na začetnem in končnem testu

	<i>N</i>	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Dosežki v%</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>
Začetni test	51	18,04	45,1 %	7,846	3	35
Končni test	51	14,57	39,4 %	7,580	2	33

Kot vidimo, so bili učenci kontrolne skupine uspešnejši pri reševanju začetnega testa (45,1 %) kot pri reševanju končnega testa (39,4 %), torej učenci kontrolne skupine ne izkazujejo nikakršnega napredka na končnem testu glede na začetni test. Na sliki, ki prikazuje razpršenost dosežkov (slika 2), lahko opazimo, da noben učenec kontrolne skupine ni dosegel vseh točk (100 %), in to ne na začetnem in ne na končnem testu.

Slika 2: Razpršenost dosežkov v deležih na začetnem in končnem testu v kontrolni skupini



Statistično pomembnost slabših rezultatov učencev kontrolne skupine na končnem testu glede na začetni test smo preverili s t-preizkusom za odvisni spremenljivki (začetni in končni test). Iz spodnje tabele (tabela 8) lahko razberemo, da so razlike med povprečnima dosežkoma obeh testov statistično pomembne ($t(50) = -3,117$, $p = 0,003$).

Tabela 8: T-preizkus za odvisni spremenljivki za preverjanje razlik med dosežki na začetnem in končnem testu v kontrolni skupini

	<i>Aritmetična sredina</i>	<i>Standardni odklon</i>	<i>Standardna napaka</i>	<i>t</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>
Končni test Začetni test	-5,723	12,865	1,801	-3,177	50	0,003

Izračunane aritmetične sredine, t-koeficient in raven statistične pomembnosti kažejo, da so učenci kontrolne skupine “nazadovali” v znanju geometrije, saj so končni test reševali veliko slabše od začetnega. Razlike, ki so se pokazale med začetnim in

končnim testom, so statistično pomembne. Sklepamo lahko, da s pristopom, ki so ga bili deležni učenci kontrolne skupine, ne dosežemo napredka v znanju geometrije.

6 Sklep

Po svetovnih merilih (TIMSS, 2015) je temeljna naloga pouka matematike naučiti učenca uporabljati matematiko v vsakdanjem življenju. V največji meri naj bi spodbujali učence, da sami poiščejo poti do rešitve in da so kreativni ter aktivni.

Predvidevali in pokazali smo, da učenci s problemsko zastavljenim poukom, pri katerem aktivno odkrivajo geometrijske koncepte ter si jih vizualizirajo na geoplošči, dosežejo boljše rezultate pri reševanju geometrijskih nalog. Sklepamo lahko, da je za doseganje uspešne in ustrezne vizualizacije nujna uporaba didaktičnih sredstev in pripomočkov. Ti so v veliko pomoč še pri samostojnem raziskovanju, reševanju geometrijskih problemov in aktivni udeležbi pri pouku. Napredek v znanju geometrije se kaže le, če učenci niso deležni pouka, kjer pasivno poslušajo razlago učitelja.

Rezultati naše raziskave so uporabni pri načrtovanju pouka geometrije, izobraževanju učiteljev in bodočih učiteljev za poučevanje geometrije v osnovni šoli ter za snovalce učnega načrta matematike in pisce matematičnih učbenikov ter drugih gradiv. Predvsem je treba ozavestiti pomembnost uporabe didaktičnih sredstev pri pouku geometrije kot osrednjem pripomočku za vizualizacijo geometrijskih konceptov. Učni načrt in matematični učbeniki namreč nosijo poglavitno vlogo pri načrtovanju pouka, saj učitelji načrtujejo pouk na podlagi potrjenih in veljavnih gradiv, ki jih imajo na razpolago. Glede na izsledke naše raziskave bi morali spremeniti način oz. metode učenja in poučevanja geometrije, saj bi morala biti osrednja metoda učenje z odkrivanjem. Odnose med liki bi moral učenec samostojno raziskati in si na tak način izgraditi znanje. Tako pridobljeno znanje je bolj uporabno, kar smo tudi potrdili z našo raziskavo. Učni pristop, kjer učenci aktivno sodelujejo pri pouku, omogoča boljše rezultate in s tem kvalitetnejše znanje. Zato bi morali poleg transmisijskega pristopa poučevanja v naše učno okolje vključiti še učne pristope, ki učence ustrezno motivirajo, da bodo pripravljeni miselno aktivno sodelovati in konstruktivno graditi svoje znanje.

Sanela Mešinović, PhD

Discovery Learning in Elementary Geometry

Our understanding of geometry depends primarily on our own spatial ability, in which the geometric concepts are paramount. By developing the ability to visualize, we can improve our performance in spatial ability tasks. To develop spatial ability, perceptible imitation of the space is insufficient on its own; it is necessary to also manipulate the objects in this space (Clements et al., 1999), which requires the mental activity of children. This kind of mental activity can be achieved in geometry instruction using an appropriate approach (Van Hiele, 1959, in Usiskin, 1982). For this reason, I have

developed a model of instruction in this research study, in which the active role of the researcher of geometric concepts has been taken over by the learner. The learners were able to build knowledge about the properties and relationships between geometric elements with their own mental activity and skills. Knowledge obtained in such a way is longer lasting and more useful in new situations; pupils are more motivated and develop autonomy and critical thinking; and apart from the acquired knowledge of geometry, pupils also acquire problem-solving methods (Marentič Požarnik, 2000).

This research was implemented in order to check whether the learners, who participated in discovery learning instruction, showed any progress in their geometry knowledge at the end of the experiment compared to their initial state. I have therefore posed two research problems:

- What results have been achieved on the geometry test by the pupils who took part in discovery learning instruction and what results have been achieved by the pupils who took part in transmission-type lessons?
- Do the pupils that took part in discovery learning show improvement in their geometry knowledge and understanding after the experiment, in comparison to their initial state?

The survey was conducted in the school year 2009/2010. 113 seventh-grade pupils from four Slovene primary schools participated. The group of pupils that received the experimental factor was named the experimental group (EG), and the group that did not receive the experimental factor but took part in transmission-type lessons was named the control group (CG). The experimental group consisted of 62 pupils and the control group consisted of 51 pupils. A total of 5 teachers of Mathematics also participated. Geometry instruction in the control group was conducted in accordance with the transmission model. Teachers explained the content with frontal instruction methods and then solved several examples of typical tasks. In this way, the pupils learned about the process of learning various geometric tasks. In geometry lessons, pupils of the control group used standard geometric tools, i.e. a ruler, a set square, and a compass. Seventh-grade pupils of the experimental group, however, received completely experimental treatment involving the use of a geoboard, which was used in discovery learning about different geometric concepts. The geoboard enabled pupils to visualize certain geometric elements, discover and explore properties of those elements, and solve geometric tasks on their own.

A quantitative data collection strategy was used by designing and implementing two geometry tests. The initial test collected data from the beginning of the experiment and the final test collected the data after the experiment had ended.

The initial results have shown very little difference in the achievements between pupils of the experimental and control group. A slightly better average was achieved by the pupils of the control group ($M = 18.04$) compared to the achievements of the pupils in the experimental group ($M = 17.73$). Even though the results of the control group might have been slightly higher than the results of the experimental group in the initial test, the differences are not statistically significant, as was confirmed by the t -test ($t(111) = -0.211, p > 0.05$). In the final state, pupils of the experimental group on average achieved higher results ($M = 19.99$) than their peers from the control group ($M = 14.57$). The differences between the experimental and control group in their geometry knowledge proved to be statistically significant at the end of the experiment

($t(111) = 3.382, p = 0.001$). Therefore, pupils from the experimental group have shown to be significantly better at solving geometric tasks after the experiment than the pupils from the control group. That said, if we wish to help the pupils to form good visual representations and show them the practicality of geometry in real life in the course of teaching geometry, we have to provide them with methods of discovery learning and appropriate didactic means in order to encourage them to autonomously explore geometric concepts.

I tested whether the experimental and control group showed progress on the final test with respect to the initial test, and established the suitability of both approaches in geometry instruction. According to the average result on the initial and final test, it can be seen that the pupils in the experimental group have progressed. Their average result in the initial test, 44.3 % of all points, improved to the average result of 53.8 % of all points in the final test. The t-test for dependent variables (the initial and final test) found that the progress shown in the final test results of the experimental group relative to the initial test results is in fact statistically significant ($t(61) = 4.059, p < 0.005$). Based on this, I found that pupils from the experimental group progressed significantly, as their average result in the final test was substantially improved compared to the average result in the initial test. Pupils of the control group proved to be more successful in the initial test (45.1 %) than in the final test (39.4 %), indicating that the control group pupils did not show any progress in the final test relative to the initial test. The t-test for dependent variables (the initial and final test) found that the progress shown in the final test results of the control group relative to the initial test results is in fact statistically significant ($t(50) = -3.117, p = 0.003$). It can be deduced that the approach implemented in the control group does not enable progress in geometry knowledge.

To sum up, it can be determined that the pupils in the experimental group have shown noticeable progress in their knowledge of geometry. Pupils who received geometry lessons through discovery learning were able to visualize the basic geometric concepts on the geoboard and in doing so, built their own problem-solving instruction in geometry. In this way, the pupils have deepened their understanding of basic notions and concepts, which also enables them to gradually transition to higher and more abstract levels of thinking and thus solve more complex geometric problems. It has been found that progress in geometry knowledge is indicated only if learners receive active teaching methods, that is, if learning is done by discovering geometric concepts using appropriate didactic tools.

Given the results of this research, we should change the way or method of learning and teaching geometry, as the focal method of learning should be discovery learning. The relationship between geometric shapes should be explored independently by the pupil – who is that way able to build his or her own knowledge. Knowledge obtained in such a way is more useful, which was also confirmed with this research. The learning approaches where pupils participate actively during lessons give better results and higher quality knowledge. Therefore, in addition to the transmission approach to teaching, we should also include learning approaches that motivate pupils to participate actively in their learning environment and constructively build their knowledge.

LITERATURA

1. Bruner, J.S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. New York: Norton.
2. Bruner, J.S. (1971). *The Relevance of Education*. New York: Norton.
3. Cencič, M. (2009). *Kako poteka pedagoško raziskovanje. Primer kvantitativne empirične neeksperimentalne raziskave*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
4. Clements, D., Battista, M. (1992). *Geometry and spacial reasoning*. V: Grouws, D. (ur.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company, str. 420–464.
5. Clements, D.H., Swaminathan, S., Hannibal, M.A.Z., Sarama, J. (1999). *Young Children's Concepts of Shape*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, št. 2, str. 192–212.
6. Čagran, B. (2004). *Univariatna in multivariatna analiza podatkov: zbirka primerov uporabe statističnih metod s SPSS*. Maribor: Pedagoška fakulteta.
7. Felda, D. (2012). *Pomanjkljivo zavedanje potreb po matematični pismenosti v naši šoli*. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 27, št. 3–4, str. 37–50.
8. Kersh, B.Y., Wittrock, M.C. (1962). *Learning by Discovery: An Interpretation of Recent Research*. *Journal of Teacher Education*, 13, št. 4, str. 461–468.
9. Lowry, W.C. (1967). *Approaches to Discovery Learning in Mathematics*. *The High School Journal*, 50, št. 5, str. 254–260.
10. Marentič Pošarnik, B. (2000). *Psihologija učenja in pouka*. Ljubljana: DZS.
11. Mešinović, S., Cotič, M., Žakelj, A. (2017a). *Učenje in poučevanje osnovnih geometrijskih pojmov*. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 32, št. 2, str. 49–66.
12. Mešinović, S., Cotič, M., Žakelj, A. (2017b). *Učenje in poučevanje geometrije v osnovni šoli*. Koper: Založba Univerze na Primorskem.
13. TIMSS 2015. Pridobljeno dne 12.04.2019 s svetovnega spleta: https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap1.pdf.
14. Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno dne 03.04.2019 s svetovnega spleta: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf.
15. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: University of Chicago.
16. Van de Walle, J.A., Karp, K.S., Bay-Williams, J.M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Eight Edition. Boston: Pearson.
17. Woolfolk, A. (2002). *Pedagoška psihologija*. Ljubljana: Educy.
18. Žakelj, A., Cotič, M., Felda, D. (2018). *Razvoj matematičnega mišljenja pri reševanju problemov*. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 33, št. 1, str. 3–17.