Racionalna števila in sorazmernostne spremenljivke

Rational Numbers and Ratio Variables

Lucija Željko,
OŠ Sostro
Herremans Adriaan,
Univerza Antwerpen

Σ Povzetek

V tem članku bova opisala nekaj primerov dobre prakse pri poučevanju ulomkov, odstotkov in razmerij, ki jih lahko uporabimo v razredu. Osredotočila sva se na razlike med izobraževalnim sistemom v Flandriji in v Sloveniji.

Ključne besede: ulomki, razmerja, odstotki, izobraževalni sistem, Flandrija, Slovenija

Σ Abstract

This article provides examples of good practice for teaching fractions, percentages and proportions, which can be used in lessons. The focus of the article is on the differences between the educational systems in Flanders and Slovenia.

***Keywords:** fractions, proportions, percentages, educational system, Flanders, Slovenia*

α Uvod

Zakaj nas zanima položaj v Flandriji, severnem delu Belgije? Flandrija se vedno uvršča zelo visoko na mednarodnih testih (npr. PISA 2013, TIMSS 2013). Posebej v matematičnem delu testa je Flandrija vedno med tistimi, ki so se odrezali najbolje. V raziskavi TIMSS 2011 je Flandrija dosegla povprečno 549 točk pri matematiki (v četrtem razredu) in s tem 7. mesto: le pet azijskih držav in Severna Irska so dosegle več točk. Slovenija je dosegla povprečno 513 točk na tem testu in se je uvrstila na 21. mesto (od 50 držav). Eden izmed avtorjev se je za učitelja izobraževal v Flandriji in zato dobro pozna flamski izobraževalni sistem. Druga avtorica se je šolala v Sloveniji in je učiteljica matematike v osnovni šoli v Sloveniji.

Če primerjamo učni načrt matematike v Sloveniji (učni načrt na spletni strani MIZŠ 2013) in v Flandriji (učni načrt na spletni strani MEF 2013), izstopa naslednje: v Flandriji se začnejo seznanjati z racionalnimi števili, sorazmerji in odstotki mnogo prej. Eden izmed razlogov je ta, da imajo učenci v Flandriji v osnovni šoli (to je v starosti med 6. in 12. letom) 6 ur matematike na teden. Za več informacij o flamskem šolskem sistemu se navezujeva na npr. Herremans 2012 ali MEF 2013. Podrobnosti o slovenskem šolskem sistemu lahko najdemo na Eurydice Slovenija 2013.

Do leta 1998 so imeli v Flandriji v osnovni šoli celo 8 ur matematike na teden in poudarek je bil na proceduralnem znanju. V tem času so začeli računati z ulomki pri 10. letu starosti in ulomki so bili ena najtežjih snovi, predvsem zato, ker je bil poudarek na računskih pravilih. S spremembo učnega načrta v letu 1998 (VVKBaO 1998) so se v Flandriji odločili, da ulomke učencem predstavijo prej. V drugem razredu osnovne šole začnejo spoznavati decimalna števila, a le v povezavi z denarjem. V tretjem razredu v Flandriji spoznajo ulomke, a posvetijo veliko pozornosti in časa (dve leti!) konceptu: kaj je pomen ulomka (VVKBaO 1998). Šele v 5. razredu osnovne šole začnejo računati z ulomki. Celo takrat se osredotočajo na zgodbe iz vsakdanjega življenja, ki ponazarjajo računska pravila, in ne na sama računska pravila.

Do leta 1998 je tudi v Sloveniji učenje matematike v osnovni šoli, tako kot v Flandriji, pomenilo veliko urjenja matematičnih pravil. S spremembo učnega načrta v letu 1998 je bilo narejenih veliko konceptualnih sprememb: manj poudarka na urjenju pravil, več povezanosti matematike z vsakdanjim življenjem in več aktivnih metod poučevanja. Namen vsega tega je bil, da se nameni več pozornosti razvoju koncepta (npr. ulomkov). Število ur matematike na teden je manjše v Sloveniji: 4 ure tedensko, le v 3. in 4. razredu 5 ur tedensko. Toda trajanje osnove šole se je spremenilo z 8 na 9 let do leta 2003 za vse osnovne šole v Sloveniji. Bilo je tudi nekaj sprememb učnega načrta v letu 2011.

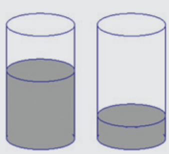
Zdaj se v Sloveniji učenci prvič srečajo z ulomki v tretjem razredu (pri 9 letih). Cilj pri tej starosti je delitev celote na enake dele na modelu ali na sliki. Tudi po slovenskem učnem načrtu je v tretjem razredu poudarek na razumevanju koncepta delov celote. Računanje z ulomki se začne v 7. razredu. Decimalnih števil se učenci ne učijo pred 6. razredom (razen v povezavi z denarjem v 3. razredu) in odstotkov ne pred 7. razredom. To je pozneje kot v Flandriji.

Članek vsebuje vprašanja s pripombami, ki želijo spodbuditi diskusijo v razredu (poglavje β, poglavje η), natančno razpravo o konceptu ulomkov (poglavja od γ do ε) in sorazmerij (poglavji θ in κ) v flamskih osnovnih šolah ter ideje učnih ur, kot se izvajajo v Flandriji (poglavji ξ in ζ). Čeprav bova poročala o razlikah in podobnostih v učnih načrtih Flandrije in Slovenije, avtorja meniva, da ti primeri dobre prakse lahko navdihnejo vsakega učitelja, ki se ukvarja s temi temami.

β Nekaj problemov z ulomki, decimalnimi števili in odstotki

Začenjava s problemi, ki so dobri zgledi za pogovor v razredu (De Boeck, Herremans 2009). Primeri z zvezdico so – po najinem mnenju – primerni za sposobnejše učence. Morda je koristno najprej razmišljati o rešitvi problemov in kako bi učencem 5. razreda (po flandrijskem učnem načrtu) predstavili bistvo problemov, preden preberete komentarje.

1. Katero število leži na sredini med 3,9 in 3,10?
2. Dva kozarca sta napolnjena z enakim pomarančnim sokom. V prvem kozarcu je v sok s 30 % sadne kaše. Koliko odstotkov sadne kaše je v soku v drugem kozarcu?



3. Kaj bi izbral: $\frac{1}{3}$ škatle z bonboni od mame ali $\frac{1}{4}$ škatle z bonboni od starega očeta?
4. Od jajc, ki si jih kupil, je počenih $\frac{3}{4}$, kar je 12 jajc. Koliko jajc si kupil?
5. (*) Razvrsti naslednja števila tako, da začneš z najmanjšim (in razloži):

$$\frac{1}{1} \qquad 0{,}1 \qquad 9\,\% \qquad \frac{2}{21} \qquad 0{,}11 \qquad 0{,}9$$

6. (*) Imaš dve skodelici: prvo s čajem in drugo z mlekom. Prostornina tekočine v njih je enaka. Iz druge skodelice v prvo prestaviš tri žlice mleka in dobro zmešaš. Potem prestaviš tri žlice tekočine iz prve v drugo skodelico. Ali vsebuje druga skodelica več mleka kot prva skodelica čaja?

Komentarji in rešitve

1. Pravilen odgovor je 3,5, kar lahko vidimo na številski premici (poltraku). Najpogostejši napačen odgovor učencev je seveda 3,95. To se zgodi zato, ker učenci, ki se prvič srečujejo z decimalnimi števili, vidijo decimalno število kot dve različni števili, ki ju ločuje decimalna vejica, in zato tudi tako računajo.
2. Tudi 30 %. V drugem kozarcu je manj soka, a odstote k sadne kaše je enak. Lahko bi tudi pričakovali odgovor 10 %, ker drugi kozarec vsebuje $\frac{1}{4}$ količine soka v prvem kozarcu. V razredu si lahko vzamemo čas za naslednji pogovor: sok ima enak okus v katerem koli kozarcu, zato vsebuje enak odstotek sadne kaše; če bi imel sok le 10 % sadne kaše, bi bila to druga vrsta soka.
3. Ni dovolj podatkov za odgovor. Vse je odvisno od velikosti obeh škatel. Tukaj lahko kot učitelj poudarite, da se ulomek vedno nanaša na neko celoto: brez sklicevanja na celoto ulomek nima pomena. Otroci naj bi ta koncept ubesedili zato, da bi z njim znali primerno ravnati.

4. Odgovor je 16 jajc. Ponovno je koncept celote ključen pri tem vprašanju. Ni treba vzeti $\frac{3}{4}$ od 12, kar je pričakovana napaka, o kateri se je treba pogovoriti. Vzamemo $\frac{3}{4}$ kupljenih jajc. Preprosta slika razloži vse: narišete kupljena jajca z štirimi pravokotniki, pobarvate tri od njih in poveste, da predstavljajo počena jajca.

Zdaj lahko vidimo, da 3 pobarvani pravokotniki predstavljajo 12 jajc, torej vsak pravokotnik predstavlja točno 4 jajca. Poudarjava sliko situacije, ki pomaga pri vizualizaciji in ubeseditvi razlage problema. Vidimo torej, da je poudarek na razumevanju koncepta (poglejte tudi tabele razmerij pri poglavju ε, razdelek *Ulomek kot razmerje* in poglavju θ), in ne na proceduralnem znanju. To je dobra priprava za poznejšo stopnjo, ko bodo znali povedati, da je $\frac{3}{4}$ od $x = 12$.

5. Postaviti šest različnih števil v pravilnem vrstnem redu je kar težka naloga. Lahko vzamemo manj števil in kljub temu vidimo, ali imajo učenci vpogled v reševanje takšne naloge brez veliko računanja. Običajno je, da učenci, ki so se že učili pretvarjanja ulomkov v decimalna števila, začnejo pisati vsak ulomek kot decimalno število, a to vzame veliko časa, saj so (skoraj) vsa števila zelo blizu skupaj. Prva pripomba je, da je eno število veliko večje od vseh preostalih : 0,9 (zopet se spomnimo napake, kot jo delajo učenci v 1. primeru). Vsa druga števila so okoli 0,1; a le eno je večje, namreč 0,11. Torej smo že uredili po vrsti tri največja števila: 0,1 < 0,11 < 0,9.

Pripomba, da je $\frac{1}{11} = \frac{2}{22}$, razkrije vrstni red ulomkov, saj je $\frac{2}{22} < \frac{2}{21}$. Primerjanje 9 % z je ravno tako enostavno: obe števili pomnožimo z 11 in takoj vidimo, da je $9\,\% < \frac{1}{11}$.

Lahko opazimo, da je vsak korak izvedljiv in ga lahko naredimo ob pravem času, npr. ko primerjamo ulomke z različnimi imenovalci ali ko začnemo z odstotki … A naloga je vseeno težka zaradi veliko različnih možnosti in tega, da ne moremo vseh števil primerjati hkrati (ali z isto metodo).

6. Ne, obe vsebujeta enako. Dejstvo je, da je te ostanke težko razložiti. Večina učencev meni, da je treba prestaviti več mleka iz druge skodelice v prvo skodelico, kot je treba čaja iz prve skodelice v drugo skodelico. To je seveda delno pravilno, ker pozabijo, da je treba prestaviti mleko nazaj iz prve v drugo skodelico. Pravilna razlaga je preprosta: obe skodelici vsebujeta enako tekočine pred prenosi z žličkami in potem. Torej je vse mleko v prvi skodelici prišlo iz druge skodelice, in ker imamo še vedno enako prostornino tekočine, je prostornina mleka v prvi skodelici enaka prostornini čaja v drugi skodelici.

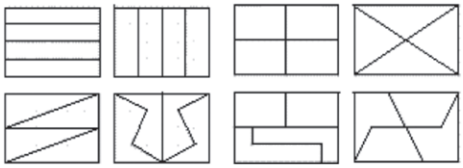
V pogovoru bi si lahko postavili naslednja vprašanja: Kaj če dobro ne zmešamo? Kaj če ena skodelica na začetku vsebuje več tekočine kot druga? Ko si nekdo postavi takšno vprašanje, se osredini na pomembnost določenih parametrov v vprašanju. Moral bi tudi sklepati, da to, kar se dogaja vmes, ni pomembno: dokler imata obe skodelici na koncu enako prostornino kot na začetku, sta obe prostornini enaki. Ko se pogovarjamo z učenci, je eden glavnih razlogov za težavnost naloge to, da učenci ne nadzorujejo vseh korakov. Opazijo, da je količina tekočine v skodelicah (glede na žličko) neznana, in zato ne vedo, kakšna so točna razmerja med čajem in mlekom po prestavitvi prve žličke tekočine.

γ Temeljni vidiki ulomkov

Obstajajo različni pogledi na koncept ulomkov (De Boeck, Herremans 2009; VVKBaO 2001). Poleg tega, da morajo otroci v veliko različnih situacijah izraziti, da 'imenovalec pove, na koliko delov moraš razdeliti celoto', in 'števec pove, koliko od teh delov moraš upoštevati ali vzeti', se osredotočimo na dva druga osnovna vidika ulomkov v prvem letu, ko jih predstavimo.

1. *Razdeliti moraš celoto na enake dele.*

To ni tako enostavno, kot se zdi, ker enako pomeni le "vsi enake velikosti", in ne vsi enake oblike. Klasični začetek je, da damo otrokom pravokotni kos papirja in jim rečemo, da ga prepognejo tako, da dobijo 4 enake dele. Verjetno bo učenec predstavil 4 načine, ki jih najdemo na spodnji sliki v zgornji vrsti. Zanimiv pogovor steče že, če se ukvarjamo z različnimi tipi delitve (in se pogovarjamo, zakaj so vsi deli enako veliki). Pomembno je že na začetku pokazati delitve, kot so v spodnji vrsti na sliki, da se otroci zavedo bistva.



2. *Dva ulomka sta ekvivalentna, če določata enako velike dele iste celote.*

Bistveno je, da so ulomki, ki so videti drugačni, lahko ekvivalentni – enak del celote lahko zapišemo z različnimi zapisi ($\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{123}{369}$).

Še več, osredotočiti se je treba na celoto. O ulomkih lahko povemo nekaj smiselnega le, če se zavedamo celote. Zato učence učimo, da govorijo o "$\frac{1}{4}$ pice" namesto o "$\frac{1}{4}$". Šele po dveh letih v Flandriji naredijo abstrakcijo do $\frac{1}{4}$ kot števila in tudi takrat razložijo, da mislijo $\frac{1}{4}$ od števila 1.

Če se naveževa na 3. vprašanje iz uvodnega dela: nemogoče se je odločiti, ali imaš raje škatlo za sladkarije od mame ali od starega očeta. Lahko se zgodi, da je $\frac{1}{4}$ škatle tvojega starega očeta dejansko večja od $\frac{1}{2}$ škatle tvoje mame (učencem lahko tudi pokažemo škatli dveh različnih velikosti).

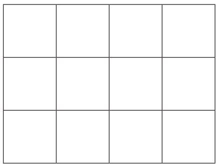
V Sloveniji je prepoznavanje ekvivalentnih ulomkov zapisano v učnem načrtu za četrti razred pri posebnih znanjih (dodatna ali poglobljena znanja, ki jih učitelj obravnava po svoji presoji, glede na zmožnosti in interese učencev/učenk). Vsi učenci naj bi to prepoznali v 6. razredu. V Sloveniji, tako kot v Flandriji, je poudarek na odvisnosti ulomka od celote (pice, pravokotnika, tablice čokolade …).

δ Netemeljni vidiki ulomkov

Poleg temeljnih vidikov mora vsak učenec razumeti in zato tudi izkusiti netemeljne vidike ulomkov (VVKBaO 1998; De Boeck, Herremans 2009). To pomeni, da bi morali učitelji dobro premisliti o različnih situacijah, v katerih govorijo o ulomkih: ključna beseda je tukaj "različnost". Nekaj primerov:

1. Celota je lahko razdeljena na manjše dele ali ne.

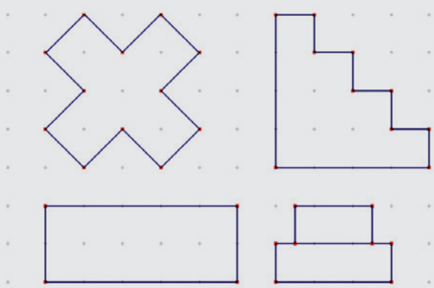
Razlika med množico 7 frnikol in torto kot celoto je v tem, da ne moremo razdeliti množice frnikol na 3 enake dele, a pomen ulomka je v obeh primerih enak. Dober material, ki je nekaj od obojega, je tablica čokolade: lahko jo razdelimo na poljubno število koščkov, saj ima že celota neko naravno strukturo za deljenje.



2. Tip ali oblika celote.

Ne samo premice, tudi pravokotniki ali okrogli predmeti se lahko razdelijo. Na primer:

Pobarvaj $\frac{1}{10}$ naslednjih likov.



3. Velikost celote.

Ni pametno, da uporabljamo samo pravokotnike velikosti 10 cm^2. Vzamemo lahko tudi manjše ali večje pravokotnike, da se otroci naučijo, da je velikost celote nebistvena za pomen ulomka.

4. Način deljenja celote.

Na primer pogovor o 1. točki temeljnih vidikov v poglavju γ.

ε Kako začnemo uvajati ulomke?

V Flandriji začnejo uvajati ulomke na treh različnih področjih: ulomek kot operator, kot razmerje in končno kot abstraktno število (VVKBaO 1998; 2001, 2002; učni načrt na MEF 2013).

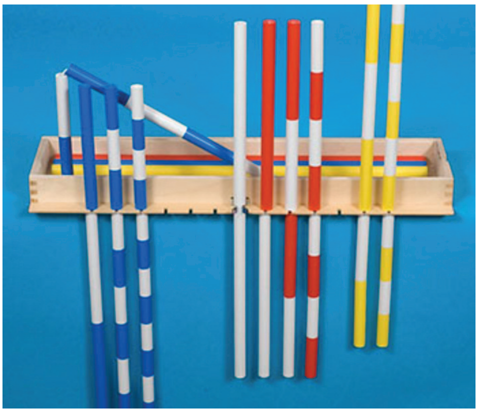
1. Ulomek kot operator.

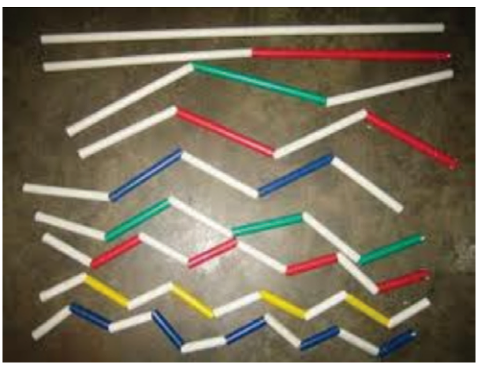
Tukaj konkretno razdelijo celoto na dele in vzamejo pravo količino. Na začetku vzamejo $\frac{1}{3}$ torte, $\frac{1}{7}$ od 28 frnikol. V prvem letu (pri 8. letu starosti) se ukvarjajo z ulomki s števcem 1. Nato barvajo $\frac{2}{3}$ zastave, delijo 7 tort na 4 enake dele, merijo razred z leseno palico dolžine 1 m (in upajo na odgovor npr. 8 metrov in $\frac{2}{5}$ metra …). Kot lahko vidite, ostaja pomembna različnost (glej netemeljni vidiki v poglavju δ).

Eden izmed pripomočkov, s katerimi se lahko učijo učenci o ulomkih, so ulomkove palčke (slika 1). Ulomkove palčke so skupaj spete z elastiko. Vsaka palčka v škatli ima isto dolžino, ki predstavlja celoto. Palčke so razdeljene na enako velike kose, kar kažejo tudi izmenjujoče si barve (glej sliko 1 na desni strani).

Palčke so v kompletu skupaj s škatlo, ki ima ob strani utore, v katere lahko postavimo palčke (slika 1). Tako lahko pokažemo pomen ulomka (del nad škatlo) kot dela celote. Pripomniti velja, da lahko vedno vidimo celoto. Nekatere bodoče učitelje to moti, kar lahko rešimo s skrivanjem vsega, kar je pod škatlo.

Na primer: z dvema (rumenima) palčkama na desni strani (na sliki 1) lahko prepričamo učence, da je $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Je tudi dober pripomoček za urejanje ulomkov (zlahka vizualno prikažemo, da je npr. $\frac{4}{7} < \frac{5}{6}$). Po drugi strani pa ni primeren pripomoček za seštevanje ali odštevanje ulomkov. Vendar je zelo dober konkretni pripomoček za delo z učenci, ki imajo težave pri razumevanju osnovnih značilnosti ulomkov.





[Slika 1] Ulomkove palčke

V slovenskih osnovnih šolah se ukvarjamo z ulomki kot operatorji na podoben način. Najprej se uporabljajo ulomki s števcem 1 in pozneje z večjimi števci. Učenci tudi računajo vrednost enega dela celote, če je celota dana (npr. $\frac{1}{4}$ od 16), a pozneje kot v Flandriji (v četrtem razredu pri 10. letu starosti). V petem razredu računajo del celote (npr. $\frac{3}{4}$ od 16). V slovenskih šolah nismo seznanjeni z ulomkovimi palčkami, a so videti kot dober konkreten pripomoček za razumevanje ulomkov.

2. Ulomek kot razmerje.

Začnemo s preprostimi primeri kot:

V našem razredu (s 25 učenci) je 10 dečkov. Kolikšen del razreda je to?

Tukaj seveda pride do izraza ekvivalentnost ulomkov $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. V nadaljevanju lahko predstavimo drug razred, kjer so 3 od 4 učencev dečki.

Zanimiv je pogovor, s katerim učenci začutijo razliko med vrstnim redom ulomkov in naravnimi števili. Postavimo lahko naslednja vprašanja:

V katerem razredu je relativno več dečkov? V katerem razredu je več dečkov?

Lahek način, kako se o tem pogovarjati z mlajšimi učenci (začenši v 4. razredu), je uporaba tabel razmerij.

1. razred:

Število dečkov	2	4	6	8	10	…
Število učencev	5	10	15	20	25	…

2. razred:

Število dečkov	3	6	9	12	15	…
Število učencev	4	8	12	16	20	…

Sklep: v enako velikih razredih lahko sklenemo: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} > \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ (to lahko vidimo iz tabel razmerij v razredu z 20 učenci), a na splošno je nemogoče določiti, v katerem razredu je več dečkov. Če ima prvi razred 25 učencev in drugi samo 12, je dejansko več dečkov v drugem kot v prvem razredu. To je zato, ker vzamemo $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{3}$ od različnih celot.

Opazimo lahko, da se uporaba tabel razmerij sklada z zapisom ulomkov. Naslednje ulomke $\frac{2}{3} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25}$ lahko razberemo iz teh tabel. Poleg tega tabele poudarjajo tudi koncept razmerja. Vsi ti razredi imajo enak odstotek ali razmerje dečkov (glej tudi 2. vprašanje o soku v poglavju β).

Ko govorimo o odstotkih, mislimo v določenem kontekstu tudi na razmerje. Na primer pri računanju 3 % od 600 (glej Nieuwe Talrijk 2003) lahko razmišljamo na naslednji način: 3 % pomeni "3 od vsakih 100", pomnoženo s 6 dobimo, da je to enako "18 od vsakih 600". Ponovno to lahko zapišemo v tabelo razmerij.

V tem pogovoru z otroki kot učitelj lahko dejansko vidiš, ali otrok razume koncept ulomka. V Sloveniji se težko pogovarjaš na ta način pred 7. razredom z vsemi otroki (z nadarjenimi morda v 5. razredu). Kakor koli, za otroke je ključno, da vidijo povezavo med ulomki, razmerji in odstotki.

3. Ulomek kot abstraktno število.

To je seveda pomembno, a temu v osnovni šoli posvečajo malo pozornosti (MEF 2013). Ker se veliko časa posveča prejšnjima dvema področjema, je korak do števila lahek. Vsak ulomek lahko vidimo kot del ali kot razmerje glede na število 1. To se izkaže pri vajah računanja z ulomki. Kljub temu naj bi se učenci v razlagah vedno sklicevali na celoto.

ζ Primer prve ure seštevanja ulomkov

To je primer učne ure na začetku 5. razreda v Flandriji (ZGZG 2011). Učenci že vedo, kaj so ekvivalentni ulomki. Učna ura se začne z (ustnimi) vajami za priklic tega, npr. $\frac{1}{2} = \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{10}$. Sledi razdelitev razreda na skupine. Vsaka skupina dobi velik kos bombažnega blaga (seveda je lahko tudi velik list papirja), ravnilo in nekaj svinčnikov.

Učitelj jim pove nalogo:

> Velik kos bombažnega blaga bomo uporabili za izdelavo nekaj oblačil – srajce in šala. Vsaka skupina učencev dobi nekaj vprašanj na papirju, na katere morajo poiskati odgovore, ki jih mora vsak član skupine znati tudi razložiti.
>
> Za srajco uporabimo $\frac{2}{5}$ blaga in $\frac{1}{10}$ blaga za šal.
>
> - Pobarvaj z zeleno del, ki ga uporabimo za srajco.
> - Pobarvaj z modro del, ki ga uporabimo za šal.
> - Uredi po vrsti dele blaga (zeleno, modro in belo).
> - Kolikšen del blaga uporabimo za izdelavo obeh oblačil?
> - Kolikšen del blaga ostane po izdelavi obeh oblačil?
> - Koliko šalov bi lahko naredil z ostankom blaga?
> - Koliko srajc bi lahko naredil z ostankom blaga?

Skupine imajo dovolj časa, da razmislijo o vprašanjih in da se o njih pogovorijo med seboj. Sledi klasični pogovor, kjer učitelj določi učenca, ki naj odgovarja. Tukaj lahko preverimo, ali so vsi člani skupine sposobni razložiti, kaj so delali. Zaključek je $\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$ $(= \frac{1}{2})$.

V prvi uri te učne teme učitelj poudari celoto. V ta namen ubesedi, da je $\frac{2}{3}$ šala plus $\frac{1}{10}$ šala enaka $\frac{5}{10}$ (polovici) enega šala (pripomniti moramo, da je trikrat ista celota in zato isti šal, na katerega se nanaša). Vsak učenec bi moral biti sposoben takšnega razmišljanja na koncu učne ure. Torej se računska pravila poučujejo kot nekaj, kar vidiš in izkusiš v realnem življenju, in ne samo kot računsko pravilo, ki pade z neba in si ga je treba zapomniti. Zato je lažje posplošiti to na računanje z ulomki kot števili.

Računsko pravilo, kjer najprej daš vsak ulomek na ulomek s skupnim imenovalcem pred seštevanjem, se prikliče in vadi v naslednji šolski uri.

Torej: učenci imajo pol ure za delo v skupini pri dani nalogi, sledi klasičen pogovor približno 15 minut, kjer učitelj nameni veliko pozornosti pri povzemanju odgovorov. To pomeni, da si vzame učitelj vsaj eno učno uro, da učenci izkusijo koncept seštevanja ulomkov. Idealno bi bilo ponoviti takšno uro z podobnimi (ali malo težjimi) nalogami, ko bi začeli odštevati ulomke. V realnosti se to velikokrat izpusti, saj je kljub 6 uram matematike na teden program težko izpeljati, ker veliko ur preprosto izgine.

Na žalost si je v Sloveniji v 7. razredu s 4 urami matematike na teden težko vzeti že eno šolsko uro za takšno dejavnost o seštevanju ali odštevanju ulomkov, čeprav dejavnost in pogovor o takšni dejavnosti lahko veliko pripomore pri razumevanju operacij z ulomki. Ustvarimo lahko konceptualni okvir iz realnega življenja za seštevanje ulomkov, ki si ga bodo učenci veliko bolj zapomnili kot katero koli pravilo, ki ga učitelj samo predstavi učencem.

η Nekaj problemov iz razmerij

Začenjava s problemi, ki so dobri primeri za pogovor v razredu (5. in 6. razred). Vprašanja z zvezdico so – po najinem mnenju – primerna za nadarjene učence. Zopet predlagava, da najprej razmislite o rešitvi in kako bi jo lahko razložili učencem, preden pogledate komentarje.

1. Mesar da Andreju 2760 g mesa za piknik s 23 gosti. Koliko gostov bo na pikniku pri Katji, če ji je mesar dostavil 2040 g več mesa?
2. Dvanajst delavcev dela normalno 15 dni, da skopljejo temelje za tvojo hišo. Vendar bi rad, da bi delo končali v 9 dneh. Koliko delavcev potrebuješ, da bi delo opravili pravočasno?
3. (*) Kvadratu povečamo vse stranice za 50 %. Za koliko % se poveča ploščina?
4. (*) Kolikšen je kot med dvema urnima kazalcema ob 10.20 (20 minut čez 10)?

Komentarji in rešitve

1. Odgovor je 40 gostov. Tukaj upamo na standardno pot reševanja: 2760 g mesa je za 23 ljudi, koliko mesa je za 1 osebo? To je dobra vaja v preračunanju na osebo (dejansko v Flandriji učitelji pogosto vključujejo takšne naloge). Dobimo 120 g mesa na osebo. Sposobnejši učenci bodo upoštevali, da ima Katja 4800 g mesa (2760 g + 2040 g = 4800 g) in bodo takoj povedali odgovor. Učence, ki niso tako sposobni, bo pritegnil podatek 2040 g in bodo računali, koliko ljudi lahko poje toliko mesa. V bistvu bi se moral vsak učenec pred računanjem vprašati o približni vrednosti, ki bi morala biti med 34,5 (2040 je več kot polovica od 2760) in 46 (2040 je manj kot 2760). Tudi uporaba tabel razmerij (glej poglavje ε, razdelek *Ulomek kot razmerje*) je zanimiva.
2. Tukaj sta število delavcev in število dni v obratnem sorazmerju. To pomeni, da je njun produkt stalen. Če uporabimo obratno sorazmerje v tem kontekstu, pomeni, da za kopanje temeljev potrebujemo $12 \cdot 15 = 180$ dni dela. Zdaj mora delo biti opravljeno v 9 dneh, zato potrebujemo 20 delavcev.

3. Odgovor je 125 %. Najboljši način, da to vidimo, je pogovor o razmerju velikosti. Povečanje je risanje v razmerju 1,5 : 1 ali 3 : 2. Ker obe stranici pomnožimo z $\frac{3}{2}$, se bo ploščina pomnožila z $\frac{9}{4}$. Zato se je ploščina povečala za $\frac{5}{4}$ = 125 % izvirne ploščine. Pomembnost te vaje je to, da bi se morali (tudi sposobnejši) učenci zavedati, kaj delajo. Ne smejo misliti, da gre pri tej nalogi samo za neko računanje s števili. Ni lahke poti, da dobimo iz 50 % pravi odgovor 125 %, zato morajo izvesti zgornji razmislek.
4. Odgovor je 170° (ali 190°). Ta naloga zahteva dva koraka. Prvi, ki se ga večina učencev zaveda: kot med dvema zaporednima številkama na uri je 30° (kar je $\frac{1}{12}$ od 360°). A potem postavijo mali urni kazalec na 10 in velikega na 4 in dobijo rešitev … Večina pozabi, da se v 20 minutah med 10.00 in 10.20 mali urni kazalec premika naprej … in dejansko prepotuje $\frac{1}{2}$ razdalje med številkama 10 in 11. V pogovoru po reševanju naloge učenci včasih povedo, da niso vedeli, da morajo narediti ta drugi korak. Možen odgovor je ″Kam postaviš mali urni kazalec, ko se vprašanje nanaša na 6.30?″ Dejansko kdo ugotovi, da je precej enostavno izračunati pravilen kot za vsako minuto dneva, npr. ob 7.48. Tudi to, da je več kot en pravilni odgovor, je dobro s pedagoškega stališča, saj se to ne zgodi dovolj pogosto v nalogah v učbenikih.

θ Sorazmernostne spremenljivke v osnovni šoli

V petem in šestem razredu se učenci v Flandriji srečajo z vprašanji, povezanimi z razmerji (glej VVKBaO 2001, 2002). Ko govorijo o razmerjih, je to prvič, da učenci v podrobnosti raziščejo odnos med dvema spremenljivkama. Rezultat je, da lahko učenec v enostavnih nalogah natančno določi vpliv na drugo spremenljivko, če pozna spremembo prve spremenljivke. Zelo pomembno je tukaj poudariti, da vse druge spremenljivke ostanejo nespremenjene.

V Flandriji je v uporabi terminologija *″recht evenredig″* in *″omgekeerd evenredig″*, kar pomeni ″ima isto razmerje″ (SR) in ″ima obratno sorazmerje″ (RR). V Sloveniji poimenujemo SR premo sorazmerje in RR obratno sorazmerje.

1. Spremenljivki z enakim razmerjem (SR) – premo sorazmerje

Na primer dolžina pravokotnika in njegova ploščina sta premo sorazmerni. Najlažja pot, da to preverimo, je taka: pogledamo, kaj se zgodi, če eno od vrednosti prve spremenljivke podvojimo. Če se tudi vrednost druge spremenljivke podvoji, imamo spremenljivki, ki imata enako razmerje. Pomembno je poudariti, da ostane širina pravokotnika vedno nespremenjena.

Ko pogledamo terminologijo v nizozemščini (ki je tudi uradni jezik v Flandriji), vidimo, kako učijo otroke: dve spremenljivki sta premo sorazmerni, če je njuno razmerje stalno v vseh primerih. To lahko vidimo v tabelah razmerij (VVKBaO 2001) ali v pripadajočih ulomkih. Na primer: začnemo s pravokotnikom s širino 4 cm in dolžino 5 cm in proučimo razmerje med dolžino in ploščino:

Ploščina (v cm^2)	20	40	80	10	4	…
Dolžina (v cm)	5	10	20	2,5	1	…

Če pogledamo tabele razmerij, lahko prepoznamo ekvivalentne ulomke:

$\frac{20}{5} = \frac{40}{10} = \frac{80}{20} = \frac{10}{2{,}5} = \frac{4}{1}$.

Napaka, ki jo delajo učenci, je, da spremenljivki razglasijo za premo sorazmerni, če se obe spremenljivki povečujeta hkrati. Zato je pomembno, da jim damo primere spremenljivk, ki nista premo sorazmerni: npr. (1) dolžina in masa človeka; (2) število tekem na nogometnem prvenstvu in število klubov, ki tekmuje na tem prvenstvu; (3) polmer in ploščina kroga. Drugi primer je zelo poučen, saj je jasno, da je ob večjem številu klubov tudi število tekem večje. Vendar, če preverimo tabele razmerij za te primere, lahko sklenemo, da te spremenljivke niso premo sorazmerne.

2. Spremenljivke, ki imajo obratno razmerje (RR) – obratno sorazmerje

Na podoben način lahko preučimo dve spremenljivki, ki sta obratno sorazmerni. Pogledamo, kaj se zgodi, ko eno od vrednosti spremenljivke podvojimo. Če ima vrednost druge spremenljivke polovico osnovne vrednosti, imamo (verjetno) obratno sorazmerni spremenljivki.

Koncept obratno sorazmernih spremenljivk pravi, da imata dve števili obratno razmerje ali da je njun produkt stalen. To je pomembno, da opazimo, in je enostavno pokazati na konkretnih primerih. Na primer, da ima nekdo hrane za 20 dni za 6 kokoši. Koliko dni bo imel hrane za 10 kokoši? Produkt $20 \cdot 6 = 120$ pove število dnevnih porcij hrane, ki je na voljo. Za 6 kokoši je na voljo hrane za 20 dni … 10 kokoši pa lahko hranimo le 12 dni (spet se spomnimo, da je $12 \cdot 10 = 120$). Podoben primer je 2. primer v poglavju η.

Spremenljivke, ki so obratno sorazmerne, je rahlo težje odkriti v tabelah razmerij. Opazimo lahko, da gresta spremenljivki v obratni smeri: če se ena povečuje, se druga zmanjšuje. Ko dodamo v takšno tabelo razmerij tretjo vrstico, v kateri so produkti vrednosti obeh spremenljivk, lahko vidimo obratno sorazmerje.

Dnevne porcije hrane	120	120	120	120	120	120	120	…
Število kokoši	6	10	20	5	15	2	1	…
Število dni	20	12	6	24	8	60	120	…

Torej je $6 \cdot 20 = 10 \cdot 12 = 20 \cdot 6 = 5 \cdot 24 = 15 \cdot 8 = 2 \cdot 60 = 1 \cdot 120$.

Po slovenskem učnem načrtu se učenci prvič srečajo s povezanostjo količin (sklepanje iz enote na množino in iz množine na enoto) v 4. razredu.

V 8. razredu se učenci ukvarjajo s spremenljivkami, ki so v premem ali obratnem sorazmerju, poudarjena je tudi povezava z odstotki. Zanimivo je tudi, da v Sloveniji govorimo o razmerjih šele v 9. razredu in ob tem povežemo razmerja s spremenljivkami in tabelami razmerij. Pri primeru premega sorazmerja med dolžino in ploščino pravokotnika bi lahko zapisali tudi $20 : 5 = 40 : x$ (Dornik in dr. 2005; 2007).

ι Praktični primer razmerij: prestave na tvojem kolesu

Primer iz vsakdanjega življenja, ki vsebuje premo sorazmerni spremenljivki in obratno sorazmerni spremenljivki, so prestave na kolesu. Da se lahko s tem ukvarjamo pri pouku, potrebujemo eno šolsko uro merjenja na igrišču.

Vprašanja lahko diferenciramo glede na različne skupine. V prvi skupini lahko določimo, da so prednje prestave stalne in se spreminjajo samo zadnje prestave. Primeri vprašanj med delom na igrišču:

1. Preštej (previdno) število zobnikov na sprednjih zobatih kolesih.
2. Preštej število zobnikov na najmanjšem zadnjem zobatem kolesu.
3. Previdno izmeri razdaljo, ki jo kolo opravi v točno enem obratu pedal (z verigo na najmanjšem zadnjem zobatem kolesu).
4. Preštej število zobnikov na največjem zadnjem zobatem kolesu.
5. Previdno izmeri razdaljo, ki jo kolo opravi v točno enem obratu pedal (z verigo na največjem zadnjem zobatem kolesu).
6. Naredi enako, npr. preštej število zobnikov in izmeri razdaljo enega obrata za nekatera druga zadnja zobata kolesa.
7. Zapiši vse informacije, ki si jih dobil, v tabelo. Uredi podatke glede na število zobnikov na zadnjem zobatem kolesu.

Izpolnjena tabela je lahko podobna kot spodnja tabela (glej npr. Verzettentabel 2013):

Število zobnikov (spredaj): 46					
Število zobnikov (zadaj)	12	15	18	22	26
Razdalja pri enem obratu (v cm)	802	645	535	437	370

Vprašanja, o katerih naj bi razmišljali otroci, ko izpolnijo tabelo, in o katerih naj bi se pogovarjali v razredu:

- Kaj se zgodi, če število zobnikov na zadnjem zobatem kolesu narašča?
- Ali obstaja vzorec: ali obstaja povezava med številom zobnikov na zadnjem zobatem kolesu in razdaljo, ki jo kolo opravi v enem obratu?
- Ali lahko predvidiš: npr. kolikšno razdaljo bi kolo opravilo v enem obratu, če bi zadnje zobato kolo štelo 24 zobnikov? Ali 30 zobnikov?

Druga skupina lahko dopolni podobno tabelo, vendar s stalnim zadnjim zobatim kolesom in različnimi sprednjimi zobatimi kolesi.

Za skupino nadarjenih otrok v razredu je lahko naloga mešana: raziščejo naj primer, ko se tako sprednje kot zadnje zobato kolo spreminjata po številu zobnikov. Najbolje pa je, da se osredotočijo na dve različni sprednji zobati kolesi in tri različna zadnja zobata kolesa in da vidijo relacije med njimi.

Sklep po uri merjenja na igrišču in uri pogovora bi moral biti: število zobnikov na sprednjih zobatih kolesih je v premem sorazmerju z razdaljo, v kateri se kolo zavrti za en obrat (sprednje zobato kolo pove, za koliko zobnikov se kolo premakne naprej). Število zobnikov na zadnjem zobatem kolesu je obratno sorazmerno z razdaljo, ki jo naredi kolo v enem obratu (zadnje zobato kolo pove, koliko zobnikov sprednjega zobatega kolesa potrebujemo, da premaknemo zadnje kolo za 360°). Razmerje med zobniki prednjega in zadnjega zobatega kolesa je ključno število, ki opredeljuje razdaljo v enem obratu (npr. obe zobati kolesi 48–24 in 36–18 bosta opravili enako razdaljo v enem obratu, to je dvakrat premer zadnjega kolesa).

Otroci bi morali znati odgovarjati na sestavljena vprašanja, kot na primer:

Kolo, ki ima spredaj 42 ter zadaj 13 zobnikov, opravi pot 4 m. Kakšno pot bi opravilo isto kolo, če bi imelo spredaj 39 in zadaj 20 zobnikov?

Nekaj pripomb, ki se nanašajo na ta primer iz vsakdanjega življenja:

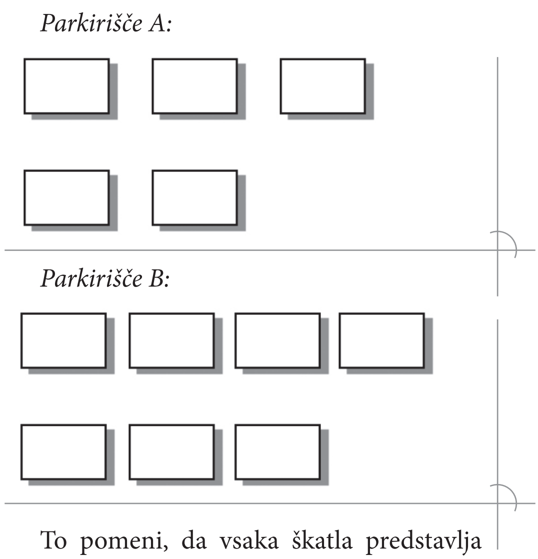
- Štetje zobnikov pri prestavah zahteva od učencev kar nekaj organiziranosti, natančnosti in koncentracije.
- Merjenje dolžine v centimetrih ne bo točno, kot bi moralo biti po teoriji. To spodbuja k razmišljanju, da je matematika dobra (a ne odlična) opisovalka realnega sveta. Obstajajo tudi bolj zapletene formule, ki upoštevajo tudi tipe kolesarskih pnevmatik (npr. Bikecalc 2013).
- Razdalje so odvisne tudi od premera zadnjega kolesa in zato je težko primerjati različna kolesa med seboj.
- Dejstvo, da so učenci preživeli eno uro pri merjenju razdalj s kolesi, skupaj s pravilno besedno razlago, ustvarja dobro podlago za razmišljanje o premem in obratnem sorazmerju.
- Pomembno je opozoriti na to, da nima nobenega vpliva, kako pridemo do števila zobnikov na zobatih kolesih. Posebej v sestavljenih vprašanjih lahko dobimo iz razmerja števila zobnikov 42–13 razmerje 39–20 z uporabo razmerij 39–13 ali 42–20.
- Če ne pridete do zaključka, da je razmerje obeh zobatih koles odločilen faktor, je dobro, da poudarite, da premo in obratno sorazmerje lahko deluje le, če je vse drugo nespremenjeno. Zato, ko spremenite število zobnikov na sprednjem zobatem kolesu, morate število zobnikov na zadnjem zobatem kolesu pustiti nespremenjeno. Torej se je treba s sestavljenimi vprašanji ukvarjati v dveh preprostih korakih.
- Pred učno uro o prestavnih razmerjih pri kolesu je dobro imeti učno uro o besedišču o kolesu.

κ Neenaka delitev

Drug prostor, kjer se srečata razmišljanje o razmerjih in ulomkih v osnovni šoli, je v konceptu "neenakega razdeljevanja". V Flandriji se o tem učijo v 5. in 6. razredu (VVKBaO 2001, 2002). Omejimo se na naslednjo nalogo:

Imaš dve parkirišči A in B. Za vsakih 5 avtomobilov, ki parkirajo na parkirišču A, lahko parkira 7 avtomobilov na parkirišču B. Če lahko parkira 732 avtomobilov na obeh parkiriščih hkrati, koliko avtomobilov lahko parkira na parkirišču A in koliko na parkirišču B?

Rešitev je primerljiva z vprašanjem 4 o počenih jajcih v poglavju β: argument razmerja si lahko predstavimo s škatlami; 5 za parkirišče A in 7 za parkirišče B. Skupaj teh 12 škatel predstavlja 732 avtomobilov.



To pomeni, da vsaka škatla predstavlja 732 : 12 = (600 + 120 + 12) : 12 = 61 avtomobilov. Zato lahko parkiraš 305 avtomobilov na parkirišču A in 427 na parkirišču B.

Zopet je vizualna predstavitev koncepta situacije ključ do rešitve.

λ Sklep

Predstavila sva primere, kako lahko mlajše otroke (od 3. do 6. razreda) poučujemo ulomke (poglavje β in ξ), odstotke in sorazmernostne spremenljivke (poglavji η in θ). Zelo visoka uvrstitev Flandrije na mednarodnih matematičnih testih v primerjavi z drugimi evropskimi državami (ali že znotraj Belgije) ima lahko dva vzroka: (1) učenci imajo več ur matematike v primerjavi z drugimi državami in (2) ta dodaten čas se uporabi za učenje matematike v konceptualnem okviru: računska pravila odkrivajo in jih preizkušajo na praktičnih primerih iz realnega življenja.

Poudarila sva, da v konceptualnem okviru lahko najdemo širok spekter primerov za vsako definicijo ali računsko pravilo. Učenci lahko izberejo tisto, ki jim je najbolj všeč in jo uporabijo kot priporočilo, ko se srečajo s tem konceptom. Pomembno je poudariti to, da ubeseditev, kaj nekdo dela (in zakaj), za pridobivanje vpogleda igra pomembno vlogo v večini začetnih didaktik matematike. Ob tem je zelo pomembno govoriti o temeljnih in netemeljnih vidikih (glej poglavji γ in δ ali primere premega sorazmerja v poglavju θ). Za popolno razumevanje, o čem je govor, je koristno, da si vzamemo čas za pogovor o protiprimerih zato, da učenci spoznajo, o čem pa ni govora.

μ Viri in literatura:

1. Bikecalc. *http://www.bikecalc.com/* (2. 12. 2013). *Spletna stran z informacijami o prestavah pri različnih kolesih.*
2. De Boeck I., Herremans A., Wiskunde 3, cursus lerarenopleiding KHKempen, 2009. *Učni načrt za poučevanje v srednji šoli.*
3. Dornik, M., Smolej, T., Turk, M.,Vehovec, M. Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole, Modrijan, 2005. *Učbenik matematike za deveti razred osnovne šole v Sloveniji.*
4. Dornik, M., Smolej, T., Turk, M.,Vehovec, M. Kocka 8, matematika za 8. razred osnovne šole, Modrijan, 2007. *Učbenik matematike za osmi razred osnovne šole v Sloveniji.*
5. Eurydice Slovenia, *http://www.mizs.gov.si/en/eurydice_slovenia/* (19. 05. 2013). *Spletna stran o slovenskem šolskem sistemu.*
6. Herremans A. "Today champions in math, tomorrow in equal chances": a short overview of strengths and weaknesses of Flemish Education, in Proceedings of the 1ste International Conference on Learning and Teaching

Mathematics, Maribor 2012, p. 265–275, *dostopno na (KUPM 2012).*

7. KUPM 2012, *http://www.zrss.si/kupm2012* (5. 4. 2013). *Spletna stran o 1. mednarodni konferenci o učenju in poučevanju matematike, Maribor 2012.*
8. MEF. Ministry of Education of Flanders. *http://www.ond.vlaanderen.be/* (5. 4. 2013). *Spletna stran Ministrstva za šolstvo Flandrije, delno v angleščini.*
9. MESS. Ministry of Education, Science and Sport, Republic of Slovenia. *http://www.mizs.gov.si/en/* (19. 05. 2013). *Spletna stran Ministrstva za izobraževanje, znanost in šport, delno v angleščini. Učni načrt je dostopen na spletni strani http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf.*
10. Nieuwe Talrijk 5b, les 73, *ISBN: 978-90-301-1430-7*, Plantyn, 2003. *Flamski učbenik matematike za 5. razred.*
11. PISA. *http://www.pisa.oecd.org/* (5. 4. 2013). *Spletna stran OECD, programa za mednarodne raziskave dosežkov učencev.*
12. TIMSS. *http://timss.bc.edu/* (22. 12. 2012). *Spletna stran o trendih v matematiki in znanosti; testi TIMSS in PIRLS.*
13. Verzettentabel. *http://www.fiets.nl/techniek-en-fysiek/verzettentabel/* (5. 4. 2013). *Spletna stran z razdaljami pri kolesih in o delovanju prestav.*
14. VVKABaO. Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs, Wiskunde Leerplan, 1998, D/1998/0938/02. *Podroben učni načrt flamskih katoliških osnovnih šol.*
15. VVKBaO. Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs, Toelichtingen Getallenkennis, 2001, D/2001/0938/02. *Podrobni učni cilji, ki se nanašajo na števila in aritmetiko v flamskih katoliških osnovnih šolah.*
16. VVKBaO. Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs, Toelichtingen Bewerkingen, 2002, D/2002/0938/01. *Podrobni učni cilji, ki se nanašajo na operacije v flamskih katoliških osnovnih šolah.*
17. ZGZG. Zo gezegd, zo gerekend 5AB handleiding, 621 p. *ISBN: 978-90-301-3366-7*, Plantyn, 2011. *Priročnik za učitelje za 5. razred v Flandriji.*