

Dvojnost Boolove algebre

Odlomek iz monografije o implikaciji

MARKO URŠIČ

George Boole (1815-1864) s svojima znamenitima deloma *Mathematical Analysis of Logic* (1847) in *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) v zgodovini logike velja predvsem kot tisti mislec, ki je:

1. logiko definitivno povezal z matematiko in njenimi metodami;
2. utemeljil stavčno logiko kot izhodiščni in temeljni logični račun, s tem da jo je reducirjal na posebne vrste aegbro.

Ugotovitev (1) je nedvomno točna, saj Boole že na začetku *Analysis* izrecno poudarja: "Moj namen je ustvariti račun Logike, za katerega zahtevam, da ima svoje mesto med priznanimi oblikami Matematične Analize ...", kakor tudi v uvodu v *Laws* pravi, da "so poslednji zakoni Logike po svoji obliki matematični" (str. 11). In teh maksim se Boole pri eksplikaciji svojega sistema izrecno drži.

Ugotovitev (2) pa potrebuje določeno precizacijo, ki jo sodobne prezentacije Boolove algebre skoraj spregledajo oz. "obidejo". Glavni Boolov namen pri formulaciji "algebre logike" namreč ni bil stavčni račun (čeprav bomo pozneje videli, da je večkrat poudarjal fundamentalnost stavčnega računa, npr. v odnosu do silogizma), temveč formulacija takšne matematične strukture, ki bi omogočila s svojo čim večjo stopnjo abstrakcije, da bi bili v njej formulirani "zakoni misli" (*the Laws of Thought*), in ki bi, nadalje, imela tako odprto interpretacijsko polje, da bi - znotraj formalne logike - omogočala *dvojni interpretacijski model*:

- a) terminsko (aristotelsko, klasično) logiko in
- b) stavčno (nekdanjo stoiško, sedaj pa "novo") logiko.

Prav v tej dvojnosti je bistvo Boolove algebre in pri tem je Boole nadaljevalec Leibnizove zamisli *characteristica universalis*, vsaj na področju formalne logike. Takšna "zrcalna ambivalentnost" Boolove algebre kot "matematične" osnove sodobnega standardnega logičnega kánona pa ima zelo odločilne in daljnosežne posledice, o katerih bomo govorili spodaj. Najprej pa si pogledjmo - medtem postavimo historično dimenzijo v oklepaj - kaj *danes* razumemo s pojmom Boolove algebre. Za kakšno matematično-logično strukturo gre pri Boolovi algebri z današnjega zornega kota?

Definicija Boolove algebre, kakor jo najdemo v sodobnih učbenikih (npr. pri Ivanu Vidavu, *Algebra*), je večstopenjska. Običajno se začenja s pojmom grupe, kolobarja,

obsega in prek pojma algebre nasploh preide k pojmu Boolove algebre. Te izrazito matematične definicije Boolove algebre tukaj ne bi povzemali, ampak se bomo ozrli predvsem po - seveda izomorfni - definicijah Boolove algebre v literaturi s področja logike. Tukaj lahko v grobem rečemo, da je matematična definicija *algebre* (prek kolobarja itd.) takšna, da omogoča operacije med elementi algebre in števili (npr. $a + a = 2a$), in prav ta značilnost algebre Boolu omogoča "računanje s pojmi", namreč s pojmi kot elementi algebre. - Za logiko zanimiva značilnost Boolove algebre (kot matematične strukture) pa je tudi in morda predvsem v tem, da Boolova algebra "vsebuje" kot svojo pod-strukturo mrežo, tj. takšno strukturiranost množice, v kateri vlada med elementi množice neka *hierarhija* (urejenost v vrsto) na osnovi neke *asimetrične relacije*. Prav ta značilnost v sodobnih standardnih računih omogoča *vpis implikacije*, točneje t.i. materialne implikacije oz. "Filonovega kondicionala", v *algebraično strukturo*. Implikacija pa je, kar je odveč poudariti, za logiko bistvena. Torej, pogledimo si definicijo Boolove algebre na osnovi pojma mreže. Izhajamo iz:

delno urejena množica = množica, v kateri velja "hierarhija" med elementi na osnovi neke asimetrične relacije, npr. *relacije podmnožice* $\subseteq$. Relacija je: 1) refleksivna, 2) antisimetrična, 3) tranzitivna. Antisimetričnost implicira asimetričnost, razen če $a = b$.

mreža = delno urejena množica z *unijo in presekom* (maksimumom in minimumom) za vsaka dva elementa a in b . Mreža je: 1) refleksivna, 2) komutativna, 3) asociativna. Če je poleg tega še *distributivna*, govorimo o distributivni mreži.

Boolova algebra = *komplementarna distributivna mreža*. To pomeni: Komplementarna (mi bomo uporabljali izraz *komplementirana*, ker ta bolj ustreza smislu definicije; angl.: *complemented*) mreža je komplementirana z dvema skrajnima elementoma, in sicer z *največjim elementom* 1 ("največjim" v pomenu hierarhije, ki jo uvaja delna ureditev množice) in z *najmanjšim elementom* 0 , pri čemer med poljubnim elementom a in njegovim "komplementom" $\bar{a}$ veljata odnosa: $(a \cap \bar{a}) = 0$ in $(a \cup \bar{a}) = 1$.

Sedaj si oglejmo še nekoliko bolj formalno definicijo Boolove algebre v današnjem pomenu, kakor jo navajata logika Anderson in Belnap v *Entailment* (1975). Avtorja pravita, da je "popolna deskripcija sistema, ki ga imenujemo Boolova algebra, podana z naslednjimi enačbami" (gl. str. 181):

$$L1 \quad a \wedge a = a, a \vee a = a$$

$$L2 \quad a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$$

$$L3 \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$L4 \quad a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$$

$$L5 \quad a \wedge \bar{a} = 0, a \vee \bar{a} = 1$$

$$L6 \quad a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1$$

Še bolj formalizirano, tako rekoč "šolsko pedantno", definicijo Boolove algebre (v sodobnem pomenu) najdemo v Hughes & Cresswell (1972, str. 311 - 312). Zaradi izjemnega pomena razumevanja Boolove algebre za problem sodobne (standardne) implikacije, povzemamo to definicijo v celoti, čeprav je nekoliko obširnejša:

"Boolova algebra je sestavljena iz množice (K) objektov $a, b, c \dots$, ki se imenujejo *elementi*, skupaj z določenimi operacijami (ali funkcijami), katerih argumenti so člani množice K in katerih vrednosti so prav tako člani množice K Boolova algebra mora vsebovati monadični operator, ki ga bomo označili z $\cdot$ in diadični operator, ki ga bomo pisali z $\wedge$ ter mora zadovoljevati naslednje pogoje (ki jih pogosto imenujemo *postulati*):

1.1. K vsebuje najmanj dva elementa.

1.2. Če $a, b \in K$, potem $-a \in K$ in $(a \times b) \in K$.

1.3. Če $a, b \in K$, potem $(a \times b) = (b \times a)$.

1.4. Če $a, b, c \in K$, potem $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

1.5. Za vsaka $a, b \in K$ velja: če obstaja kak $c \in K$ in sicer tak, da
 $(a \times -b) = (c \times -c)$, potem $(a \times b) = a$.

1.6. Za vsake $a, b, c \in K$, če $(a \times b) = a$, potem $(a \times -b) = (c \times -c)$.

Prikladno je, da dodamo (namreč k zgornjim postulatoma, op. M.U.) naslednje definicije:

[0] $0 \text{ def.} = (a \times -a)$

[1] $1 \text{ def.} = -0$

[+] $(a + b) \text{ def.} = -(a \times -b)$

[$\subset$] $(a \subset b) \text{ def.} = (a \times b) = a$

Boolovo algebro torej lahko definiramo kot urejeno tri-členo množico $\langle K, -, \times \rangle$, v kateri je K množica elementov, $-$ in $\times$ pa označujeta monadično in diadično operacijo na teh elementih, pri čemer morajo biti zadovoljeni navedeni postulati. Ker K lahko vsebuje poljubno število elementov (večje od 1), obstaja neskončno mnogo Boolovih algeber. ...

Operacijo, označeno z ' $\times$ ', pogosto imenujemo *množenje*; in $(a \times b)$ je pogosto imenovan *produkt* ali *presek* elementov a in b . Operacijo, označeno z '+', pogosto imenujemo *seštevanje*; in $(a + b)$ je *vsota* ali *unija* elementov a in b . -a pravimo, da je *negacija* ali *komplement* elementa a . ' $a \subset b$ ' lahko beremo: ' a je vsebovan v b .'

Hughes & Cresswellova definicija Boolove algebre (v sodobnem pomenu) v svojih šestih postulatih uporablja dva primitivna pojma, in sicer presek in komplement (poleg pojma 'biti element od', "sposojenega" iz teorije množic), medtem ko pojme univerzuma [1], praznega preseka oz. prazne množice [0], vsote oz. unije ter podmnožice oz. inkluzije definira - eksplicitno z zgoraj navedenimi štirimi definicijami, implicitno pa v samih postulatih (gl. 1.5 za inkluzijo, 1.6 za prazno množico oz. "nulti element").

Sodobne definicije Boolove algebre se, kot smo videli, po načinu prezentacije razlikujejo, vsem pa so brez dvoma skupne nekatere značilnosti, ki jih lahko neformalno izrazimo takole:

v Boolovi algebri so definirani:

1) produkt in vsota (preseki in unije), ki sta opredeljena z natančno določenimi lastnostmi: komutativnost, asociativnost, distributivnost, nadalje z odnosi do negacije, konkluzije ...

2) negacija (komplement), ki je spet opredeljena z lastnostmi ...

3) nulti in univerzalni element, za katerega veljajo enačbe ...

4) relacija inkluzije (podmnožice) na osnovi asimetrije.

Za sodobno logiko pa je posebej pomembna Boolova algebra s samo dvema elementoma, tj. *dvovalentna Boolova algebra*, pri kateri imamo kot elementa (a, b) "*resničnostni vrednosti*" (Frege: *Wahrheitswerte*) 1 in 0. Dvovalentna Boolova algebra je s sintaktičnega stališča enaka, tj. izomorfna standardnemu stavčnemu (propozicionalnemu) računu. Več o tem še pozneje, prej se vrnimo k samemu Boolu.

Historična Boolova algebra, tj. Boolov sistem (1847 in 1854) se od Boolove algebre v sodobnem pomenu razlikuje predvsem po tem, da operacijo logičnega sumiranja razume v ekskluzivnem pomenu (tj. ne kot disjunkcijo, temveč kot alternativo), kar je sistemsko pogojeno in motivirano z možnostjo uvedbe simetričnega odnosa med logično

vsoto in logično razliko, analogno kot v matematiki (aritmetiki). V historični Boolovi algebri sta torej logična vsota in razlika simetrično recipročni. Toda kmalu se je izkazalo, da je za logiko precej prikladnejša analogija s teorijo razredov - pozneje s teorijo množic - kjer unija dveh elementov ni pojmovana ekskluzivno, temveč inkluzivno, tj. disjunktivno v današnjem pomenu. Pri Boolu je namreč za formulacijo $(a + b)$ veljala ekskluzivna restrikcija, da je logično vsoto možno formulirati, če in samo če $(a \times b) = 0$. To restrikcijo odpravi Jevons (1864), ki s tem dejansko uvede v Boolov sistem *disjunkcijo* v sodobnem (inkluzivnem) pomenu; pozneje pa Schröder v svojem delu *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890 in dalje) eksplicitno uvede paralelizem (formul) med konjunkcijo in disjunkcijo na osnovi De Morganovega zakona, tako da nastane struktura, ki jo imenujemo *Boole-Schröderjeva algebra* ali kar Boolova algebra (v sodobnem pomenu), kakor smo jo definirali zgoraj. Historična Boolova algebra je danes s sintaktično-sistemskega stališča bolj ali manj le historično zanimiva, "operativno" pa jo je zamenjala njena mlajša Schröderjeva (& drugih) inačica, pri čemer pa seveda ni dvoma, da je avtor osnovne strukture Boolove algebre - Boole. Za razumevanje poznejšega razvoja logike je branje Boolovih izvirnih del (v primerjavi s poznejšimi "standardiziranimi" variantami) pomembno predvsem s *semantičnega* stališča. Pri historičnem Boolu je posebej zanimivo vprašanje, ki smo ga načeli na začetku tega spisa: kateri interpretacijski model (naj)bolje ustreza abstraktni strukturi Boolove algebre - tradicionalna terminska ali nova, tj. nastajajoča stavčna logika? Na to vprašanje je odgovor jasn: *postulate in definicije Boolove algebre zadovoljujeta oba modela, tako terminska kot stavčna logika*; pri slednji gre za dvovalentno Boolovo algebro, tj. za algebro s samo dvema elementoma (a, b), pri čemer ta dva elementa interpretiramo kot resničnostni vrednosti (R, N) oziroma v standardnem (sodobnem) binarnem kodu (1, 0).

Kljub temu, da je Boole po stoikih nedvomno prvi logik, ki je ponovno odkril bazično strukturo stavčne (propozicionalne) logike, pa pri Boolu *metodološka* primarnost stavčne logike vendarle še ni tako jasno izpostavljena kot dobri dve desetletji pozneje pri Fregeju (1879). Glede metodološke prioritete stavčne logike pred terminsko (predikatno) - ali obratno - je Boole dvojen. Po eni strani izraz 'primarni stavki' ohranja za terminske, tj. subjekt-predikatne stavke aristotelovskega tipa, kar je razvidno iz naslednjega citata:

"Vsaka naša trditev se lahko nanaša na eno ali na drugo izmed dveh vrst: bodisi izraža odnos med *stvarmi* bodisi izraža - ali je ekvivalentna izrazu - odnos med *stavki* (propositions). ...Prvi razred stavkov, ki se nanašajo na *stvari*, imenujem 'primarni'; drugi razred stavkov, ki se nanašajo na *stavke*, imenujem 'sekundarni'. V praksi je distinkcija skoraj, vendar ne povsem, koekstenzivna z običajno logično distinkcijo med kategoričnimi in hipotetičnimi stavki. Tako sta primarna na primer: 'Sonce sije.' in 'Zemlja se ogreva.'; sekundaren pa je stavek: 'Če sije Sonce, se Zemlja ogreva.'" (Boole, *Laws* ..., str. 52-53.)

Po drugi strani pa se Boole - še posebej, ko obravnava Aristotelovo silogistiko v 15. poglavju *Laws* - jasno zaveda in poudarja, da silogistika *ni* primarni logični sistem, saj jo je možno izpeljati iz njegovih *laws of thought* (tj. zakonov misli, formuliranih z algebro). Že v uvodu v *Laws* Boole zapiše: "Silogizem, konverzija etc. niso poslednji procesi v logiki. V tej razpravi bo prikazano, da so utemeljeni in razrešljivi v višje in preprostejše procese, ki konstituirajo resnične elemente metode v logiki" (str. 10). Svojo obljubo, da bo pokazal, na kakšen način je silogistika izpeljiva iz "višjih procesov" oz.

splošnejših logičnih zakonov, Boole izpolni v že omenjenem 15. poglavju *Laws*, kjer med drugim pravi:

"Namesto da bi omejili našo pozornost na subjekt in predikat kot na enostavna termina, lahko vzamemo katerikoli element ali katerokoli kombinacijo elementov, ki lahko (v)stopi na mesto enega ali drugega (tj. subjekta ali predikata, op. M.U.); vzemimo ta element ali to kombinacijo kot 'subjekt' novega stavka; in določimo, kaj bo njegov predikat v skladu s podatki, ki so nam dani." (Boole, *Laws*, str. 230)

Pri tem pasusu je posebej zanimivo to, da se tradicionalna predikat in subjekt "prelevita" v nove "elemente", namreč - če smo konkretnješi - v stavke, ne pa morda, kot bi s sodobne zorne optike pričakovali, obratno: da se stavek razčleni na subjekt in predikat itd. Tukaj vidimo, kako zelo je Boole še opredeljen z optiko tradicionalne logike. V zgornjem pasusu citirana misel namreč temelji na historični zmešnjavi v zvezi s t.i. hipotetičnim silogizmom, ki dejansko ni nikakršen silogizem, temveč shema sklepanja oz. izpeljevanja v stoiškem pomenu, torej *stavčna* shema, konkretno *modus ponens*. Kljub temu pa je Boolovo razmišljanje o posplošitvi variabel s terminskih (subjekta in predikata) na "katerikoli element ali kombinacijo elementov" v odnosu do tradicionalne logike 'subverzivno', saj se pri takšni posplošitvi kmalu izkaže metodološka in sistemska prioriteta stavkov (kot "elementov") pred termini. Mit o "nepresegljivosti" silogistike, ki naj bi bila po Kantu (& drugih) enkrat za vselej zastavljeni in edini veljavni temelj oz. kánon formalne logike, se pri Boolu postavi pod vprašaj:

"Ničesar pa ne kaže, da bi bila razprava o vseh sistemih enačb, ki izražajo stavke (tj. o *laws of thought*, op. M.U.), že vsebovana v razpravi o partikularnem sistemu, ki ga obravnavamo v tem poglavju (v tem, tj. 15. poglavju Boole obravnava Aristotelovo logiko oz. silogistiko, op. M.U.). In vendar so bili avtorji na področju logike soglasni v trditvi, da je silogistično sklepanje ne samo najvišje, ampak tudi univerzalno zadostno za deduktivno razmišljanje." (Boole, *Laws*, str. 239)

V tradicionalni logiki (npr. v Port-Royalu) je veljal *dictum de omni et nullo* za temeljni princip ne samo silogistike, ampak tudi vsakega deduktivnega sklepanja nasploh. Z današnjega zornega kota nam je jasno, da - gledano s stališča splošnosti - "za" ali "pod" principom *de omni et nullo* "leži" še princip tranzitivnosti kot eden izmed temeljnih zakonov stavčne logike, *in ultima analysi* pa seveda zakon neprotislovnosti kot *sine qua non* vsakega konsistentnega sistema. Pri samem Aristotelu (*An. Post.*, I, 11. pogl.) je precej jasno, da je princip neprotislovnosti - hkrati s svojima "variantama", tj. s principom identitete ter principom izključene tretje možnosti - temeljniji in splošnejši kot silogistični *dictum de omni et nullo*. Ta relativna jasnost glede temeljnih principov se v t.i. tradicionalni logiki pravzaprav prej zabriše, kot pa izostri. In zato mora Boole opravljati "arheološko" delo na področju logike, kot je razvidno npr. iz naslednjega citata:

"Aristotelov *dictum de omni et nullo* je sólo-razviden princip, vendar ga ne najdemo med tistimi poslednjimi zakoni mišljenske možnosti, h katerim nas napotijo vsi drugi zakoni, četudi jasni in sólo-razvidni, in iz katerih lahko vse druge zakone deduciramo v najbolj striktnem redu znanstvenega razvoja. Kajti čeprav so v vsaki znanosti temeljne resnice običajno tudi najenostavnejše za razumevanje, pa vendar ni enostavnost *kriterij*, po katerem naj bi se določala njihova fundamentalnost. Le-to moramo iskati v naravi in obsegu strukture, ki jo te (temeljne resnice) zmorejo nositi (*support*, dob.: podpirati). S tega zornega kota se mi zdi, da je imel Leibniz prav, ko je pripisoval 'principu (ne)protislovnosti' fundamentalno

mesto v logiki; kajti videli smo konsekvence tega zakona misli, katerega aksiomatski izraz je $x(1-x) = 0$." (Boole, *Laws*, str. 240)

Ta pasus je precej zapleten, "arheološko" še ne povsem izluščen, morda celo malce protisloven. Osnovna Boolova misel, če prav razumem, je v tem, da je - globalno gledano - *dictum de omni et nullo* možno reducirati na še splošnejši princip, ki ima po Leibnizu "fundamentalno mesto v logiki", tj. princip neprotislovnosti. Vendar poleg tega Boole trdi - povsem v skladu s sodobnim pojmovanjem aksiomatike - da ni nujno, da je kriterij fundamentalnosti (aksiomatičnosti) jasnost oz. samo-evidenca nekega principa. Težava pri interpretaciji zgornjega pasusa pa je v tem, da "primer" (tj. princip neprotislovnosti kot Aksiom) ne potrjuje trditve, češ da ni nujno, da bi bili temeljni principi samo-razvidni oz. evidentni - ta "primer", katerega "aksiomatski izraz" je $x(1-x) = 0$, je namreč kar se da evidenten, intuitivno samo-razviden in *hkrati* fundamentalen. Toda kljub nejasnim momentom v Boolovem razmišljanju o temeljnih "zakonih misli" je njegov preboj v območje stavčne logike jasen in nedvomen, kar vidimo tudi pri njegovi obravnavi hipotetičnega silogizma, ki je v zgodovini logike povzročal precejšnjo zmedo:

"Tisto kar običajno pojmujeemo kot hipotetični silogizem, dejansko sploh ni noben silogizem.

Vzemimo argument -

Če je A B, potem je C D,
toda A je B,
torej C je D

in ga zapišimo v obliki -

Če je stavek X resničen, je Y resničen,
toda X je resničen,
torej Y je resničen

pri čemer je z X mišljen stavek 'A je B' in z Y stavek 'C je D'. Iz tega je potem razvidno, da premisi vsebujeta samo dva termina ali elementa, medtem ko silogizem nujno vsebuje tri (elemente)." (Boole, *Laws*, str. 241).

Zanimivo je, da Boolova argumentacija, zakaj hipotetični silogizem sploh ni silogizem, ostaja še vedno aristotelska: ker ne vsebuje treh terminov v premisah, ampak samo dva, - namesto da bi preprosto rekel: takšen sklep ni silogizem zato, ker variable ne nadomeščajo terminov, temveč stavke. Seveda pa pri tem ne gre samo za nekakšno spregledanje glavne razlike med silogizmom (terminsko logiko) in stavčno logiko: Boole ima namreč tudi tehten razlog, da te ločnice ne vleče preveč ostro - njegov glavni namen je konstrukcija takšnega sistema, ki omogoča "ambivalentno" semantiko, tj. dvojni interpretacijski model. V *Boolovi algebri variable pomenijo tako terminske kot stavčne izraze*. To je popolnoma evidentno pri - zgoraj že citirani - Boolovi formulaciji zakona neprotislovnosti; pogledjmo si še enkrat to formulacijo:

$$x(1-x) = 0$$

Ta zakon, za katerega Boole pravi, da "ga je Aristotel označil kot fundamentalni aksiom vse filozofije" (Ibid, str. 49), se v svoji povsem matematični formulaciji v historični Boolovi algebri nanaša predvsem na logiko razredov:

"Izraz $x(1-x)$ bo torej predstavljal tisti razred, čigar člani so hkrati 'ljudje' in 'ne-ljudje', in enačba $x(1-x) = 0$ izraža princip, da razred, čigar člani so isto-časno ljudje in ne-ljudje, ne eksistira. Z drugimi besedami, da je nemogoče, da bi bil isti individuum isto-časno človek in ne-človek". (Boole, *Laws*, str. 49)

Obenem pa je jasno, da navedena interpretacija, pri katerih variable pomenijo razrede, ni edina možna, temveč da "enačba neprotislovnosti" lahko pomeni tudi to, da stavek x in njegova negacija $(1 - x)$ ne moreta biti istočasno resnična. Boolovo algebro lahko apliciramo tako na "primarne" kakor tudi na "sekundarne" stavke, kot pravi avtor:

"Kakor bomo videli, bo v tem delu uporabljeno isto izrazoslovje tako za primarne kot za sekundarne stavke, ki so, zapisani v isti simboliki, podvrženi istim zakonom. Razlika med enim in drugimi stavki ni formalna, temveč interpretacijska." (Ibid., 54)

Kljub tej zrcalni ambivalentnosti Boolove algebre kot formalnega sistema pa je za formulacijo dvovalentne Boolove algebre (po kateri lahko potem modeliramo stavčni račun) potrebna dodatna restrikcija, tj. omejitev na samo dva elementa algebre, ki smo jo omenili zgoraj. Hkrati pa ta dva elementa, imenujemo ju kar '1' in '0' nastopata že v nerestriktivni (tj. "polivalentni") Boolovi algebri (po kateri lahko potem modeliramo razredni račun) kot *mejni vrednosti* - kot *univerzalni* in *nulti* element. Poglejmo si malce podrobneje, kakor je s tem:

"Pri ekspoziciji Boolovega sistema je primerno, da začnemo s tisto interpretacijo, iz katere je najverjetneje razvil svoje pojmovanje logičnega računa. Predpostavimo, da črke, kot sta x in y (Boole jih pogosto imenuje elektivni simboli, op. M.U.), nadomeščajo razrede in da uporaba simbola $=$ med dvema simboloma za razrede označuje, da imata ta dva razreda iste člane. ... Med vsemi razločljivimi razredi pa sta dva mejna primera, za katera je prikladno, da imamo posebna simbola. To sta *univerzalni* razred, ali razred katerega člani so vsi, in *ničelni* razred, ali razred katerega član ni nobeden. V Boolovem simbolizmu sta ta dva razreda označena s simboloma 1 in 0. ... V praksi Boole uporablja svoj znak 1 tako, da označuje, kar je De Morgan imenoval univerzum diskurza (*universe of discourse*) ..." (Kneales, 1962, str. 407-408).

Tudi v zvezi z zgoraj navedeno "enačbo neprotislovnosti" $x(1 - x) = 0$ Boole izrecno poudarja, da sta "interpretaciji simbolov 0 in 1 v sistemu Logike Nič in Univerzum" (Boole, *Laws*, str. 48). Toda s stališča Boolovega sistema kot *algebre*, imata simbola 0 in 1 tudi "neposrednejši" pomen, kot pravi sam Boole: "Zatorej, namesto da bi določili stopnjo formalnega ujemanja simbolov Logike s simboli števil nasploh, se nam bolj neposredno ponuja misel, da jih primerjamo s simboli kvantitete, pri čemer *privzamemo samo vrednosti 0 in 1*. Zamislimo si torej Algebro, v kateri simboli x , y , z etc. privzemajo enoznačno vrednosti 0 in 1, in sicer samo ti dve vrednosti" (*Laws*, str. 37). - Knealova ugotovitev, češ da "Boole ne razlikuje jasno med svojim prvotnim sistemom ter ožjim sistemom, ki ga prvi vsebuje" (Kneales, 1962, str. 413), torej ne drži povsem, čeprav je res, da Boole bolj ostro in jasno razlikuje med obema interpretacijama simbolov 0 in 1, kot pa formulira razliko med obema sistemoma - Boole namreč hoče doseči prav to, da bi za oba modela (tako razrede kot stavke) zgradil *isti* sinktaktični sistem. Že v Boolovi *Mathematical Analysis of Logic* (1847, dalje cit. kot *Analysis*) je jasno, da gre pri "stavčnem modelu" za restrikcijo "razrednega modela":

"Simbolom X , Y , Z , označujočim stavke, lahko prilagodimo elektivne simbole x , y , z , v naslednjem smislu. Hipotetični Univerzum, 1, naj obsega vse zamišljive primere in povezave okoliščin. Elektivni simbol x , povezan s katerikoli subjektom, ki izraža takšne primere, naj izbere vse tiste primere, v katerih je stavek X resničen, in podobno naj velja na Y in Z . Če se omejimo na razmislek o danem stavku X in odmislimo vse druge ozire, tedaj sta mogoča samo dva primera, tj., prvič, da je dani stavek resničen, in drugič, da je neresničen. Ker ta dva tvorita skupaj Univerzum Stavka in ker je prvi označen z elektivnim simbolom x , je drugi

označen z elektivnim simbolom $(1 - x)$. Če pa dopustimo druge ozire, bo vsak izmed teh primerov razrešljiv v druge, individualno manj ekstenzivne, katerih število bo odvisno od števila dopuščenih drugih ozirov. Torej, če povežemo stavka X in Y, bomo skupno število zamišljivih primerov našli prikazano v naslednji shemi:

primeri	elektivni izrazi
1. X resničen, Y resničen	xy
2. X resničen, Y neresničen	$x(1-y)$
3. X neresničen, Y resničen	$(1-x)y$
4. X neresničen, Y neresničen	$(1-x)(1-y)$

... In pripomniti moramo, da ne glede na to, ali je teh primerov malo ali veliko, je vsota elektivnih izrazov, ki predstavlja vse zamišljive primere, vselej enota". (Boole, *Analysis*, str. 49-50)

Iz tega za razvoj logike izredno pomembnega pasusa je razvidno predvsem dvoje. Prvič, da se je Boole zavedal, da gre pri "stavčnem modelu" - tako ga imenujemo iz današnjega zornega kota - za restrikcijo algebre na dvovalentno strukturo. Drugič, kar je s to restrikcijo seveda neposredno povezano, je Boole v navedenem pasusu prvi v zgodovini logike formuliral resničnostno matrico za dva stavka X in Y. Edini korak, ki je še preostal do sodobne (standardne) stavčne logike, je bil v poimenovanju simbolov 1 in 0 kot resničnostnih vrednosti stavka. Ta korak je - poleg vpisa implikacije v Boolovo "shemo" - napravil Frege (1879; predvsem pa v spisu *Über Sinn und Bedeutung*, 1892).

Zanimivo pa je, da je glede razvoja v smeri stavčne logike pri Boolu od *Analysis* (1847) do *Laws* (1854) prišlo do določene regresije. Ko namreč v *Laws* (str. 81) navaja "matrico":

$$xy, x(1-y), (1-x)y, (1-x)(1-y)$$

govori zgolj o interpretaciji v okviru logike razredov, pri čemer mejni vrednosti 1 in 0 pomenita univerzalni in ničelni razred. Ta regresija je verjetno pogojena s tem, da skuša Boole v *Laws* svojo algebro razvijati predvsem v smeri verjetnostnega računa (gl. celotni zaključni del knjige, poglavja XVI-XXII). S tem "Boole opusti zelo obetajočo sugestijo (iz *Analysis*, gl. zgornji citat, op. M.U.) in namesto nje predlaga, naj bi črka x (kot elektivni simbol, op. M.U.) izražala čas, med katerim je stavek X resničen. To je povratek k nezadovoljivemu pojmovanju resnice, kakor so jo obravnavali nekateri antični in srednjeveški logiki ..." (Kneales 1962, str. 414). Razvoj formalne logike po Boolu je šel očitno v drugo smer. Ali, če rečemo malce metaforično: historična Boolova algebra je bila križišče, s katerega so se ponujale naprej različne poti - vendar se je ena, namreč Fregejeva in pozneje Russellova in Wittgensteinova ponujala s posebej poudarjenim kažipotom.

Boolova algebra je odločilnega pomena za nastanek sodobne standardne ("materialne") implikacije - čeprav, paradoksalno, v sami Boolovi algebri, če nanjo gledamo s historičnega stališča, implikacije sploh ni. To je seveda za sistem, ki pretendira, da bo formuliral Zakone Logike, precej nenavadno, saj je bila implikacija (*consequentia*, kondicional itd.) v zgodovini logike vedno ena izmed temeljnih logičnih relacij. Kako da je Boole v svoji algebri logike implikacijo tako rekoč "obšel"?

Da bi odgovorili na to vprašanje, se moramo najprej znova vprašati, kako je Boole prišel do pojmov logične vsote (ki je v poznejšem razvoju logike dobila ime: disjunkcija), produkta (pozneje: konjunkcija) in komplementa? Očitno *per analogiam* s pojmi iz logike razredov (oz. terminov, tradicionalno gledano) - danes bi rekli: *per*

analogiam s pojmi iz teorije množic, ki v Boolovem času sicer še ni bila formulirana *explicite*, vendar je bila *implicite* (kot struktura) prisotna v algebri in aritmetiki, torej v Boolovem izhodišču. Bistvena je torej naslednja ugotovitev: *osnovni pojmi sodobne stavčne logike, ki so se začeli formulirati z Boolovo algebro, izhajajo iz matematike, temeljijo na odnosih med množicami (razredi), na direktni analogiji z množicami (razredi)*. Glede sodobnega pojmovanja disjunkcije, konjunkcije in negacije - kakor tudi glede zgodovinskega pojmovanja *teh* logičnih vezij - je analogija logike z algebro (oz. teorijo množic) vsekakor zelo produktivna in tudi intuitivno plavzibilna. Vendar pa ni nobenega apriornega razloga, da je možno adekvatno utemeljiti oz. sistemsko formalizirati *per analogiam* z algebrskimi "vzorci" tudi tisto logično relacijo, ki jo iz zgodovine logike in iz obče jezikovno-metodološke rabe pojmujeemo in imenujemo kot *implikacijo*. Ni nobenega apriornega razloga, da bi Boolovo metodo "algebraizacije" razširili tudi na implikacijo, če nam je to uspelo pri konjunkciji in disjunkciji. Kajti treba je še razmisliti, ali ne gre morda pri implikaciji za bistveno drugačno relacijo kot pri drugih stavčnih vezjih, ekstenzionalnih funkcijah elementarnih stavkov. Boolovi nasledniki - predvsem Frege in pozneje Russell - so ta premislek kar nekako "pusili ob strani" in so implikacijo *per analogiam* vključili v formalno strukturo Boolove algebre, tj. v stavčni račun, na enak način kot druga stavčna vezja. Poglejmo si, na kakšen način je bila vključitev implikacije formalno možna, čeprav metodološko vprašljiva. Možnost formalnega vpisa "implikacije" v abstraktno strukturo Boolove algebre je prav delna urejenost le-te z asimetrično relacijo (recimo z relacijo podmnožice oz. ekstenzionalne inkluzije), o čemer smo že govorili. Vzemimo zgoraj navedeno Hughes & Cresswellovo definicijo Boolove algebre v sodobnem pomenu; iz postulatov (1.5 in (1.6) ter iz definicije [O] lahko zapišemo ekvivalenco:

$$(INC) \quad (a \times -b) = O, \text{ če in samo če } (a \times b) = a$$

kar pomeni: presek elementov a in $-b$ je prazen, če in samo če je element a 'pod-element' (v konkretnem modelu: podmnožica) elementa $(a \times b)$. Relacijo 'biti pod-element od ...' (ali konkretno: relacijo podmnožice, inkluzije ipd.) pa lahko po definiciji $[\subset]$ zapišemo:

$$(a \subset b) \text{ def. } = (a \times b) = a;$$

in če sedaj v tej definiciji na osnovi ekvivalence (INC) substituieramo $(a \times b) = a$ z $(a \times -b) = O$, dobimo:

$$(a \subset b) \text{ def. } = (a \times -b) = O$$

in zaradi De Morganovega zakona oziroma definicije $[+]$ dalje zapišemo:

$$(a \subset b) \text{ def. } = -(a + -(b)) = O$$

ali, ob opustitvi dvojnih negacij in zaradi definicije $[1]$:

$$(a \subset b) \text{ def. } = (-a + b) = 1.$$

Zdaj pa to relacijo 'biti pod-element od ...', ki ima prvoten in povsem adekvaten model v definiciji podmnožice oz. ekstenzionalne inkluzije, *preberemo kot implikacijo med stavkoma A in B*:

$$(MI) \quad (A \text{ "implicira" } B) \text{ def.} = (-A + B) = 1$$

kar pomeni: "implikacija" - označimo jo $(A \supset B)$ - je resnična, če in samo če je resnična naslednja *disjunkcija* (ob predpostavki restrikcije na dvovalentno algebro):

A je neresničen *ali* (disjunktivno) je B resničen.

V tej definiciji zlahka prepoznamo sodobno standardno definicijo *materialne implikacije*, in sicer definicijo na osnovi disjunkcije in negacije, tj. materialno implikacijo z matrično karakteristiko 1-0-1-1 v dvovalentni logiki z dvema stavčnima variablama A in B. Ostaja pa osnovno vprašanje: ali je relacija podmnožice - se pravi neka relacija, ki "izvira iz računa, ki je bil prvotno namenjen za obravnavo odnosov med razredi" (Lewis & Langford 1932, str. 89) - primerna osnova za definicijo implikacije? To namreč sploh *ni* apriori razvidno, čeprav je postalo v sodobnem standardnem kánonu formalne logike tako rekoč samoumevno (vsaj na funkcionalni ravni). C.I. Lewis pa je bil med logiki našega stoletja prvi, ki je zanikal samoumevnost definicije implikacije na osnovi Boolove algebre, češ da je izvor materialne implikacije "zgolj nekoliko nesrečno historično naključje" (Ibid.). Za to "naključje" je poskrbel dve desetletji za Boolom eden izmed največjih logikov vseh časov - Gottlob Frege.