



Matematična indukcija

Mathematical Induction

Σ Povzetek

V članku opišemo predstavitev matematične indukcije pri dodatnem pouku matematike v 1. letniku srednje šole. Najprej z dijaki ugotovljamo razliko med deduktivnim in induktivnim načinom sklepanja, nato z različnimi primeri pokažemo, da z indukcijo ne dobimo vedno pravilne trditve. Po predstavitvi matematične indukcije pokažemo še nekaj primerov njene uporabe pri različnih nalogah: pri seštevanju končnih vsot, pri dokazovanju deljivosti in pri nekaj nalogah z geometrijsko vsebino. Na koncu sledi izbor praktičnih nalog za utrjevanje.

Ključne besede: matematična indukcija, končne vsote, deljivost, geometrija

Željka Zorić
Naravoslovno-
matematična
fakulteta,
Split

Σ Abstract

In the article we describe a presentation of mathematical induction during additional mathematical lessons in the first grade of secondary school. First the teacher and pupils jointly determine the difference between the deductive and inductive methods of reasoning, after which we demonstrate with the help of various examples that induction doesn't always lead to the right solution. After presenting mathematical induction, we demonstrate some additional examples of how to use mathematical induction on various types of exercises, such as addition of final amounts, proofing of divisibility, as well as with some exercises featuring geometrical content. In the end we offer a selection of practical exercises for revising the subject.

Key words: mathematical induction, final amounts, divisibility, geometry

α Uvod

Splitsko matematično društvo (SMD) jev šolskem letu 2011/2012 uvedlo projekt »Mladi matematičari SMD-a«, v okviru katerega so organizirana sobotna predavanja za učence srednjih in osnovnih šol. Želja društva je bila, da zbere vse učence, ki jih zanima dodatno delo pri matematiki. Učence smo razvrstili v tri skupine: 5. in 6. razred osnovne šole, 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole. Teme, ki smo jih obravnavali, so bile povezane z obravnavano tematiko pri matematiki v šoli, pogosto pa tudi vsebine iz matematičnih tekmovanj. Kolegica Blaženka Kunac je vodila in koordinirala predavanja osnovnih šol, jaz pa sem vodila srednješolce. Ena izmed tem, ki smo jih obravnavali, je bila tudi matematična indukcija. V članku opisujem, kako in na kakšen način smo jo obravnavali.

β Predstavitev induktivnega in deduktivnega načina sklepanja

V življenju pogosto uporabljamo dva osnovna načina sklepanja oz. razmišljanja: deduktivni in induktivni način sklepanja. Deduktivni način sklepanja izhaja iz neke splošne resnice, iz katere se potem razvijejo resnice, ki so vezane na konkreten, posamezni primer.

Splošni primer: Vsi ljudje so umrljivi. Peter je človek. Peter je umrljiv.

Matematični primer: V paralelogramu se diagonali razpolavljata. Pravokotnik je paralelogram. Diagonali pravokotnika se razpolavljata.

Za razliko od deduktivnega načina sklepanja, induktivni način sklepanja izhaja iz resničnih, konkretnih primerov, na podlagi

katerih skušamo izvesti sklep o resnici, ki velja za nek splošni primer.

Splošni primer: Ivan je manjši od 2 metrov. Jakob je manjši od 2 metrov. Ante je manjši od 2 metrov. Vsi moški so manjši od 2 metrov.

Matematični primer: Število $1 \cdot 2$ je sodo število. Število $2 \cdot 2$ je sodo število. Število $3 \cdot 2$ je sodo število. Na splošno velja, da je število $n \cdot 2$ sodo število.

Zapišite svoj primer deduktivnega in induktivnega sklepanja.

Poglejmo zgoraj zapisane primere. Pri deduktivnem načinu sklepanja uporabljamo pravila sklepanja, sklepi so pravilni, a nam v večini primerov ne dajo novih informacij. Pri induktivnem načinu pa iz resničnih dejstev ne moremo dobiti resnične, splošne trditve. Vsakdo od nas zagotovo pozna vsaj eno osebo moškega spola, ki je višja od dveh metrov. Takšna indukcija se v matematiki imenuje nepopolna indukcija, in ta nima »moči dokaza«. Kljub tej ugotovitvi nismo zmanjšali vrednosti nepopolne indukcije, ker nam ta pomaga, da dobimo različne hipoteze, med katerimi so ene resnične druge ne.

γ Nepopolna indukcija

Navajamo še nekaj primerov, ki nam prikazujejo, kako lahko z nepopolno indukcijo pridemo do neresničnih zaključkov.

Primer 1:

$$f(x) = x^2 - x + 41.$$

Kaj lahko povemo o številu $f(x)$, če je x naravno število?

Rešitev: Vstavimo po vrstnem redu naravna števila v polinom $f(x) = x^2 - x + 41$. Dobimo:

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
1	41	6	71	11	151	16	281
2	43	7	83	12	173	17	313
3	47	8	97	13	197	18	347
4	53	9	113	14	223	19	383
5	61	10	131	15	251	20	421

Iz preglednice je razvidno, da so vrednosti tega polinoma za $x = 1, \dots, 20$ vedno praštevila.

Z nepopolno indukcijo bi lahko sklepali, da to velja za vsako naravno število n , t.j., da je število $f(n) = n^2 - n + 41$ praštevilo za vsako naravno število n . Ali to res drži? Ne! Ko vstavimo $x = 41$, dobimo $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, kar ni praštevilo, saj je deljivo z 41.

Primer 2:

Dan je polinom $f(x) = 991x^2 + 1$. Naj bo x naravno število. Ali imajo števila $f(x)$ kakšne zanimive lastnosti?

Rešitev: Vstavimo nekaj števil v polinom. Dobimo:

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
1	992	2	3965	3	8920	4	15857
5	24776	6	35677	7	48560	8	63425

Ne opazimo posebnih lastnosti števil $f(x)$: niso praštevila, niti niso kvadrati naravnih števil. Lahko bi zaključili, da $f(n) = 991n^2 + 1$ ni popolni kvadrat, ne glede na to, kolikšen je n . Izkazalo se je, da to ni res. Najmanjši n , pri katerem je $f(n) = 991n^2 + 1$ popolni kvadrat, je število $n = 12055735790331359447442538767$.

Tudi največji matematiki so se na ta način ujeli v zanko nepopolne indukcije.

Primer 3:

Opazujmo števila oblike $f(n) = 2^{2^{n-1}} + 1$ za naravna števila n .

Rešitev:

n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)
1	3	2	5	3	17	4	257	5	65537

Vsa dobljena števila so praštevila. Veliki francoski matematik Pierre de Fermat je postavil hipotezo, da so števila take oblike praštevila. Šele v 18. stoletju je švicarski matematik Leonhard Euler dokazal, da to ne drži. Dokazal je, da za $n = 6$ velja

$$f(6) = 2^{2^{6-1}} + 1 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

to pa je sestavljeno število.

§ Matematična indukcija

Induktivni način sklepanja je odlično sredstvo za postavljanje novih hipotez, kar je idealno za znanost. Ni nujno, da so take trditve resnične, zato jih je treba preveriti in dokazati. V matematiki pa obstaja metoda, ki nam pomaga dokazati, ali je neka trditev pravilna ali ne. Metodo imenujemo matematična indukcija.

Princip matematične indukcije

Če poljubna matematična trditev, ki je odvisna od naravnega števila n ,

- velja za število $n_0 \in \mathbb{N}$ in
- če izhajamo iz predpostavke, da ta trditev velja za naravno število k , iz tega sledi, da ta velja tudi za naslednje število $k + 1$,

takrat ta trditev velja za vsako naravno število $n \geq n_0$.

ε Uporaba matematične indukcije pri seštevanju končnih vsot

Pokažimo na nekaj primerih, kako pri seštevanju končnih vsot uporabljamo princip matematične indukcije.

Primer 4:

Dokažimo, da za vsako naravno število n velja enakost:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Rešitev:

Matematično indukcijo izvedemo v več korakih:

1. Osnova indukcije

Preverimo, ali velja enakost za nekaj prvih naravnih števil:

Naj bo $n = 1$. Takrat je $1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$ tj. $1 = 1$.

Preverimo¹ še za $n = 2$.

Takrat je $1 + 2 = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2}$ tj. $3 = 3$.

2. Predpostavka

Predpostavimo, da enakost velja za naravno število $n = k$, to je da velja

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k \cdot (k + 1)}{2}.$$

3. Korak indukcije

Z uporabo te predpostavke želimo pokazati, da trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$, tj. da velja hipoteza

$$(H) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2}.$$

Začnimo z vsoto

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{\text{predpostavka}} + (k + 1) &= \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

To smo tudi želeli pokazati.

4. Zaključek

Z matematično indukcijo smo dokazali, da trditev velja za vsako naravno število.

Primer 5:

Izračunajte vsoto prvih n lihih naravnih števil.

Rešitev:

V tem primeru bomo uporabili hevristično lastnost nepopolne indukcije. Z njo bomo dobili hipotezo, s katero bomo nato dokazali matematično indukcijo. Na začetku zapišimo splošni zapis n -tega lihega števila. Poglejmo preglednico:

n	1	2	3	4
$2n + 1$	3	5	7	9
$2n - 1$	1	3	5	7

Vsako liho naravno število je oblike $2n - 1$ za primerno naravno število n . V nadaljevanju nas zanima, kolikšna je vsota:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

¹ Preverjanje v primeru $n = 2$ je sicer matematično odveč, je pa včasih koristno za boljše razumevanje problema in za pridobitev ideje, kako preiti iz n na $n + 1$.

Za $n = 1, 2, 3, 4$ izračunajmo vsoto:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Iz teh konkretnih primerov lahko predpostavimo, da za vsa naravna števila velja enakost

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Dokažimo, da je to res. Videli smo, da trditev velja za $n = 1$ (osnova indukcije je del iskanja hipoteze).

Predpostavimo, da trditev velja za $n = k$, tj. da je: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$.

Preverimo, ali iz predpostavke sledi, da velja trditev tudi za naravno število $n = k + 1$, tj. da velja hipoteza:

$$(H) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Po indukcijski predpostavki imamo

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{\text{predpostavka}} + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Z matematično indukcijo smo pokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Primer 6:

Če bi lahko v dokazovanju z matematično indukcijo izpustili preverjanje osnove indukcije, pokažite, da bi se dalo dokazati, da za vsako naravno število n velja enakost: $n = n + 1$.

Rešitev:

Usmerimo se na predpostavko indukcije.

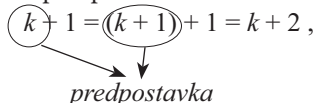
Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, tj. naj bo $k = k + 1$.

Preverimo, ali velja trditev za naravno število $k = k + 1$, tj. ali velja hipoteza

$$(H) \quad k + 1 = k + 2$$

S predpostavko imamo

$$k + 1 = (k + 1) + 1 = k + 2,$$



predpostavka

kar smo tudi želeli pokazati.

Kaj smo pravzaprav dokazovali? S »skrajšano« verzijo principa matematične indukcije smo dokazali, da so vsa naravna števila med seboj enaka, za kar pa vemo, da ni res. Torej lahko zaključimo, da je pomembno preveriti osnovo indukcije.

γ Uporaba matematične indukcije pri dokazovanju deljivosti

Primer 7:

Število 2 deli izraz $n^2 - n$ tj., $2 | (n^2 - n)$ za vsako naravno število n . Dokažite.

Rešitev:

Za $n = 1$ trditev velja, ker je $1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, kar je deljivo z 2.

Zaradi boljšega občutka lahko preverimo² trditev še za $n = 2$. Trditev velja, ker je $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$, kar je deljivo z 2.

Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, torej je $k^2 - k$ deljivo z 2.

To dejstvo lahko zapišemo tudi na drug način $k^2 - k = 2x$, $x \in \mathbb{N}$.

² Preverjanje v primeru $n = 2$ je sicer matematično odveč, je pa včasih koristno za boljše razumevanje problema in za pridobitev ideje, kako preiti iz n na $n + 1$.

Preverimo, ali trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$ tj. da velja hipoteza

$$(H) \quad 2 \mid ((k+1)^2 - (k+1)).$$

Poglejmo sedaj

$$\begin{aligned} (k+1)^2 - (k+1) &= k^2 + 2k + 1 - k - 1 = \underbrace{(k^2 - k)}_{\text{predpostavka}} + 2k \\ &= 2x + 2k \\ &= 2(x + k) \end{aligned}$$

Pokazali smo, da je izraz deljiv z 2, kar je bil tudi naš namen. S principom matematične indukcije smo dokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Primer 8:

Za vsako naravno število n je število $3^{6n} - 2^{6n}$ deljivo z 665. Dokazite.

Rešitev:

Za $n = 1$ trditev velja. To pomeni, da je $3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665$, deljivo s 665.

Predpostavimo, da je trditev resnična za neko naravno število $n = k$, torej, da je $3^{6k} - 2^{6k}$ deljivo s 665. To lahko zapišemo tudi drugače: $3^{6k} - 2^{6k} = 665x$, $x \in \mathbb{N}$.

Preverimo še, da trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$ tj. da velja hipoteza

$$(H) \quad 665 \mid (3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)}).$$

Poglejmo sedaj,

$$\begin{aligned} 3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)} &= 3^{6k+6} - 2^{6k+6} = 3^6 \cdot \underbrace{3^{6k}}_{\text{predpostavka}} - 2^{6k+6} \\ &= 729(665x + 2^{6k}) - 64 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot 729x + 729 \cdot 2^{6k} - 64 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot 729x + 665 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot (729x + 2^{6k}) \end{aligned}$$

Dokazali smo, da je izraz deljiv s 665. S principom matematične indukcije smo dokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Pokazali smo primere uporabe matematične indukcije za dokazovanje enakosti in deljivosti.

η Uporaba matematične indukcije v geometriji

V naslednjih primerih bomo prikazali, kako matematično indukcijo uporabljamo v geometriji.

Primer 9:

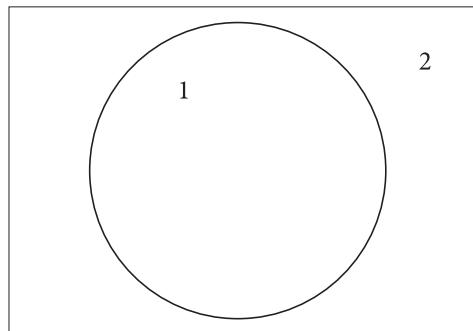
Dokažite, da n krožnic v splošni legi (nobena od treh krožnic ne gre skozi isto točko in vsaki dve se sekata) deli ravnino na $n^2 - n + 2$ področij.

Rešitev:

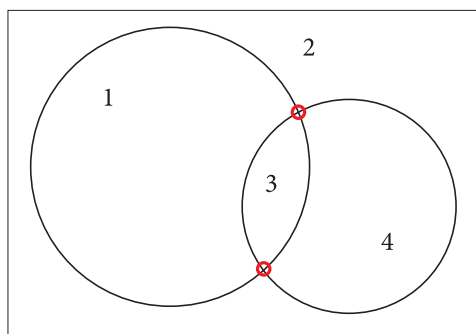
Naj bo $P(n) = n^2 - n + 2$ število področij, na katere n krožnic v splošni legi deli ravnino.

Za $n = 1$ imamo $P(1) = 2$. Ena krožnica deli ravnino na dve področji, s čimer smo dokazali osnovo indukcije.

Poglejmo še za $n = 2$. Dve krožnici delita ravnino na štiri področja (slika 1 in slika 2). Dobimo $P(2) = 4$.



[Slika 1] $n = 1$



[Slika 2] $n = 2$

Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, tj. da velja $P(k) = k^2 - k + 2$.

Preveriti moramo še, če trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$, tj.:

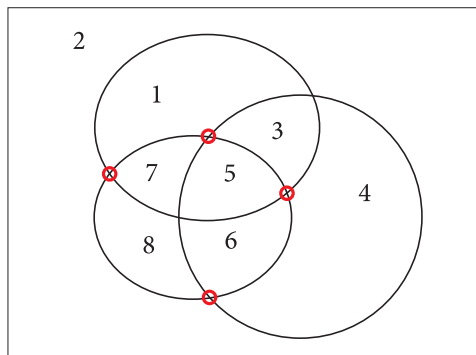
$$(H) \quad P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 2 = k^2 + k + 2.$$

Kaj se zgodi, če dodamo $(k+1)$ -to krožnico?

Ta krožnica seka obstoječe krožnice v $2k$ točkah.

Teh $2k$ točk razdeli $(k+1)$ krožnico na $2k$ lokov. Vsak lok deli obstoječe območje, v katerem leži, na dva dela.

Z dodajanjem nove krožnice smo tako dobili novih $2k$ delov.



[Slika 3] $n = 3$

Torej imamo

$$\begin{aligned} P(k+1) &= P(k) + 2k \\ &= k^2 - k + 2 + 2k \\ &= k^2 + k + 2 \end{aligned}$$

Potrdili smo, da trditev velja za vsako naravno število n .

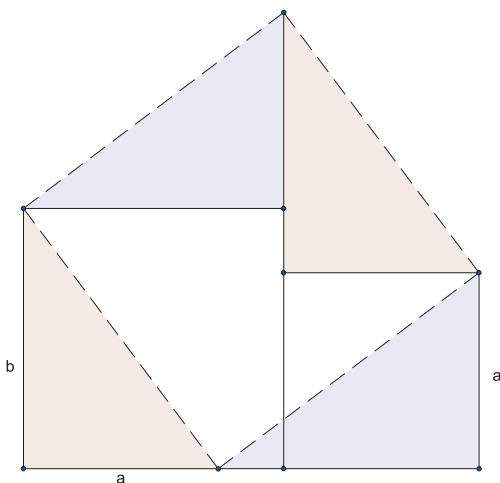
Primer 10:

Danih je n kvadratov. Dokažimo, da jih lahko razrežemo na dele, s katerimi sestavimo nov kvadrat.

Rešitev:

Dovolj je, če pokažemo, da iz dveh kvadratov lahko sestavimo nov kvadrat.

Pri tej nalogi začnemo z $n = 2$. Na sliki 4 je pokazano, kako s pomočjo Pitagorovega izreka iz dveh kvadratov sestavimo nov kvadrat. Če smo na n -tem koraku iz $n+1$ kvadratov sestavili nov kvadrat, v $(n+1)$ koraku nov sestavljen kvadrat na enak način kot v primeru $n = 2$ dopolnimo z $(n+2)$ kvadratom do naslednjega kvadrata.



[Slika 4] Iz dveh kvadratov nov kvadrat

☞ Zaključek

Za konec povejmo še, kako je množica naravnih števil definirana s Peanovimi aksiomi (1889):

- 1 je naravno število, tj. $1 \in \mathbb{N}$.
- Vsako naravno število n ima natančno enega naslednika n^+ v množici naravnih števil.
- Vedno velja $n^+ \neq 1$, tj. 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Iz $n^+ = m^+$ sledi $n = m$, tj. če sta naslednika enaka, sta tudi števili enaki.

Aksiom indukcije. Vsaka množica naravnih števil, v kateri je 1 in ki z vsakim številom n vsebuje tudi n^+ , vsebuje vsa naravna števila.

Z aksiomi lahko dokažemo vsa tista dejstva in lastnosti, ki jih imajo množice naravnih števil. Na matematičnih tekmovanjih (na Hrvaškem) se pogosto pojavljajo naloge, ki opisujejo neko lastnost, ki je odvisna (na nek način) od naravnih števil, zato je dobro in koristno pri dodatnem pouku matematike izvesti princip matematične indukcije.

λ Naloge za utrjevanje

1. Dokažite, da za vsako naravno število n velja:

- a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

2. Postavite hipotezo in dokažite:

- a. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$
- b. $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

3. Ali za vsako naravno število n velja enakost:

- a. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$
- b. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$
- c. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n > 1$
- d. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$

4. Dokažite, da za vsako naravno število n velja:

- a. $48 \mid (5n+2)^2 - (2-n)^2$
- b. $19 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$
- c. $225 \mid 16^n - 15n - 1$
- d. $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$

5. Dokažite, da je za vsako naravno število n , število $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ celo število.

6. Naj bo na ravnini n premic, od katerih niti dve nista vzporedni in niti tri ne gredo skozi isto točko. Dokažite, da te delijo ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

7. Naj bo $q \neq 1$. Dokažite, da je $G(n) = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

8. Pokvarjena $d \times d$ šahovska plošča je $d \times d$ šahovska plošča z enim skritim poljem (poljubnim). Dokažite, da se vsaka pokvarjena šahovska $2^n \times 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ plošča lahko prekrije z triominimi, to je figurami s tremi polji v obliki črke L. (Državno tekmovanje iz predmeta matematike Republika Hrvaška, 1992.)

δ Viri in literatura:

1. B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4, 1. dio, udžbenik za 4 razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.
2. B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, Male teme iz matematike, Element, Zagreb, 1994.
3. Luka Čeliković, Princip matematičke indukcije, Pita-gorinimaterijali za mlade matematičare 24, Beli Ma-nastir, 1990.
4. S. Antoliš, A. Copić, Matematika 4, 1. dio, udžbenik za 4 razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
5. D. Blanuša, Viša matematika, 1 dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.