PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 6
Strani 332–336

Ivan Vidav:

REŠITEV ENAČBE $x^2 + y^2 = 10^n x + y$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika, reševanje enačb, desetiški sestav, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1354-Vidav.pdf

REŠITVE ENAČBE $x^2 + y^2 = 10^n x + y$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

V nekem časopisu za razvedrilo je bilo pred nedavnim postavljeno tole vprašanje: Kako (se pravi, s kakšnimi računskimi operacijami) dobimo iz števil 88 in 33 število 8833? Prav preprosto, bi rekli: številki 88 in 33 damo skupaj, pa je že pred nami 8833. Vendar ta odgovor ne velja. Vsota in produkt sta namreč neodvisna, v katerem sestavu računamo, v desetiškem, dvojiškem ali kakem drugem. Če pa damo skupaj številki, ki predstavljata števili x in y, rezultat ni odvisen samo od x in y temveč tudi od sestava, v katerem sta zapisana x in y. Zato zlepljanje številk ni prava računska operacija.

Odgovor na zgornje vprašanje se je glasil takole: 8833 dobimo, če 88 in 33 kvadriramo in kvadrata seštejemo. Res je

$$88^2 + 33^2 = 7744 + 1089 = 8833\,.$$

Podobno lastnost imata števili 10 in 1. Tukaj je $10^2 + 1^2 = 101$, vsoto 101 pa dobimo, če staknemo skupaj 10 in 1.

Ali so še drugi taki pari?

Iščemo torej pare naravnih števil x in y, ki se odlikujejo s tole lastnostjo:

(S) **Vsota $x^2 + y^2$ je enaka številu, ki ga dobimo, če damo skupaj številki, ki v desetiškem sestavu predstavljata x in y.**

Pa vzemimo poljubni naravni števili x in y, zapisani v desetiškem sestavu. Katero število dobimo, če staknemo skupaj številki za x in y (in sicer x na levi, y na desni)? Imenujmo to število z. Denimo, da je y n–mestno število ($n \geq 1$). Razlika $z - y$, zapisana v desetiškem sestavu, ima očitno na koncu n ničel, njene začetne števke pa določajo x. Potemtakem je ta razlika enaka $10^n x$, iskano število z pa je $10^n x + y$. Torej:

Če damo skupaj številki, ki predstavljata naravni števili x in y v desetiškem sestavu, in ima y n mest, dobimo število $10^n x + y$.

Naravni števili x in y, ki sestavljata par z lastnostjo (S), zadoščata potemtakem enačbi

$$x^2 + y^2 = 10^n x + y\,, \tag{1}$$

se pravi enačbi iz naslova. Rešitev v naravnih številih x, y, n pa določa par z lastnostjo (S) le pri pogoju, da je n število mest, ki jih ima y, zapisan v desetiškem sestavu.

Pri izbranem n pomeni enačba (1) v ravnini, opremljeni s pravokotnim koordinatnim sistemom, krožnico, ki gre skozi izhodišče (točka s koordinatama $x = 0$, $y = 0$ zadošča enačbi). Pomnožimo to enačbo s 4 in jo nato zapišimo v tejle ekvivalentni obliki

$$(2x - 10^n)^2 + (2y - 1)^2 = 10^{2n} + 1\,. \tag{1*}$$

Iz nje razberemo, da ima središče krožnice (1) koordinati $p = \frac{1}{2} \cdot 10^n$, $q = \frac{1}{2}$. Postavimo

$$X = 2x - 10^n\,, \quad Y = 2y - 1\,, \tag{2}$$

pa je pred nami enačba

$$X^2 + Y^2 = 10^{2n} + 1\,. \tag{3}$$

Če sta x in y naravni števili, sta X in Y celi števili.

Pri danem n je desna stran $10^{2n} + 1$ znano število, in sicer liho. Vse celoštevilske rešitve enačbe (3) najdemo tako, da zapišemo $10^{2n} + 1$ na vse mogoče načine kot vsoto dveh kvadratov celih števil. Naj bo npr.

$$10^{2n} + 1 = A^2 + B^2\,,$$

kjer sta A in B naravni števili. Eno izmed njiju je sodo, drugo liho. Smemo vzeti, da je A sodo in B liho. Ta razcep nam da 8 rešitev enačbe (3) v celih številih, namreč

$$X = \pm A\,, \quad Y = \pm B \qquad \text{in} \qquad X = \pm B\,, \quad Y = \pm A\,,$$

kjer lahko vzamemo povsod poljuben znak.

Iz zapisa (2) vidimo, da je X sod in Y lih. Torej moramo postaviti

$$2x - 10^n = \pm A \quad \text{in} \quad 2y - 1 = \pm B\,.$$

Od tod izračunamo

$$x = \frac{1}{2}(10^n \pm A)\,, \quad y = \frac{1}{2}(1 \pm B)\,. \tag{4}$$

Ker je $A \leq 10^n$, je x naravno število, katerikoli znak vzamemo pri A. Zaradi $B \geq 1$, pa je y naravno število samo pri znaku + pri B. Torej nam da vsak razcep števila $10^{2n}+1$ na vsoto dveh kvadratov dve rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Dobljeni par x, y pa ima zahtevano lastnost le v primeru, kadar je y n–mestno število.

Ker je $10^{2n} + 1 = (10^n)^2 + 1^2$, lahko vzamemo $A = 10^n$, $B = 1$ (trivialni razcep). Ustrezna rešitev je $x = 10^n$, $y = 1$ (pri trivialnem razcepu je x naravno število (tj. pozitivno celo število) samo pri znaku + na desni). Ker je $y = 1$ enomestno število, ima par $10^n, 1$ lastnost (S) le pri $n = 1$, to je par $x = 10$, $y = 1$, ki smo ga že navedli.

Če želimo dobiti druge pare, moramo najti kak netrivialni razcep števila $10^{2n} + 1$ na vsoto dveh kvadratov. Kdaj tak razcep obstaja? V članku *Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo* (Presek, 25 (1997/98), str. 130–136) je bilo dokazano, da je naravno število sestavljeno, če se da vsaj na dva načina zapisati kot vsota dveh kvadratov. Brez dokaza povejmo, da velja v našem primeru tudi obratna trditev: Če $10^{2n} + 1$ ni praštevilo, se da vsaj na dva načina izraziti kot vsota dveh kvadratov. Vsak razcep na dva faktorja določa torej poleg trivialnega tudi netrivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Zgledi.

Pri $n = 1$ je število $10^2 + 1 = 101$ praštevilo in obstaja zato samo trivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Pri $n = 2$ je $10^4+1 = 73\cdot 137$, se pravi sestavljeno število. Pripadajoči netrivialni razcep v vsoto dveh kvadratov se glasi $10^4 + 1 = 76^2 + 65^2$, torej $A = 76$, $B = 65$. Po formuli (4) dobimo para $x = 88$, $y = 33$ in $x = 12$, $y = 33$.

Pri $n = 3$ imamo razcep $10^6 + 1 = 101 \cdot 9901$. Oba faktorja na desni sta praštevili. Pripadajoča vsota kvadratov se glasi $10^6 + 1 = 980^2 + 199^2$ in določa para $x = 990$, $y = 100$ ter $x = 10$, $y = 100$.

Nekaj nadaljnjih primerov kaže razpredelnica:

$n=1$	$x=10,\ y=1$:	$10^2+1^2=101$
$n=2$	$x=12,\ y=33$:	$12^2+33^2=1233$
	$x=88,\ y=33$:	$88^2+33^2=8833$
$n=3$	$x=10,\ y=100$:	$10^2+100^2=10100$
	$x=990,\ y=100$:	$990^2+100^2=990100$
$n=4$	$x=588,\ y=2353$:	$588^2+2353^2=5882353$
	$x=9412,\ y=2353$:	$9412^2+2353^2=94122353$
$n=6$	$x=116788,\ y=321168$:	$117688^2+321168^2=117688321168$
	$x=883212,\ y=321168$:	$883213^2+321168^2=883213321168$
	$x=123288,\ y=328768$:	$123288^2+328768^2=123288328768$
	$x=876712,\ y=328768$:	$876712^2+328768^2=876712328768$

Kadar je n deljiv s kakim lihim faktorjem, je $10^{2n}+1$ vselej sestavljeno število. Naj bo npr. $n=kr$, kjer sta k in r naravni števili in r lih. Iz formule

$$a^r+b^r=(a+b)(a^{r-1}-a^{r-2}b+\ldots+b^{r-1})\,,$$

ki velja za vsak lih eksponent r, dobimo, če vstavimo $a=10^{2k}$ in $b=1$, razcep

$$10^{2kr}+1=(10^{2k}+1)((10^{2k})^{r-1}-(10^{2k})^{r-2}+\ldots+1)\,.$$

Torej ima $10^{2n}+1=10^{2kr}+1$ faktor $10^{2k}+1$. Posebej, kadar je n lih, lahko vzamemo $r=n$, $k=1$. Število $10^{2n}+1$ je v tem primeru deljivo s 101. Enačba (1) ima zato pri lihem n poleg rešitve $x=10^n$, $y=1$ vsaj še dve nadaljnji rešitvi v naravnih številih. Toda če je $n>3$, ni pri faktorju 101 nikoli več izpolnjen dodatni pogoj, da je pripadajoči y n–mestno število.

Ugotovili smo, da premore enačba (1) za neskončno mnogo n rešitve x,y v naravnih številih. S tem seveda ni rečeno, da obstaja neskončno parov z lastnostjo (S). Vsak bralec pa se lahko sam prepriča, da sestavljata števili

$$x=\frac{64\cdot 10^n+24}{73}\quad\text{in}\quad y=\frac{24\cdot 10^n+9}{73}$$

par z lastnostjo (S), če je eksponent n oblike $8k+2$, kjer je k poljubno nenegativno celo število. Torej je takih parov neskončno.

Kaj lahko povemo o paru x, y, ki je rešitev enačbe (1) pri nekem n, toda y ni n–mestno število? Iz (1*) razberemo, da je $2y - 1 < 10^n$, torej $y \leq \frac{1}{2} \cdot 10^n$. Zato ima y v desetiškem sestavu kvečjemu n mest. Je torej k–mestno število, pri čemer je $k \leq n$. Kadar je $k < n$, dobimo vsoto kvadratov $x^2 + y^2$ tako, da med številki za x in y vrinemo $n - k$ ničel.

V zgledu, navedenem na začetku, imata števili 88 in 33 obe števki enaki. Če postavimo dodatni pogoj, da morajo biti v desetiškem zapisu vse števke števila x med seboj enake in da mora isto veljati tudi za y, pa je $x = 88$ in $y = 33$ edini par s to lastnostjo.

Ivan Vidav