

# Fibonaccijevi pravokotniki



MARKO RAZPET

→ Fibonaccijevo zaporedje sestavljajo Fibonaccijeva števila  $F_n$ , ki so določena z rekurzivno enačbo

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

pri začetnih pogojih  $F_1 = 1$  in  $F_2 = 1$ . Včasih raje začnemo s  $F_0 = 0$  in  $F_1 = 1$  ter uporabimo (1) za  $n \geq 0$ . Indeksi  $n$  števil  $F_n$  kakor tudi sama števila  $F_n$  so naravna števila. Fibonaccijevo zaporedje z nekaj začetnimi členi zapišemo v obliki:

$$(F_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots).$$

Fibonaccijeva števila niso samo preprosto definirana, ampak imajo številne zanimive lastnosti. V prispevku si bomo ogledali samo eno.

Najprej vzemimo zaporedje kvadratov Fibonaccijevih števil

$$(F_n^2)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921, 20736, 54289, \dots), \quad (2)$$

nato pa zaporedje delnih vsot teh kvadratov:

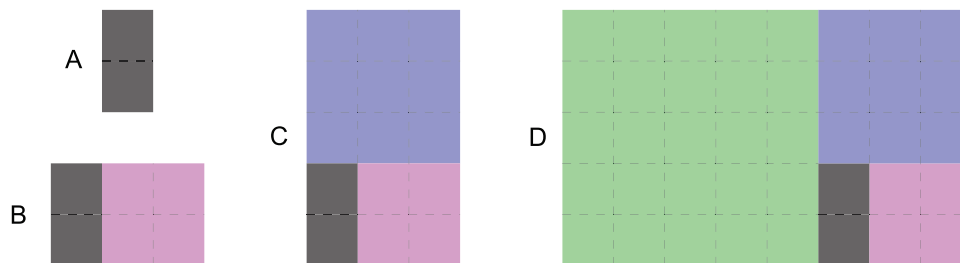
$$(S_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, 4895, 12816, 33552, \dots). \quad (3)$$

Pri tem je  $n$ -ta delna vsota  $S_n$  definirana kot vsota prvih  $n$  členov zaporedja (2), to se pravi

$$S_1 = F_1^2, \quad S_2 = F_1^2 + F_2^2, \quad S_3 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2, \dots, \\ S_n = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2, \dots$$

Takoj opazimo, da lahko člene zaporedja (3) razstavimo na produkt dveh zaporednih Fibonaccijevih števil, na primer:

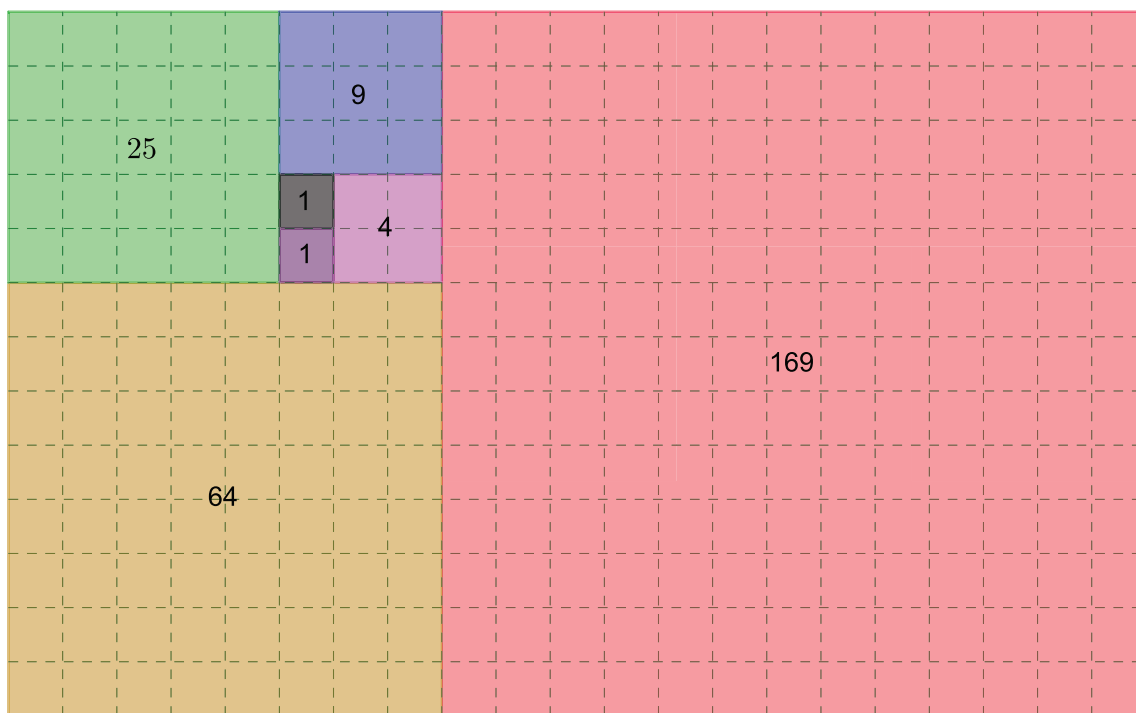
$$S_1 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2, \quad S_2 = 1 \cdot 2 = F_2 F_3, \\ S_3 = 2 \cdot 3 = F_3 F_4, \quad S_4 = 3 \cdot 5 = F_4 F_5.$$



SLIKA 1.

Konstrukcija Fibonaccijevih pravokotnikov.





SLIKA 2.

Razrez Fibonaccijevega pravokotnika na kvadrate.

Pri tem se nam kar hitro utrne misel, da je na splošno

$$\blacksquare S_n = F_n F_{n+1}$$

oziroma

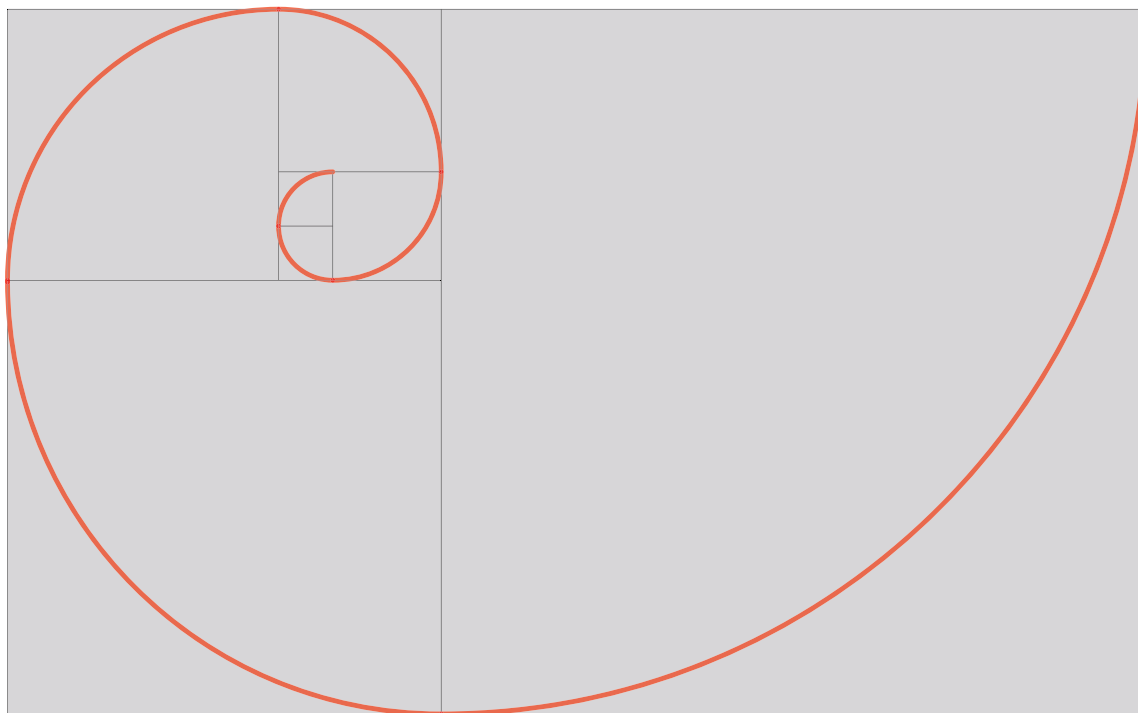
$$\blacksquare F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \quad (4)$$

O veljavnosti enakosti (4) se takoj prepričamo z metodo matematične indukcije. Za  $n = 1$  relacija očitno velja. Predpostavimo, da relacija velja za katerokoli naravno število  $n$ . Potem na osnovi te predpostavke in z uporabo enačbe (1) dobimo

$$\begin{aligned} \blacksquare F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 \\ = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ = F_{n+1} F_{n+2} = F_{n+1} F_{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

To pomeni, da relacija velja tudi za število  $n + 1$ , ki je neposredni naslednik števila  $n$ . Potemtakem (4) velja za vsa naravna števila  $n$ .

Enačba (4) pove, da lahko zaporedje pravokotnikov s stranicama  $F_n$  in  $F_{n+1}$  za  $n > 1$  (imenujemo jih *Fibonaccijevi pravokotniki*) konstruiramo po korakih. Začnemo z najmanjšim Fibonaccijevim pravokotnikom s stranicama  $F_2 = 1$  in  $F_3 = 2$  (slika 1, A) in ploščino  $S_2 = 2$ . Temu pridružimo kvadrat s stranico  $F_3 = 2$ . Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s stranicama  $F_3 = 2$  in  $F_4 = F_2 + F_3 = 3$  (slika 1, B) in ploščino  $S_3 = 6$ . Temu pridružimo kvadrat s stranico  $F_4 = 3$ . Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s stranicama  $F_4 = 3$  in  $F_5 = F_3 + F_4 = 5$  (slika 1, C) in ploščino  $S_4 = 15$ . Nato temu pridružimo kvadrat s stranico  $F_5 = 5$ . Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s



### SLIKA 3.

Fibonaccijeva spirala.

stranicama  $F_5 = 5$  in  $F_6 = F_4 + F_5 = 8$  (slika 1, D) in ploščino  $S_5 = 40$ . Opisani postopek lahko nadaljujemo tako dolgo, kot želimo.

Enakost (4) tudi pomeni, da lahko Fibonaccijev pravokotnik s stranicama  $F_n$  in  $F_{n+1}$  za  $n > 1$  razrežemo netrivialno na same kvadrate. Slika 2 kaže primer za  $n = 7$ , ko je  $F_7 = 13$  in  $F_8 = 21$ . Kvadrati, na katere smo razdelili Fibonaccijev pravokotnik, so različno obarvani.

Ko od Fibonaccijevega pravokotnika s stranicama  $F_{n+1}$  in  $F_n$  odrežemo kvadrat s stranico  $F_n$ , dobimo manjši Fibonaccijev pravokotnik s stranicama  $F_n$  in  $F_{n-1}$ . Ta postopek lahko nadaljujemo, dokler ne pridemo do najmanjšega Fibonaccijevega pravokotnika s stranicama  $F_3 = 2$  in  $F_2 = 1$ . Slednjega lahko razdelimo samo še na dva enotska kvadrata. Če v

vse kvadrate pri tem postopku včrtamo četrtine krožnic, tako kot na sliki 3, dobimo *Fibonaccijevo spiralo*. Krožni loki imajo polmere  $F_n, F_{n-1}, \dots, F_2, F_1$ .

### Literatura

- [1] J. Ziegenbalg, *Figurierte Zahlen*, Springer Spektrum, Wiesbaden 2018.

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

[www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/](http://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/)