NEKAJ PRIMEROV DVOJNEGA ŠTETJA

SANDI KLAVŽAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 05-01, 20B05

Predstavljena je metoda dvojnega štetja ter nekatere njene uporabe v kombinatoriki in teoriji grup.

SOME EXAMPLES OF DOUBLE COUNTING

Double counting is presented and some of its applications in combinatorics and group theory are given.

1. Uvod

Recimo, da ste na koncertu simfoničnega orkestra, kjer poleg dveh skladb, zaradi katerih ste prišli v dvorano, izvajajo tudi dolgočasen klavirski koncert. Od samega dolgčasa ne veste, kaj bi, pa se odločite prešteti glasbenike v orkestru. Najprej se lotite violinistov in violistov, preidete na čeliste in tako nadaljujete do zadnje skupine inštrumentov. Kaj pa, če ste se zmotili? Zato glasbenike preštejete še enkrat, tokrat po vrstah, v katerih sedijo. In dobite isto število. Tako ste ubili dve muhi na mah. Ne samo, da ste ugotovili točno število glasbenikov, tudi klavirski koncert je že skoraj pri kraju.

Opisani primer prevedemo v matematični jezik takole:

Če elemente iste množice preštejemo na dva različna načina, je rezultat enak.

Ugotovitev poimenujemo *metoda dvojnega štetja*, včasih ji rečemo tudi *princip dvojnega štetja*. Metoda je na videz zelo preprosta, vendar je prvi vtis varljiv. Izkaže se namreč, da je izjemno močno orodje, ki ni uporabno samo v kombinatoriki in teoriji množic, temveč tudi na mnogih drugih področjih matematike.

V nadaljevanju tega razdelka si bomo pobliže ogledali metodo dvojnega štetja ter med drugim prepoznali pravilo štetja parov kot njen posebni primer. Nato bomo v treh razdelkih nanizali nekaj značilnih uporab metode.

Ko na dva različna načina preštevamo elemente množice, nas poleg moči množice lahko zanima še kakšna druga njena lastnost. Za ilustracijo, kaj imamo v mislih, si izberimo matriko A reda $m \times n$ z elementi a_{ij} ter vsem znano enakost

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \,. \tag{1}$$

V enakosti (1) na levi seštejemo tako, da najprej seštejemo po vrsticah, nato pa seštejemo vrstične vsote, medtem ko na desni seštejemo tako, da najprej seštejemo po stolpcih ter nato seštejemo stolpčne vsote. Zato enakost (1) pomeni dvojno štetje, kjer pa smo hkrati, ko smo na dva načina pregledali elemente matrike A, te tudi sešteli.

Poseben primer metode dvojnega štetja je tudi pravilo štetja parov. Naj bo $R \subseteq A \times B$ binarna relacija, kjer sta A in B končni množici. Za dani $a \in A$ naj bo

$$_aR = \{(a,b) \mid b \in B, (a,b) \in R\}$$

ter podobno, za izbrani $b \in B$, naj bo

$$R_b = \{(a,b) \mid a \in A, (a,b) \in R\} \,.$$

Za končno množico X označimo z $|X|$ število njenih elementov. Tedaj *pravilo štetja parov* pravi, da velja

$$|R| = \sum_{a \in A} |\,_aR| = \sum_{b \in B} |R_b| \,. \tag{2}$$

Pravilo torej na dva različna načina določi moč relacije R. Ker zapis (2) verjetno marsikomu ni najbolj nazoren, si ga je koristno predstavljati s pomočjo matrike $M(R)$ relacije R. $M(R)$ je matrika, katere vrstice ustrezajo elementom iz A, stolpci elementom iz B, pri čemer je element matrike, ki ustreza paru $a \in A$ in $b \in B$, enak 1, če je $(a,b) \in R$, sicer pa 0. Iz tega zornega kota pravilo štetja parov postane poseben primer enakosti (1), saj v matriki relacije na dva načina seštejemo njene enice.

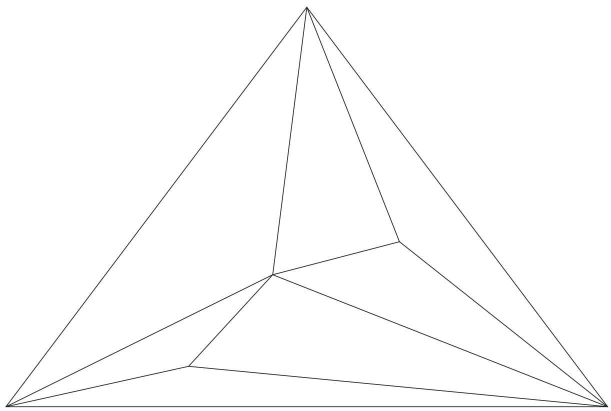
2. Trije preprosti primeri

Primer 1 (Lema o rokovanju). Kot prvi preprost primer uporabe pravila dvojnega štetja si oglejmo naslednji osnovni rezultat teorije grafov, ki ga bomo potrebovali tudi v nadaljevanju. Spomnimo se, da je *stopnja vozlišča* število njegovih sosedov.

Lema (o rokovanju). *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Tedaj je vsota stopenj vozlišč enaka dvakratniku števila povezav:* $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Dokaz leme o rokovanju je preprosta uporaba pravila štetja parov. Relacijo $R \subseteq V \times E$ vpeljemo tako, da je vozlišče $v \in V$ v relaciji s povezavo $e \in E$, če je v krajišče od e. Potem nam prva vsota v (2) sešteje stopnje vozlišč, druga pa vrne dvakratnik povezav. (Več o lemi o rokovanju si lahko preberemo v [5].)

Primer 2 (Tringulacije sfere). Imejmo poljubno triangulacijo sfere. (Na takšno triangulacijo lahko ekvivalentno gledamo tudi kot na ravninski graf, ki je vložen v ravnino tako, da je vsako lice omejeno s ciklom dolžine 3.) Glej sliko 1.



Slika 1. Ravninska triangulacija

Naj bo E množica robov triangulacije sfere ter T množica njenih (trikotniških) lic. Na primer, triangulacija s slike 1 premore 8 lic (ne pozabimo zunanjega lica) ter 12 robov. Vpeljimo relacijo $R \subseteq E \times T$ na naraven način: rob je v relaciji s trikotnikom, če tvori njegovo stranico. Potem pravilo štetja parov pove, da velja naslednja zveza med številom robov in lic triangulacije sfere:

$$2|E| = 3|T|\,.$$

Primer 3 (Vsota prvih n naravnih števil). Nazadnje poglejmo kvadratno matriko A reda $(n + 1)$. Določimo število elementov matrike A na dva načina. Seveda je število elementov v A enako $(n+1)^2$. Po drugi strani matriko A sestavljajo diagonala ter zgornji in spodnji trikotnik:

$$\begin{array}{cccccc}
\times & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\circ & \times & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\circ & \circ & \times & \bullet & \cdots & \bullet \\
\circ & \circ & \circ & \times & \cdots & \bullet \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \times
\end{array}.$$

Trikotnika vsebujeta isto število elementov, ki ga označimo z x. Vseh elementov v A je tako $(n+1)+2x$. Od tod po metodi dvojnega štetja dobimo

$$(n+1)^2 = (n+1) + 2x\,,$$

od tu pa preberemo

$$x = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Ker imamo v zgornjem trikotniku matrike A ravno $1+2+\cdots+n$ elementov, smo izpeljali formulo za vsoto prvih n naravnih števil. Ta izpeljava ni tako poznana, kot je slavna Gaussova ideja, da seštejemo prvi in zadnji element, drugi in predzadnji, ..., pa tudi indukcija ni potrebna.

3. Binomski izrek in n-kocke

Kombinatorične enakosti so seveda zanimive same po sebi. Še dodatno vrednost pa pridobijo, če imajo kakšno interpretacijo. Eden pomembnih načinov pri iskanju interpretacije je ravno uporaba dvojnega štetja. V tem razdelku bomo opisali tak primer iz [2].

Ko po binomskem izreku zapišemo

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{3}$$

in odvajamo (3), dobimo

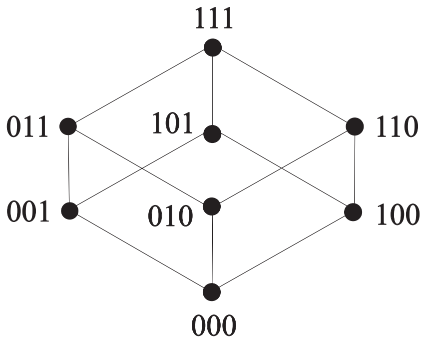
$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}. \tag{4}$$

Za $x = 1$ enakost (4) postane:

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} . \tag{5}$$

Sedaj pa si poglejmo drug način, kako pridemo do enakosti (5). Kot smo že omenili, pri tem ne gre samo za to, da enakost izpeljemo na drug način, pomembneje je, da nam bo drugi način podal tudi vsebinsko razlago za enakost.

Razred n-kock je že bil vpeljan v Obzorniku [3], zato se tu le na hitro spomnimo definicije. Za $n \geq 1$ je *n-kocka* Q_n graf, katerega vozlišča so vsi binarni nizi dolžine n; vozlišči sta sosednji, če se razlikujeta na natanko enem mestu. Na sliki 2 je prikazana 3-kocka Q_3.



Slika 2. 3-kocka Q_3

Preštejmo povezave v $Q_n = (V_n, E_n)$. Najprej opazimo, da ima vsako vozlišče n sosedov. Ker je $|V_n| = 2^n$, iz leme o rokovanju preberemo

$$n2^n = 2|E_n| ,$$

torej je

$$|E_n| = n2^{n-1}.$$

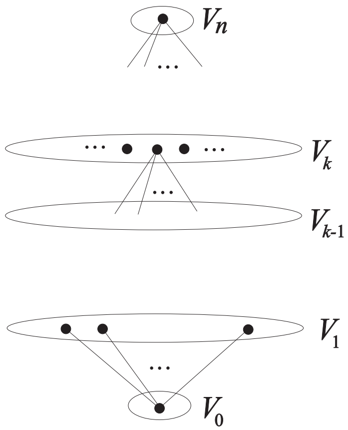
Preštejmo povezave v Q_n še na drug način. Posebej odlikujmo vozlišče $v = 00\ldots0$. Vozlišča n-kocke razdelimo v množice

$$V_0, V_1, \ldots, V_n ,$$

kjer so v množici V_k, $0 \leq k \leq n$, vozlišča, ki imajo natanko k enic. Na primer, v V_1 imamo n vozlišč, saj imamo eno enico lahko na enem izmed n

mest, medtem ko sta v V_0 in v V_n le po eno vozlišče. V splošnem, množica V_k vsebuje $\binom{n}{k}$ vozlišč, saj na toliko načinov lahko izberemo k mest, na katerih so enice.

Naj bo e poljubna povezava n-kocke Q_n. Tedaj se njeni krajišči razlikujeta na enem mestu. Zato obstaja tak indeks k, $1 \leq k \leq n$, da eno krajišče povezave e leži v množici V_k, drugo krajišče pa v V_{k-1}. Situacija je shematično prikazana na sliki 3. (Primerjaj tudi sliko 2.)



Slika 3. Razdelitev vozlišč n-kocke

Povezave zato lahko preštejemo tudi tako, da za vsako vozlišče v, recimo da je $v \in V_k$, pogledamo, koliko sosedov ima v V_{k-1}. Ker je $v \in V_k$, vsebuje k enic. Če poljubno njegovo enico spremenimo v ničlo, dobimo vozlišče iz V_{k-1}, ki je sosed v. Zato ima vozlišče v v množici V_{k-1} natanko k sosedov. Torej je vseh povezav v Q_n ravno

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Ker smo zgoraj po drugi poti ugotovili, da je vseh povezav v Q_n tudi $n2^{n-1}$, smo tako izpeljali enakost (5).

4. Orbite in stabilizatorji permutacijskih grup

Za ilustracijo široke uporabnosti pravila dvojnega štetja se podajmo še v teorijo grup.

Naj bo X končna množica. Tedaj bijektivni preslikavi $X \to X$ pravimo *permutacija* množice X. Množica permutacij množice X tvori *permutacijsko grupo*, če tvori grupo za običajno komponiranje funkcij. Kadar pa grupa vsebuje vse permutacije množice X, permutacijsko grupo imenujemo *simetrična grupa* nad X.

Naj bo torej G permutacijska grupa na končni množici X. Glede na grupo G lahko v množico X vpeljemo relacijo $\sim$ s predpisom: $x \sim y$, če obstaja $g \in G$, da je $g(x) = y$. Relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija, njene ekvivalenčne razrede imenujemo *orbite* grupe G na X. Orbito, ki ji pripada $x \in X$, označimo Gx, torej

$$Gx = \{y \in X | \; \exists g \in G\colon \; g(x) = y\} \,.$$

Vpeljimo še množico permutacij $G(x \to y)$ s predpisom

$$G(x \to y) = \{g \in G | \; g(x) = y\} \,.$$

$G(x \to x)$ imenujemo *stabilizator* elementa x in ga označimo z G_x.

Lema 1. *Naj bo $y \in Gx$. Tedaj velja $|G_x| = |G(x \to y)|$.*

Lema 1 hitro sledi iz definicij, zato vabimo bralca, da se sam prepriča o njeni veljavnosti. Mi pa dokažimo naslednji pomemben izrek, ki je tudi cilj tega razdelka.

Izrek 2. *Naj bo X končna množica in G permutacijska grupa na X. Tedaj za vsak element $x \in X$ velja*

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x| \,.$$

Dokaz. Izberimo poljuben element x množice X in ga fiksirajmo. Naj bo M matrika reda $|G| \times |X|$, katere vrstice so indeksirane z elementi grupe G, stolpci pa z elementi množice X. Potem za $g \in G$ in $y \in X$ ustrezen element v M postavimo na 1, če je $g(x) = y$, sicer naj bo 0.

Štetje enic matrike M po vrsticah je preprosto: ker je $g \in G$ permutacija, imamo v vsaki vrstici natanko eno enico, torej imamo po vseh vrsticah $|G|$ enic.

Poglejmo še stolpce. Naj bo $y \in X$. Tedaj imamo v pripadajočem stolpcu po definiciji množice $G(x \to y)$ ravno $|G(x \to y)|$ enic. Če je $y \in Gx$, je po lemi 1 v tem stolpcu $|G_x|$ enic. Če y ni v orbiti elementa x, ni v stolpcu nobene enice. Torej je število vseh enic po stolpcih enako $|Gx| \cdot |G_x|$, in dokaz je končan. ∎

LITERATURA

[1] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] M. L. Gargano, J. F. Malerba in M. Lewinter, *Hypercubes and Pascal's triangle: A tale of two proofs*, Math. Mag. **76** (2003), str. 216–217.

[3] S. Klavžar, *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik mat. fiz. **50** (2003) 6, str. 175–183.

[4] J. Matoušek in J. Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[5] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma 63, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.

VESTI

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2007*

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 28 novih članov:

2246. Contents Ančev Doroteja
2247. Banko Jaka
2248. Brcar Savina
2249. Bregar Rudi
2250. Čede Urška
2251. Dominko Rok
2252. Frangež Herman Mateja
2253. Gorišek Angela
2254. Gornik Lidija
2255. Harb Nada
2256. Jagodič Marko
2257. Jazbec Simona
2258. Knap Žiga
2259. Koderman Ivo
2260. Kukovič Nataša
2261. Majaron Tinka
2262. Markun Boštjan
2263. Markun Urška
2264. Novak Vehovar Jana
2265. Petek Jasmina
2266. Plemenitaš Albina
2267. Povh Janez
2268. Praprotnik Matej
2269. Štrukelj Mitja
2270. Tajnik Franc
2271. Toplak Stanislava
2272. Tratnik Miran
2273. Vidmar Marko

Vladimir Bensa

*Novi člani DMFA Slovenije za leto 2006 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **54** (2007) 3, stran XIX.