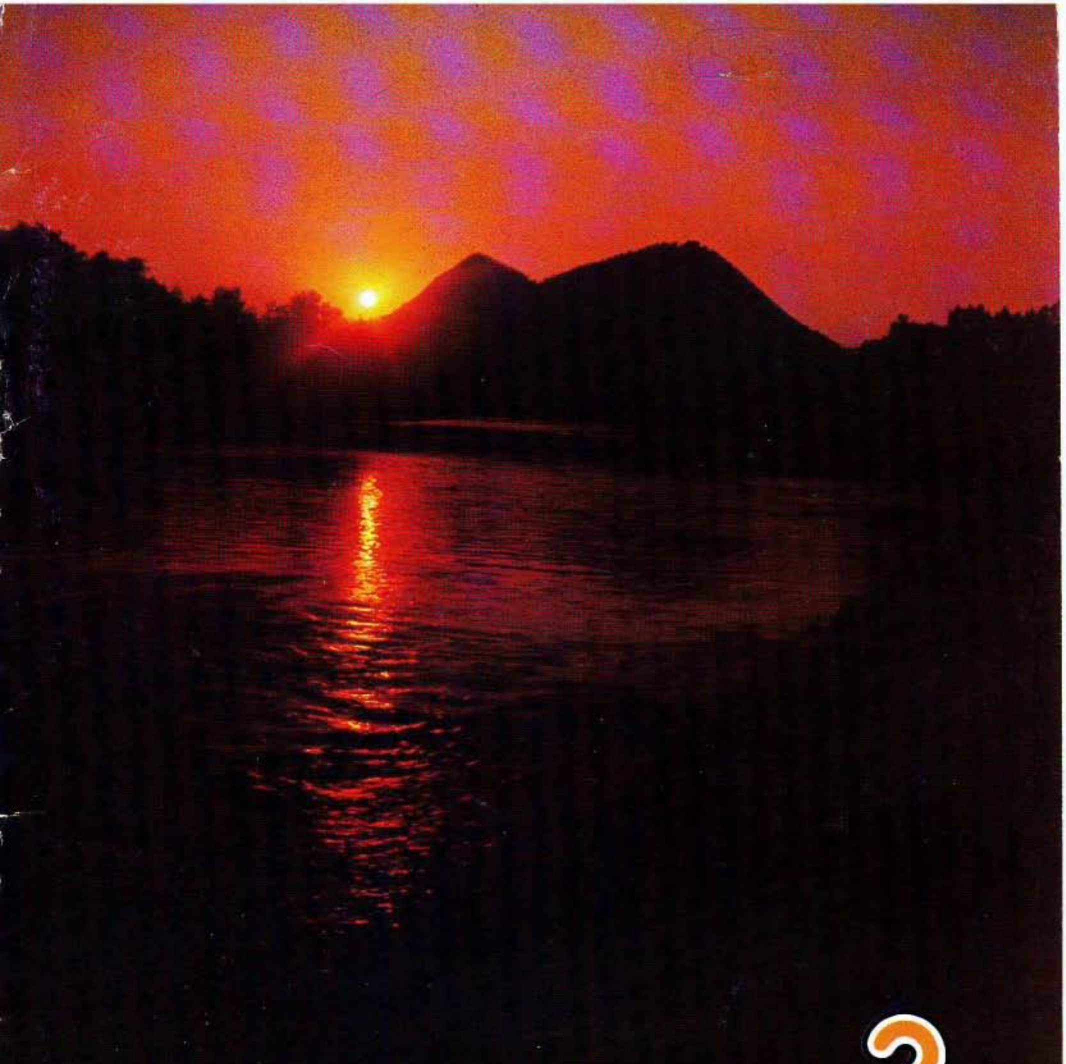


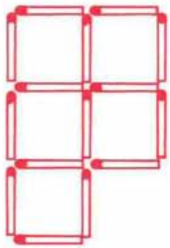
2

PRESEK

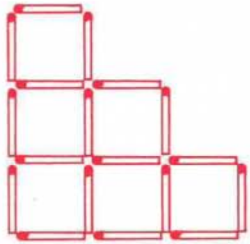
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 14. 1986–87

KRATKOČASNE VŽIGALICE

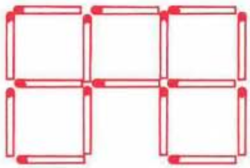
39. Prestavi 2 vžigalici, da dobiš 5 manjših in en večji kvadrat!



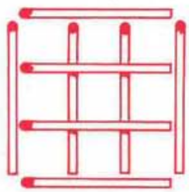
40. Odstrani 6 vžigalic, da ti ostanejo trije enaki kvadrati!



41. Prestavi 3 vžigalice, da dobiš 4 enake kvadrate!

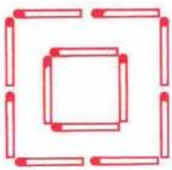


42. Odstrani 2 vžigalici, da dobiš 3 kvadrate in 2 pravokotnika!

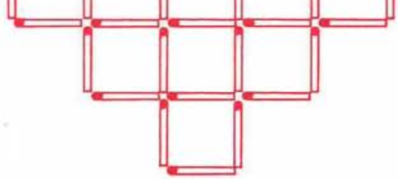


43. a) Odstrani 2 in prestavi 6 vžigalic,
    b) odstrani 2 in prestavi 4 vžigalice,

    da dobiš vsakokrat 3 enake kvadrate!



44. Odstrani 8 vžigalic, da dobiš:
    a) 6 kvadratov,
    b) 7 kvadratov.



V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

SONCE ZGODAJ DOLI GRE

Rad hodim na Šmarno goro. Vzpon je dovolj strm in ne prekratek ne predolg. Saj veste, zdravo telo in vse to. Toda, ker naj bo zdrav tudi duh, ali bolj neposredno, ker je treba tudi delati, se odpravim tja kolikor mogoče pozno. Tako se mi večkrat primeri, da odidem spomladi prezgodaj in jeseni prepozno. Drugo je neprijetno, saj me nastajajoči mrak sili, da hodim navzdol vse počasneje in potrebujem čedalje več časa, tako da me lovi tema. Na srečo je šlo doslej brez večjih zapletljajev. Namesto da bi pogledal v *Naše nebo,* kdaj zahaja Sonce, sem grobo ocenil, da se sončni zahod premakne največ za dobro minuto na dan, in to okoli obeh enakonočij. Vzel sem, da je noč ob letnem sončnem obratu dolga $\frac{1}{3}$.24 ur = 8 ur in ob zimskem obratu $\frac{2}{3}$.24 ur = 16 ur. Od tod sledi za spremembo 8 ur/ 6 mesecev = 480 minut/180 dni = 2,7 minut/dan. Polovica tega gre na račun premika sončnega zahoda in polovica na račun premika vzhoda. Doslej sem s tem shajal.

V 4. številki *Preseka* pa je članek Andreja Čadeža o sončnih urah ponudil boljšo možnost. Senca pri vodoravni sončni uri postane ob sončnem zahodu (in ob sončnem vzhodu) neskončno dolga. Enačba za dolžino sence (na strani 223 spodaj) ima v imenovalcu izraz $\mathrm{ctg}\varphi . \cos H + \mathrm{tg}\delta$. Ko naraste ob sončnem zahodu dolžina sence čez vse meje, mora iti ta izraz proti nič:
$\mathrm{ctg}\varphi . \cos H_0 + \mathrm{tg}\delta = 0$. Iz $\cos H_0 = -\mathrm{tg}\delta / \mathrm{ctg}\varphi$ takoj sledi

$$\cos H_0 = -\,\mathrm{tg}\varphi .\, \mathrm{tg}\delta \qquad (1)$$

H_0 je časovni kot ob sončnem zahodu, φ geografska širina kraja, za Ljubljano približno 46^0, in δ kot iz enačbe

$$\sin\delta = \sin\epsilon \,.\, \sin\lambda \qquad (2)$$

V njej je $\epsilon = 23{,}5^0$ kot med ravnino ekvatorja in ravnino ekliptike in λ kot, ki ga oklepa trenutna smer Zemlja – Sonce s to smerjo na prvi pomladni dan. Približno velja

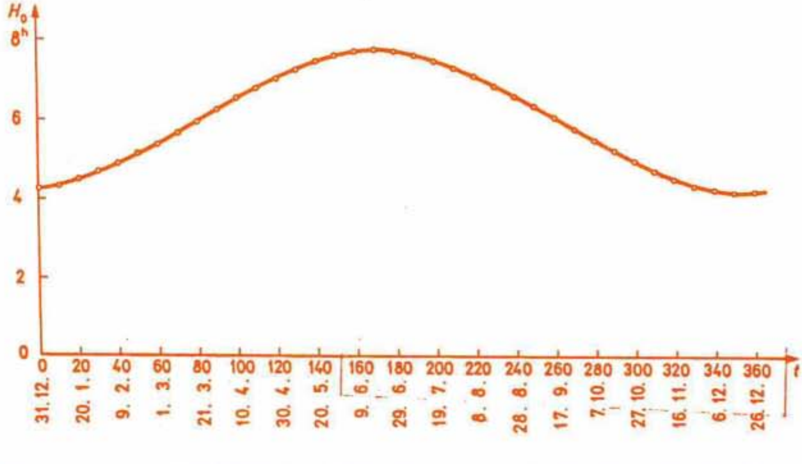
$$\lambda = 360^0 \,.\, (t - t_0)/T_0 \qquad (3)$$

t je zaporedna številka dne v letu, t_0 = 80 zaporedna številka prvega pomladnega dne in T_0 = 365 število dni v letu.

Čas sončnega zahoda izračunamo tako, da najprej za izbrano zaporedno številko dne v letu iz enačbe (3) poiščemo kot λ. Enačba (2) da potem kot δ in naposled enačba (1) še časovni kot. Z navadnim žepnim računalom naredimo vse to v enem koraku. Račun ponovimo, na primer, za vsak deseti dan in narišemo graf (slika 1). Kote merimo v stopinjah in tudi časovni kot ob zahodu H_0 dobimo v stopinjah. Rezultat prevedemo v ure tako, da ga delimo s 15. Ker polnemu kotu 360^0 ustreza 24 ur, odpade namreč na 1 uro 15^0. Dodati moramo 12^h, da dobimo čas po polnoči. Ko je v veljavi poletni čas, moramo dodati uro več. Če H_0 odštejemo od 12^h – ali od 13^h, ko velja poletni čas –, dobimo čas sončnega vzhoda.

Noč ob letnem sončnem obratu je po našem računu za kakih 24 minut daljša od 8 ur in ob zimskem za prav toliko krajša od 16 ur. Od tod bi sledilo za spremembo (480 – 48) minut/180 dni = 2,4 minute/dan, če bi bilo spreminjanje enakomerno. Polovica tega bi odpadla na premik sončnega zahoda in polovica na premik vzhoda. Ker pa spreminjanje ni enakomerno, je premik večji: 1,6 minute/dan, ne 1,2 minute/dan. Začetna ocena ni bila tako slaba.

Po grafu je mogoče določiti, kdaj se kaže odpraviti na pot, če naj nas ne lovi tema. Od časa na njem odštejemo čas, ki smo se ga namenili porabiti, pač glede na dolžino izbrane poti in hitrost hoje. Z računom sem bil prav zadovoljen, saj se ne primeri pogosto, da bi bili taki računi v pomoč pri vsakdanjih zadevah. Zadovoljstvo je skalilo dejstvo, da so rezultati samo približni. Dokaj



Slika 1. S poenostavljenimi enačbami izračunani čas sončnega zahoda za dneve v letu.

natančni bi bili, če bi merili čas s sončno uro, ki kaže *pravi sončni čas,* po katerem je Sonce najviše opoldne, ob 0^h.

Toda naše ure niso sončne in ne kažejo pravega sončnega časa, ampak *srednjeevropski čas.* Najprej je to *meščanski čas,* ki ga ne začnemo meriti opoldne, ampak opolnoči. Odtod razlika 12 ur. Srednjeevropski čas je meščanski čas za poldnevnik 15^0 vzhodno od Greenwicha (poldnevnika 0^0). Srednjeevropski čas se od pravega sončnega časa danega kraja – če se ne oziramo na razliko 12 ur – razlikuje iz dveh razlogov. Če leži kraj na poldnevniku, katerega geografska dolžina se razlikuje od 15^0, ustrezajo vsaki stopinji razlike 60 minu/15 = 4 minute. Tako je Sonce v Ljubljani z geografsko dolžino $14{,}5^0$ najviše 2 minuti pozneje kot v Zagorju z geografsko dolžino 15^0. V *Našem nebu* so navedeni podatki za Ljubljano v srednjeevropskem času. Za druge kraje v Sloveniji je treba pri iskanju sončnega zahoda upoštevati popravek te vrste, tako imenovani *conski popravek,* ki ne presega ± 6 minut.

Drugi razlog je v tem, da se Zemlja giblje okoli Sonca približno enakomerno v ravnini, ki je nagnjena glede na njeno os. To pomeni, da je približno konstantna hitrost navideznega gibanja Sonca v tej ravnini glede na zvezde, kot ga opazujemo z Zemlje. Zato pa se spreminja komponenta navidezne hitrosti Sonca v smeri ekvatorja: spomladi in jeseni je manjša kot poleti in pozimi. Iz tega izvirajočo razliko navaja *Naše nebo* za dneve v letu ob 0^h po greenwiškem času kot *časovno enačbo.* Skrajni vrednosti okoli –14 minut in okoli 16 minut doseže 12. februarja in 3. novembra.

Srednjeevropski čas dobimo, če pravemu sončnemu času prištejemo 12 ur, odštejemo od njega časovno enačbo in upoštevamo conski popravek. Ko to naredimo z našimi rezultati – conskega popravka za Ljubljano ni treba več upoštevati –, ne dobimo podatkov v *Našem nebu.* Razlika, največ nekaj minut, je posledica približkov, ki smo jih uporabili. Natančna napoved sončnega zahoda v srednjeevropskem času le ni tako preprosta zadeva. Poleg natančnejših podatkov v računu, na primer v enačbi (3), moramo upoštevati, da Sonce ni točkasto svetilo in vidimo njegov radij pod kotom približno $1/4\,^0$ ter da vidimo zaradi loma svetlobe v ozračju njegovo središče na obzorju, ko je v resnici za dobre $1/2^0$ pod njim. V trenutku zahoda (ali vzhoda), ko vidimo na obzorju zgornji rob sončne plošče, je potemtakem središče Sonca že dobre $3/4\,^0$ (natančno $0{,}85^0$ ali 3,4 časovne minute) pod obzorjem.

V prvi številki *Preseka* je izšel članek Rudija Kladnika *Sipanje svetlobe,* ki je podrobneje opisal ta zanimivi pojav.

Astronomske efemeride (periodične publikacije s preglednicami leg vesoljskih teles) izhajajo od leta 1983 pod imenom *Naše nebo* v *Prsekovi knjižnici.*

Nekomu, ki pred izletom na Šmarno goro napačno oceni, kdaj bo zašlo Sonce, se lahko primeri kvečjemu to, da se bo zadnji del poti spotikal v temi, kolikor mu ne bodo svetile tacenske luči ali Luna. Jean–Marie Bastien–Thiry pa je bil menda zaradi tega celo ob glavo. Vsaj tako pravi Frederick Forsyth v *Operaciji Šakal* (ČGP Delo, Ljubljana 1972, str. 12). Knjiga opisuje izmišljeni načrt za umor generala de Gaulla. Na začetku poroča o spodletelem atentatu, ki ga je zares pripravil Bastien–Thiry.

"... Bastien–Thiry (je ugotovil), da se je uštel. Napaka pa mu je postala jasna šele tedaj, ko je sedel na zatožni klopi in so mu jo razložili policisti. Ko je načrtoval urnik atentata, je uporabljal koledar: ugotovil je, da se 22. avgusta zmrači ob 8.35, se pravi dovolj kasno tudi v primeru, če bo de Gaulle pozen, kot se je tudi zgodilo. Toda koledar, s katerim si je pomagal, je bil iz leta 1961. Dne 22. avgusta 1962 pa se je zmračilo ob 8.10. Teh 25 minut je spremenilo zgodovino Francije."

Zdaj smo se že toliko razgovorili o sončnem zahodu, da lahko premislimo, kako je s to zadevo. V našem poenostavljenem računu so vsa leta enakovredna. Pogled v *Naše nebo* za 1983, 1984, 1985 in 1986 potrdi, da se sončni zahod za določeni datum iz leta v leto premakne kvečjemu za minuto. Usodno zmešnjavo je moralo zakriviti nekaj drugega, če si je pisec napete zgodbe ni preprosto izmislil.

Poglejmo možnosti. Conski popravek je precej manjši kot 25 minut. Pariz ima namreč geografsko dolžino $2{,}3^0$ in je v njem Sonce najviše le okoli 9 minut prej kot v Greenwichu.

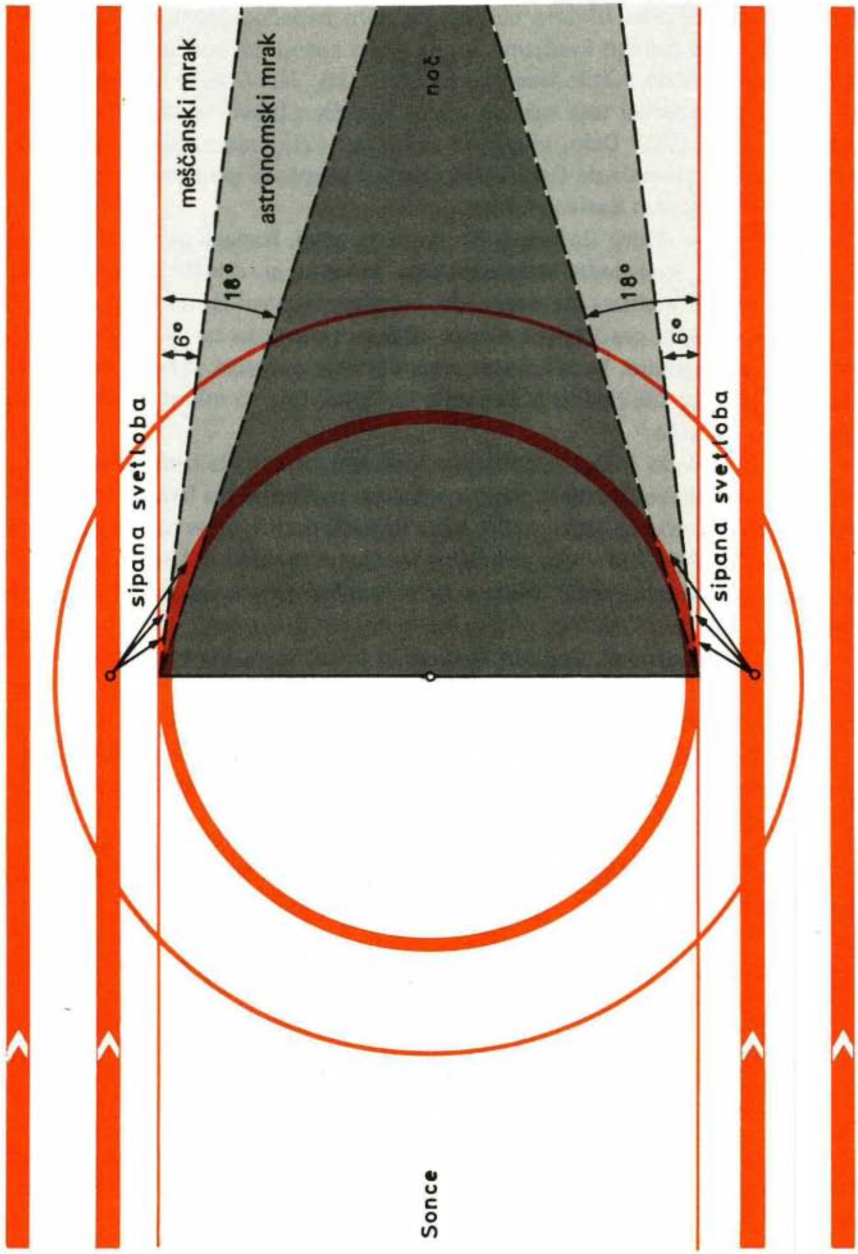
Morda sta bila koledarja narejena za dva različna kraja? Če bi veljal eden za Pariz in drugi za skrajni zahodni ali krajni vzhodni rob Francije, bi dosegla razlika skoraj 25 minut.

Pravi sončni čas je enak časovnemu kotu Sonca in ga začnemo šteti opoldne, ko je Sonce najviše. V tem času vse ure niso enako dolge.

Srednji sončni čas začnemo šteti opoldne in v tem času so vse ure enako dolge.

Meščanski čas začnemo šteti opolnoči in v njem so vse ure enako dolge. Od srednjega sončnega časa se razlikuje samo za 12 ur.

Srednjeevropski čas je meščanski čas za poldnevnik 15^0 vzhodno od Greenwicha. Od pravega sončnega časa se razlikuje za 12 ur, conski popravek (za Ljubljano 2 minuti) in časovno enačbo.


meščanski mrak
astronomski mrak
noč
18°
18°
6°
6°
sipana svetloba
sipana svetloba
Sonce

Slika 2. Nastanek mraka zaradi sipanja sončne svetlobe v ozračju. Risba ne upošteva tega, da vidimo zaradi loma v ozračju Sonce, ko je pod obzorjem. Debelina ozračja je narisana pretirano.

Morda je koledar iz leta 1961 navajal, kdaj se zmrači, koledar iz leta 1962 pa, kdaj zaide Sonce. Ko Sonce zaide, se namreč še ne stemni takoj, ker se v ozračju *sipa* svetloba Sonca, ki je že pod obzorjem (slika 2). *Meščanski mrak* traja, dokler ni središče Sonca 6^0 pod obzorjem. Za ta podatek so se zedinili, ker je nekako dotlej mogoče brati na prostem. Konec avgusta traja meščanski mrak 32 minut. *Astronomski mrak* traja, dokler ni središče Sonca 18^0 pod obzorjem. Nekako tedaj je mogoče ob jasnem vremenu nad obzorjem, kjer je zašlo Sonce, že videti najšibkejše s prostim očesom vidne zvezde (zvezde 6. magnitude). *Naše nebo* navaja astronomski mrak grafično. Astronomski mrak je najdaljši poleti, ko doseže približno poltretjo uro, a najkrajši pozimi, ko doseže približno poldrugo uro. Večernemu mraku ustreza jutranja *zora.*

Kdaj se zares stemni, pa ni odvisno samo od podatkov v preglednicah, ampak tudi od krajevnih razmer. Ni vseeno, ali zaide Sonce v ravnici ali za hribi. Podatki v *efemeridah* veljajo za ravno obzorje in ne upoštevajo hribov. (Kako bi odgovorili na vprašanje: Ali je mogoče, da Sonce v nekem kraju zaide več dni zapovrstjo ob istem času?) Poleg tega je pomembno še to, ali smo v mestu med hišami, v gozdu ali na planem. Naposled je treba upoštevati tudi vreme, predvsem to, ali je nebo oblačno ali ni. Če načrtujemo povratek z izleta na Šmarno goro ob sončnem zahodu, predstavlja mrak dobrodošel varnostni čas.

Morda so krajevne razmere v Petit–Clamartu, majhnem kraju blizu Pariza, povzročile, da je bilo bolj mračno, kot je računal načrtovalec, morda pa ga je presenetil pozni odhod generala de Gaulla iz mesta. Vsekakor so atentatorji slabo videli znamenje, naj začnejo streljati, in so ukrepali prepozno.

Čeprav nismo našli pravega odgovora na vprašanje, odkod usodna zmešnjava v napeti zgodbi, upam, da se bralci niso dolgočasili. Škoda bi bilo, ko bi se že prej ustrašili enačb. Pribijmo samo še to, da poskrbi za mrak zemeljsko ozračje, ki tudi omogoča življenje.

Janez Strnad

Slika 3. (na ovitku) Sončni zahod za Šmarno goro (667 m) nad Ljubljano , najbolj obiskano goro v Jugoslaviji in odsev sončnih žarkov v najdaljši jugoslovanski reki Savi. (Foto Ciril Velkovrh)

NASTANEK IN RAZVOJ KOLEDARJA

Uvod

Že davno so naši predniki opazovali spreminjanje narave okoli sebe. Posebno pozorni so bili na tiste spremembe, ki so se ritmično ponavljale. Tako so spoznali menjavanje dneva in noči, spremembe letnih časov in lunine mene.

Ljudje so bili takrat v glavnem poljedelci in jasno je, da so si želeli imeti boljši pregled nad dogajanjem v naravi — hoteli so vnaprej napovedati, kdaj bo najprimernejši čas za setev, kdaj bo prišla zima, kdaj bodo povodnji ... Da bi lahko odgovorili na ta vprašanja, so začeli sestavljati koledarje.

Osnovna enota vseh koledarjev je bil (in najbrž tudi vedno bo) en dan. Večje enote so tedni, meseci, leta.

V starih časih so se ljudje v marsičem ravnali po luninih menah: prepričani so bili, da je najboljši čas za setev tri dni pred polno luno; da se mora kositi ob mlaju in podobno. Zato so hoteli, da bi koledar opisoval tudi lunine mene. Tu pa se je pojavila huda težava — lunine mene se namreč ponavljajo na 29,53.. dni. Koliko dni naj ima torej koledarski mesec, da bo prvega vedno polna luna? Če bo imel 29 dni, bo prekratek, če jih bo imel 30, pa bo predolg. Mesec z necelim številom dni (npr. 29 $\frac{1}{2}$) pa je očiten nesmisel.

Druga težava je z dolžino leta, ki tudi ne šteje celega števila dni — povprečno tropsko leto (čas, ko Zemlja enkrat obkroži Sonce) traja 365,2422... dni.

Oglejmo si, kako so ti težavi rešili sestavljalci koledarjev v različnih deželah in v različnih časih.

Egipt

Vsa plodna zemlja v Egiptu leži ob Nilu, ta reka pa vsako leto redno poplavlja. Iz želje, da bi znali te poplave napovedati vnaprej, se je rodil koledar, ki je eden najstarejših na svetu.

Leto so delili na tri letne čase, kot jih pač poznajo v Egiptu, to so: čas poplave, čas setve in čas žetve. Vsak letni čas je trajal 4 mesece po 30 dni. Tako so našteli 360 dni, še pet pa so jih dodali na koncu leta. Podobno kot mi zdaj so tudi Egipčani vsakemu četrtemu letu dodali še en dodaten — prestopni — dan. Poleg razdelitve na mesece so poznali tudi delitev na tedne. Njihov teden je imel deset dni.

Grčija

Atenski astronom Meton je iznašel koledar, v katerem sta se prepletala dva ciklusa – lunin in sončev.

Sončev koledar je bil sestavljen iz let. Leto je štelo 365 dni, vsako četrto pa 366. Lunin koledar so sestavljali meseci, ki so imeli izmenično 29 in 30 dni. Da so se meseci res ujemali z luninimi menami, so vsaki dve leti in pol dodali enemu od mesecev še en dan. Koledarja sta se ujela vsakih 19 let (to je 235 mesecev) in to obdobje so imenovali Metonov ciklus.

Dneve v mesecu so Grki šteli do dvajsetega tako kot mi (torej: prvi, drugi, ..); nato pa so začeli šteti, koliko dni je še do konca meseca.

Zanimivo je, da se pri Grkih dan ni končal opolnoči, ampak ob sončnem zahodu in so tako noč šteli že k naslednjemu dnevu.

Maji

Zelo zanimiv in obenem zelo zapleten je bil koledar Indijancev Maja iz Srednje Amerike. Poznali so posvečeno leto z 260 dnevi in navadno leto s 365 dnevi.

Dnevi posvečenega leta so imeli 20 imen. To so: ik, akbal, kan, čikčan, simi, manik, lamat, muluk, ok, čuen, eb, ben, iš, men, sib, kaban, esanab, kauak, ahau, imiš. Poleg imen so imeli dnevi tudi številke, in sicer od ena do trinajst. Dneve so šteli tako, da je imel naslednji dan naslednje ime in tudi naslednjo številko, torej tako: 1 ik, 2 akbal, 3 kan, 4 čikčan, 5 simi, 6 manik, 7 lamat, 8 muluk, 9 ok, 10 čuen, 11 eb, 12 ben, 13 iš, nato so se številke spet začele z ena; imena pa so tekla naprej: 1 men, 2 sib, 3 kaban, 4 esanab, 5 kauak, 6 ahau, 7 imiš, 8 ik ... V 260 dneh so se zvrstile ravno vse kombinacije trinajstih številk in dvajsetih imen.

Navadno leto je trajalo 365 dni in je imelo 18 mesecev s po 20 dnevi in še en mesec s 5 dnevi.

Oba koledarja sta se ujela na 52 (navadnih) let – to je na 73 posvečenih let. Takrat so imeli Maji posebne slovesnosti.

Koledar je bil za Maje tudi usoden. Takrat, ko so v Ameriko prišli Španci, so Maji ravno proslavljali veliki praznik, ko sta se oba koledarja ujela. Nepripravljene so Španci zelo hitro premagali.

Rim

Rimski koledar je imel 12 mesecev, ki so trajali 29 ali 31 dni, zadnji mesec pa je imel 28 dni.

Meseci so se imenovali takole: martius (31 dni), aprilis (29 dni), maius

(31 dni), iunius (29 dni), quintilis (31 dni), sextilis (29 dni), september (29 dni), october (31 dni), november (29 dni), december (29 dni), ianuarius (29 dni) in februarius (28 dni).

Ta koledar je imel le 355 dni, ostale dni so dodajali ob različnih prilikah, ne da bi se držali kakega pravila. Tudi štetje dni v mesecu ni bilo ustaljeno niti enotno.

Julijanski koledar

Julij Cezar je želel rimski koledar izboljšati, zato je spremenil število dni v mesecih, da je bilo leto res dolgo 365 dni. Njegovo razvrstitev mesecev s 30 in 31 dnevi uporabljamo z minimalnimi spremembami še zdaj. Julij Cezar je določil tudi, da mora biti vsako četrto leto prestopno in da je treba prestopni dan dodati februarju (ki je bil takrat še zadnji mesec).

Uredil je tudi štetje dni v mesecu: prvi dan v mesecu se je imenoval kalende, peti none in trinajsti ide (izjema so meseci marec, maj, julij (quintilis) in oktober, ko so none sedmi, ide pa petnajsti dan). Kalende, none in ide so bili orientacijski datumi. Druge datume so določili tako, da so povedali, koliko dni še manjka do naslednjega orientacijskega datuma. Pri tem so tekoči datum in orientacijski datum všteli.

Začetek aprilskega koledarja bi bil videti takle:

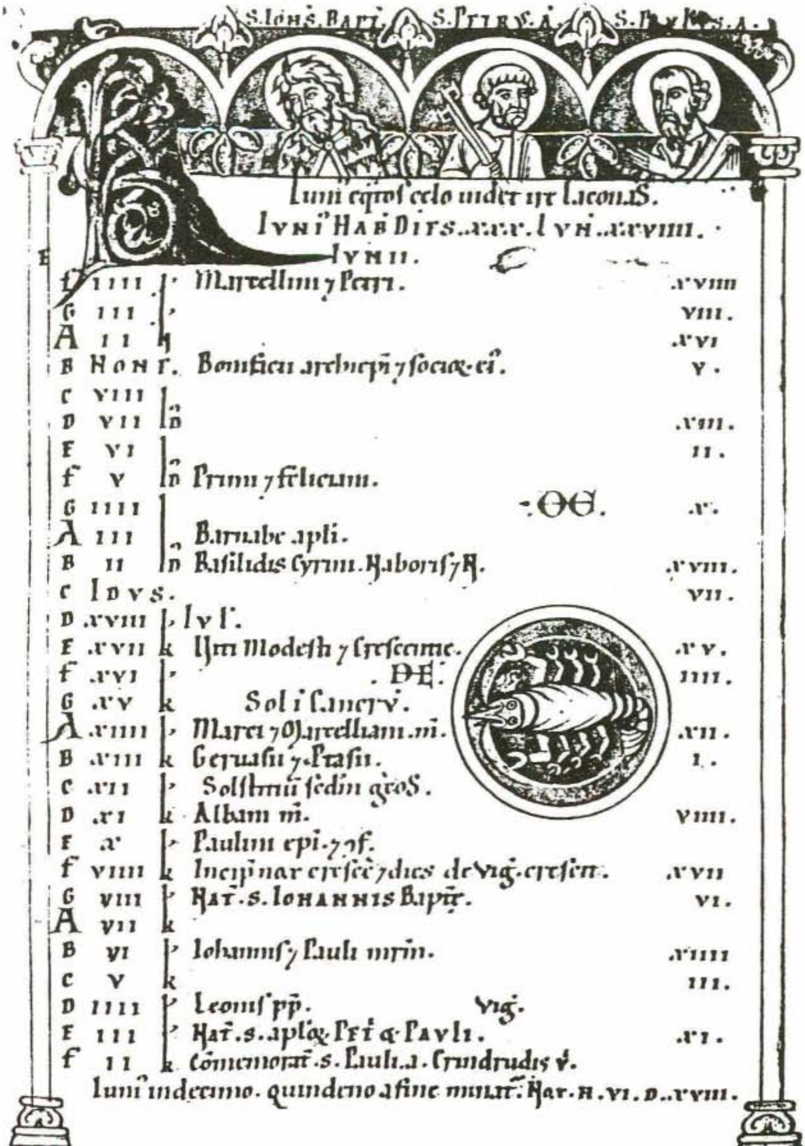
aprilske kalende
IV. dan pred nonami
III. dan pred nonami
II. dan pred nonami
aprilske none
VIII. dan pred idami
VII. dan pred idami
...

Pozneje so mesec quintilis preimenovali v julij — na čast Juliju Cezarju in sextilis v avgust — na čast cesarju Avgustu.

Rimljani so merili čas tudi s tedni, ki so imeli prvotno 8 dni, pozneje pa se je pod vplivom krščanstva izoblikoval sedemdnevni teden.

Gregorjanski koledar

V julijanskem koledarju je bilo navadno leto dolgo 365 dni, vsako četrto leto pa je bilo prestopno in je imelo 366 dni. V povprečju je leto trajalo 365,25 dni. V resnici traja en obhod zemlje okoli Sonca 365,2422... dni. Razlika ni velika,



Mesec junij po julijanskem koledarju. Črke A, B, C, D, E, F, G označujejo potek dni v tednu (A je nedelja), označene so tudi kalende (inicialka K), none (NON.) in ide (IDVS), vmes pa so številke, ki povedo, koliko dni je še do naslednjega od teh datumov. Slika je iz knjige: Nils Lithberg, COMPUTUS, Stockholm 1953, str. 23

v 400 letih pa se je nabere za cele tri dni. Zato se je zgodilo, da se je datum spomladanskega enakonočja spreminjal. Julij Cezar ga je postavil na 21. marec, v 16. stoletju pa je bilo že 11. marca.

Takratni papež Gregor XIII. se je posvetoval z astronomom Alojzijem Lilom in nato določil, da bo leta 1582 za 4. oktobrom prišel 15. oktober. Tako je dosegel, da je bil začetek pomladi naslednje leto spet 21. marec. Da pa se napaka ne bi ponovila, je določil, da vsakih 400 let trije prestopni dnevi odpadejo. Leta 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 ... bi morala biti po julijanskem koledarju prestopna, po novem pa niso. Splošno pravilo: leta, katerih letnice se končajo z 00, prvi dve cifri pa nista deljivi s 4, niso prestopna. Leto 2000 bo prestopno, 2400 tudi, ker sta prvi dve cifri (20 oziroma 24) deljivi s 4.

Ta koledar imenujemo gregorjanski. V naših krajih so ga začeli uporabljati že leta 1582 in ga uporabljamo še danes.

Svetovni koledar

Gregorjanskemu koledarju nekateri očitajo nerodnosti, da si je težko zapomniti, koliko dni ima kateri mesec, da novo leto ni vedno na isti dan v tednu in da je koledar vsako leto drugačen.

Zaradi tega je nastalo več predlogov za nov, boljši koledar. Oglejmo si dva od njih.

V prvi inačici je leto razdeljeno na 13 mesecev s po 28 dnevi. Vsak mesec se začne z nedeljo in ima točno štiri tedne. Tako dobimo 364 dni. Preostali dan

OBVESTILO NAROČNIKOM

Bralce Preseka, predvsem pa učence in dijake na šolah, prosimo, da naročnino za Presek poravnajo čimprej, toda vsaj do konca koledarskega leta. Do takrat bodo izšle že tri številke, s tem pa tudi že nad polovico celotnega letnega obsega lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje. S pravočasnim nakazilom naročnine boste omogočili redno izhajanje vašega lista in se izognili dvakratnemu pobiranju naročnine. S tem boste predvsem olajšali delo vašim učiteljem, ki bodo morali zbrati naročnino za vso šolo in jo nakazati na naš žiro račun. V začetku prihodnjega leta bomo poslali na vsako šolo račun kot opomin za vse neplačane izvode, med katerimi pa so tudi nevrnjene prve tri številke. Vsekakor si želimo čimveč naročnikov in čimvečjo naklado. Ob velikih podražitvah pa si ne moremo privoščiti, da bi tiskali večje število izvodov na zalogo. Prosimo vas za razumevanje in prijetno sodelovanje tudi v prihodnje.

Ciril Velkovrh

dodamo letu posebej, kot praznik, in ne šteje za dan v tednu (torej ni niti ponedeljek, niti torek, ...). Enako dodamo tudi prestopni dan.

Druga različica pa je takale: Leto je razdeljeno na 12 mesecev, kar pomeni štiri letne čase s po tremi meseci. Prvi mesec v vsakem letnem času ima 31, druga dva pa po 30 dni. Vsak letni čas se začne z nedeljo in ima točno 13 tednov. Tudi tu je treba vsako leto dodati še en dan posebej, prav tako prestopni dan.

Koledar, narejen po drugi različici, bi bil videti (za katerokoli leto) takle:

	januar april julij oktober					februar maj avgust november					marec junij september december				
ne	1	8	15	22	29		5	12	19	26		3	10	17	24
po	2	9	16	23	30		6	13	20	27		4	11	18	25
to	3	10	17	24	31		7	14	21	28		5	12	19	26
sr	4	11	18	25		1	8	15	22	29		6	13	20	27
če	5	12	19	26		2	9	16	23	30		7	14	21	28
pe	6	13	20	27		3	10	17	24		1	8	15	22	29
so	7	14	21	28		4	11	18	25		2	9	16	23	30

Marino Pavletič

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

ROJSTVO AVIACIJE

Ameriškemu fiziku in državniku **Benjaminu Franklinu** (1706 – 1790) je neki dvomljivec dejal ob pogledu na zračni balon:

"To je docela nepotrebna igračka. Le čemu se lahko rabi takle balon?"

"Gospod," je odgovoril Franklin, "to je nekako tako, kot če bi me vprašali, čemu se rabi novorojenček."

Izbrala *Dušica Boben*

NALOGE S ŠOLSKEGA TEKMOVANJA
v občini Slovenske Konjice

Uredništvu Preseka so člani DMFA iz Slovenskih Konjic letos že drugič prijetno presenetili z nalogami, tokrat s tistimi, ki so jih osnovnošolci v tej občini reševali na tekmovanju za *Vegova priznanja*. Za prispevek se jim lepo zahvaljujemo, ob pomanjkanju tovrstnih nalog pa hkrati vabimo vse, ki poučujejo matematiko po osnovnih in srednjih šolah, seveda pa tudi bralce Preseka, da sledijo temu zgledu in postanejo aktivni soustvarjalci tega našega lista.

5. razred

1. Na nekem zborovanju so ugotovili:
– dva učenca govorita francosko, angleško in rusko,
– devet učencev samo francosko in angleško,
– trinajst učencev francosko in rusko,
– dvanajst učencev rusko in angleško,
– 29 učencev angleški jezik,
– 6 učencev samo francosko,
– 7 učencev samo rusko.
Koliko je vseh učencev zborovanja, če vemo, da ni nobenega učenca, ki ne govori vsaj enega od teh jezikov?

2. Če bi učenec kupil 11 enakih zvezkov, bi mu ostalo 70 din od zneska, ki ga je imel. Če pa bi kupil 15 zvezkov, bi mu zmanjkalo 50 din.

a) Kolikšna je cena zvezka?
b) Koliko denarja je imel učenec?

3. Dana je premica a. Nariši krožnico s polmerom 3 cm, katere središče je 7 cm oddaljeno od a. Kolikšna je najmanjša in kolikšna je največja razdalja med točko, ki leži na tej krožnici, in premico a?

4. Širina pravokotnika meri 12 cm in je krajša od njegove dolžine za 1 dm 2 cm. Določi dolžino stranice kvadrata, pri katerem je obseg enak obsegu tega pravokotnika.

5. Vstavi namesto znakov * take številke, da bo nakazano množenje pravilno

```
  * * 2 . * 9
  -----------
  * 8 *
  8 * * 8
  -----------
** * * 8
```

6. razred

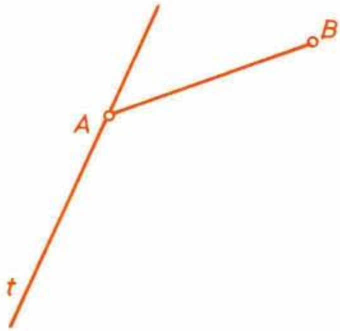
1. Poišči trimestno število, deljivo z 9, pri katerem je številska vrednost cifre desetic za 4 večja od številske vrednosti cifre enic, produkt številskih vrednosti vseh treh cifer pa je enak 0. Odgovor utemelji.

2. Izračunaj:

$$\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right) . 3 + 3\frac{1}{3} - 5 . \frac{2}{3} =$$

3. Dolžina vsake stranice trikotnika je naravno število. Ena stranica meri 14 cm, druga pa 1 cm. Določi tretjo stranico in izračunaj obseg tega trikotnika.

4. Dani sta tangenta t krožnice in položaj ter dolžina tetive AB, ki gre skozi dotikališče. Konstruiraj krožnico.



5. Nariši trikotnik:
   $c = 5$ cm
   $v_b = 3$ cm
   $v_c = 4$ cm

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\frac{\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right) .3}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}} + \frac{3\frac{1}{3} - 5.\frac{2}{3}}{7\frac{3}{11}+9\frac{5}{12}} =$$

2. Za koliko odstotkov se poveča ploščina kvadrata, če se mu stranica poveča za 30%. Kaj se pri tem zgodi z njegovim obsegom?

3. V krogu s polmerom 4 cm načrtaj tetivo, ki je vzporedna premeru in ji pripada središčni kot 60^0. Če povežemo krajišči tetive s krajišči premera, dobimo štirikotnik.

a) Kolik kot oklepata diagonali tega štirikotnika?

b) Izračunaj obseg štirikotnika.

4. Izračunaj vrednost izraza $-x^3 + x^2 + x - 1$ za

a) $x = -3/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = -1$ d) $x = 1$

5. Zadnja cifra šestmestnega števila je 4. Če jo prestavimo na 1. mesto, to je pred vse cifre, dobimo 4–krat večje število. Poišči prvotno število.

8. razred

1. Reši enačbo in naredi preizkus:

$$\frac{5x+3}{6} - \left(\frac{x-1}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 9 - \left(\frac{2x}{3} - \frac{x-3}{8}\right)$$

2. Načrtaj graf funkcije $x + y = 4$ in izračunaj ploščino trikotnika, ki ga tvori premica s koordinatnima osema. Izračunaj oddaljenost premice od koordinatnega izhodišča.

3. Ko je pešec prehodil 1 km in polovico ostanka poti, mu je ostalo za prehoditi še tretjino cele poti in 1 km. Kolikšno pot je prehodil?

4. Leseno kocko s prostornino 1 m^3 popleskamo z rdečo barvo. Nato jo razrežemo na manjše kocke s prostornino 1 dm^3. Koliko manjših kock ima popleskane 3 ploskve (2 ploskvi, 1 ploskev, nobene ploskve)?

5. Iz lesene kocke z volumnom 1 dm^3 izstružimo največji možni valj. Koliko odstotkov lesa odpade?

Jana Novak

PRESEKOV ŠKRAT

Ko sem reševala križanko Pitagorov izrek v Preseku št. 6 (1985/86) na strani 337, sem opazila, da je 15 navpično pravzaprav 16 navpično. Za manjkajoči opis za 15 navpično predlagam naslednjo nalogo: Druga diagonala romba z obsegom 60, če je ena diagonala 18.

Lucija Oblak

2. ŠOLSKO IN 12. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V šolskem letu 1985/86 smo drugič izvedli šolsko tekmovanje, na katerem niso sodelovali učenci naravoslovno-matematične usmeritve. Komaj so nekateri po polletnih počitnicah sedli v šolske klopi, že jih je čakala prva preizkušnja. V soboto, 1. marca, je okrog 1500 srednješolcev po Sloveniji reševalo naslednje naloge:

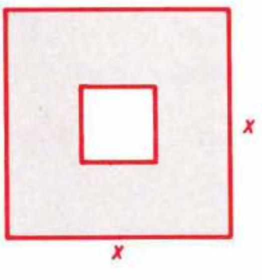
1. letnik

1. Določi a v točki $T(2 - 2a, a + 2a^2)$ tako, da bo T ležala na premici skozi $A(-4,-2)$ in $B(1,28)$.

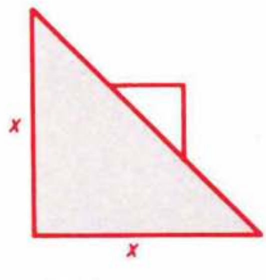
2. Na šoli so se odločili, da bodo nagradili 100 najboljših učencev, in sicer z nagradami, vrednimi 500, 5000 in 10000 din. V ta namen so porabili 100000 din. Koliko učencev je dobilo posamezne nagrade?

3. Med naravnim številom n in praštevilom p velja zveza $n^4 = 16p + 1$. Poišči vse pare n, p.

4. Telo ima tloris enak narisu (skica a) in stranski ris kot na skici b. Večji kvadrat na tlorisu (oziroma narisu) ima stranico x, manjši kvadrat pa je ploščinsko enak devetini večjega. Kolikšna je prostornina telesa?



skica a



skica b

2. letnik

1. Kaj je več: $\dfrac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}$ ali $\dfrac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$?

2. Na šoli so se odločili, da bodo nagradili 100 najboljših učencev, in sicer z

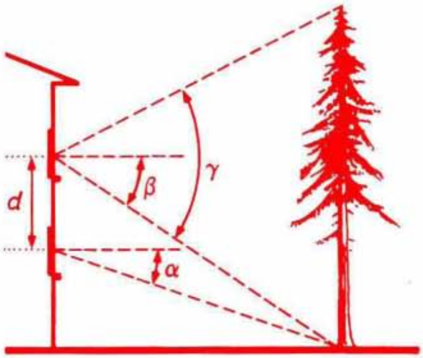
nagradami, vrednimi 500, 5000 in 10000 din. V ta namen so porabili 100000 din. Koliko učencev je dobilo posamezne nagrade?

3. Dane so tri točke v prostoru: $A(-1, -3, 2)$, $B(0, -5, 0)$ in $C(6, -1, -1)$.
a) Pokaži, da so to oglišča nekega pravokotnika, in poišči četrto oglišče.
b) Poišči množico točk, ki so enako oddaljene od vseh štirih oglišč.

4. V trapezu $ABCD$ označimo središča daljic AB, BD, CD in AC po vrsti z M, N, P in Q (AB in CD sta osnovnici trapeza).
a) Dokaži, da je $MNPQ$ paralelogram.
b) Če je $AB : CD = 3 : 1$, potem paralelogram pokrije četrtino trapeza.

3. letnik

1. Hiša in drevo stojita na ravnem zemljišču. Iz prvega nadstropja hiše vidimo nožišče drevesa pod depresijskim kotom α, iz drugega nadstropja, ki je za d metrov nad prvim, pa pod kotom β. Nadalje vidimo iz drugega nadstropja celo drevo pod zornim kotom γ. Izrazi s temi podatki višino drevesa in njegovo oddaljenost od hiše.



2. Pri katerih a imata enačbi $x^2 + x + a = 0$ in $x^2 + ax + 1 = 0$ natanko eno skupno rešitev?

3. Za katere m ima enačba $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = m$ realne rešitve?

4. Določi kote pravokotnega trikotnika, če je med katetama zveza

$$\log \frac{a-b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

4. letnik

1. Ali ima polinom $p(x) = (x^{1986} - 1986)^3$ čisto imaginarne ničle? Če jih ima, napiši, katere so in kolikšna je njihova večkratnost.

2. Tangenta v poljubni točki T krivulje $y = x^6$ seka abscisno os v točki M, vzporednica z ordinatno osjo skozi točko T pa jo seka v točki N. Pokaži, da je $OM = 5MN$, kjer je O koordinatno izhodišče.

3. Pokaži, da je $(1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots - 2^{1985} + 2^{1986})(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$
$\ldots + 2^{1985} + 2^{1986}) = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1986}$

4. V ravnini je 99 različnih premic (v poljubni legi), ki razdelijo ravnino na n delov. Poišči vsa števila n, ki so manjša od 199.

Naloge gotovo niso bile prelahke, prej nasprotno, saj nimajo vse usmeritve enakega števila ur matematike. Prav taka raznolikost šol je za Komisijo za popularizacijo matematike v srednji šoli velik problem. Težko je namreč izbrati naloge, ki bi bile za vse sprejemljive. Zastavlja se celo vprašanje, ali ne bi bilo smotrno uvesti šolskega tekmovanja v dveh težavnostnih stopnjah (ki bi sicer potekali sočasno). Zavedamo se, da doseže popularizacija svoj namen le, če učenca pritegne z nalogami in prispevki, ki so primerni za njegovo znanje. Pred Komisijo je torej še precej nalog, ki jim bo kos le, če ji bodo pomagali srednješolski učitelji.

Oglejmo si še naloge, ki so jih srednješolci (približno 1200) reševali v soboto, 15. marca, na izbirnem tekmovanju.

1. letnik

1. Pokaži, da enačba $2x^2 - 215y^2 = 1$ nima celih rešitev.

2. Pri katerih k ima enačba $|x + 1| - |x - 1| = kx + 1$ eno samo rešitev?

3. V trapezu z osnovnicama a in c ($a > c$) potegnemo takšni dve vzporedni daljici s krajišči na osnovnicah, da se krajišče ene od vzporednih daljic ujema z ogliščem krajše osnovnice. S tem razpade trapez na tri ploščinsko enake dele.
a) Kakšno naj bo razmerje med osnovnicama trapeza, da bosta taki daljici obstajali?
b) Imejmo trapez, ki zadošča pogojem iz točke a). Del trapeza med daljicama izrežemo, ostala dva dela pa vzporedno premaknemo in zlepimo v novi trapez (tako, da kraka ostaneta ista). Kakšno naj bo razmerje med osnovnicama prvotnega trapeza, da bosta tudi v manjšem trapezu obstajali taki dve daljici?

4. Ravnina je pobarvana z belo in črno barvo. Dokaži, da obstaja v ravnini enakokrak pravokoten trikotnik, ki ima vsa oglišča iste barve.

2. letnik

1. V trikotniku ABC potegnemo iz nekega oglišča daljici do nasprotne stranice tako, da trikotnik razpade na tri ploščinsko enake trikotnike, od katerih sta dva podobna prvotnemu.
a) Kolikšni so koti trikotnika ABC?
b) Ali so lahko stranice trikotnika ABC v celoštevilskem razmerju?

2. Poišči vse trojice (x, y, z) realnih števil, za katere velja:
$x + yz = 2, y + xz = 2, z + xy = 2.$

3. V prostoru sta dani daljici AB in CD, ki ležita na mimobežnicah. Poišči geometrijsko mesto središč daljic, katerih eno oglišče je na AB, drugo na CD.

4. Dana je družina parabol $y = -x^2 + mx + m + 1, m \in \mathbf{R}$.

a) Poišči geometrijsko mesto temen parabol iz te družine.

b) Določi točko, skozi katero potekajo vse parabole iz družine.

3. letnik

1. Enačbo $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ rešita korena x_1 in x_2. Dokaži, da sta $x_1{}^3$ in $x_2{}^3$ korena enačbe $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$.

2. Naj bo z kompleksno število, n pa poljubno naravno število. Dokaži: če je $(1 + z)^n + z^n = 0$, potem je $\mathrm{Re}(z) = -1/2$.

3. Reši enačbo

$$8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

4. V enakokrak trikotnik včrtujemo kvadrate tako, da imajo po eno oglišče v vrhu in po eno na osnovnici trikotnika. Pokaži, da je najmanjši kvadrat ploščinsko enak vsaj polovici največjega tako včrtanega kvadrata.

4. letnik

1. Pokaži, da je $2^{5^5} + 1$ deljivo z 11.

2. Pokaži, da lahko polinom $p(x) = n\, x^{n+1} - (1 + nq)\, x^n + (q - 1)\, (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x) + q$ razcepimo tako, da je eden izmed faktorjev v razcepu enak $x^2 - (q + 1)\, x + q$.

3. Reši enačbo $x^x = 10^{x - x^2}, x > 0$

4. V polkrogu s premerom AB potegnemo tetivo AT pod kotom α. Razpolovišče loka BT naj bo točka V.

a) Kolikšen naj bo α, da bo obseg štirikotnika $ABVT$ največji?

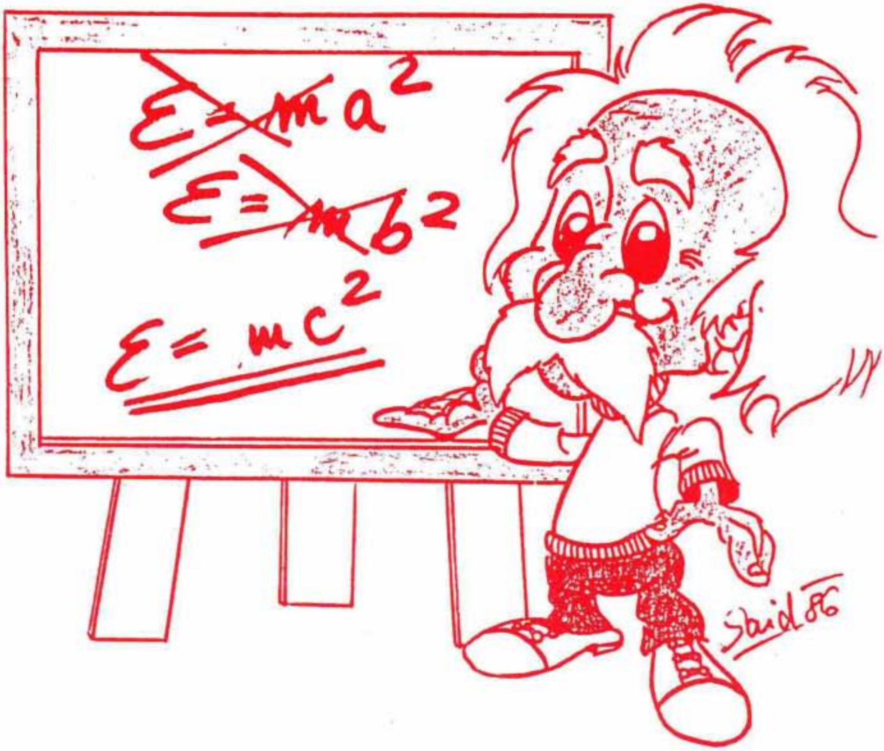
b) Ali je pri tem α tudi ploščina največja? Utemelji.

c) Pri katerem α se diagonali štirikotnika $ABVT$ sekata pravokotno?

Šolske komisije so po pregledu izdelkov predlagale 175 dijakov, Komisija za popularizacijo pa je za nastop na republiškem tekmovanju v Mariboru izbrala 138 učencev iz 27 srednjih šol (29 iz prvega, 39 iz drugega, 28 iz tretjega in 42 iz četrtega letnika). Med izbranimi je bilo 23 tekmovalcev iz nenaravoslovnih usmeritev.

Na koncu se zahvaljujemo VTO Matematika in mehanika Fakultete za naravoslovje in tehnologijo ter Fakulteti za elektrotehniko za pomoč, vsem učiteljem za sodelovanje, učencem pa želimo še več sreče na prihodnjih tekmovanjih.

Darjo Felda



Karikatura iz Biltena 6. republiškega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce, ki je bilo 10. maja 1986 v Mariboru.

27. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Zvezno tekmovanje je tokrat organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije od 19. do 21. aprila, tekmovalce pa je gostila Postojna. Pod vodstvom prizadevne prof. Martine KOMANOVE je aktiv Srednje tehniške in naravoslovne šole odlično opravil vlogo gostiteljev. Zveznega tekmovanja se je udeležilo 115 tekmovalcev iz vseh republik in obeh pokrajin. V slovensko ekipo za zvezno tekmovanje so bili na republiškem tekmovanju v Mariboru izbrani: Tatjana OZBIČ, Polona PETEK, Zoran SLANIČ in Andrej VILFAN za prvi razred, Peter FAJFAR, Borut JAMNIK, Matej KOLAR, Tomaž SLIVNIK, Tomaž VOLK in Edi VOVK za drugi razred, Peter ANASTASOV, Jure BAJC in Mateja ŠAJNA za tretji razred in Jože FABČIČ, Damjana KOKOL, Matevž KRANJEC, Peter PEHANI, Pavle POPOVIĆ in Matjaž ŽELJKO za četrti razred. Vodil jih je asistent Darjo FELDA, v zvezni komisiji pa je Slovenijo zastopal Aleksandar JURIŠIĆ.

Pred tekmovanjem so imeli tekmovalci dvodnevne priprave, ki jih je organiziral študent fizike Uroš SELJAK, vodil pa bivši tekmovalci, študentje matematike. V tem kratkem času so se tekmovalci podrobneje spoznali z nekaterimi standardnimi prijemi reševanja nalog tekmovalnega tipa in reševali naloge s prejšnjih tekmovanj.

V petek so republiške in pokrajinski ekipi prispele v Postojno in se namestile v dijaškem domu. Zvečer so se tekmovalci sprostili na prijetnem sprehodu po starem mestu in se psihično pripravili na težak naslednji dan. Zvezno tekmovanje je v imenu DMFA odprl prof. Janez STRNAD v soboto. Učenci so naloge reševali štiri ure in pol. Poskusite jih rešiti še vi!

1. razred

1. Pokaži, da obstaja neskončno trojic zaporednih števil, kjer je vsako izmed njih vsota dveh kvadratov. (Primer: $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 3^2 + 8^2$, $74 = 7^2 + 5^2$)
2. V konveksnem četverokotniku $ABCD$ naj velja

$$AB + BD \leqslant AC + CD$$

Dokaži, da je tedaj $AB \leqslant AC$.

3. V trikotniku ABC sta notranja kota pri B in C enaka 40^0. Stranico AB podaljšamo preko točke B do točke D tako, da je $AD = BC$. Določite kote trikotnika ADC.
4. Kvadrat velikosti 5 x 5 razdelimo na 25 polj (polje je kvadrat s stranico 1).

V vsako polje postavimo žeton. Izberimo si neko polje. Ali lahko dosežemo, da so po nekaj potezah vsi žetoni v izbranem polju? (Poteza je premestitev poljubnih dveh žetonov, vsakega od njih v sosednje polje. Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.)

2. razred

1. Naj bosta x in y naravni števili, ki zadoščata enačbi

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

Dokaži, da so števila $x - y$, $2x + 2y + 1$ in $3x + 3y + 1$ popolni kvadrati.

2. Dokaži, da za naravna števila a, b in c velja neenačba

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}$$

3. Na premeru AA_1 krožnice je dana točka C. Naj bo B takšna točka krožnice, da je $AB = CA_1$. Dokaži, da se v trikotniku ABC simetrala notranjega kota pri A, težiščnica skozi B in višina iz C sekajo v eni točki.

4. Danih je pet različnih pozitivnih števil. Dokaži, da med njimi obstajata dve, za kateri velja, da niti njuna vsota niti absolutna vrednost njune razlike nista enaki nobenemu izmed preostalih treh števil.

3. in 4. razred

1. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, ki ustrezajo naslednjima pogojema:

a) $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$ za vse x in y iz $\mathbf{R}$,

b) f je strogo naraščajoča (tj. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ za vse x in y iz $\mathbf{R}$).

2. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taka realna števila, da je

$$(n - 1)(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

Dokaži, da so števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vsa nenegativna ali pa vsa nepozitivna.

3. Iz razpolovišča vsake stranice tetivnega četverokotnika konstruiramo normalo na nasprotno stranico. Dokaži, da se vse štiri normale sekajo v isti točki.

4. Poišči največje celo število k z naslednjo lastnostjo: če na poljuben način vpišemo v polja tabele 8 x 8 števila 1, 2, ..., 64, lahko najdemo takšni dve sosednji polji, da razlika njunih števil ni manjša od k. (Dve polji sta sosednji, če imata vsaj eno skupno oglišče.)

Rešitve si lahko ogledate v Matematični knjižnici na Jadranski 19 v Ljubljani.

Po tekmovanju so tekmovalci odšli v *Predjamski grad,* zvezna tekmovalna komisija pa je v tem času pregledala naloge. Zvečer je objavila preliminarne rezultate. Tako so imeli tekmovalci možnost opozoriti komisijo na morebitne spodrsljaje. Vendar pa je bila tokrat večina pritožb nautemeljena, nekateri tekmovalci so včasih preveč prepričani o pravilnosti svojih rešitev.

V nedeljo dopoldne so si tekmovalci ogledali znamenito Postojnsko jamo. Po kosilu je bila uradna razglasitev rezultatov in podelitev nagrad.

Doseženi so bili naslednji rezultati:

1. razred

1. nagrada:	Rade TODOROVIĆ (Srbija), Dalibor TUŽINSKI (Hrvatska)
2. nagrada:	Zoran PEJČINOV (Makedonija)
3. nagrada:	Vladimir NIKOLAJEVIĆ (Srbija), Jasmina MILIĆEVIĆ (Srbija), Zvonimir BANDIĆ (Srbija)
pohvala:	Dragan MILOŠEVIĆ (Srbija), Igor SRB (Srbija), Tatjana OZBIČ (STNŠ, Postojna, Slovenija), Predrag GRKOVIĆ (Srbija), Andrej VILFAN (SNŠ, Ljubljana, Slovenija)

2. razred

1. nagrada:	Zoran ČRNJA (Hrvatska)
2. nagrada:	Branko GLIŠIĆ (Srbija), Vlado KEŠELJ (BiH), Tomaž SLIVNIK (SNŠ, Ljubljana, Slovenija)
pohvala:	Aleksandra SMILJANIĆ (Srbija), Nenad STOJANOVIĆ (Srbija), Dragan STOJKOVIĆ (Srbija), Riste ŠKREKOVSKI (Makedonija)

3. razred

2. nagrada:	Nikola RUŠKUC (Vojvodina)
3. nagrada:	Olivera MILENKOVIĆ (Srbija)
pohvala:	Edin OMERDIĆ (BiH), Joško POLJAK (Hrvatska), Uroš DREŠEVIĆ (Srbija), Nebojša VASILJEVIĆ (Srbija)

4. razred

2. nagrada:	Jože FABČIČ (STNŠ, Postojna, Slovenija), Predrag ANTIĆ (Srbija), Domagoj KOVAČEVIĆ (Hrvatska)
pohvala:	Nenad ĐAPIĆ (Vojvodina), Zdravko ĐUROVIĆ (Hrvatska), Sanda REIĆ (Hrvatska), Vladimir SKULIĆ (Srbija)

Na podlagi rezultatov zveznega tekmovanja je komisija izbrala šestčlansko ekipo, ki nas je zastopala na mednarodni matematični olimpiadi na Poljskem. V olimpijsko ekipo so se uvrstili: Jože FABČIČ, Domagoj KOVAČEVIĆ, Predrag ANTIĆ (4. razred), Olivera MILENKOVIĆ, Nikola RUŠKUC (3. razred) in Zoran ČRNJO (2. razred).

Aleksandar Jurišić

NALOGE

NALOGE S ŠTEVILOM 1986

1. Ali je mogoče v 360-mestnem številu

86198619...8619

prečrtati nekaj številk tako, da bo vsota preostalih številk točno enaka 1986?

2. Napiši po vrsti številke od 9 do 1, t.j.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

ne da bi spremenil njihov vrstni red, postavi mednje znake osnovnih računskih operacij, tako da bo rezultat 1986.

3. Kateri številki sta na zadnjih dveh mestih produkta 1986 sedmic, t.j. števila 7^{1986}?

Trinajst premic

V ravnini je trinajst premic, od katerih pa noben par ni vzporeden. Dokaži, da obstajata dve, ki oklepata kot, manjši od 14^0.

Dragoljub M. Milošević
(prev. Peter Petek)

Lev in antilopa

Lačen lev je iskal hrano. Zagledal je antilopo in v istem trenutku je tudi ona opazila leva. Začela sta teči. Ko je lev skočil 9 krat, je antilopa skočila 4 krat, vendar so bili njeni skoki daljši: 2 skoka sta bila dolga kakor 5 levjih.
Zanima nas, ali je lev uspel uloviti antilopo, če sta obe živali ves čas tekli z isto hitrostjo.

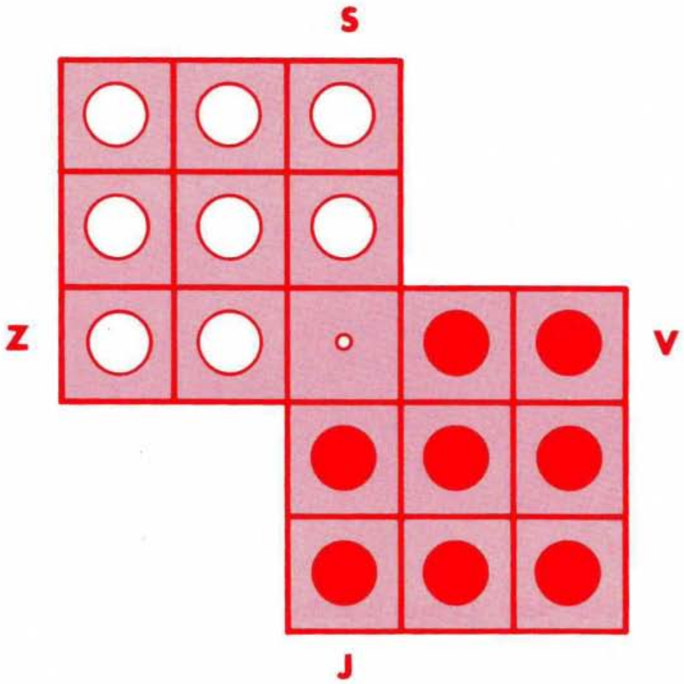
Prevedla in izbrala *Dušica Boben*

ANGLEŠKIH ŠESTNAJST

Igra "Angleških šestnajst" spada v klasiko zabavne matematike in jo najdemo v večini tovrstnih knjig.

Sam Loyd pravi, da si jo je izmislil nek angleški mornar na Staten Islandu. Desko in čepke za igro je izdeloval kar z žepnim nožičem in jih prodajal obiskovalcem. Tako je igra prišla v London in kmalu postala zelo priljubljena.

"Angleških šestnajst" je samotarska igra namenjena enemu igralcu, ki jo igra na deski, kakršna je prikazana na sliki.



Cilj igre je zamenjati mesta črnih in belih čepkov v čim manj potezah. Čepek lahko premaknemo na sosednji prazni prostor ali pa čez soseda (katerekoli barve) na prazni prostor. Dovoljeni so samo premiki v smeri neba (Sever, Vzhod, Jug, Zahod).

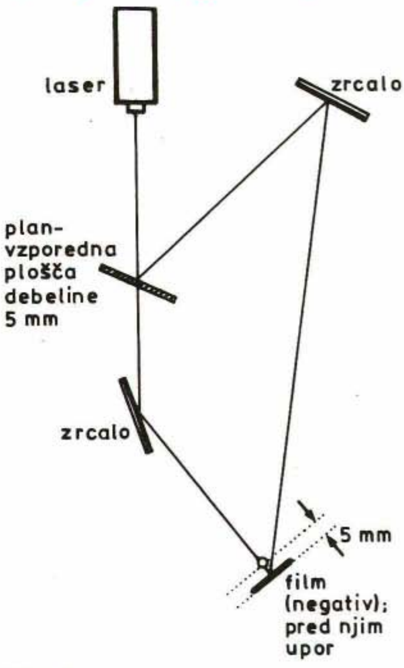
V starejših knjigah je bila običajno dana rešitev v 52 potezah. Loyd je našel rešitev v 47 potezah. Še boljšo, 46 potezno rešitev je našel Dudeney. Kot zanimivost omenimo, da Dudeneyeva rešitev zadošča dodatnim zahtevam:

- bele čepke lahko premikamo le proti Jugu in Vzhodu;
- črne čepke lahko premikamo le proti Severu in Zahodu;
- preskakujemo lahko le čepke druge barve.

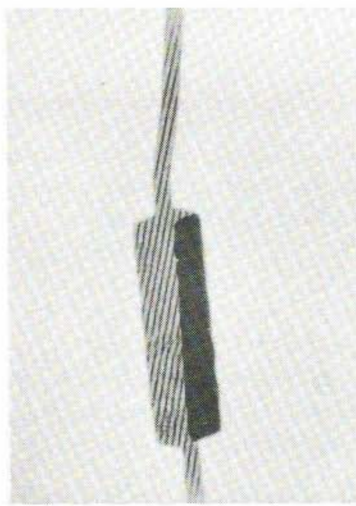
Poskusite najti čimboljšo rešitev! Ali je Dudeneyeva rešitev najboljša možna?

Vladimir Batagelj

NA PRAGU TRAGEDIJE (Šegava zgodba)



Slika 1



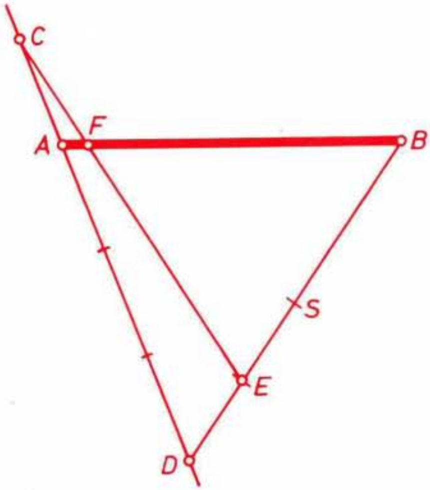
Slika 2

PREMISLI IN REŠI

Tokrat vam zastavljamo geometrijsko nalogo našega stalnega sodelavca Dragoljuba Miloševića.

KOLIKOKRAT KRAJŠA

Na sliki vidimo daljico AB. Skozi točko A smo narisali premico in na njej točki C in D tako, da je daljica AD trikrat večja od daljice AC. Točki B in D zvežemo z daljico, ki jo razpolovimo, da dobimo središče S; daljico DS še enkrat razpolovimo in njeno središče E zvežemo s točko C. Daljica EC seka daljico AB v točki F. Vprašanje: kolikokrat je daljica AF krajša od daljice AB?



Rešitve nam pošljite do 5.1.87 na znani naslov: PRESEK, (za PIR), 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64.

Bilo je lepo sončno jutro, ko je skozi vrata laboratorija WHI (World Holography Institute) vstopil mlad raziskovalec v delovni halji. Meni nič,tebi nič,je pričel sestavljati aparature.

Delal je zelo zagnano; uničil je že vsaj dvajset filmov, na katere je skušal posneti holograme. Ura je bila dve in mladi Blake, tako mu je bilo namreč ime, se je odločil, da ne pojde na kosilo. Delal je še naprej, saj ga je stvar karseda pritegnila.

Le zagrizeno in zagnano delo pelje razvoj znanosti naprej, le samoodpovedovanje in samožrtvovanje množice posameznikov lahko utre nove poti, je premišljeval, medtem ko je sestavljal napravo, ki je bila videti približno takale: (Glej sliko 1 na str. 91)

Preden naredim posnetek, si je mislil, *bom dal semle še majhen objekt, recimo tale upornik, ki ga imam pri roki,* da preverim, ali je film sploh dober. Upornik je dal tja, kamor kaže puščica na zgornji sliki. Po osvetlitvi je hologram razvil in si ga ogledal. Pričakoval je senco v obliki upornika, zagledal pa je

KATERO PRAŠTEVILO – REŠITEV IZ P XIII/4

Tokrat smo dobili 14 pravilnih, a žal tudi dve nepravilni rešitvi. Praštevilo so našli Drago BOKAL iz Polhovega Gradca, Silvan BUCIK iz Tolmina, Jani ČEDE iz Petrovč, Katja DAMIJ iz Ljubljane, Tomaž DIMNIK iz Ljubljane, Roman DRNOVŠEK, ki je pri vojakih v Smederevski Palanki, Jasna GREGORIČ iz Ljubljane, Matej KARAHODŽIĆ iz Ljubljane, Mira KERMAVNER iz Logatca, Silvana KRANJC iz Kobarida, Aleš ŠEF iz Ljubljane, Milan ŠERNEK iz Velike Polane, Mitja VIDRIH iz Ljubljane, Mojca VOLARIČ iz Ljubljane.

Izžrebali smo Mojco, Janija in Milana in jim poslali knjigo *Diofantske enačbe* J. Grassellija iz zbirke Sigma.

Najpopolnejšo rešitev nam je poslal Roman Drnovšek. Zato jo objavljamo:

Poskusimo s $p = 2$ in $p = 3$. Dobimo eno rešitev in sicer $p = 3 : 2p^2 + 1 = 19$. Dokažimo, da je to tudi edina rešitev.

Eno od treh zaporednih števil $(p - 1), p, (p + 1)$ je sigurno deljivo s 3. Ker je $p > 3$, to ne velja za p, torej lahko zaključimo:

$$(p-1)(p+1) = 3k \qquad (k \in \mathbf{N})$$
$$p^2 = 3k + 1$$
$$2p^2 + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$$

je deljivo s 3 in ne more biti praštevilo.

Peter Petek

nekaj, kar ga je močno osupnilo ...

Tedaj so se vrata spet odprla in vstopil je mladi asistent Koby, ukaželjni, poševnooki Japonček, sicer pa dober fant. Dobro je poznal Blakea in ko je uzrl nenavadni ogenj v njegovih očeh, ni premišljeval niti trenutek. Vklenil ga je v svoj jekleni prijem ter ga kljub temu, da se je srdito upiral, nemudoma zvlekel ven ...

Ko so profesor Primus, profesor Vedež in asistent Koby pregledovali postavitev poskusa in nastali hologram, so opazili nekoliko zanimivosti. Sicer pa je tu slika holograma, ki bi kmalu postal usoden: (Glej sliko 2 na str. 91)

Bralec, na tebi je, da poskušaš ugotoviti, odkod so se vzele svetlo–temne proge v silhueti upornika. Primus in Koby tega vprašanja nista rešila, čeprav si je asistent do krvi pregrizel nohte. Šele profesor Vedež jima je stvar pojasnil. Pošljite razlago poskusa na uredništvo Preseka, 61000 Ljubljana, Jadranska 19. Najboljši odgovor bomo nagradili.

Andrej Kobe, Primož Ziherl, Blaž Zupan

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Vodoravno:

1. Površina kvadra, ki ima za robove tri zaporedna praštevila.
3. Obseg pravokotnika s stranicama 1234 in 567.
5. Ploščina pravokotnika iz 3 vodoravno.
7. Površina kocke z robom $(7 + 2^4)(2^6 - 5)$
9. Volumen kocke iz 7 vodoravno.
11. Volumen kvadra z robovi 222, 333, 444.
12. Površina kvadra iz 11 vodoravno.
13. Volumen kvadra, ki ima za osnovno ploskev kvadrat, različna robova pa sta prvi dvomestni praštevili.
14. Volumen kvadra iz 1 vodoravno.

Navpično:

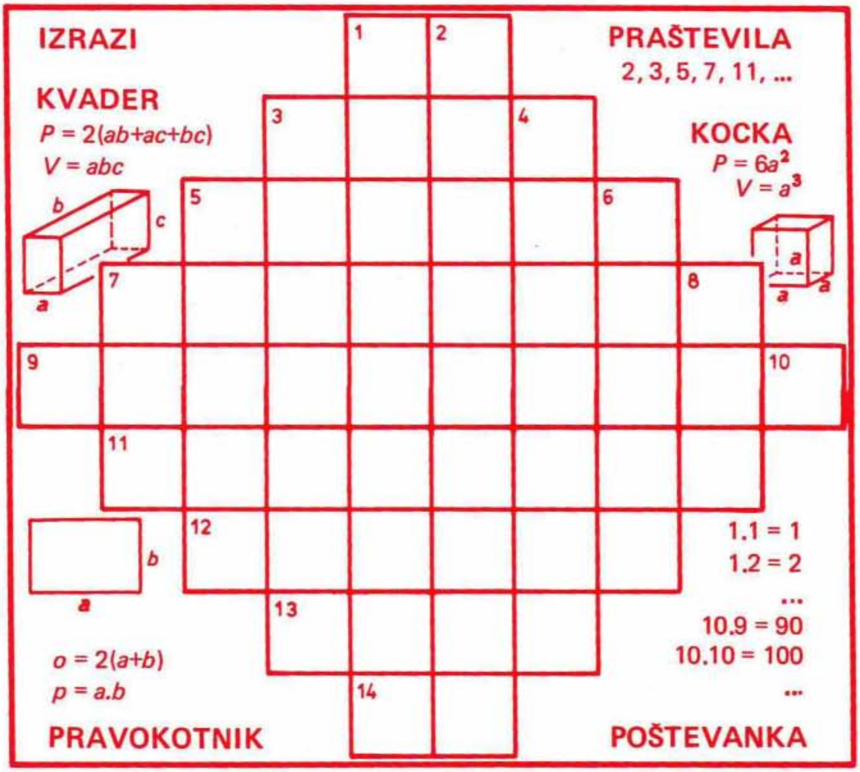
1. $(7^2 - 2)((6^2 + 2).3^2.5^2.7^2.(2^4 + 1)(5^2 - 23) - 1)$
2. $2.3^2.5.(3^2 + 2).(1 + 2^2.3.(5^2 - 2).(1 + 2^2.3^3.7))$
3. $2^2.3^3.(1 + 2^4).(1 + 2^4.7.(3^3 - 2^3)) - 3$
4. $2.29.37.(1 + 2^3.7.23) - 1$
5. $2.3.(3^2.31.37 - 2)$
6. $(3 + 2^2)(2 + 3^2).(5^2 - 2.3)(2^6 - 3) - 1$
7. $(2 + 3^2)(2^2 + 3^2)$
8. $2.(5 + 2^3)(3 + 2^4)$
9. Volumen kvadra, ki ima za osnovnico kvadrat s stranico 1, višina pa je dvakrat večja.
10. Najmanjše liho praštevilo.

Franci Oblak

RELATIVNA RELATIVNOST

Mnogo slušateljev univerze v Heidelbergu je prišlo poslušat Einsteinovo predavanje. Einstein je takole začel:

"Včeraj, ko sem prispel, sem se slabo počutil. *Relativno,* seveda. Zdravnik, ki sem ga poklical v hotel, mi je predpisal *absoluten* počitek, 'sicer', je pripomnil, 'jutri *absolutno* ne boste mogli stopiti pred občinstvo'. Tako vam zdaj lahko navedem praktičen primer *relativnosti,* za katero trdim, da je v vseh stvareh. Ubogal sem zdravnika samo *relativno,* privoščil sem si *relativni* počitek



in zdaj sem vseeno med vami ..."

Iz ozadja dvorane je neki glas končal stavek: "... med vami *relativno* zdrav."

Einstein je nemoteno nadaljeval:

"Popolnoma pravilno, saj v vesolju, kot vam bom zdaj dokazal, ni nič *absolutnega* ..."

Isti glas: "... niti Einsteinova *relativnost.*"

V dvorani je nastal smeh in študentje so zagnali tak hrup, da je bilo treba predavanje preložiti na naslednji dan.

Zbrala Dušica Boben

UPORABA JENSENOVE NEENAKOSTI

V tem članku bomo pokazali nekaj praktičnih primerov uporabe Jensenove neenakosti. Vzemimo funkciji a^x in x^2. Pri eksponentni funkciji naj bo $a > 0$, saj drugače ne znamo izračunati vrednosti funkcije a^x za poljuben $x \in]-\infty,\infty[$.

Najprej bomo pokazali konveksnost funkcije $f(x) = x^2$ na celi realni osi. Začnimo pri neenakosti

$$(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$$

ki velja za poljubni realni števili x_1 in x_2. Enakost očitno velja, ko je $x_1 = x_2$. Kvadrirajmo levo stran in dobimo oceno:

$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1 x_2$$

Sedaj pa računajmo lepo po vrsti in pri tem uporabimo zgornjo oceno:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{2x_1 x_2}{4} \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

S tem je konveksnost funkcije $f(x) = x^2$ dokazana. Zato velja Jensenova neenakost

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$$

oziroma lepše napisano

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (1)$$

Tu so seveda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realna števila. Enakost velja le v primeru, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Z neenakostjo (1) se v matematiki zelo pogosto srečamo in ima tudi svoje ime. Pravimo ji *neenakost med kvadratno in aritmetično sredino n števil.* Leva stran neenakosti (1) je namreč *kvadratna sredina* števil $x_1, \ldots, x_n$, desna pa je njihova *aritmetična sredina.*

Naš rezultat bi lahko tudi malce posplošili. Za poljubna $x_1, x_2 \in [0,\infty[$ in vsak $m \geqslant 1$ velja namreč

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^m \leqslant \frac{x_1{}^m+x_2{}^m}{2} \tag{2}$$

Z besedami: vsaka potenčna funkcija s potenco $m \geqslant 1$ je na intervalu $[0,\infty[$ konveksna. Neenakosti (2) ni več tako lahko dokazati kot tisto za $m = 2$. Naj za dokaz tu zadostuje pogled na grafe funkcij $f(x) = x^m$ za $m > 1$. Že naslednji pogled na grafe teh funkcij pa nam pove, zakaj smo se omejili samo na pozitivne argumente. Nekatere izmed teh funkcij za negativne argumente niso več konveksne. Recimo funkcija $f(x) = x^3$. Jensenova neenakost za funkcijo $f(x) = x^m$ je takale:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^m \leqslant \frac{x_1{}^m+x_2{}^m+\ldots+x_n{}^m}{n}$$

ali lepše

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m \leqslant n^{m-1}(x_1{}^m+x_2{}^m+\ldots+x_n{}^m) \tag{3}$$

Velja seveda za $m \geqslant 1$ in $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,\infty[$. Tudi tu dobimo enakost, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pokažimo sedaj še konveksnost funkcije $f(x) = a^x$. V ta namen bomo začeli z neenakostjo

$$0 \leqslant (a^{x_1/2} - a^{x_2/2})^2$$

ki je izpolnjena za vse realne x_1 in x_2. Enakost velja le, ko je $x_1 = x_2$ (če je le $a \neq 1$). Kvadrirajmo sedaj desno stran in vse skupaj preuredimo:

$$2\, a^{x_1/2} a^{x_2/2} \leqslant a^{x_1} + a^{x_2}$$

oziroma

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leqslant \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$$

Ta neenakost nam pove, da je funkcija $f(x) = a^x$ konveksna za vse realne x. Zato lahko zapišemo Jensenovo neenakost

$$a^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \leqslant \frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\ldots+a^{x_n}}{n} \tag{4}$$

ki velja za poljubna realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Če je $a \neq 1$, enakost velja le, ko je $x_1 = x_2 = ... = x_n$, česar ni težko pokazati. Poslednjo neenakost zapišimo še malo drugače:

$$\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + \ldots + a^{x_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{a^{x_1} a^{x_2} \ldots a^{x_n}}$$

Vpeljimo naslednje substitucije: $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$, ..., $y_n = a^{x_n}$. Potem dobimo:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} \qquad (5)$$

kjer so $y_1, y_2, \ldots, y_n$ poljubna pozitivna realna števila. (Za poljuben y_i lahko izračunamo $x_i = \log_a y_i$.)

Iz (4) sledi, da velja enakost takrat, ko je $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$. Izraz na levi strani neenakosti (5) smo že srečali – to je aritmetična sredina n števil. Tudi izraz na desni strani ima svoje ime – pravimo mu *geometrijska sredina n števil.* Od tod tudi ime neenakosti (5): *neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino n števil.*

Pa pišimo $z_1 = 1/y_1$, $z_2 = 1/y_2, \ldots, z_n = 1/y_n$. To lahko vedno naredimo, saj so števila $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vsa pozitivna. To vstavimo v (5) in dobimo:

$$\frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{z_1} \frac{1}{z_2} \ldots \frac{1}{z_n}}$$

oziroma

$$\sqrt[n]{z_1 z_2 \ldots z_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}} \qquad (6)$$

Dobili smo *neenakost med geometrijsko in harmonično sredino n* števil, kajti izraz na desni strani neenakosti (6) je njihova *harmonična sredina.*

Na koncu članka smo. Preden pa zares končamo, se ozrimo po poti, ki smo jo pravkar prehodili. S pomočjo Jensenove neenakosti smo pokazali, da za poljubna pozitivna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ velja:

$$\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}{n} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Povsod velja enakost le, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

V soboto, 7. junija, je bilo 5. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE V ZNANJU FIZIKE za učence prvih letnikov srednjega usmerjenega izobraževanja. Okrog 100 učencev je ob 10. uri reševalo izbirni test, ob 12.30 pa je šest najboljših dvočlanskih ekip tekmovalo v javnem kvizu znanja za nagrade, naročnine na revije ŽIT, MLADINA, KIH, PRESEK, za knjižne nagrade založbe DE, knjižice SIGMA in iz Presekove knjižnice, nagrade ISKRE idr.

Tekmovanje je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije ob sodelovanju IJS, VTO fizika in ZŠ SRS. Popestrili so ga s številnimi poskusi, s predavanjem dr. Janeza Strnada o radioaktivnosti in z vprašanji ter nagradami za gledalce med javnim delom kviza. Spomnili so se tudi Edvarda Rusjana, našega prvega letalca in znanih jugoslovanskih fizikov.

Prvo nagrado je dosegla ekipa, v kateri sta bila Igor ZRINSKI in Mihec MESARIČ iz SCTPU, Murska Sobota (mentor Edo Dečko).

Drugo nagrado je prejela ekipa dijakov Denis ĐONLAGIĆ in Janez BREST iz SNŠ Miloš Zidanšek, Maribor (mentor Miha Kacafura).

V ekipi, ki je osvojila tretjo nagrado, pa sta bila Jaka CIMPRIČ in Andraž OBLAK iz SNŠ, Ljubljana (mentor Andrej Lobnik).

Od najboljših mladih tekmovalcev upravičeno pričakujemo še več uspehov, saj znanje o naravi že sedaj pridno nabirajo. Društvo je za najboljših 8 ekip priredilo letno šolo iz fizike na Bledu od 23. do 28. junija, kjer so mladi fiziki svoje znanje poglabljali na bolj nešolski način, čeprav tudi ob predavanjih in eksperimentih. Nekaj vprašanj in predlaganih odgovorov, ki so jih reševali udeleženci tekmovanja, objavljamo na str. 99, 102, 105 in 111.

KATERI ODGOVOR JE PRAVILEN?

1. Nihalo na vijačno vzmet in matematično nihalo imata na Zemlji enako lastno frekvenco. Astronavti ju prenesejo na Luno. Kako bosta nihala tam?

a) lastni frekvenci nihal bosta ostali nespremenjeni
b) matematično nihalo bo nihalo z večjo lastno frekvenco
c) nihalo na vijačno vzmet bo nihalo z manjšo lastno frekvenco
d) nihalo na vijačno vzmet bo nihalo z nespremenjeno lastno frekvenco
e) lastna frekvenca matematičnega nihala se ne bo spremenila
f) nihajni čas matematičnega nihala se bo podaljšal

Jože Kotnik

PITAGOROVO DREVO

Že več tisočletij poznajo ljudje čudovita matematična dragulja: prvi je Pitagorov izrek, drugi je zlati rez. Med obema bomo našli presenetljivo zvezo.

1) Spomnimo se na vsebino Pitagorovega izreka:

Če je trikotnik pravokoten, je kvadrat najdaljše stranice enak vsoti kvadratov drugih dveh stranic.

Za začetek poglejmo ta naravna števila: 3, 4, 5. Opazimo, da je razlika med sosednjima številoma enaka 1 (aritmetično zaporedje). Drugo opažanje: $5^2 = 4^2 + 3^2$. Edina tri zaporedna naravna števila z lastnostjo, da je kvadrat največjega izmed teh števil enak vsoti kvadratov drugih dveh števil, so ravno števila 5, 4, 3.

Dogovor: Če naravna števila a, b, c ustrezajo zvezi $a^2 + b^2 = c^2$, jih imenujemo **Pitagorova trojica.**

Če so si števila poleg tega še tuja, je (a, b, c) **primitivna** Pitagorova trojica.

Že dolgo je znano, da dobimo vse primitivne Pitagorove trojice takole: izberemo dve tuji si števili $m, n; m > n$, ki sta različnih parnosti (eno je sodo, drugo liho) in oblikujemo trojico (a, b, c):

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2 \tag{1}$$

Števili m, n imenujemo generatorja primitivne Pitagorove trojice (a, b, c). Da je (a, b, c) res Pitagorova trojica, pa se bralec lahko sam prepriča.

2) Zdaj se vprašajmo, ali obstaja kakšna zveza med poljubnima primitivnima trojicama.

Odgovor je pritrdilen. Da bomo sledili nadaljevanju, si oglejmo tri skupine števil, ki jih na kratko zaznamujmo G, N, D in jih zapišimo v obliki:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Imenujemo jih **matrike** velikosti 3 x 3 (matrike s tremi vrsticami in s tremi stolpci).

Tudi Pitagorovo trojico lahko zapišemo v obliki matrike, npr. (a, b, c), ali pa $T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (stolpčna matrika).

Zdaj pa poglejmo produkte matrik $G.T$, $N.T$, $D.T$. Najprej

$$G.T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + 2c \\ 2a - b + 2c \\ 2a - 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad (3_1)$$

Če pozorno pogledaš, kar samostojno ugotoviš pravilo za množenje matrike G in T: vsaka vrstica matrike G in stolpec T se zmnožita po komponentah, ki jih nazadnje seštejemo.

Prav lahko preveriš tudi druga dva računa:

$$N.T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 2c \\ 2a + b + 2c \\ 2a + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (3_2)$$

$$D.T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2b + 2c \\ -2a + b + 2c \\ -2a + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad (3_3)$$

Prav tako lahko samostojno preveriš, da na podlagi (1), ($3_1 - 3_3$) velja:

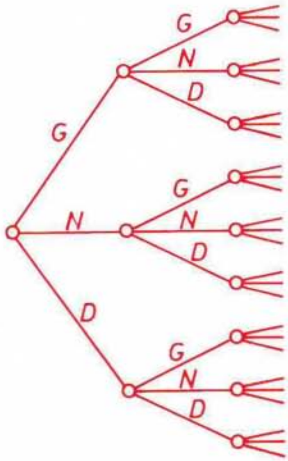
$$a_1{}^2 = (m^2 - n^2) - 2.2mn + 2(m^2 + n^2) = (2m - n)^2 - m^2$$
$$b_1 = 2(m^2 - n^2) - 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(2m - n)m$$
$$c_1 = 2(m^2 - n^2) - 2.2mn + 3(m^2 + n^2) = (2m - n)^2 + n^2$$
$$a_2 = (m^2 - n^2) + 4mn + 2(m^2 + n^2) = (2m + n)^2 - m^2$$
$$b_2 = 2(m^2 - n^2) + 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(2m + n)m$$
$$c_2 = 2(m^2 - n^2) + 4mn + 3(m^2 + n^2) = (2m + n)^2 + m^2$$
$$a_3 = -(m^2 - n^2) + 4mn + 2(m^2 + n^2) = (m + 2n)^2 - n^2$$
$$b_3 = -2(m^2 - n^2) + 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(m + 2n)n$$
$$c_3 = -2(m^2 - n^2) + 4mn + 3(m^2 + n^2) = (m + 2n)^2 + n^2$$

Povzemimo: Če je $T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ primitivna Pitagorova trojica z generatorjema m, n, so GT, NT, DT spet primitivne Pitagorove trojice z generatorji

$$\begin{array}{ccc} G.T & N.T & D.T \\ 2m - n, m & 2m + n, m & m + 2n, n \end{array} \tag{4}$$

3) Izberimo trojico $T_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, njena generatorja sta $m = 2, n = 1$.

Pa oblikujmo drevo, ki ima začetek (korenino) T_0, veje pa oblikujmo tako:



G "gor"
N "naprej"
D "dol"

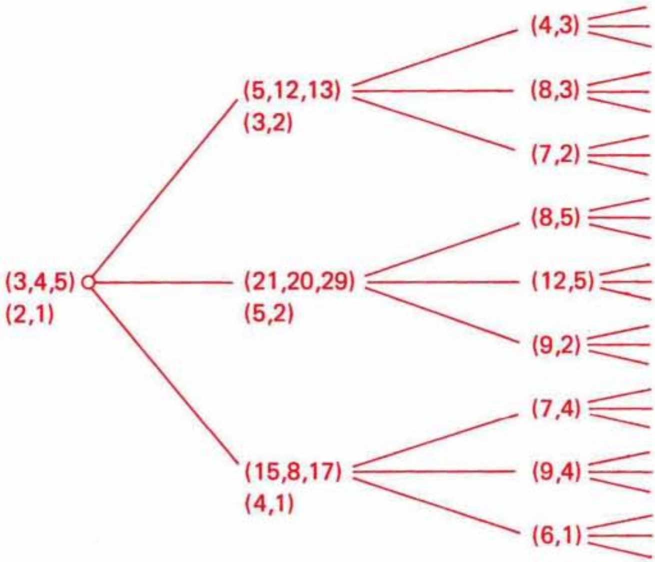
KATERI ODGOVOR JE PRAVILEN?

3. Sonce oddaja v prostor vsako sekundo 4.10^{26} J energije. Koliko m^2 Sončeve površine ima enako moč kot jedrska elektrarna Krško?

a) $900\ m^2$ b) $90\ m^2$ c) $9\ m^2$
d) $0.9\ m^2$ e) $0.09\ m^2$

Jože Kotnik

Če označimo na primer trojice in pare generatorjev, dobimo:



To drevo ima nešteto mnogo razvejišč (vozlišč). Stopnja vsakega vozlišča je 4, le korenina ima stopnjo enako 3.

Ali so v tem (neskončnem) drevesu na razvejiščih vse primitivne Pitagorove trojice?

Da to drži, vidimo iz premisleka:

Izberimo števili $M, N, M > N$, tuji in različnih parnosti. Ta generatorja določata primitivno Pitagorovo trojico (A, B, C):

$$A = M^2 - N^2 \qquad B = 2MN \qquad C = M^2 + N^2$$

Treba je pokazati, da je ta trojica v nekem vozlišču drevesa.

Za M, N proučimo tri možnosti:

(1) $N < M < 2N$ (2) $2N < M < 3N$ (3) $3N < M$

S pomočjo para (M, N) oblikujmo nov par (m, n) takole:

(1) $m = N$, $n = 2N - M$ (2) $m = N$, $n = M - 2N$ (3) $m = M - 2N$, $n = N$ (5)

Zato je

(1′) $M = 2m - n$ $\quad N = m$ (2′) $M = 2m + n$ $\quad N = m$ (3′) $M = m + 2n$ $\quad N = n$

V (1), (2), (3) je vedno

$$m + n < M + N$$

Nadalje: Nova generatorja m, n sta si tuja in velja $m > n$.

Zato par (m, n) določa primitivno Pitagorovo trojico, npr. $T' = (a, b, c)$. Zgoraj smo pa ugotovili, da so potem GT', NT', DT' spet primitivna Pitagorova trojica; z generatorjema m, n naredimo po (5) novo dvojico generatorjev, npr. m' in n'. Potem je

$$m' + n' < m + n < M + N$$

Če ta postopek (igrico, algoritem) nadaljujemo, pridemo končno do para (2,1). Temu ustreza primitivna trojica T_0, torej korenina drevesa. Od tod pa pridemo do trojice (A, B, C) tako, da delujemo na T_0 z G, N, D (večkrat). Torej T je v drevesu!

Sklep. V tem drevesu je vsaka primitivna Pitagorova trojica.

Zato imenujemo to drevo Pitagorovo drevo.

4) Oglejmo si nekaj lastnosti "verig" v drevesu.

Za prvi primer izračunajmo pare generatorjev vozlišč verige

$$T_0\, G\, N\, G\, N\, G\, N\, G\, N \ldots$$

$$(2,1) \xrightarrow{G} (3,2) \xrightarrow{N} (8,3) \xrightarrow{G} (13,8) \xrightarrow{N} (34,13) \xrightarrow{G} (55,34) \ldots$$

In verige $T_0\, N\, G\, N\, G\, N\, G \ldots$

$$(2,1) \xrightarrow{N} (5,2) \xrightarrow{G} (8,5) \xrightarrow{N} (21,8) \xrightarrow{G} (34,21) \xrightarrow{N} (89,34) \ldots$$

Števila, ki nastopajo v teh parih, pa poznamo iz nekega drugega vira, namreč iz zlatega reza. Poglejmo na kratko v to področje.

Daljica $a = AB$ je razdeljena s točko Z v zlatem rezu, če je razmerje med vso daljico AB in daljšim odsekom AZ enako razmerju med daljšim odsekom AZ in krajšim odsekom ZB. Če označimo odseka z M in m, velja potemtakem

$$a : M = M : m, \quad a = M + m$$

Označimo na kratko $M : m = \tau$, pa imamo $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ ali $\tau^2 = \tau + 1$. Število τ lahko zato razvijemo v verižni ulomek

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

Približki števila τ so od tod

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{8}, \frac{34}{21}, \dots$$

Števila v števcih in imenovalcih teh približkov so generatorji trojic v omenjenih verigah.

Omenimo, da prva veriga stremi proti trikotniku, ki ima tangens notranjega kota 1/2, druga veriga pa stremi proti trikotniku, ki ima sinus notranjega kota 2/3.

Na kraju naj navedem še nekaj problemov:

Dan je par (m, n) generatorjev primitivne trojice. Treba je najti matriko M, tako da je ta trojica tudi MT_0.

Dana sta para generatorjev. Treba je najti najbližje skupno vozlišče njunih verig.

Proučiti je treba lastnosti trikotnikov raznih verig Pitagorovega drevesa; npr. verig

$T_0 G N D G N D G N D \dots$

$T_0 G N D G D N N G D N D G D G N D N G \dots$

Na koncu naj opozorim na to, da ima trojica (3,4,5) med vsemi Pitagorovimi trojicami izjemno vlogo.

Ivan Pucelj

KATERI ODGOVOR JE PRAVILEN?

4. Na nebu zasveti utrinek. Sveti zaradi:

a) lastne svetlobe b) fluorescence c) ionizacije
d) trenja z molekulami zraka e) vanj vpadle Sončeve svetlobe f) veselega srečanja z Zemljo

Jože Kotnik

ZANIMIVOSTI V ZVEZI S PASCALOVIM TRIKOTNIKOM

V Preseku smo že večkrat srečali Pascalov trikotnik. To je neskončna trikotna shema števil. Prvo in zadnje število v vsaki vrstici je 1, za vsako drugo število pa velja, da je dobljeno kot vsota dveh števil, ki sta zapisani neposredno nad njim (tabela 1).

(0)					1				
(1)				1		1			
(2)			1		2		1		
(3)		1		3		3		1	
(4)	1		4		6		4		1
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Tabela 1

(0)	1
(1)	11
(2)	121
(3)	1331
(4)	14641

Tabela 2

Napišimo cifre iz vsake vrstice trikotnika brez presledkov (tabela 2).

1.) Opazimo, da so števila iz ničte, prve, druge, tretje in četrte vrstice po vrsti ničta, prva, druga, tretja in četrta potenca števila 11, tj.

$$\begin{aligned} 1 &= 11^0 \\ 11 &= 11^1 \\ 121 &= 11^2 \\ 1331 &= 11^3 \\ 14641 &= 11^4 \end{aligned}$$

Ali velja pravilo tudi za nadaljnja števila iz tabele 2?

2.) Iz tabele 2 vidimo število 121. Zapis tega števila (121) predstavlja razen števila v desetiškem številskem sistemu tudi števila v sistemih, ki imajo osnovo večjo od 2. Število 121 je zanimivo, ker je popolni kvadrat tako za osnovo 10 ($121 = 11^2$) kot tudi za vsako drugo osnovo, ki je večja kot 2. Če je osnova sistema x, ($x > 2$), velja:

$$121_{(x)} = 1.x^2 + 2.x + 1 = (x+1)^2$$

Poiščimo podobno lastnost še za števili iz naslednjih dveh vrstic v tabeli 2. Ker je

$$1331_{(x)} = 1x^3 + 3.x^2 + 3.x + 1 = (x+1)^3 \text{ in}$$

$$14641_{(x)} = 1.x^4 + 4.x^3 + 6.x^2 + 4.x + 1 = (x+1)^4$$

vidimo, da je število 1331 kub nekega števila in 14641 četrta potenca nekega števila, neodvisno od izbire osnove številskega sistema. Pri številu 1331 mora biti osnova večja kot 3 in pri 14641 večja kot 6, sicer števili nimata pomena.

Vprašajmo se še, ali je poleg števila 14641 še kako drugo petmestno število *ABCDE*, ki je četrta potenca nekega naravnega števila, neodvisno od izbire osnove številskega sistema. Če je osnova številskega sistema x, potem zapis *ABCDE* pomeni:

$$ABCDE_{(x)} = A.x^4 + B.x^3 + C.x^2 + D.x + E$$
$$0 < A < x \quad \text{in} \quad 0 \leqslant B, C, D, E < x$$

Preizkusimo, ali je lahko število $ABCDE_{(x)}$ četrta potenca nekega dvomestnega števila $ab_{(x)} = a\,x + b$ $(0 < a < x, b < x)$, neodvisno od osnove x. Da bi to veljalo, mora biti izpolnjen pogoj:

$$A.x^4+B.x^3+C.x^2+D.x+E = (ax + b)^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^3 + 6a^2b^2x^2 + 4ab^3x + b^4$$

Če izenačimo istoležne koeficiente, dobimo identitete: $A = a^4$, $B = 4a^3b$, $C = 6a^2b^2$, $D = 4ab^3$ in $E = b^4$. A in E morata biti četrti potenci naravnih števil, medtem ko med koeficienti veljajo naslednje zveze, ki jih lahko neposredno preverimo:

$$C = 3B^2/8A \qquad D = B^3/16\,A^2 \qquad E = B^4/256\,A^3 \qquad (1)$$

Koeficient A je lahko samo 1, medtem ko je E lahko 0 ali pa 1. Če je $A = 1$ in $E = 0$, potem iz (1) dobimo $B = C = D = 0$, če pa je $A = E = 1$, dobimo $B = D = 4$ in $C = 6$. V drugem primeru smo dobili število 14641 (11^4), ki smo ga srečali že prej, v prvem pa imamo število 10000 (10^4). Zapis 10000 ima pomen v vsakem številskem sistemu, medtem ko ima zapis 14641 pomen v sistemih z osnovo, večjo kot 6.

Primer: $14641_{(8)} = 1.8^4 + 4.8^3 + 6.8^2 + 4.8 + 1 = 9^4$

Naloga. Razišči, kako je s podobno lastnostjo za štirimestna števila in kako za trimestna števila.

Dragoljub M. Milošević
Prevod in priredba *Sandi Klavžar*

RAZRED S-TRIKOTNIKOV

Poznamo več razredov trikotnikov, ki imajo kakšno določeno lastnost, s pomočjo katere lahko zanje dokažemo mnoge druge lastnosti. Tako na primer za pravokotne trikotnike velja, da je kvadrat hipotenuze enak vsoti kvadratov katet. Mi bomo obravnavali razred S–trikotnikov, ki imajo nekaj zanimivih lastnosti.

DEFINICIJA. Trikotnik s stranicami a, b, c $(a < b < c)$ je S–trikotnik natanko tedaj, ko so njegove stranice členi aritmetičnega zaporedja. To pomeni obstoj takega pozitivnega števila d, da velja $b = a + d$ in $c = a + 2d$.

IZREK 1. Vsak S–trikotnik zadošča relaciji $v_b = 3r$, kjer smo z v_b označili višino na stranico b in s črko r polmer včrtanega kroga.

Dokaz. Vsak S–trikotnik zadošča relaciji

$$a + c = 2b \tag{1}$$

in zato velja

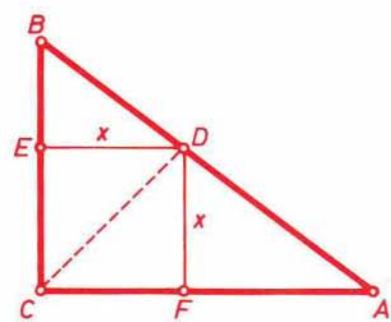
$$2s = a + b + c = (a + c) + b = 3b \tag{2}$$

Ker je ploščina trikotnika enaka $P = (1/2)b.v_b = r.s$, dobimo $v_b = (2rs)/b$. Ta relacija nam da skupaj z enačbo (2) željeni rezultat.

IZREK 2. Naj bo S–trikotnik pravokoten. Potem je kvocient radija včrtanega kroga s stranico kvadrata, ki je včrtan v trikotnik tako, da je eno njegovo oglišče na hipotenuzi, dve stranici pa na katetah (glej sliko), enak 7/12.

Dokaz. Označimo stranico včrtanega kvadrata z x. Ploščina trikotnika ABC je enaka vsoti površin trikotnikov ACD in BCD, tako da velja $(1/2)\ ab = (1/2)\ bx + (1/2)ax$. Od tod sledi $x = ab/(a + b)$. Ker je $r = P/s = ab/(a + b + c)$, dobimo

$$r/x = (a + b)/(a + b + c) \tag{3}$$



Pitagorov izrek, uporabljen skupaj z relacijo (1), nam pove, da je $b = (4/3)a$ in $c = (5/3)a$. Torej iz (3) sledi: $r/x = 7/12$. S tem je izrek dokazan.

S–trikotniki imajo še nekaj zanimivih lastnosti. In ker vam bo prav gotovo v veselje, če jih boste dokazali sami, vam te lastnosti podajamo v obliki nalog.

1. Dokažite, da za vsak S–trikotnik veljajo sledeče relacije:

a) $a.c = 6.R.r$

b) $(s-a)(s-c) = 3r^2$

c) $(c-a)^2 = 8r(R-2r)$

kjer smo z R označili polmer očrtanega kroga.

2. Če je S–trikotnik pravokoten, potem je razlika njegove najdaljše in najkrajše stranice enaka premeru včrtanega kroga.

3. Določite medsebojno razmerje stranic S–trikotnika, katerega ploščina je enaka 3/4 ploščine enakostraničnega trikotnika z istim obsegom.

4. Kolikšne so stranice pravokotnega S–trikotnika, če je

a) njegova površina 24,

b) njegov obseg 96,

c) višina na hipotenuzo 21,6?

Dragoljub M. Milošević
Prevedel *Peter Šemrl*

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
14. letnik, šolsko leto 1986/87, številka 2, strani 65 – 128

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265–061/53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1986/87 je za posamezna naročila 1000.– din, za skupinska naročila pa 800.–, posamezna številka 250.– din/200.– din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

ISSN 0351–6652

DIRICHLETOV PRINCIP

Pri reševanju raznih problemskih nalog, še posebej pri tistih, ki zahtevajo dokaz obstoja objektov z neko določeno lastnostjo, nam pogosto pomaga Dirichletov princip, imenovan po nemškem matematiku P.G.L. Dirichletu (1805 – 1859). Ta preprosti princip ima več popularnih imen, na primer: "problem zajčkov in kletk", "problem škatel in kroglic" in podobno. Lahko ga formuliramo takole:

Če je v n škatlah spravljeno več kot n kroglic, potem mora vsaj ena škatla vsebovati več kot eno kroglico.

Z nekaj primeri bomo sedaj ilustrirali uporabo tega principa.

ZGLED 1. Dokažimo, da sta med desetimi slučajno izbranimi naravnimi števili vsaj dve taki števili, da je njuna razlika deljiva z 9.
REŠITEV. Pri deljenju naravnega števila z 9 je lahko ostanek eno izmed števil: 0, 1, 2, ..., 7, 8. Ker imamo 10 števil in s tem tudi 10 ostankov, ki pa lahko zavzamejo največ 9 različnih vrednosti, nam Dirichletov princip pove, da imata vsaj dve med desetimi izbranimi števili isti ostanek pri deljenju z 9. Označimo ti dve števili z n_1 in n_2 in s črko r njun skupni ostanek pri deljenju z 9. Tedaj imamo

$$n_1 = 9k + r \quad \text{in} \quad n_2 = 9m + r$$

kjer sta m in k naravni števili. Zato je njuna razlika $n_1 - n_2 = 9(k - m)$ deljiva z 9. Dokaz je s tem končan.

ZGLED 2. V razredu je 20 učencev. Pri šolski nalogi iz matematike nihče od učencev ni napravil več kot 5 napak. Dokažimo, da so vsaj štirje učenci napravili isto število napak.
REŠITEV. Razvrstimo učence v "škatle", tako da v isto "škatlo" spravimo učence, ki so napravili enako število napak. Ker so učenci napravili 0, 1, 2, 3, 4 ali 5 napak, je takih "škatel" šest. V za nas najbolj neugodnem primeru bi bili v vsaki "škatli" po trije učenci, torej dva ostaneta (20=6.3+2). Na osnovi Dirichletovega principa obstaja "škatla", v kateri so vsaj štirje učenci, kar je bilo potrebno dokazati.

ZGLED 3. V pravilnem dvanajstkotniku pobarvamo nekatere izmed diagonal. Dokažimo, da obstajata vsaj dve oglišči, v katerih se končuje enako število pobarvanih diagonoal.

REŠITEV. V vsakem oglišču se končuje 9 diagonal. Zato imamo v vsakem oglišču 10 možnosti za število obarvanih diagonal. Oglišč ("kroglic") pa je 12. Po Dirichletovem principu obstajata vsaj dve oglišči z istim številom obarvanih diagonal.

ZGLED 4. V kvadratu s stranico 1 je poljubno razvrščenih 51 točk. Ali je možno med njimi poiskati tri točke, ki jih pokriva krog s polmerom 1/7?

REŠITEV. Dani kvadrat v obliki šahovnice razdelimo na 25 kvadratov s stranico 1/5. Dirichletov princip nam pove, da obstaja kvadrat, ki skupaj s svojimi stranicami vsebuje vsaj 3 točke. Ker je 2/7 večje od $\sqrt{2}/5$, lahko ta kvadrat pokrijemo s krogom polmera 1/7.

Če vam je Dirichletov princip s svojo preprostostjo in učinkovitostjo všeč, se lahko samostojno lotite reševanja naslednjih problemov.

1. Jugoslavija ima manj kot 23 milijonov prebivalcev in več kot 7000 naselij. Dokažite, da imata vsaj dve naselji enako število prebivalcev.
2. Koliko najmanj naravnih števil je potrebno vzeti, da bi med njimi gotovo obstajali dve števili, katerih razlika je deljiva s 5?
3. V kvadratu s stranico 1 je izbranih 101 točk, tako da nobena trojica izmed teh točk ne leži na isti premici. Dokažite obstoj trikotnika z oglišči v treh izmed teh točk in s površino, manjšo od 0,01.
4. V omari imamo 4 pare rjavih in 4 pare črnih čevljev. Koliko najmanj čevljev je potrebno na slepo vzeti iz omare, da bi imeli vsaj en par čevljev iste barve?

Dragoljub M. Milošević
Prevedel *Peter Šemrl*

KATERI ODGOVOR JE PRAVILEN?

2. Nekatere dele svetlobnega spektra absorbirajo zelene rastline bolj kakor druge.

a) zeleno svetlobo bolj, kakor druge, saj so zelene
b) rdečo, rumeno in modro svetlobo bolj kakor druge
c) ves vidni spekter enako
d) infrardeči in ultravijolični del spektra bolj kakor druge

Jože Kotnik

NOVE KNJIGE

NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1987

Takšen je naslov brošure za leto 1987, ki sta jo pripravila kot že vrsto let Astronomsko-geofizikalni observatorij v sestavi oddelka za fiziko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani in Seizmološki zavod SR Slovenije. Spremembo naslova je narekovala vsebina brošure, ki poleg astronomskih efemerid (NAŠE NEBO) prinaša tudi astronomske dosežke ter popis potresne dejavnosti v Sloveniji, Jugoslaviji in po svetu (.. IN ZEMLJA).

Kakor vsako leto bo brušura tudi letos izšla ob koncu koledarskega leta. Učitelje na osnovnih in srednjih šolah prosimo, da jo priporočijo učencem in dijakom. Želimo pa tudi, da jo naročite za šolsko knjižnico. Cena je 1250.- din, člani društva in naročniki Preseka pa jo lahko dobijo z 20% popustom za 1000.- din.

Ciril Velkovrh

. . . . odreži. . . . .

NAROČILNICA

Podpisani (priimek in ime – s tiskanimi črkami) ali naziv šole

. . . .

kraj, ulica, hišna številka . . . .

poštna številka, pošta . . . .

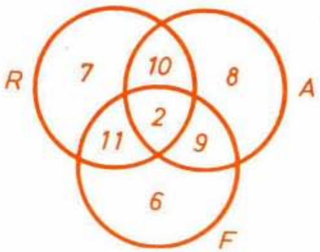
Prosimo, da nam pošljete . . izvodov brošure NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1987.

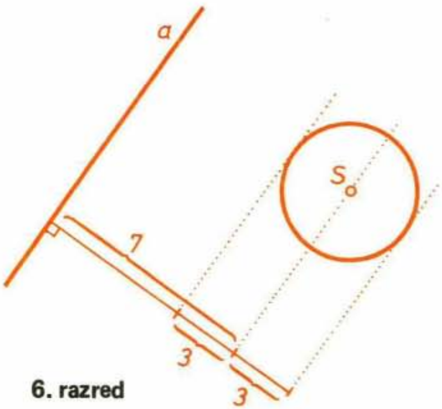
Datum . . . . Podpis naročnika . . . .

REŠITVE NALOG

NALOGE S ŠOLSKEGA TEKMOVANJA v občini Slovenske Konjice – rešitve s str. 78

5. razred





1. Pomagamo si s skico, v katero vpisujemo ustrezna števila. Vseh učencev je bilo 53.

2. Iz podatkov ugotovimo, da bi za štiri dodatne zvezke učenec potreboval 120 din. Cena enega je zato 30 din. Učenec je imel $11.30 + 70 = 400$ dinarjev.

3. Najmanjša razdalja je 4 cm, največja pa 10 cm.

4. $b = 12$ cm, $a = 12 \text{ cm} + b$
$a = 24$ cm, $o = 72$ cm
$4.s = o$ $s = 18$ cm

5. Račun je pravilen, če ga takole dopolnimo:

```
 982.19
 ------
 982
 8838
 ------
18658
```

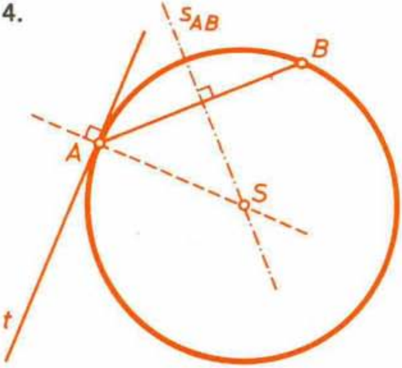
6. razred

1. Produkt je enak 0 le, če je vsaj ena cifra enaka 0. Takšna ne more biti leva cifra, ker tedaj število ne bi bilo trimestno. To tudi ni srednja cifra, saj je za 4 večja od desne cifre, ki torej mora biti enaka 0. Srednja cifra je zato 4, pogoj deljivosti z devet pa nam da za levo cifro vrednost 5. Iskano število je torej 540.

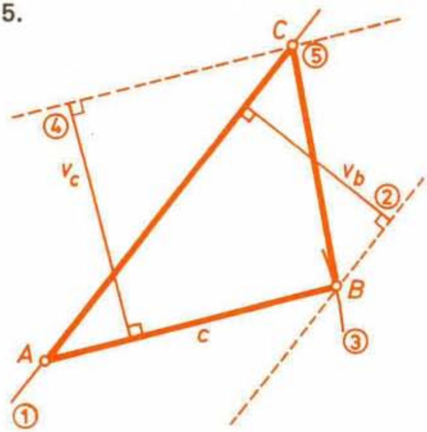
2. $(\frac{5}{12} + \frac{3}{8}).3 + 3\frac{1}{3} - 5.\frac{2}{3} = 2\frac{3}{8}$

3. Če dolžino tretje stranice označimo z a, velja: $a \in \mathbf{N}$, $a < 14 + 1$, $a > 14 - 1$. Vsem pogojem ustreza le $a = 14$, trikotnik je enakokrak z obsegom 29 cm.

4.



5.



7. razred

1. 3/2

2. $a_2 = 130\,a_1/100$,
$p_2 = {a_2}^2 = 16900{a_1}^2/10000 =$
$= 169p_1/100$
$o_2 = 4a_2 = 4.130a_1/100 =$
$= 130o_1/100$
Ploščina se poveča za 69 odstotkov, obseg pa za 30 odstotkov.

3. Manjši kot meri 60^0, obseg pa je enak $5r$ in meri 20 cm.

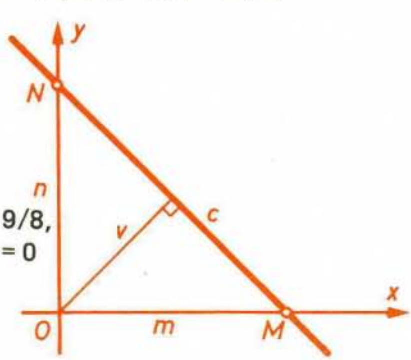
4. Označimo:
$p(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$ $p(-1/2) = -9/8$,
Velja: $p(-3/2) = 3\frac{1}{8}$ $p(-1) = p(1) = 0$

5. Iskano število zapišemo kot $abcde4$. Iz besedila naloge sledi: $4.abcde4 = 4abcde$, kar pomeni, da je $a = 1$ in $e = 6$. Postopoma dobimo nato $d = 5$, pa $c = 2$ in $b = 0$. Število je 102564.

8. razred

1. Enačba ima edino rešitev $x = 3$.

2. $x + y = 4$. Presečišče z abscisno osjo $M(m,0)$: $m = 4$; presečišče z ordinatno osjo $N(0,n)$: $n = 4$.
$p = n.m/2 = 8 = c.\,v/2$ in
$c = 4\sqrt{2}$, zato je $v = 2\sqrt{2}$.



3. $1 + (p - 1)/2 + p/3 + 1 = p$, dobimo: $p = 9$ km.

4. Vseh manjših kock je 1000. Tri ploskve ima pobarvanih 8 kock, po dve ploskvi sta pobarvani na 96 kockah in po eno pobarvano ploskev ima 384 kock. Nepobarvanih je 512 kock.

5. $V_k = a^3 = 1\ \mathrm{dm}^3$, $a = 1\ \mathrm{dm} = 2r = v$, $V_v = \pi r^2 v$;
$k = 100.(V_k - V_v)/V_k = 21{,}5$
Odpade 21,5 odstotka lesa.

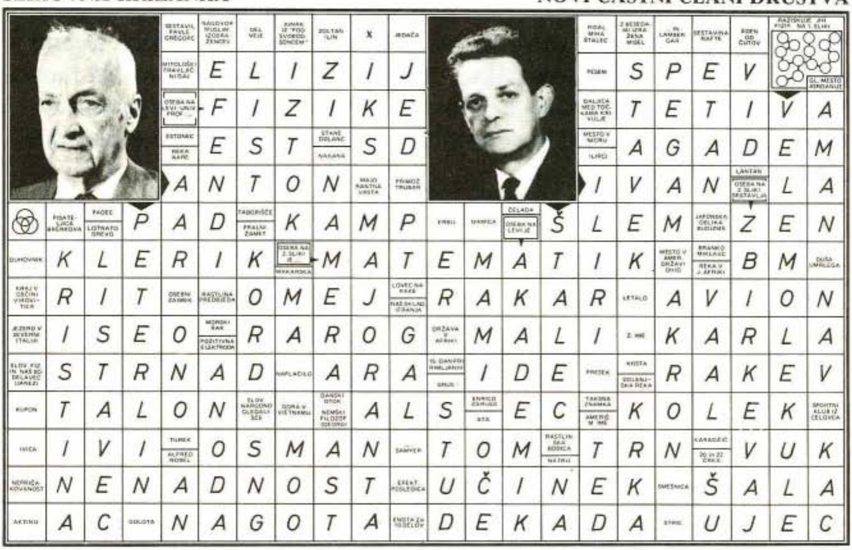
Jana Novak

TRINAJST PREMIC – rešitev s str. 89

Izberemo v ravnini točko P in skozi njo konstruiramo premice $p_1, p_2, ..., p_{13}$, vzporedne danim premicam. Ker med danimi premicami ni bilo vzporednic, imajo premice $p_1, p_2, ..., p_{13}$ skupno le točko P. Zato delijo polni kot 360^0 na 26 delov. Ker pa je $360:26 < 14$, je vsaj eden teh kotov manjši od 14^0. Med prvotnimi premicami je torej tak par, ki oklepa kot, manjši od 14^0.

Dragoljub M. Milošević
(prev. Peter Petek)

SLIKOVNA KRIŽANKA NOVI ČASTNI ČLANI DRUŠTVA



RAČUNANJE VREDNOSTI NEKATERIH MATEMATIČNIH FUNKCIJ

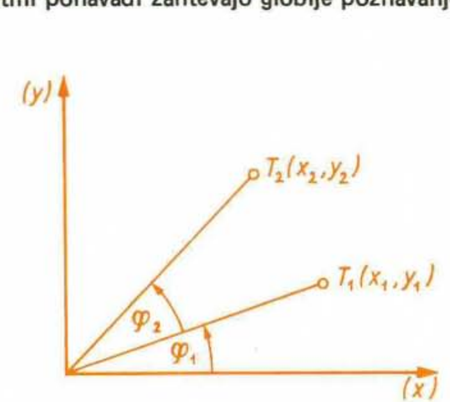
Uvod

Verjetno ste se že večkrat vprašali, kako kalkulatorji ali pa tudi vaši domači računalniki računajo vrednosti različnih matematičnih funkcij. Če je funkcija dovolj "lepa", in take so prektično vse funkcije, ki jih srečamo v srednji šoli, potem lahko vrednost funkcije zapišemo v obliki neskončne vrste. Učeno bi lahko dejali, da funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto. Tako na primer lahko zapišemo identiteto za funkcijo $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Neskončnega računa seveda ne moremo opraviti, toda če vzamemo zadostno število členov vrste, lahko dobimo poljubno natančnen približek. Na prvi pogled smo tako problem računanja funkcij rešili, in to celo zelo splošno. Žal pa je v računalništvu, za razliko od matematike, ponavadi hitrost algoritma važnejši kriterij kot splošnost rešitve. Problem pri računanju vrednosti funkcij je s pomočjo Taylorjeve vrste je v tem, da moramo pri velikem argumentu x za dosego željene natančnosti upoštevati precej členov. To pa nasprotuje želji po učinkovitosti (hitrosti).

Dobri algoritmi ponavadi zahtevajo globlje poznavanje problema, ki ga re-



šujemo. Še preden si ogledamo, kako večina kalkulatorjev firme Hewlett–Packard računa kvadratni koren in trigonometrične funkcije, izpeljimo formuli, ki ju bomo potrebovali kasneje.

Naj bo T_1 poljubna točka v ravnini s koordinatama (x_1, y_1). V polarnih koordinatah se koordinati točke T_1 glasita:

$$x_1 = r.\cos(\varphi_1) \qquad y_1 = r.\sin(\varphi_1) \tag{1}$$

kjer je r razdalja točke T_1 od koordinatnega izhodišča in φ_1 kot, ki ga poltrak iz izhodišča od T_1 oklepa z osjo x. Zavrtimo točko T_1 za kot φ_2 v pozitivni smeri okrog izhodišča v točko T_2 (slika 1).

Vprašajmo po koordinatah točke T_2. Najprej je:

$$x_2 = r.\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad y_2 = r.\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Če uporabimo za sin in cos adicijska teorema in upoštevamo (1), dobimo formuli:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1.\cos(\varphi_2) - y_1.\sin(\varphi_2) \\ y_2 &= y_1.\cos(\varphi_2) + x_1.\sin(\varphi_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Povejmo še, da kalkulatorji HP uporabljajo posebne mikroprocesorje, pri katerih množenje z 10^n ne pomeni nič drugega kot premik decimalne pike. Prednost desetiške aritmetike je v tem, da ni potrebno pretvarjanje med dvojiškim in desetiškim sistemom. Če bi bila aritmetika dvojiška, bi računali dvojiške cifre, ki bi jih potem pomnožili z ustreznimi potencami 2^n.

Kvadratni koren

Kako bi izračunali kvadratni koren, če bi bili brez kalkulatorja, v usmerjeni šoli pa vas tega niso naučili? Izberimo neki približek, ki se nam zdi primeren, in preverimo, koliko sreče smo imeli, tako da izračunamo kvadrat približka. Če smo dobili premalo, smo izbrali premajhen približek, če smo dobili preveč, je bil približek prevelik, sicer pa smo imeli srečo in zadeli rešitev. Ker je verjetnost zadetka majhna, postopek nadaljujmo tako, da približek izboljšamo, To delamo toliko časa, da smo z rezultatom zadovoljni. Zapišimo opisani postopek še v algoritmičnem jeziku.

Vzemi začetni približek za koren a

ponavljaj

    izračunaj a^2

    $R \leftarrow x - a^2$

    če je R dovolj majhen **potem končaj**

        sicer popravi a glede na predznak R

do tod

Seveda ta postopek še ni dober. Kalkulatorju je treba povedati, za koliko naj popravi a, razen tega pa zahteva vsak korak kar precej časa: izračun a^2 in ostanka R. Algoritem torej spremenimo tako, da računanje a^2 in R opravimo kar najlažje, ko spremenimo približek a. To naredimo tako, da postopoma računamo približek: najprej določimo pravilne tisočice, nato stotice, desetice, enice, ... Zdaj spoznamo v njem starega znanca (ali pa tudi ne). Tako vendar računamo kvadratni koren "peš" s papirjem in svinčnikom.

Vpeljimo nekaj oznak, ki nam bodo olajšale nadaljnje delo:

x .... število, katerega koren računamo
a .... približek za koren
b .... naslednja cifra $x^{1/2}$, ki jo iščemo
j .... eksponent potence števila 10
R_a ... $x - a^2$ tekoči ostanek
a_j .... novi a, ko dodamo b na ustrezno mesto: $a_j = a + b \cdot 10^j$
in R_b naj bo enak $a_j^2 - a^2$

Število $x^{1/2}$ bomo poiskali tako, da se bomo pravi vrednosti bližali od spodaj. Torej mora v vsakem trenutku veljati pogoj:

$$a \leqslant x^{1/2}$$

in s tem

$$R_a \geqslant 0$$

Ostanek moramo karseda zmanjšati, kljub temu pa še ostati pod $x^{1/2}$. Zato mora biti b največje tako število, a bo veljalo:

$$R_a - R_b \geqslant 0$$

Če upoštevamo definicijo R_b

$$R_b = (a + (b\ .\ 10^j))^2 - a^2 = 2a\,b\ .\ 10^j + (b\ .\ 10^j)^2$$

je b tisto največje število, da velja:

$$2ab\ .\ 10^j + (b\ .\ 10^j)^2 \leqslant R_a$$

Ko najdemo največje naravno število b, ki tej neenačbi zadošča, izračunamo nov približek

$$a \leftarrow a + b\ .\ 10^j$$
$$R_a \leftarrow R_a - R_b$$
$$j \leftarrow j - 1$$

Oglejmo si primer: $x = 54756, j = 1, a = 200, R_a = 14756$.
Zaporedoma računamo nove ostanke:

b	R_b	$R_a - R_b$
0	0	14756
1	4100	10656
2	8400	6356
3	12900	1856
4	17600	−2844

Torej moramo za b vzeti 3, ker je $b = 4$ že preveč. Novi približek je tedaj $a = 200 + 3.\ 101 = 230$, novi ostanek $R_a = 1856$ in $j = 0$.
Postopek nato ponovimo tolikokrat, da dosežemo željeno natančnost.

Algoritem pa lahko tudi izboljšamo. Prva taka izboljšava je način, kako izrazimo $(b\ .\ 10^j)^2$. Pri tem upoštevamo, da je b^2 vsota prvih b lihih števil. Od tod:

$$(b\ .\ 10^j)^2 = b^2\ .\ 10^{2j} = \Sigma\ (2i - 1).\ 10^{2j}$$

prištejmo $2a\,b\ .\ 10^j$ in dobimo

$$2a\,b\ .\ 10^j + (b\ .\ 10^j)^2 = \Sigma\ (2a\ .\ 10^j + (2i - 1)\ .\ 10^{2j})$$

Leva stran je novi ostanek R_b. Namesto da gledamo R_a in R_b, opazujmo $5R_a$ in $5R_b$, saj če velja $R_b \leqslant R_a$, velja tudi $5R_b \leqslant 5R_a$. Ostanek R_b ima obliko

$$5R_b = \Sigma\ 10a\ .\ 10^j + (10i - 5).\ 10^{2j}$$

postopek pa ostane nespremenjen, le da iščemo tisto največje naravno število b, za katerega velja $5R_b \leqslant R_a$, novi ostanek pa je $5R_a = 5R_a - 5R_b$. Transformacija je na prvi pogled nesmiselna. Če pa si ogledamo zaporedne R_b in upoštevamo, da zaradi BCD mikroprocesorja množenje z 10 pomeni le rotacijo v desno, dobi transformacija smisel.

$$b = 1 \qquad R_b = 10a \,.\, 10^j + 05 \,.\, 10^{2j}$$
$$b = 2 \qquad R_b = 10a \,.\, 10^j + 15 \,.\, 10^{2j}$$
$$b = 3 \qquad R_b = 10a \,.\, 10^j + 25 \,.\, 10^{2j}$$

Vidimo, da imajo ostanki R_b obliko $10a \,.\, 10^j + (b-1)|5 \,.\, 10^{2j}$, kjer oznaka |5 pomeni dopisovanje petice. Poglejmo tako popravljeni postopek na našem primeru ($x = 54756, j = 1, a = 200, 5R_a = 73780$).
Zaporedoma računamo nove ostanke:

b	$10a.\,10^j + (b-1)|5.10^{2j}$	$R_a - R_b$
1	20500	53280
2	21500	31780
3	22500	9280 (novi $5R_a$)
4	23500	−14220 prekoračitev

in naslednji korak ($j = 0, a = 230, 5R_a = 9280$):

b	$10a.10^j + (b-1)|5.10^{2j}$	$R_a - R_b$
1	2305	6975
2	2315	4660
3	2325	2335
4	2335	0
5	2345	−2345 prekoračitev

Če pogledamo obe tabeli, opazimo, da vrednosti v srednjem stolpcu ni treba računati, saj jih dobimo enostavno s spajanjem naračunanih cifer približka, petice in še $2j$ ničel. Ničlo potem nadomeščamo zaporedoma s ciframi 1, 2, ..., tako da je edino delo, ki ga še mora opraviti računalnik, računanje razlike $5R_a - 5R_b$. Pri ogledu algoritma smo vzeli kot primer veliko število. Dejansko pa je v kalkulatorjih tipa HP število predstavljeno v eksponentnem zapisu z mantiso M in eksponentom exp:

$$x = M \,.\, 10^{\exp}$$

kjer je $1 \leqslant M < 10$. Poleg mantise je treba koreniti tudi potenco 10^{exp}. S sodim eksponentom ni težav:

$$(10^{exp})^{1/2} = 10^{exp/2}$$

Če je eksponent lih, pa ga zmanjšamo za 1. S tem smo seveda povečali mantiso, tako da je v mejah $1 \leqslant M < 100$, a po korenjenju bo mantisa M v pravih mejah. Ves postopek bi bil torej takšen:

1. izračunaj eksponent odgovora
2. pomnoži mantiso s 5, dobiš $5R_a$
3. z začetnim približkom $a = 0$ uporabi opisano metodo in poišči 12 cifer odgovora
4. zaokroži mantiso, dodaj eksponent
5. izpiši rezultat

Če ste postopek razumeli, ga sprogramirajte v nekem višjem programskem jeziku, recimo v basicu na vašem domačem računalniku.

Trigonometrične funkcije: sin(φ), cos(φ), tg(φ), ctg(φ)

Za izračun vseh štirih trigonometričnih funkcij bomo uporabili isti algoritem, kar vsekakor pomeni bistven prihranek ROM–a. V vsakem primeru najprej izračunamo tg(φ) ali pa ctg(φ), nato pa po potrebi iz njiju sin(φ) in cos(φ) s formulama:

$$\sin(\varphi) = \frac{\pm \operatorname{tg}(\varphi)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi)} \tag{3}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\pm \operatorname{ctg}(\varphi)}{1 + \operatorname{ctg}^2(\varphi)} \tag{4}$$

V primerih, ko dobimo kot φ v drugih kotnih enotah kot radianih, ga najprej pretvorimo v radiane. Ker so trigonometrične funkcije periodične s periodo 2π, reduciramo poljuben kot na intervalu $[0, 2\pi)$. To lahko naredimo tako, da odštevamo 2π od kota, dokler ne pridemo v ustrezni interval. Vendar bi bil tak postopek za velike kote sila neučinkovit. Zato kot najprej zapišimo v eksponentnem zapisu in nato od njega odštevajmo velike večkratnike kota 2π, dokler ne dobimo negativnega kota. Nato ta večkratnik enkrat prištejemo in postopek ponovimo pri manjšem večkratniku kota 2π. Zapišimo ta postopek algoritmično:

kot φ zapiši v obliki $\varphi = a_1.a_2a_3 \dots . 10^n$
za $k = n, n-1, \dots, 0$ **ponovi**
  $y \leftarrow 2.\pi.10^k$
  ponavljaj $\varphi \leftarrow \varphi - y$ **dokler ni** $\varphi < 0$
  $\varphi \leftarrow \varphi + y$

Na ta način velike kote zelo hitro spravimo v ustrezni integral. Sam premisli, kaj moramo opraviti v gornjem postopku, če imamo za podatek negativen kot. S tem algoritmom smo spravili kot na interval $[0, 2\pi)$ in od tu dalje nas bodo zanimali le še ustrezni koti. Glavna ideja, ki nas pripelje do končnega algoritma, je naslednja. Če poznamo poljubno točko na poltraku iz izhodišča, ki oklepa z osjo x kot φ, znamo $\mathrm{tg}(\varphi)$ in $\mathrm{ctg}(\varphi)$ izračunati s srednješolskima formulama:

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x} \quad \text{in} \quad \mathrm{ctg}(\varphi) = \frac{x}{y} \tag{5}$$

in odtod s formulama (1) in (2) tudi $\sin(\varphi)$ in $\cos(\varphi)$. Seveda pa še ne vemo, kako naj pridelamo ustrezno točko (x, y) na poltraku, ki oklepa z osjo x kot φ. Postopajmo takole: začetno točko, ki je dovolj blizu osi x, zavrtimo nekajkrat v pozitivni smeri za ustrezne kote φ, dokler ne dobimo zaželjene točke. Najprej zapišimo formuli (2), ki zavrtita točko (x_1, y_1) v ravnini za kot φ_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 . \cos(\varphi_2) - y_1 . \sin(\varphi_2) \\ y_2 &= y_1 . \cos(\varphi_2) + x_1 . \sin(\varphi_2) \end{aligned} \tag{6}$$

Če obe enačbi (6) delimo s $\cos(\varphi_2)$, dobimo identiteto:

$$\begin{aligned} x_2/\cos(\varphi_2) &= x_1 - y_1 . \mathrm{tg}(\varphi_2) \\ y_2/\cos(\varphi_2) &= y_1 + x_1 . \mathrm{tg}(\varphi_2) \end{aligned} \tag{7}$$

Označimo prvo desno stran v (7) z x_2', drugo desno stran pa z y_2'. Če enačbi (7) zapišemo v teh novih oznakah, dobimo razmerje:

$$y_2'/x_2' = y_2/x_2 \tag{8}$$

Ker je $y_2/x_2 = \mathrm{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)$, lahko tangens kota $\varphi_1 + \varphi_2$ dobimo tako, da izračunamo x_2' in y_2'. Torej lahko izračunamo tangens za φ_2 večjega kota, če le poznamo $\mathrm{tg}(\varphi_2)$, x_2' in y_2. To in pa seveda dejstvo, da postopek lahko večkrat ponovimo, uporabimo v našem algoritmu. Za izračun $\mathrm{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)$ v (8) moramo izračunati x_2' in y_2', ki ju dobimo v formuli (7).

Ker smo pri izbiri kota φ_2 še svobodni, ga izberimo tako, da bo izračun v (7) čim preprostejši. Kot smo že omenili, uporabljajo HP kalkulatorji posebne procesorje, pri katerih predstavlja množenje s potencami 10 le premik decimalne pike. Zato zahtevajmo, da je $tg(\varphi_2)$ oblike 10^k. Množenje v (7) namreč tedaj ni nič drugega kot premik decimalne pike za k mest. Kot φ torej zapišimo v obliki:

$$\varphi = a_0 . tg^{-1}(1) + a_1 . tg^{-1}(0.1) + a_2 . tg^{-1}(0.01) + ... + r \qquad (9)$$

Pri tem smo s tg^{-1} zapisali inverzno funkcijo k funkciji tangens. Vse konstante a_0, a_1,... so naravna števila, manjša ali enaka 10, tako da za vsako od njih potrebujemo en sam štiribitni zapis. Ustrezne približne kote zapišimo v radianih in stopinjah.

$tg^{-1}(1)$	=	0.785398163	$tg^{-1}(1)$	=	45
$tg^{-1}(0.1)$	=	0.099668652	$tg^{-1}(0.1)$	=	5.710593137
$tg^{-1}(0.01)$	=	0.009999667	$tg^{-1}(0.01)$	=	0.572938698
$tg^{-1}(0.001)$	=	0.001000000	$tg^{-1}(0.001)$	=	0.057295604
....			....		

Koti v radianih vsebujejo v svojih cifrah več pravilnosti. Vsi ti koti so seveda stalno zapisani v ROM–u, večja pravilnost pa pomeni manjšo porabo prostora, kar daje radianom prednost pred stopinjami. Zato smo tudi takoj na začetku pretvorili kot v radiane. Razcep opravimo s preprostim algorimnom. Od kota odštevamo ustrezni kot, dokler kot ni negativen, potem pa mu še enkrat prištejemo isti kot. Ves postopek nato ponovimo na manjšem kotu. Zapišimo ta postopek zopet v obliki algoritma:

```
          za i = 0, 1, 2, ... ponovi
              a_i ← 0
odštevaj:     ponavljaj
                  φ ← φ − tg^-1 (10^-i)
                  a_i ← a_i + 1
                  če je φ < 0 potem
                      φ ← φ + tg^-1 (10^-i)
                      a_i ← a_i − 1
                      zapusti odštevaj
              do tod
          do tod
```

Kako majhen naj bo ostanek r pri razcepu (9), je odvisno od natančnosti aritmetike. V večini kalkulatorjev HP se napravi razcep do kota tg^{-1} (0.0001). Tedaj je namreč ostanek že tako majhen, da ne vpliva niti na zadnjo decimalko v končnem izračunu. Da pa lahko začnemo celoten postopek, moramo določiti še začetno točko. Ker je ostanek r zelo majhen, je, če vzamemo $x = 1$, $tg(r)$ približno enak r in za začetno točko vzamemo točko $(1, r)$. Napišimo še algoritem, s katerim izračunamo končno točko na poltraku, ki oklepa z osjo x kot φ.

```
x ← 1
y ← r
za k = 0, 1, ..., m ponovi
     za i = 1, 2, ..., a_k ponovi
          x' ← x − y . 10^-k
          y' ← y + x . 10^-k
          x ← x'
          y ← y'
     do tod
do tod
```

Povzemimo celotni postopek:

1. pretvori kot v ekvivalentnega na $[0, 2\pi)$
2. razbij kot v linearno kombinacijo (9)
3. z rotacijami izračunaj točko (x, y)
4. iz (x, y) izračunaj, kar potrebuješ, in rezultat izpiši

Tudi za trigonometrične funkcije je za razumevanje postopka priporočljivo, če postopek sprogramiramo v kakem višjem programskem jeziku.

LITERATURA

[1] M.Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1964

[2] W.E. Egbert, Personal Calculator Algorithms I: Square Roots, HP Journal, May 1977

[3] W.E. Egbert, Personal Calculator Algorithms II: Trigonometric Functions, HP Journal, June 1977

[4] W.E. Egbert, Personal Calculator Algorithms III: Inverse Trigonometric Functions, HP Journal, November 1977

[5] W.E. Egbert, Personal Calculator Algorithms IV: Logarithmic Functions, HP Journal, April 1978

ČASOVNA ZAHTEVNOST ALGORITMOV

Gotovo so med vami lastniki računalnika SPECTRUM 16 K. Prepričan sem, da so se že večkrat jezili, ker niso mogli naložiti programov, ki so sicer pisani za povsem enak računalnik SPECTRUM 48 K, le da ima slednji na razpolago večji pomnilnik.

Zadnjič sem videl sprogramiran šah za mikroračunalnik, ki ima, kot se to seveda spodobi, več težavnostnih stopenj. Na nižjih stopnjah ga je kaj lahko premagati, če niste prehud začetnik. Problem pa nastane, če bi hoteli ugotoviti, kako igra na najzahtevnejši stopnji. Približni čas, ki si ga računalnik vzame za eno potezo, je namreč nič več in nič manj kot 24 ur. Rad bi ga poznal, ki je z računalnikom odigral ta šah na najzahtevnejši stopnji!

V prvem primeru smo naleteli na težave s prostorom in v drugem primeru na težave s časom. Zato si oglejmo, kako bi prostor in čas, ki ju potrebuje računalnik, natančneje definirali.

Ker nas bolj zanima časovna zahtevnost algoritma, bomo pustili prostorsko zahtevnost ob strani. Algoritem lahko definiramo povsem strogo, vendar naj nam zadošča že intuitivna slika. Recimo, da rešujemo neki problem. *Algoritem* je spisek natančno določenih navodil, ki nas v končnem času po strogo začrtani poti pripeljejo do rešitve problema. Problem lahko rešimo na več načinov (z različnimi algoritmi). Algoritem bo tem boljši, čim manj prostora in čim manj časa bo porabil. Vsak problem ima tudi svojo *velikost.* Velikost problema je mera za obsežnost vhodnih podatkov. Če na primer urejamo neko zaporedje, je velikost problema število elementov zaporedja, ki ga želimo urediti.

Definicija 1. *Časovna zahtevnost* algoritma je čas, ki ga potrebuje algoritem za rešitev problema pri dani velikosti problema.

Čas je funkcija velikosti problema. Ker različni računalniki različno hitro računajo, je smiselno, da za enoto časa vzamemo osnovno računsko operacijo (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje). Ravno tako za enoto štejemo primerjanje vrednosti dveh spremenljivk. Če je časovna zahtevnost $3n^4 - 5n$, algoritem opravi $3n^4 - 5n$ osnovnih računskih operacij in primerjanj.

Podobno definiramo *prostorsko zahtevnost* algoritma.

Zanimala nas bo le hitrost rasti zahtevnosti algoritma in ne točna vrednost, zato definirajmo:

Definicija 2. Funkcija $g(n)$ je $O(f(n))$, če obstaja konstanta $C > 0$, tako da je: $g(n) \leqslant C.f(n)$, za vse dovolj velike n.

Definicija potrebuje nekaj pojasnil. Da $g(n) \leqslant C.f(n)$ velja za vse dovolj velike n, pomeni, da velja za vsa naravna števila, ki so večja od nekega naravnega števila n_0. Izjavo $g(n) = O(f(n))$ preberemo takole: funkcija $g(n)$ je "veliki o od" $f(n)$.

Časovno zahtevnost algoritma (in tudi prostorsko) navadno opišemo s pomočjo velikega o.

Primer 1. Velikokrat imamo opraviti z zahtevnostjo, ki se izraža s polinomom v velikosti problema. Polinom $g(n)$ stopnje k je funkcija oblike

$$g(n) = a_k.x^k + a_{k-1}.x^{k-1} + ... + a_1.x^1 + a_0$$

kjer so koeficienti a_i poljubna realna števila in je $a_n \neq 0$. Recimo, da je $g(n) = 2n^4 + n^3 - n^2 - 23n + 10$. Tedaj je zahtevnost algoritma $O(n^4)$. Če namreč za konstanto C vzamemo $C = 3$, potem je pogoj $2n^4+n^3-n^2-23n+10 \leqslant 3n^4$ izpolnjen kar za vsa naravna števila in lahko izberemo $n_0 = 0$. Nasploh velja, da zahtevnost polinoma dobimo tako, da vzamemo vodilno potenco polinoma. Tako je $5n^3 + 100n^2 + 99n = O(n^3)$. Kako velik n_0 moramo vzeti, če izberemo $C = 6$? ($n_0 = 100$). Seveda bi bil n_0 manjši, če bi izbrali večjo konstanto C.

Vprašajmo se, kakšna je časovna zahtevnost algoritma za igranje šaha. V načelu je algoritem tak, da pregleda vse kombinacije in se nato odloči za najboljšo. No, vseh možnih kombinacij do konca partije prav gotovo ne bo pregledal. Za koliko potez vnaprej naj torej gleda vse možnosti? Če gleda samo za eno potezo, tedaj niti ni tako veliko možnosti. Seveda bo igral temu primerno slabo. Če se odloči za dve, mora upoštevati vse možne nasprotnikove odgovore na prvo potezo ... Gotovo slutite, da število kombinacij z vsako naslednjo potezo strahovito hitro raste. Seveda bo igral tem bolje, čim več potez vnaprej bo gledal. Odtod izvira velika poraba časa za igranje na zahtevnejših stopnjah. Ustvarjalci programov za igranje šaha se zato trudijo, da bi z globljim poznavanjem šaha pregledovali samo nekatere kombinacije in se med temi odločili za pravo potezo.

V ocenjevanju zahtevnosti imajo poseben pomen eksponentne funkcije. Funcija $f(n)$ je *eksponentna,* če je oblike $f(n) = a^n$, kjer je a neko pozitivno število. Primer eksponentnih funkcij sta $f(n) = 2^n$ in $f(n) = e^n$.

Naloga. Pokaži, da funkcija $f(n) = 2^n$ ni $O(n^k)$ za noben k.

Glavna značilnost eksponentnih funkcij je, da strahovito hitro naraščajo. Poznamo tudi funkcije, ki naraščajo še hitreje kot eksponentne, na primer

$$f(n) = 2^{2^n}$$

pa tudi take, ki naraščajo počasneje kot eksponentne, pa vendar hitreje kot katerakoli potenca (na primer $f(n) = n^{\log n}$). Kakršnokoli funkcijo izmed omenjenih že srečamo, se nam ne piše dobro.

Naloga. Recimo, da je velikost problema n. Imamo tri algoritme: prvi je zahtevnosti n, drugi n^3 in tretji 3^n. Predpostavimo, da ručunalnik za eno operacijo potrebuje mikrosekundo (10^{-6} s). Kako velika je lahko naloga v vsakem od primerov, če imamo na razpolago uro računalniškega časa ($3.6.10^9$, 1532, 20)?

Algoritem je eksponenten, če je zahtevnosti $O(f(n))$, kjer je $f(n)$ eksponentna funkcija. Podobno je algoritem *polinomski*, če je zahtevnosti $O(f(n))$, kjer je $f(n)$ polinom. Problem igranja šaha je po svoji naravi časovno zelo zahteven, saj je njegova zahtevnost vsaj eksponentna, če ne celo več. Če za dani problem ne znamo poiskati boljšega kot eksponentni algoritem, potem lahko obupamo ali pa malo pogoljufamo pri reševanju problema na različne načine. Pri šahu pogoljufamo tako, da ne gledamo preveč potez vnaprej in s tem naredimo problem majhen.

Naloga. Morda kdo misli, da bodo hitrejši računalniki rešili počasne algoritme. Vendar temu ni tako. Recimo, da imamo na razpolago tisočkrat hitrejši računalnik kot v prejšnji nalogi, torej osnovno operacijo opravi v nanosekundi (10^{-9} s). Za iste zahtevnosti se zopet vprašajmo po največji obsežnosti, ki jo za vsakega med njimi lahko opravimo v eni uri ($3.6.10^{12}$, 15327, 26). Opazimo, da smo pri eksponentnem algoritmu zelo malo pridobili.

Za konec si oglejmo še nekaj primerov.

Primer 2. Iskanje največjega elementa zaporedja.

Recimo, da imamo neko poljubno zaporedje n števil, v katerem moramo poiskati največji element. Prav gotovo moramo pogledati vsa števila, saj bi lahko bilo največje število ravno tisto, ki ga nismo pogledali. Narediti moramo torej vsaj n osnovnih operacij. Sestavi algoritem, ki bo poiskal največji element zaporedja v času $O(n)$.

Primer 3. Urejanje zaporedja.

V praksi se velikokrat srečamo s problemom urejanja zaporedja. Zanj je izdelana že zelo obsežna teorija. Morda najpreprostejši algoritem bi bil naslednji: poiščemo največji element in ga damo na prvo mesto, nato med preostalimi poiščemo največjega in ga damo na drugo mesto, ... Poizkusi dokazati, da je časovna zahtevnost tega algoritma $O(n^2)$. Toliko časa algoritem potrebuje tudi v primeru, ko so vhodni podatki že urejeni. Radovednejšim naj povemo, da je časovna zahtevnost najboljših algoritmov za urejanje $O(n.\log n)$.

Primer 4. Delitev množice.

Imejmo končno množico A z elementi iz množice naravnih števil. Vprašajmo se, ali lahko to množico razdelimo na dve podmnožici A_1 in A_2 tako, da je vsota elementov v podmnožicah enaka. Če je $A = \{13, 4, 10, 11, 8\}$, sta množici $A_1 = \{13, 10\}$ in $A_2 = \{4, 11, 8\}$ rešitev problema delitve množice A. Problem je videti preprost, tako da ga verjetno ni težko rešiti. Vendar nas prvi vtis ne sme zavesti. Dosedaj namreč še nihče ni našel polinomskega algoritma za problem delitve množice (naj opozorimo, da je v tem primeru velikost naloge dolžina zapisa podatkov in ne recimo največje dano število). Celo več: če bi komu to uspelo, bi s tem rešil tudi veliko število drugih pomembnih problemov (nekaj tisoč!), za katere tudi še ne poznamo polinomskega algoritma.

Sandi Klavžar

NOVICE

PRESEKOVI RAČUNALNIŠKI PROGRAMI

Od objave našega natečaja nas ločijo poletne šolske počitnice, zato naj vas ponovno spomnimo na našo akcijo zbiranja in izmenjave izvirnih programov za delo v šoli. V prvi letošnji številki Preseka ste lahko prebrali opis prvih programov, ki so prišli na naš razpis. Obilica dela ob zaključku šolskega leta in počitnice sta verjetno prispevala k temu, da smo do konca avgusta dobili le še eno kaseto s programi. Poslala sta jo **Maja in Aleksander Manohin.**

Na kaseti je kopica zanimivih programov, med katerimi sta za šolsko rabo posebej primerna programa Utrjevanje fizike – gibanje in Utrjevanje fizike – snov 7. razreda. Prvi program obravnava enakomerno in enakomerno pospešeno gibanje. Izračunava povezave med količinami, riše grafe in testira učenčevo znanje, drugi program pa, kot pove že naslov, izračunava in utrjuje zveze med fizikalnimi količinami, s katerimi se učenci srečajo v sedmem razredu. Oba programa sta zelo preprosta za uporabo, saj delo poteka s pomočjo menujev in tudi zmesti se ju ne da z nesmiselnimi podatki, zato ju toplo priporočamo za izmenjavo in uporabo. Naj omenimo le še to, da jih soavtorica uspešno uporablja pri svojem vsakdanjem šolskem delu.

Naslov avtorjev: Maja Manohin, OŠ Dr. Jože Potrč, Potrčeva 1, Ljubljana.

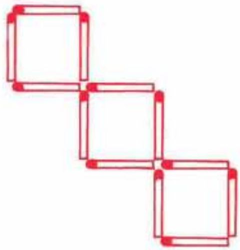
Upava, da bo z novim šolskim letom akcija bolj zaživela. V uredništvu se že pogovarjamo o nekaterih novih organizacijskih oblikah, ki bi omogočile enostavnejšo izmenjavo programov. Seveda pa za to potrebujemo vaše programe. Zato pogumno na delo in pošljite nam čimveč prispevkov. Ko smo že večkrat omenili, bodo posebej dobrodošle vse misli, želje in sugestije, ne le o tej akciji, marveč o Preseku nasploh.

Sandi Klavžar, Matija Lokar

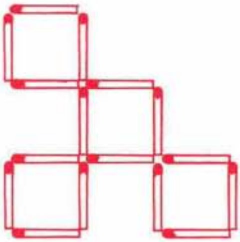
KRATKOČASNE VŽIGALICE – REŠITVE

39

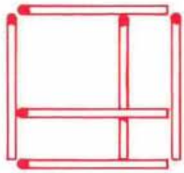
40



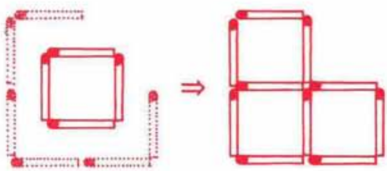
41



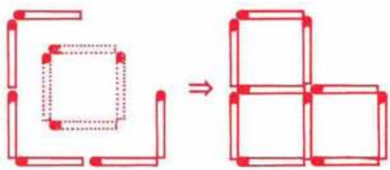
42



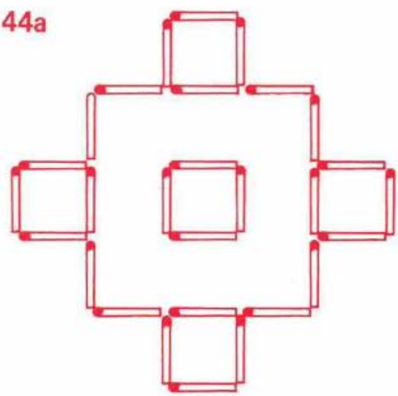
43a



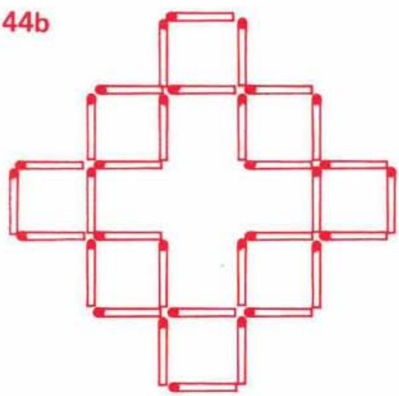
43b



44a



44b



Znamke, posvečene astronomiji, katere nam je že pred časom poslala Petra iz Ljubljane. IV