Predikatna logika
2.del

FRANE JERMAN

POVZETEK

V pričujočem članku se bomo seznanili najprej z aksiomatsko teorijo predikatnega računa in nekaterimi posebnostmi pri prevajanju tega računa. Pokazali bomo tudi na kratko, da je PR nadaljevanje KSR, pri čemer bomo pustili ob strani vprašanje modalne predikatne logike in sploh večvrednostne račune, ter se posvetili zgolj dvovalentni predikatni logiki.

ABSTRACT
PREDICATE LOGIC 2.PART

In this article we first acquaint ourselves with the axiomatic theory of the predicate calculation and some peculiarities in the transplation of this calculation. We shall show in short that PC is a continuation of CSC, where we shall leave aside the question of the modal predicate logic and polyvalent calculations in general and devote ourselves only to bivalent predicate logic.

1.

Gre, kot smo že omenili, za ožji račun s kvantifikatorji, kar pomeni, da imamo poleg individualne variable in konstante ter obeh kvantifikatorjev samo **enomestne** predikate, se pravi predikate, ki se nanašajo na en sam subjekt. S tem je popolnoma jasno, da gre za **atributivno** logiko, oz. stavke. Podobno kot v stavčni logiki, gre tudi tu za **ekstenzionalno** logiko, se pravi logiko, v kateri je mogoče **računati** s posameznimi logičnimi enotami, ali z drugimi besedami - kjer je mogoče posamezne logične entitete (stavke, predikatne stavke) reducirati na njihove logične (resničnostne) vrednosti, čeprav je treba dodati, da predikatna logika ne pozna mehanskega postopka verifikacije, kot ga stavčna logika. To je že leta 1936 povsem nedvoumno dokazal ameriški logik Alonzo Church, kar pa ne pomeni, da ne bi za posamezna matematična področja mogli to storiti. Tako je poljski logik Alfred Tarski leta 1948 iznašel odločitveno metodo za elementarno algebro realnih števil. Predikatna logika prvega reda, kot tudi pravimo logiki s kvantifikatorji in enomestnimi predikati pa je

kompletna ali popolna, kar pomeni tole: če α logično izhaja iz β, potem je α izpeljiv izraz iz β, kar je leta 1930 dokazal nemški logik Kurt Gödel.

Kot v stavčni logiki gre tudi pri predikatni logiki za ugotavljanje njenih **zakonov**, se pravi vedno veljavnih logičnih stavkov. Kdaj pa so predikatni stavki logično resnični? Odgovor je preprost: **takrat, ko je resnična** njihova individualna interpretacija resnična. Z drugimi besedami: **v pravem smislu besede so resnični samo tisti predikatni stavki, katerih bistvena prvina so *individualne* konstante.** To pa pomeni, da predikatni stavki z individualnimi **variablami** niso **niti resnični niti neresnični.**

Za kaj gre pri tem nam bo razvidno iz preprostega primera. Vzemimo formulo:

$\forall(x)\ F(x)$ ali za člane razreda "x" velja, da imajo lastnost F. Ta stavek očitno ne more biti niti resničen niti neresničen. Če vstavimo za "x" npr. "drevo", za predikatno konstanto "F" pa "je zelen", dobimo stavek "Za vse člane razreda 'drevo' velja, da so zeleni". Natanko vzeto bi ta stavek verificiralo natanko toliko individualnih stavkov, kolikor je dreves. Torej

$$"a_1" \wedge "a_2" \quad \text{itd.}$$

Že s tega primera je jasno, da stavka $\forall(x)\ F(x)$ ne moremo niti verificirati, niti falsificirati. To lahko počnemo le z individualnimi stavki, torej s tistimi, katerih subjekti so **lastna imena.**

Obstaja pa vendarle način, kako priti do **predikatnih zakonov.** Izhajajmo iz poznavanja stavčno logičnih zakonov. Vzemimo kar najpreprostejšega med njimi: zakon istovetnosti:

$$p \rightarrow p$$

Če stavčno variablo "p" zamenjamo za predikatno formulo

$$\forall x f(x) \rightarrow \forall x f(x)$$

potem dobimo predikatno logično **preslikavo** stavčno logičnega zakona. Trdim lahko, da lahko vse zakone stavčne logike **preslikamo** v predikatno logične zakone. Ali drugače:

Vsi stavčno logični zakoni veljajo tudi v predikatni logiki.

Nastane pa vprašanje, ali obstajajo tudi zakoni, ki veljajo **zgolj** v predikatni logiki. Odgovor je seveda pritrdilen, saj v nasprotnem primeru ne bi bilo nobene razlike med obema računoma, vemo pa, da s stavčno logiko ni mogoče izraziti vseh zakonov, ki so evidentno **logiški zakoni.**

Če se zavedamo, da s predikatnim računom izražamo **notranjo** strukturo logičnih stavkov, potem je jasno, da se bodo novi zakoni, ki jih s stavčno logiko ni mogoče izraziti, nanašali prvenstveno na tiste nove elemente, ki predikatno logiko prav postavljajo kot predikatno. Ali natančneje rečeno, novi zakoni se bodo nanašali na oba kvantifikatorja in na individualne variable, čeprav je jasno, da računa s kvantifikatorji (kakor tudi imenujemo predikatno logiko) ne moremo izvajati brez poznavanja in upoštevanja zakonov stavčne logike. Stavčna logika ima tu vlogo temeljnega kamna celotne ekstenzionalne logike.

Če pojmujemo logiko kot teorijo, ki nam omogoča poiskati pravilne **sheme** za sklepanje, ki jih seveda izvajamo iz logičnih zakonov, potem lahko definiramo **tavtologije** predikatnega računa kot **vedno resnične stavke**, s čemer smo definirali logične zakone tudi v stavčni logiki. Ob naj opozorimo, da imamo v tem primeru opraviti s precej bogatejšim logiškim jezikom.[1]

2.

V pričujočem sistemu bomo obravanavali le izraze z **vezanimi** variablami, se pravi, da bodo vse indivudalne variable, ki nastopajo v tem sistemu, vezane na enega izmed obeh kvantifikatorjev. Pojem *prostih* variabel se nanaša na tiste individualne variable, ki jih ne veže noben kvantifikator.

Uporabili bomo tele simbole:

Splošni kvantifikator: $\forall(x)$

Eksistencialni kvantifikator: $\exists(x)$

Individualne variable: x, y, z

Simbole za predikatne izraze: α, β, γ, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ itd.[2]

Tako izraz $[\neg \forall y\, \alpha(y) \leftrightarrow \exists y \neg \alpha(y)]$ pomeni npr. tavtologijo

$$\neg \forall y\ [R(y) \rightarrow S(y)] \leftrightarrow \exists y \neg [R(y) \rightarrow S(y)]$$

kjer je izraz α zamenjan za predikatni izraz " $R(y) \rightarrow S(y)$".

Torej: izraze znotraj oklepajev (se pravi predikatne formule) bomo označevali z grškimi črkami, ker pomenijo **skupno formo različnih** logiških zakonov predikatnega računa.

Treba je še dodati **definicije** pravilno oblikovanih izrazov ali krajše POI:

1. Vsak izraz, sestavljen iz predikatne konstante in individualne variable, ki nastopajo po njem v oklepaju, je POI. Tako zvezo navadno imenujemo *atomarni* izraz.

2. Vsaka povezava dveh POI s stavčnimi logičnimi vezniki ($\wedge$, $\forall$, $\rightarrow$ in $\leftrightarrow$) je sama POI.

3. Vsak izraz, ki je sestavljen iz " $\neg$ " (negacije) pred POI, je tudi sam POI.

4. Vsak izraz, ki ga sestavlja kvantifikator (univerzalni ali esksistencialni) ter veže določeno individualno variablo v oklepaju, ki vsebuje POI, je sam POI.

5. Vsak izraz, ki nastane iz atomarnih POI na podlagi logičnih operacij (izpeljevanja in substitucije) je sam POI.

Aksiomi PR so vsi tisti POI, ki zadovoljujejo naslednje logične izraze:

---

1 V nadaljevanju se bom držal aksiomatskega sistema poljskega logika Andreja Grzegorczyka *Zarys logiki matematycznej*, PWN, Varšava 1961, str.118 ff.

2 V članku *Predikatna logika* (Anthropos, 3-4, 1990, str 83-92) je prišlo do nekaterih nejasnosti, povezanih s tiskom. Tako je treba preurediti in dopolniti seznam logiških terminov (str.83) takole:

1. Individualne konstante: **a, b, c ...**
2. Individualne variable: **x, y, z ...**
3. Predikatne konstante: **f, g, h, ali F, G, H ...**
4. Univerzalni kvantifikator: **$\forall(x)$ ali kar (x)**
5. Eksistencialni kvantifikator: **$\exists(x)$**

itd.

I. Poljubne tavtologije KSR (klasičnega stavčnega računa), kjer so

A. stavčne variable zamenjane za POI PR, in

B. in so tako nastali izrazi opremljeni s splošnimi ali eksistencialnimi kvantifikatorji, ki vežejo nase **vse** v izrazu nastopajoče individualne variable.[3]

II. Tavtologije, ki zadevajo *splošne* kvantifikatorje.

Fx Gx

1. $\forall \ldots [\, \forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\, \cancel{\alpha} \rightarrow \forall x\, \beta)\,]$
(Zakon porazdelitve implikacije)
2. $\forall \ldots [\, \forall x\, (\ x\ ) \rightarrow \alpha(a)\,]$
(Zakon substitucije ali prehoda od splošnega na posamezno).
3. $\forall \ldots [\, \forall x\ \forall y\, \alpha \rightarrow \forall y\, \forall x\, \alpha\,]$
(Zakon zamenljivosti kvantifikatorjev)
4. $\forall \ldots [\, \forall x\, \forall y\, a \rightarrow \forall x\, \alpha\,(y/x)\,]$
(Zakon povezovanja splošnih kvantifikatorjev)[4]
5. $\forall \ldots [\, \alpha \rightarrow \forall x\, \alpha\,]$
(Zakon priključitve odvečnega kvantifikatorja)[5]

III. Tavtologije, ki zadevajo eksistencialni kvantifikator.

6. $\forall \ldots [\, \forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\, \alpha \rightarrow \exists x\, \beta)\,]$
(Zakon porazdelitve implikacije)
7. $\forall \ldots [\, \alpha(x) \rightarrow \exists x\, \alpha(x)\,]$
(Zakon abstrahiranja konkretnosti)
8. $\forall \ldots [\, \exists x\, \exists y\, \alpha \rightarrow \exists y\, \exists x\, \alpha\,]$
(Zakon premeščanja kvantifikatorjev)
9. $\forall \ldots [\, \exists x\, \alpha\, (y/x) \rightarrow \exists x\, \exists y\, \alpha\,]$[6]
(Zakon drobitve eksistencialnih kvantifikatorjev)
10. $\forall \ldots (\, \exists x\, \alpha \rightarrow \alpha\,)$[7]
(Zakon opustitve odvečnega kvantifikatorja).

Poleg navedenih zakonov so veljavne seveda vse druge tavtologije od 1. do 10., ki bi nastale z nadomestitvijo x in y s poljubnim parom spremenljivk.

Gregorzcykov aksiomatski sistem pa ima še dodatno predpostavko, namreč **predpostavko nepraznosti:**

$$\exists x\, [\, \mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{P}(a)\,]$$

ki pomeni tole: da iz stavka, da ima nekaj tako ali tako lastnost, sledi, da ima to lastnost neki individuum. Velja seveda tudi nasprotno:

---

3 S tem smo pravzaprav povedali, da v našem sistemu *prostih* variabel za zdaj ne bomo upoštevali.

4 Avtor pojasnjuje ta zakon takole: "Če izraz α ne vsebuje nobenega kvantifikatorja, ki bi vezal spremenljivko x, v čigar dosegu bi se nahajala spremenljivka y, potem lahko nadomestimo prosto variablo y v α z variablo x". (Idem, str. 120).

5 Ob posebnem pogoju seveda, da izraz a ne vsebuje proste spremenljivke x.

6 Ta zakon velja samo v primeru, da izraz α (y/x) ne vsebuje nobenega kvantifikatorja, ki bi vezal variablo y in v katerega dosegu bi bila prosta variabla x v α (y/x), in se izraz α (y/x) samo po tem razlikuje od α, da so vse variable y, ki so proste v α zamenjane v izrazu α (y/x) s spremenljivko x.

7 Ob pogoju, da α ne vsebuje proste variable x.

$$P(a) \rightarrow \exists P(x),$$

torej trditev, da iz obstoja nečesa sledi tavtološko, da je vsaj ena stvar, ki ima tako in tako lastnost.

3.

Oglejmo si zdaj, kako delujejo pravzaprav navedene tavtologije ali aksiomi. V prvi skupini so tavtologije KSR. Iz njih dobimo nove aksiome (predikatnega računa!) z navadno **substitucijo**. Tako iz tavtologije:

$$p \rightarrow [\, q \rightarrow (\, p \wedge q\,)]$$

dobimo lahko večmestni predikatni izraz

$$\forall (x) \forall (y) \{R(x, y) \rightarrow [\, S(x, y) \rightarrow (\, R(x, y) \wedge S(x, y))]\}$$

in to ne glede na to, kaj posamezni stavki pomenijo. Konstanti R in S v gornjem zapisu ne pomenijo običajnih **enomestnih** predikatov ampak **relacije**. Tako izraz "R(x,y)" pomeni, da vlada med x in y določen odnos (Za R je odnos "biti večji", x in y pa sta dve med seboj različni števili, npr." x = 4, y = 3", dobimo npr. izraz "4 je večji od 3".

Isto tavtologijo lahko transformiramo z enomestnimi predikatnimi izrazi, kjer uporabljamo za splošni predikatni stavek izraz

$$\forall (x)\, f(x)\,,$$

ki ga beremo: "Za vsak x velja, da ima lastnost f"; za eksistencialni predikatni stavek pa uporabljamo izraz

$$\exists (x)\, f(x)\,,$$

kar beremo: "Eksistira vsaj en x, za katerega velja, da ima lastnost f".

Tako gornjo tavtologijo lahko izrazimo takole:

$$(x) \{\, f(x) \rightarrow [\, g(x) \rightarrow (\, f(x) \wedge g(x))]\}\,,$$

Enako lahko iz znane tavtologije, imenovane *kontrapozicija:*

$$(\, p \rightarrow q\,) \rightarrow (\, \neg q \rightarrow \neg p\,)$$

dobimo predikatni tavtologiji:

$$\forall (\, x, y\,) \{\, [\, R(\, x, y\,) \rightarrow S(\, x, y\,)] \rightarrow [\, \neg S(\, x, y\,) \rightarrow \neg R(\, x, y\,)]\}$$

ali

$$(x) \{\, [\, f(x) \rightarrow g(x)\,] \rightarrow [\, \neg g(x) \rightarrow \neg f(x)]\}$$

Tako lahko poljubno tavtologijo klasičnega stavčnega računa preuredimo v tavtologijo ali logični zakon poljubnega predikatnega računa, se pravi predikatnega računa poljubne stopnje. Veljavnost teh aksiomov je tako rekoč *apriorna*, ker je veljavna že na temelju lastne logiške *strukture* !

Skušajmo malce razložiti aksiome druge skupine, ki zadevajo značilnosti splošnega kvantifikatorja.

Zakon *porazdelitve splošnega kvantifikatorja* v implikacijskem izrazu je jasen takorekoč sam na sebi. če si vzamemo za primer razred mačk, je gotovo resnična tale implikacija:

$$\forall x \text{ (Če se x giblje, tedaj si lahko x išče hrano).}$$

Iz nje izhaja tako stavek

$$\forall x \text{ (x se giblje)}$$
$$\text{in}$$
$$\forall x \text{ (x si išče hrane)}$$

ali drugače povedano

$$\forall x [f(x) \rightarrow g(x)] \rightarrow [\forall x f(x) \rightarrow \forall x g(x)]$$

za f = gibanje
za g = iskanje hrane
za x = mačka

Gornja tavtologija je poseben primer obravnavanega zakona in ne potrebuje posebne razlage.

Naslednji zakon, ki ga je treba malce razložiti, je zakon *substitucije* ali zakon prehajanja od splošnega na manj splošno ali od splošnega na posamezni primer. Očitno ta zakon velja brez vsakih pridržkov ali omejitev. Iz splošnega zakona lahko torej dobimo s substitucijo povsem konkretne stavke. Vzemimo primer razreda (množice) naravnih števil. Tam velja zakon

$$\forall x \forall y \ (x + y = y + x)$$

in če substituiramo x za 2 in y za 3, dobimo enačbo

$$2+3 = 3+2.$$

Z drugimi besedami, kar velja za celoto velja tudi za vsak njen del.

Naslednji neproblematičen zakon je zakon *zamenljivosti splošnih kvantifikatorjev*, ki ugotavlja, da je zaporedje splošnih kvantifikatorjev brez pomena za resničnost predikatnega stavka. Popolnoma vseeno je, ali zapišemo npr.

$$\forall x \forall y \ (f (x, y))$$
$$\text{ali}$$
$$\forall y \forall x \ (f (x, y)) .$$

Zakon povezovanja splošnih kvantifikatorjev ali *istovetenja spremenljivk* govori pravzaprav nekaj podobnega kot zakon substitucije. Če imamo npr. trditev v obliki

$$\forall x \forall y \ f (x, y) ,$$

moramo priznati tudi trditev

$$\forall x \ f (x, x) ,$$

kar pomeni, da smo spremenljivko y substituirali s spremenljivko x. Če namreč velja lastnost f za x in y, velja tudi za x. Ali še bolj jasno, če velja relacija f za x in y, velja tudi za in x in x. Druga trditev je torej poseben primer splošnega zakona. Tu pa velja spet važno opozorilo, da izraz α *ne sme vsebovati nobenega kvantifikatorja, ki bi vezal spremenljivko x v čigar dosegu bi bila spremememnljivka y, prosta v izrazu* α. Za kaj v tem primeru gre, naj pokaže primer, kot ga navaja Gregorczyk v omenjenem učbeniku: "Naj bo α tale izraz z dvema spremenljivkama x in y:

$$(x = x) \wedge \forall x (x < y) .$$

Uporabimo na tem izrazu gornji zakon in zanemarimo opozorilo. V tem primeru dobimo stavek:

$$\forall x \forall y [(x = x) \wedge \forall x (x < y)] \rightarrow \forall x [(x = x) \wedge \forall x (x < x)]^{8}$$

ki na področju stvarnih števil seveda ne drži, saj nobeno stvarno število ne more biti manjše od samega sebe.

Kar zadeva *zakon priključitve odvečnega splošnega kvantifikatorja*, je ta podoben stavčno logičnemu zakonu *simplifikacije* implikacije, ki omogoča priključitev poljubni precedens k že priznanemu stavku[9]. V našem primeru gre za priključevanje splošnega kvantifikatorja torej: "Če je 2 + 2 = 4, potem je tudi res, da je za vsako število x, 2 + 2 =4." Splošni kvantitifkator je odvečen, ker *ne veže* nobene spremenljivke, zato ga lahko seveda vedno tudi dodamo, ne moremo pa ga vedno opustiti. Z delnim kvantifikatorjem je ravno narobe.

Preostane nam še komentar k tretji skupini zakonov, ki zadevajo postopke z *delnim kvantifikatorjem.*

Prvi zakon, *zakon porazdelitve implikacije* za delni kvantifikator je dvojnik istoimenskega zakona za splošni kvantifikator. Njegova vsebina je razvidna sama na sebi. Primer iz teorije množic: "Če [množica A je vsebovana v množici B], potem [če eksistirajo predmeti, ki sodijo v množico A, potem eksistirajo tudi predmeti, ki sodijo v množico B]. Z uporabo logiškega jezika lahko tole zapišemo bolj pregledno takole:

$$\forall x (x \in B) \rightarrow [\exists x (x \in A) \rightarrow \exists x (x \in B)]$$

in je veljaven na vsakem področju, se pravi brez omejitev.

Naslednji je *zakon abstrahiranja konkretnosti*, ki je izrazito podoben aksiomu substitucije, kjer pa začetno spremenljivko x substituiramo z neko konstanto. Stavek "če je Zemlja Sončev satelit, potem eksistira tak x, da je x Sončev satelit", ali simbolno:

$$Z (\text{Zemlja}) \rightarrow \exists x \, f (x) ,$$

kjer izraz "f(x)" pomeni stavek "Zemlja je Sončev satelit". Gornji stavek je neposredna konsekvenca našega aksioma:

$$\forall x [f (x) \rightarrow \exists x \, f (x)]$$

---

8 A. Grzegorczyk: Zarys logiki .... cit. izd. str. 124

9 Ta zakon se glasi $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Iz navedenih primerov je razvidno, da je smisel tega zakona, ki ga sicer matematiki v svojih dokazih močno uporabljajo, povsem jasen in samoumeven. Zakon velja brez omejitev. Enako velja brez omejitve tudi *zakon premeščanja kvantifikatorjev*, ki omogoča poljubno povezovanje delnih ali eksistencialnih kvantifikatorjev, saj zaporedje predmetov, o katerih menimo, da eksistirajo, ni pomembno.

Omejitev, kakršno smo imeli pri zakonu istovetenja spremenljivk v zvezi z vezanimi variablami, velja tudi pri zakonu, ki smo ga imenovali *zakon drobitve eksistencialnih kvantifikatorjev*. Zadnji zakon v tej vrsti je *zakon opustitve odvečnega kvantifikatorja*, ki dovoljuje, da na začetku trditve opustimo eksistencialni ali delni kvantifikator, kolikor ne veže nobene spremenljivke ali variable. Ali analogno podobnemu zalonu za splošni kvantifikator: iz trditve $\forall x\ (2 + 2 = 4)$ lahko izvedemo trditev " 2 + 2 = 4 ".

Zadnji aksiom te skupine predpostavlja, da ekistira vsaj en predmet in po svojem bistvu sodi v ontologijo in ne v logiko. Vendar *klasični logični sistem* je prav tak sistem, ki vsebuje tudi aksiom nepraznosti, o čemer bomo na koncu sestavka še spregovorili.

4.

Definicijsko je treba še poudariti, da so trditve KLS[10] vsi tisti izrazi, ki nastanejo iz aksiomov KLS z uporabo pravil izpeljevanja, tj. obeh substitucij (definicijske in enotne) in *modusa ponens*. Vsak pravilno izpeljani izraz je seveda tudi tavtologija KLS.

Zdaj seveda lahko izpeljemo celo vrsto trditev, ki se nanašajo predvsem na rabo obeh kvantifikatorjev. A. Grzegorczyk jih je v navedeni knjigi izpeljal kar 69, vendar predvsem takšne trditve, ki imajo posebno vlogo pri dokazovanju matematičnih trditev. Najpomembnejši za izpeljevanje se zdi aksiom št. 1 ali A-1, ki govori o porazdelitvi implikacije. Tako lahko npr. postavimo trditev

$$11.\ \{\ \forall x\,[\,p \rightarrow f(x)\,] \rightarrow [\ \forall x\, p \rightarrow \forall x\, g(x)\,]\ \}$$

pri čemer predpostavljamo, da je "p" stavek, kot ga poznamo iz stavčne logike, stavek "f(x)" pa sme imeti le eno samo spremenljivko x, ki je izpeljanka A-1. Prav tako je poseben primer A-5

$$12.\ (\,p \rightarrow \forall x\, p\,)\ .$$

Kot naslednjo tezo lahko navedemo stavčno tavtologijo, razširjeno za splošni kvantifikator po načelu substitucije stavčnih variabel za predikatne. Stavčna tavtologija se glasi:

$$[\,p \rightarrow (\,q \rightarrow r\,)\,] \rightarrow \{\,(\,s \rightarrow q\,) \rightarrow [\,p \rightarrow (\,s \rightarrow r\,)\,]\,\}$$

Če v tem izrazu substituiramo za

"p" izraz " $p \rightarrow f(x)$ ";
"q" izraz " $\forall x\, p$ ";
"r" izraz $\forall x\, f(x)$ "; in
"s" izraz "p".

---

10 To je kratica za *Klasični logični sistem*

dobimo dokaj zapleten izraz

13. $\{ [\forall x (p \rightarrow f(x))] \rightarrow \{ \forall x\, p \rightarrow \forall x\, f(x)]\} \rightarrow \{ (p \rightarrow \forall x\, p) \rightarrow \{ [\forall x (p \rightarrow f(x)] \rightarrow [p \rightarrow \forall x\, f(x)]\}\}$,

ki pa omogoča nadaljno dedukcijo in sicer s pravilom *modus ponens:*

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Prvi del teze 13 je namreč enak tezi št. 11 (torej P) in tako postane teza št. 14 konsekvens teze št. 13:

14. $(p \rightarrow \forall x\, p) \rightarrow \{ [\forall x (p \rightarrow f(x))] \rightarrow [p \rightarrow \forall x\, f(x)]\}$

In podobno lahko izpeljemo iz tez št. 14 in št. 12 tezo št. 15:

$$[\forall x (p \rightarrow f(x))] \rightarrow [p \rightarrow \forall x\, f(x)]$$ [11].

S tem je opisan primer izpeljevanja v aksiomatskem sistemu predikatnega računa, ki ga je mogoče uporabiti na različnih matematičnih teorijah. Bistvo dedukcijskega postopka je v tem, da se sklicujemo vedno na aksiome predikatnega računa, navedene v treh skupinah (vsega skupaj je tu 9 aksiomov) *in* na posamezne ustrezne tavtologije klasičnega stavčnega računa.

5.

Za konec še nekaj pomembnih metateoretičnih definicij logiških pojmov, uporabnih pri predikatni logiki. To so pojmi **interpretacije, univerzalne veljavnosti, logične posledice in logične konsistentnosti.** [12]

Interpretacija

Stavek P je **interpretacija** izraza Q upoštevaje področje individuov D *če in samo če* lahko dobimo P iz Q ob zamenjavi (substituciji) predikatnih konstant in individualnih variabel, definiranih za področje D, s predikatnimi konstantami in individualnimi variablami, nastopajočimi v Q in ob zamenjavi (substituciji) lastnih imen individuov v D za lastna imena (tj. za individualne konstante) in proste variable v Q.

Smisel te definicije je v tem, da je interpretacija zamenjava vseh logiških simbolov za to, kar so v naravnem jeziku. S tem dobimo konkretni stavek, ki mu lahko prisodimo lastnost

11 Avtor Gregorczyk pripominja, da je ta teza zelo pomembna za račun s kvantifikatorji, vendar opozarja, da izraz "p" ne sme vsebovati proste spremenljivke "x". Izraz kot pravilo omogoča prenesti splošni kvantifikator pred implikacijo na konsekvens te implikacije.

12 Definicije posnemam po odličnem uvodu v moderno logiko Patricka Suppesa Introduction to LOGIC, New York, 1957. Kljub "starosti" knjige je to delo še vedno izjemno uporabno in instruktivno.

resničnosti ali neresničnosti. Samo individualni stavki, ki nastanejo z zamenjavo individualnih konstant (a, b, c itd.) za prava **lastna imena**, so po svojem karakterju lahko resnična ali neresnična. Od tod tudi **nominalistični** značaj predikatne logike prvega reda sploh. Ali če to prikažemo na preprostem primeru:

$$\forall x [f(x) \rightarrow g(x)]$$

f = človek

g = umrljivost

x = poljubna spremenljivka (torej "nekaj"!).

Gornji stavek preberemo: "Če je x človek, potem je x umrljiv". Logična interpretacija tega stavka je:

$$fa \rightarrow ga ,$$

Kar pomeni, če individualno konstanto zamenjamo za lastno ime, recimo Marko, tole:

Če je Marko človek, potem je umrljiv.

Univerzalna veljavnost

Na podlagi definiranega in obrazloženega pojma interpretacije lahko definiramo pojem **univerzalne veljavnosti** takole:

Logični izraz je veljaven *če in samo če* je vsaka njegova intepretacija na vsakem ne-praznem področju individuov resnična.

Intuitivni smisel te definiciji je v domnevi, da je stavek univerzalno veljaven takrat, kadar je resničen v vsakem možnem svetu, kot bi dejal Leibniz. Taki pa so lahko samo aksiomi ali logični zakoni ali logične tavtologije. Tu je namreč vsaka interpretacija **vedno** resnična.

Logična posledica

Z istim pojmom logične interpretacije lahko definiramo tudi logično posledičnost:

Izraz Q logično sledi ali izhaja iz izraza P *če in samo če* na vsakem ne-praznem področju individuuov vsaka interpretacija, ki verificira P, verificira tudi Q.

Lahko pa ta pojem definiramo še bolj na kratko, upoštevaje tudi definicijo univerzalne veljavnosti:

Q logično izhaja iz P *če in samo če* je pogojnik $P \rightarrow Q$ univerzalno veljaven.

Preostane nam samo še definicija logične konsistentnosti, kar bi lahko **poslovenili** z ne preveč povednim izrazom **logične trdnosti** ali **čvrstosti.** V logiki pa dobi seveda poseben definicijsko utrjen smisel:

Logični izraz je **konsistenten** *če in samo če* eksistira vsaj ena njegova resnična interpretacija na nekem ne-praznem področju individuov.

Tako je npr. izraz

$\forall x\, f(x) \wedge \neg \exists f(x)$

nekonsistenten, ker drugi del konjunkcije " $\neg \exists f(x)$ " pomeni prav **prazno** področje. Taka konjunkcije je torej nujno neresnična.

S tem so podani poglavitni pojmi za uvod v proučevanje nadaljnih lastnosti predikatnega računa prvega reda.