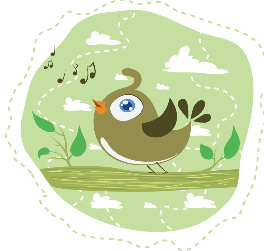
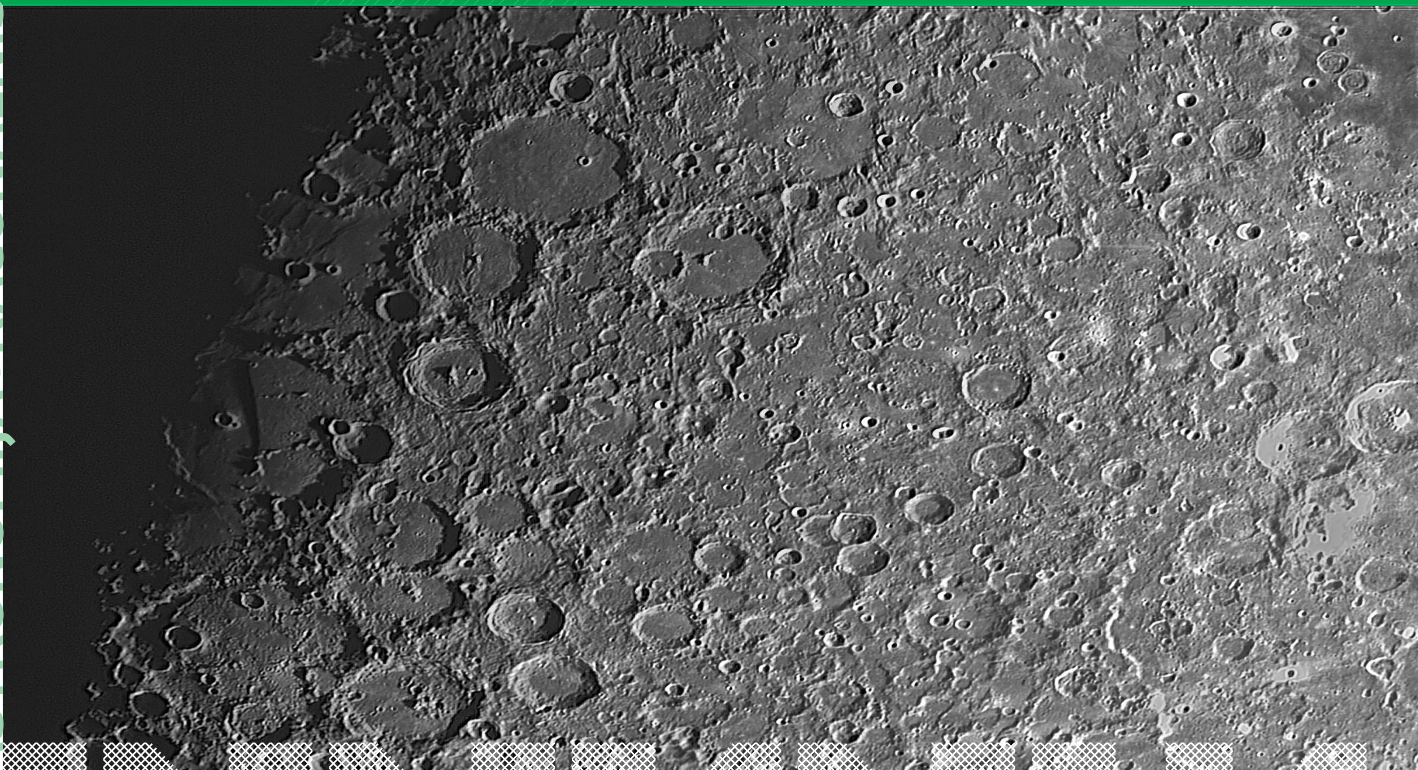


MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#4

PRESEK LETNIK 47 (2019/2020) ŠTEVILKA **4**



PRESEK

→ ŠAHOVSKI KRALJ V POSEBNIH OKOLIŠČINAH

→ OBOK

→ SANKTPETERBURŠKA ASTRONOMSKA OLIMPIJADA

→ ALI LAHKO RAČUNALNIK SPIŠE ESEJ?

ISSN 0351-6652

Lepota ustvarjanja v matematiki in glasbi

Čeprav se mnogim zdi, da sta matematika in glasba popolnoma nasprotni področji, imata veliko skupnega. Obe druži zagnana ustvarjalnost in živahnost, ki sta usmerjeni v lepoto in eleganco. Težko je verjeti, da matematiki v iskanju lepih rezultatov z elegantnimi dokazi pogosto improvizirajo. Matematik in glasbenik Rob Schneiderman pravi: »Prav vsak dan matematiki in glasbeniki ustvarjajo novo matematiko in novo glasbo. Matematiki pogosto raziskujejo v skupinah, razvijajo posamezno področje, odpravljajo napake, zaidejo v popolnoma napačno smer, se redno menjujejo v vodilnih vlogah in spontano prihajajo do ustvarjalnih prebliskov. Enaka dinamika se pojavlja tudi v manjših skupinah jazzovskih ustvarjalcev.

Obe, matematika in instrumentalna glasba, imata neverjetno močan in neločljivo povezan abstraktni pomen. S pomočjo logike in zvoka sta sposobni širiti zapletene ideje in ustvarjati čudovite strukture. Kljub vsem podobnostim pa je nenavadno, da lahko v glasbi uživajo tudi poslušalci brez tehničnega znanja, globina uživanja v matematiki pa je močno povezana z matematično izobrazbo. Matematika je tako vrsta glasbe, ki pa jo slišijo le glasbeniki.«

Upoštevajte torej naš nasvet: Za trenutek se ustavite in zaslišite matematiko!

Kogar tema bolj zanima, si lahko prebere članek *Jazz Duo Explores the Intersection of Math and Music*, ki ga je marca 2019 objavil David R. Adler v reviji Flagpole.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 4

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Podrobnost površine Lune v fazi prvega krajca. Foto: Andrej Guštin

Šahovski kralj v posebnih okoliščinah

Marko Razpet

Obravnavali bomo nekatere preproste kombinatorične probleme na šahovnici. Podobne probleme smo sicer srečali ali že v 15. in 16. letniku Preseka. Novo v tem prispevku pa so ovire, ki jih na različne načine postavimo na šahovnico.

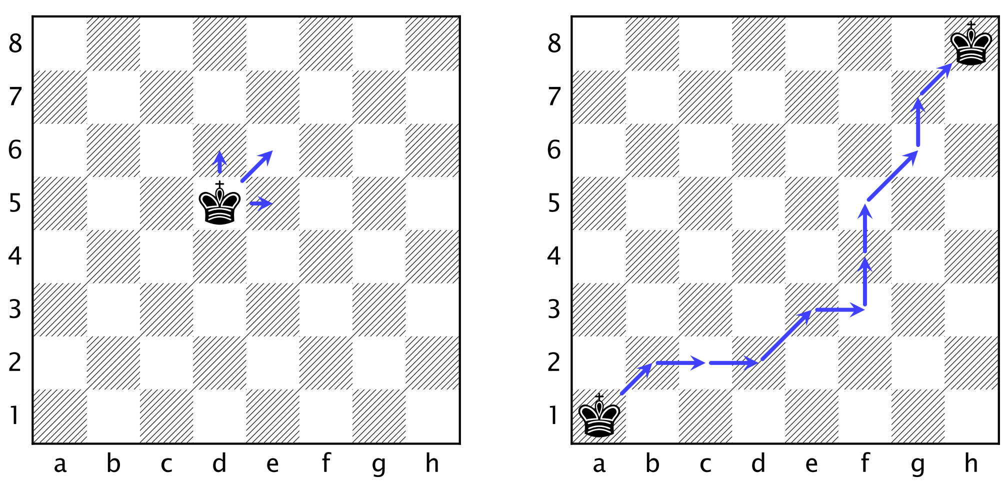
Šahovskega kralja ♚ (lahko tudi ♔) smo izbrali samo zato, ker se sme na šahovnici premikati, če nima ovir, v osmih smereh, vedno samo za eno polje: levo, desno, navzgor, navzdol, pa še v štirih diagonalnih smereh. Vsak tak premik bomo imenovali *korak*. Na šahovnici bo kralj ves čas edina figura.

Vsako polje **xy** je označeno s črko **x** iz množice $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}\}$ in številko **y** iz množice $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8}\}$. Črke označujejo vertikale, številke pa horizontale. Polje **c5** je na primer na vertikali **c** in na horizontali **5**. Namesto opisane tradicionalne šahovske oznake polja **xy** bomo raje uporabljali matematično koordinatno oznako (i, j). Pri tem pomeni i absciso, j pa ordinato polja (i, j). Za šahovska polja sta koordinati i, j števili iz množice $\mathcal{J} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (glej spodnji in levi rob tabele 1). Primeri. $\mathbf{a1} = (0, 0), \mathbf{f7} = (5, 6), \mathbf{h8} = (7, 7)$.

Na začetku stoji kralj na polju $(0, 0)$. Njegov cilj pa je prispeti na polje $(7, 7)$, pa ne kakorkoli, ampak tako, da je *cilju po vsakem koraku bliže*. To pa pomeni, da lahko kjerkoli na šahovnici izbira samo med tremi koraki: na desno, navzgor in diagonalno desno-navzgor. Kralj na ta način s polja $(0, 0)$ na polje (i, j) opravi neko *pot* (slika 1). Tukaj obravnavamo samo take poti.

1. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0, 0)$ na polje (i, j), pri čemer se cilju po vsakem koraku približa?

Zagotovo je možna ena sama pot s polja $(0, 0)$ na katerokoli polje $(i, 0)$ oziroma $(0, j)$, kjer sta i oziroma j v $\mathcal{J}$. Označimo z $D(i, j)$ število poti s polja $(0, 0)$ na polje (i, j). Na polje (i, j) lahko kralj prispe v enem koraku na tri načine: s polja $(i-1, j)$, s polja $(i, j-1)$ ali s polja $(i-1, j-1)$. To pa pomeni, da



SLIKA 1. Koraki in pot šahovskega kralja

za $i, j \geq 1$ velja relacija

- $D(i,j) = D(i-1,j) + D(i,j-1) + D(i-1,j-1)$.

Ker veljata pogoja $D(i,0) = 1$ in $D(0,j) = 1$, lahko števila $D(i,j)$ izračunamo samo s seštevanjem. V ta namen zapišemo rezultate v tabelo. Pri tem, da hitreje izpopolnimo tabelo, upoštevamo simetričnost: $D(i,j) = D(j,i)$.

Primer. Število $681 = D(5,4)$ je vsota uokvirjenih števil $321 = D(4,4)$, $231 = D(5,3)$ in $129 = D(4,3)$.

Število poti s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$ je torej $D(7,7) = 48639$. To število je kar veliko. Če bi vsako sekundo narisali eno pot, bi potrebovali 13 ur, 30 minut in 39 sekund, da bi dobili vse. Potrebovali pa bi več tisoč listov papirja formata A4, da bi nanje narisali vse poti, čeprav bi jih na vsak list na vsaki strani narisali 20.

Števila $D(i,j)$ so *Delannoyjeva števila*, ki jih je prvi obravnaval francoski amaterski matematik in častnik Henri Auguste Delannoy (1833–1915).

Za Delannoyjeva števila obstajajo tudi eksplicitne formule, ki pa niso preproste in se izražajo s končnimi vrstami, ki vsebujejo binomske koeficiente. Več o tem lahko preberemo npr. v [1, 2].

Tabelo Delannoyjevih števil lahko seveda razširimo do poljubne velikosti. Uporabimo pa jo lahko tudi za izračun števila poti s polja (i,j) na polje (u,v). Poti ni, če je $i > u$ ali $j > v$. V nasprotnem primeru pa je število poti enako $D(u-i, v-j)$. Tedaj je polje (u,v) s polja (i,j) *dosegljivo*.

2. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$, pri čemer se cilju po vsakem koraku približa, na šahovnici pa je polje (p,q), na katerega kralj zaradi ovire ne more stopiti?

Na sliki 2 levo je ovirano polje **d5** oziroma $(3,4)$. Lahko si tudi mislimo, da tega polja preprosto ni. Število poti s polja $(0,0)$ na ovirano polje je 0.

Poti bo zdaj seveda manj kot $D(7,7)$, in sicer za število poti $P(p,q)$ s polja $(0,0)$ čez ovirano polje (p,q) do ciljnega polja $(7,7)$. Po osnovnem izreku kombinatorike je $P(p,q)$ enako produktu števila poti s polja $(0,0)$ na polje (p,q) s številom poti s polja (p,q) na polje $(7,7)$, torej $P(p,q) = D(p,q) \cdot D(7-p, 7-q)$. Število dovoljenih poti označimo z $N(p,q)$. Tako smo našli:

- $N(p,q) = D(7,7) - D(p,q) \cdot D(7-p, 7-q)$.

V posebnih primerih je $N(0,0) = 0$ in $N(7,7) = 0$, saj kralj v prvem primeru na start niti ne more stopiti, na cilj pa ne dospeti. Poti potemtakem sploh ni.

V primeru oviranega polja $(3,4)$ je

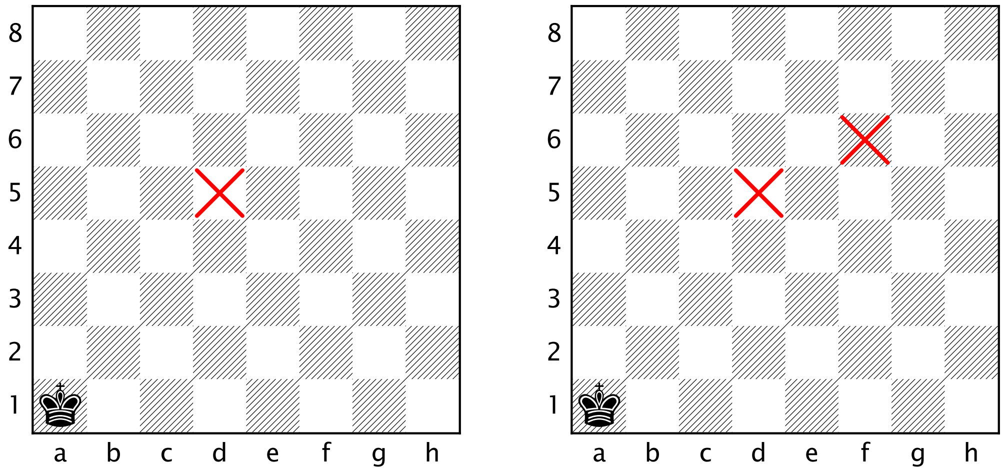
- $$N(3,4) = D(7,7) - D(3,4) \cdot D(4,3) = 48639 - 129^2 = 31998.$$

V tem primeru je torej število poti nekoliko manjše kot brez ovire: 31998. Do rezultata lahko pridemo tudi s tabelo, v katero postavimo črn kvadratek v celico $(3,4)$, in zanjo ničesar ne računamo, za preostale celice pa računamo tako kot v tabeli 1,

3. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$, pri čemer se cilju

7	**8**	1	15	113	575	2241	7183	19825	48639
6	**7**	1	13	85	377	1289	3653	8989	19825
5	**6**	1	11	61	231	681	1683	3653	7183
4	**5**	1	9	41	129	$\boxed{321}$	**681**	1289	2241
3	**4**	1	7	25	63	$\boxed{129}$	$\boxed{231}$	377	575
2	**3**	1	5	13	25	41	61	85	113
1	**2**	1	3	5	7	9	11	13	15
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 1.
Delannoyjeva števila. Število poti.



SLIKA 2.
Šahovnici s prepovedanimi polji

po vsakem koraku približa, na šahovnici pa sta polji (p, q) in (r, s), na kateri kralj zaradi ovir ne more stopiti?

Tedaj je pomembno, če je eno od njiju v normalnih okoliščinah dosegljivo iz preostalega. V tem primeru je npr. $p \le r$ in $q \le s$. Med potmi, ki gredo posebej čez (p, q) in posebej čez (r, s), so tudi tiste, ki gredo hkrati čez (p, q) in (r, s). Zato je število prepovedanih poti

- $P(p, q; r, s) = D(p, q) \cdot D(7 - p, 7 - q) +$
  $D(r, s) \cdot D(7 - r, 7 - s) -$
  $- D(p, q) \cdot D(r - p, s - q) \cdot D(7 - r, 7 - s).$

V primeru nedosegljivosti prepovedanih polj tudi velja zgornja formula, če postavimo $D(x, y) = 0$, če je vsaj eno od števil x in y negativno. Potem je število vseh poti pri danih prepovedanih poljih (p, q) in (r, s) enako

- $N(p, q; r, s) = D(7, 7) - P(p, q; r, s).$

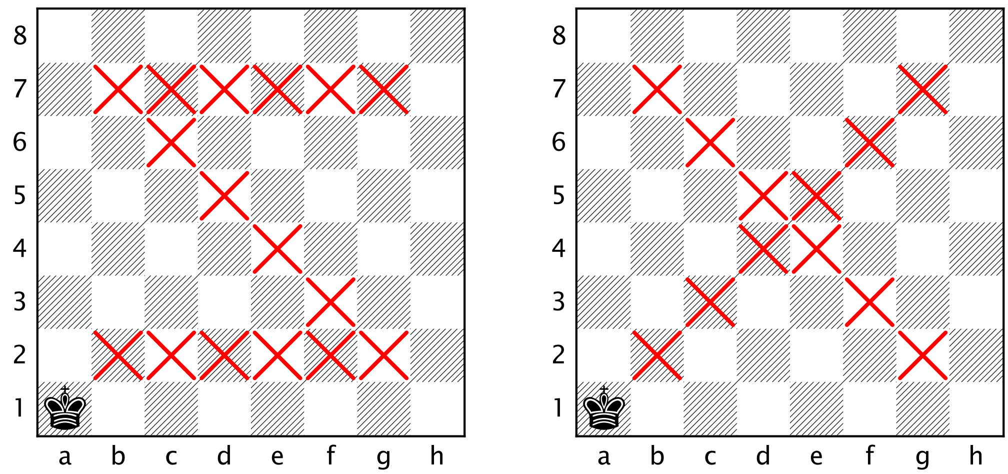
Na sliki 2 desno sta prepovedani polji $(3, 4)$ in $(5, 5)$. V tem primeru je

- $N(3, 4; 5, 5) = D(7, 7) - D(3, 4) \cdot D(4, 3) -$
  $- D(5, 5) \cdot D(2, 2) + D(3, 4) \cdot D(2, 1) \cdot D(2, 2) =$
  $= 48639 - 129^2 - 1683 \cdot 13 + 129 \cdot 5 \cdot 13 = 18504.$

Kljub omejitvam je število poti s polja $(0, 0)$ na polje $(7, 7)$ še vedno veliko: kar 18504. Rezultat lahko preverimo tudi s tabelo.

7	**8**	1	15	113	446	1338	3958	11698	31998
6	**7**	1	13	85	248	644	1976	5764	14536
5	**6**	1	11	61	102	294	1038	2750	6022
4	**5**	1	9	41	■	192	522	1160	2112
3	**4**	1	7	25	63	129	231	377	575
2	**3**	1	5	13	25	41	61	85	113
1	**2**	1	3	5	7	9	11	13	15
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 2.
Število poti z oviranim poljem $(3, 4)$



SLIKA 3.
Šahovnici z več prepovedanimi polji

Prav tako lahko oviramo kralja, da bi stopil na tri, štiri ali več polj. Pri treh preštejemo prehode prek enega oviranega polja, preko dveh, kjer je več možnosti, in preko vseh treh. V bistvu uporabimo v kombinatoriki znano načelo vključitve-izključitve. Da se izognemo zapletenim računom, je najenostavneje, da naredimo tabelo. Vanjo v celice, ki ustrezajo oviram, vpišemo črne kvadratke in postopamo tako kot v tabeli 2. Navajamo primer za ovirana polja, ki so označena na sliki 3 levo. Število poti s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$ se je pri postavljenih ovirah drastično zmanjšalo na 220. Tabeli, ki ustrezata slikama 2 in 3 desno, pa naj na tak način sestavijo bralci. Še eno vprašanje. Koliko je poti, če postavimo ovire na vsa polja razen na vertikali **a** in **h** ter horizontali **1** in **8**?

Literatura

[1] M. Razpet, *Poravnava nizov in Delannoyjeva števila*, Obzornik mat. fiz. **58** (2011), št. 4, str. 133–145.

[2] R. A. Sulanke, *Objects counted by the Delannoy numbers*, Journal of Integer Sequences **6** (2013), članek 03.1.5, 1–19.

7	**8**	1	2	2	2	2	2	2	220
6	**7**	1	■	■	■	■	■	■	218
5	**6**	1	8	■	18	30	56	88	130
4	**5**	1	6	18	■	12	14	18	24
3	**4**	1	4	8	12	■	2	2	4
2	**3**	1	2	2	22	2	■	0	2
1	**2**	1	■	■	■	■	■	■	2
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 3.
Število poti s prepovedjo prehoda preko več polj (slika 3 levo)

×××

Kvadrat, včrtan krožnemu sekstantu

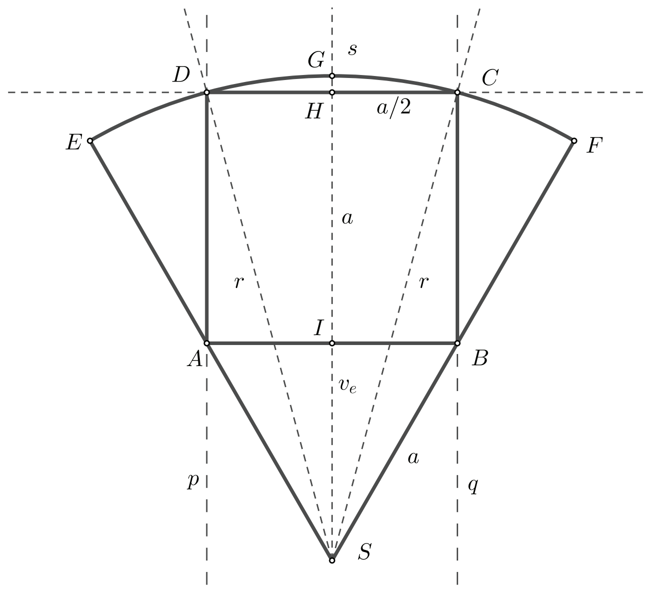
Marko Razpet

Krožnemu izseku s središčnim kotom 90° pravimo tudi *krožni kvadrant*, na kratko *kvadrant*, ker je to četrtina kroga. Krog lahko razdelimo na štiri skladne kvadrante. Če pa ima krožni izsek središčni kot 60°, imenujemo tak izsek *krožni sekstant*, na kratko *sekstant*, ker je to ravno šestina kroga. Krog lahko razdelimo na šest skladnih sekstantov. Kot vemo, lahko to naredimo zelo preprosto z ravnilom in šestilom. Kvadrant in sekstant sta določena s polmerom r.

Oglejmo si sekstant s središčem S in polmerom r (slika 1). Njegova simetrala s preseka krožni lok v točki G in razdeli sekstant na dva krožna izseka s središčnim kotom 30°. Njuni simetrali SC in SD pa ju razdelita na krožna izseka s središčnim kotom 15°. Vzporednici p in q k simetrali s skozi točki C in D presekata polmera sekstanta v točkah A in B. Točke A, B, C in D so očitno oglišča pravokotnika. Trdimo, da je pravokotnik $ABCD$ kvadrat.

Najprej opazimo, da je trikotnik SBA enakostranični s stranicami dolžine $|AB| = |SB| = |SA|$. Trikotnik SBC pa je enakokraki, ker sta enaka kota BSC in SCB. Oba merita 15°. Zato sta njuni nasprotni stranici enaki, $|SB| = |BC|$. Torej je res $|AB| = |BC|$. Pravokotnik $ABCD$ je kvadrat.

Naj bo a stranica kvadrata $ABCD$. Izrazimo jo s polmerom r sekstanta. Uporabimo enakokraki trikotnik SCD. Njegova kraka imata dolžino r, višina v



SLIKA 1.
Krožni sekstant z včrtanim kvadratom.

z nožiščem H na stranici CD pa je vsota višine $v_e = a\sqrt{3}/2$ enakostraničnega trikotnika SBA in stranice a kvadrata: $v = v_e + a$. Uporabimo Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku SCH:

$$(a\sqrt{3}/2 + a)^2 + (a/2)^2 = r^2.$$

Ko izraz na levi strani zgornje relacije poenostavimo, dobimo najprej

$$(2 + \sqrt{3})a^2 = r^2$$

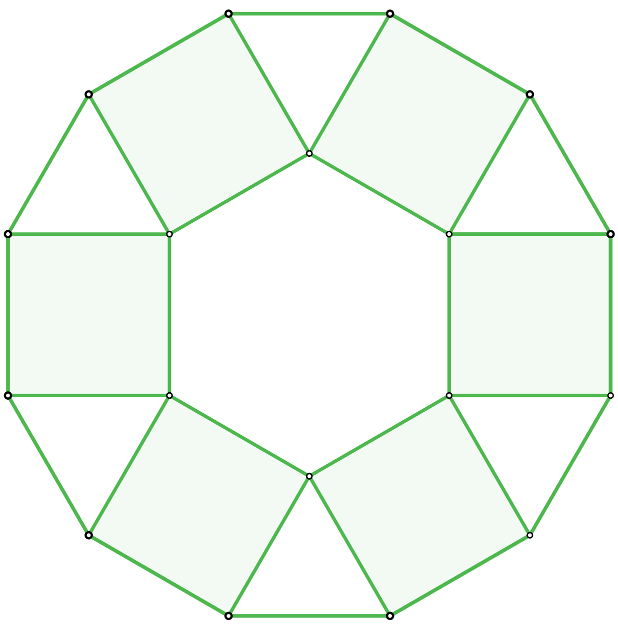
in nato z malo računanja še

$$a^2 = \frac{r^2}{2+\sqrt{3}} = r^2(2-\sqrt{3}) = \frac{r^2(8-4\sqrt{3})}{4} = \frac{r^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}.$$

Stranica a kvadrata $ABCD$ in njegova ploščina p sta nazadnje

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad p = r^2(2-\sqrt{3}).$$

To pomeni, da znamo vsakemu sekstantu simetrično včrtati kvadrat, ki ima dve svoji oglišči na polmerih in dve na loku sekstanta. Če to naredimo na vseh šestih sekstantih istega kroga in odstranimo nekaj odvečnih črt, dobimo sliko 2. V pravilnem dvanajstkotniku imamo na obodu izmenoma šest kvadratov in šest enakostraničnih trikotnikov, na sredini pa pravilni šestkotnik. Vsi pravilni liki imajo enako stranico.



SLIKA 2.
V vseh šest sekstantov včrtani kvadrati.

Naloga A. S pomočjo slike 1 in izraza za a izpelji vrednosti

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}, \quad \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}.$$

Naloga B. V kvadrant s polmerom r simetrično včrtaj kvadrat, ki ima dve svoji oglišči na polmerih in dve na loku kvadranta. Dokaži, da ima tako včrtani kvadrat stranico $a = r\sqrt{10}/5$ in ploščino $p = 2r^2/5$.

× × ×

Barvni sudoku

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

				5	2		4
	4		6				
							7
	3	5	1		6		
		8		2			
			5		7		1
	8		2		1	5	
					8		

× × ×

Obok

Andrej Likar

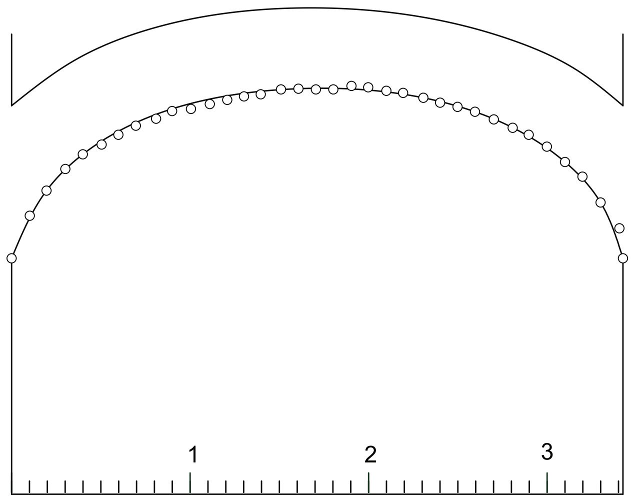
Pri prenovi hiše, zgrajene še v 19. stoletju (leta 1887), so odkrili zanimiv obok (glej sliko 1).

SLIKA 1.
Odkrit obok v stari hiši po zrušitvi zidov in preklad, ki so ga zakrivali.

Meritve njegovega profila so pokazale, da je zgrajen v obliki elipse (glej sliko 2).

Pred več kot stoletjem zidarji podeželskih hiš še niso poznali železobetonskih nosilcev, gradili so z opeko in apneno malto. Zidani stropi zato niso bili ravni, temveč grajeni z opeko v obliki kupol. Te so najpogosteje pokrivale vlažne kletne prostore. Strope v suhih bivalnih prostorih so izdelali z lesenimi nosilci, ki so jih nalegli na zidove. Nanje so nato nabili deske. Take strope vidimo še danes v obnovljenih starih gradovih, pa tudi v večjih prenovljenih hišah starejšega datuma.

Kljub temu tu in tam še naletimo na obokane strope v bivalnih prostorih. Danes se jih razveselimo in jih obnovimo tako, da se vidi način njihove gradnje.



SLIKA 2.
Obok, odkrit pri prenovi hiše, zgrajene v 19. stoletju.

Oboki in kupole so bili nekdaj osnovni gradbeni elementi. V stari Grčiji so v večjih zgradbah namesto obokov uporabljali kamnite preklade. Te so morale biti zelo kratke, zato so njihove stavbe prepredene s stebri. Kamnita preklada brez železne ojačitve prenese le majhne natezne napetosti, ki se pojavijo na spodnji strani. V srednjem veku so cerkve in katedrale zidali izključno z oboki in kupolami, ki so jih podpirali močni stebri na večjih razdaljah. V idrijskem gradu je vrsta lepo okrašenih eliptičnih obokov (glej sliko 3).

Naredimo leseni krožni obok in ga skušajmo postaviti! Sestavili smo ga na opori, potem pa smo oporo umaknili (glej sliko 4). Obok stoji stabilno, če poskrbimo, da spodnja dela ne zdrsneta. Natančen pogled je razkril, da se je obok čisto malo sesedel. Ohrabreni s tem uspehom smo izdelali nekoliko vit-

SLIKA 3.
Lepo okrašeni oboki v notranjosti idrijskega gradu (foto: Marko Razpet).

kejši obok in ga spet postavili, najprej na opori, nato pa smo oporo odstranili tako, da smo obok previdno dvignili.

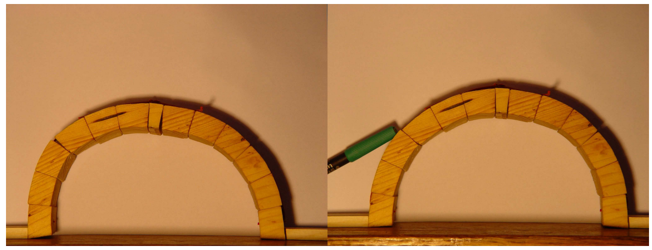
SLIKA 4.
Lesen model krožnega oboka z debelino 3 cm, podprtega po vsej dolžini, in potem, ko smo mu podporo izmaknili.

In, glej no glej, obok se je pri še tako previdnem ravnanju vedno podrl. Opasati smo ga morali z gumico, da smo ga lahko sploh postavili (slika 5) in še takrat je bil močno nesimetrično zverižen.

Nekoliko smo ga popravili tako, da smo nanj prislonili flomaster (glej sliko 5).

Krožni obok torej potrebuje oporo, če je dovolj vitek. Preseneča, da je le nekoliko vitkejši obok povsem izgubil stabilnost. Čas je torej za kakšen račun, ki bi bolje pojasnil razmere.

Oglejmo si sile, ki delujejo na izbrani del krožnega oboka z radijem R (glej sliko 6). Najprej je tu njegova teža $\Delta m\mathbf{g}$, potem sili obeh sosednjih delov, zgor-



SLIKA 5.
Z gumico narahlo ovit model oboka se brez dodatne podpore močno povesi, brez gumice pa se vedno podre. Dodatna opora popravi obliko oboka.

njega $\mathbf{F}_z$ in spodnjega $\mathbf{F}_s$ in očitno še sila podpore $\Delta\mathbf{F}_{\mathrm{pod}}$, da je vsota vseh sil na del sploh lahko enaka nič. Privzeli bomo, da delujejo sosednji deli med sabo pravokotno na stične ploskve, sile podpore pa pravokotno na obok.

Pri iskanju ravnotežja opazovanega dela oboka moramo upoštevati, da sta sili $\mathbf{F}_z$ in $\mathbf{F}_s$ nekoliko različni po velikosti in da delujeta v nekoliko različnih smereh. Velikost sile $\mathbf{F}_z$ naj bo tako $F_0+\Delta F_0$, velikost sile $\mathbf{F}_s$ pa F_0. Smer sile $\mathbf{F}_s$ je podana s pravokotnico na krak kota φ, smer sile $\mathbf{F}_z$ pa je pravokotnica na krak kota $\varphi+\Delta\varphi$.

Pri ravnovesju sil v vodoravni smeri dobimo

$$F_0\cos\varphi-(F_0+\Delta F_0)(\cos\varphi+\Delta\varphi)-\Delta F_{\mathrm{pod}}\sin\varphi=0.$$

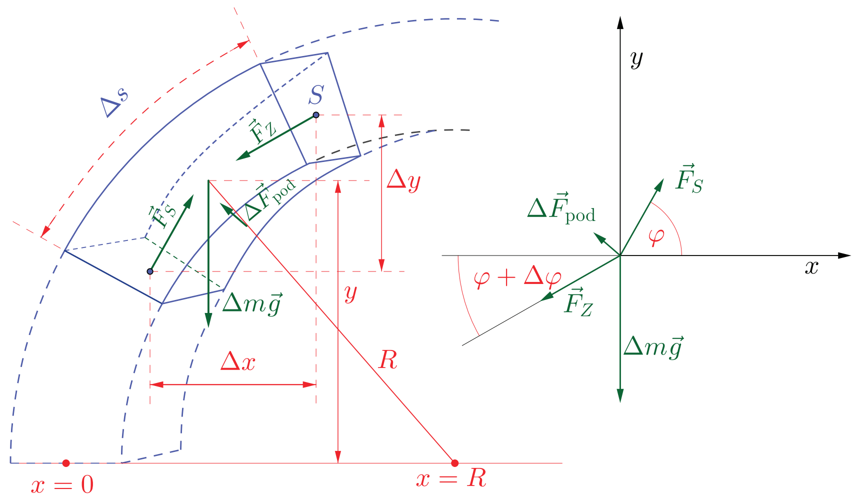
Ravnovesje v navpični smeri da povezavo

$$\begin{aligned}&F_0\sin\varphi+F_{\mathrm{pod}}\sin\varphi-\\&\qquad-(F_0+\Delta F_0)(\sin\varphi+\Delta\varphi)-\delta-\Delta mg=0.\end{aligned}$$

Opazovani del oboka naj ne bo prevelik (čeprav smo ga zaradi preglednosti na skici narisali hudo velikega), da še ujamemo potek sile F_0 vzdolž oboka in potek podporne sile. Količine z Δ pred seboj so zato majhne in privzamemo:

$$\begin{aligned}\sin\Delta\varphi&\approx\Delta\varphi,\\\cos\Delta\varphi&\approx 1,\\\Delta F_0\Delta\varphi&\approx 0,\\\Delta F_{\mathrm{pod}}\Delta\varphi&\approx 0.\end{aligned}$$

Ravnovesje sil torej narekuje naslednji enačbi za ΔF_0



SLIKA 6.
Del oboka z dolžino Δs in privzete sile, ki delujejo nanj.

in ΔF_{pod}:

$$\Delta F_{\text{pod}} = F_0 \Delta\varphi + \varrho S g \Delta x,$$
$$\Delta F_0 = -\varrho S g \Delta y.$$

Tu smo z S označili prerez oboka, z ϱ pa njegovo gostoto. Iz zadnje enačbe uvidimo, da mora veljati

$$F_0 = F_{0h} + \varrho S g (R - y).$$

Vodoravna sila na vrhu oboka ima velikost F_{0h}.

Pri krožnem oboku sta $\Delta\varphi$ in Δx takole povezana:

$$\frac{\Delta x}{\Delta\varphi} = -R\cos\varphi.$$

Enačba za sile podpore

$$\Delta F_{\text{pod}} = F_0 \Delta\varphi + \varrho S g \Delta x$$

je pri krožnem loku kar

$$\Delta F_{\text{pod}} = (F_0 - \varrho S g R \cos\varphi)\Delta\varphi.$$

Sila podpore je zvezno porazdeljena, saj velja

$$\frac{\Delta R_{\text{pod}}}{\Delta s} = -\frac{1}{R}\left(F_{0h} + \varrho S g (R - y) - \varrho R S g \cos\varphi\right)$$

Kot $\Delta\varphi$ raje izrazimo z dolžino loka Δs opazovanega dela oboka

$$\Delta s = -R\Delta\varphi,$$

višino y pa kot $y = R\cos\varphi$.

Če naj podpore na vrhu oboka ne bo, izberemo za F_{0h}:

$$F_{0h} = \varrho S g R$$

ter pridemo do končnega rezultata

$$\frac{\Delta F_{\text{pod}}}{\Delta s} = -2\varrho S g (1 - \cos\varphi).$$

Krožni obok torej potrebuje podporne sile od zunanje strani proti notranjosti. Če podpore ni, se obok povesi, ozek do te mere, da se delci na zunanji strani povsem razmaknejo in se obok podre. Gumica obdrži zunanje robove delov oboka na varni razdalji.

Doslej smo govorili o krožnem oboku. Ali obstaja taka oblika oboka, kjer podpornih sil pravokotno na obok ni potrebno zagotoviti? Obok te vrste se ne bi podrl, četudi bi bil ozek. Kako najti tako obliko oboka? V enačbi, ki določa sile podpore, to je

$$\Delta F_{\text{pod}} = F_0 \Delta\varphi + \varrho S g \Delta x,$$

postavimo $\Delta F_{\text{pod}} = 0$ in dobimo

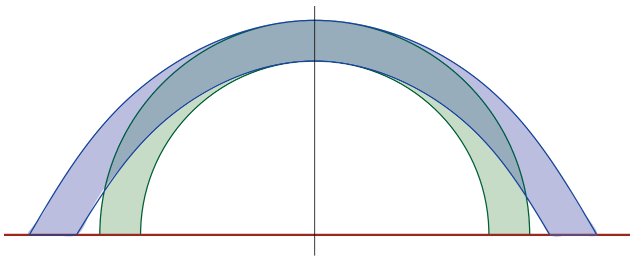
$$F_0 \Delta\varphi + \varrho S g \Delta x = 0.$$

Ker velja splošno

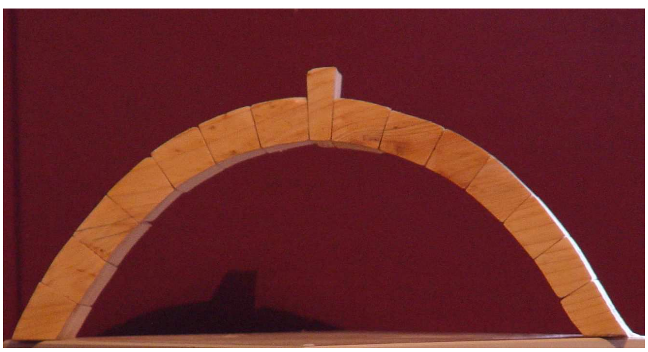
$$\Delta F_0 = -\varrho S g \Delta y,$$

lahko začnemo graditi obliko oboka tako, da si izberemo primerne vrednosti za začetni kot $\varphi = \varphi_0$ pri $x = 0$ in začetno silo $F_0 = F_{0z}$. Nato se premaknemo iz $x = 0$ v $x = \Delta x$ ter izračunamo spremembo kota $\Delta\varphi$ in spremembo sile ΔF_0 ter pridemo do novih vrednosti za kot $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ in velikost sile $F_{0z} + \Delta F_0$. Postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo celotne krivulje. Enaka, le na glavo obrnjena krivulja, je verižnica, po kateri se umiri napeta viseča veriga, od tod njeno ime.

Na sliki 7 imamo primerjavo obrisov krožnega in brezpodpornega ali idealnega oboka. Po teh krivuljah smo nato izdelali oba oboka. Na sliki 8 je prikazan prost idealni obok, ki se ni podrl in tudi ne povesil.



SLIKA 7.
Načrt, po katerem smo iz deske izrezali krožni (zeleno) in idealni (modro) obok.



SLIKA 8.
Prost idealni obok.

Literatura

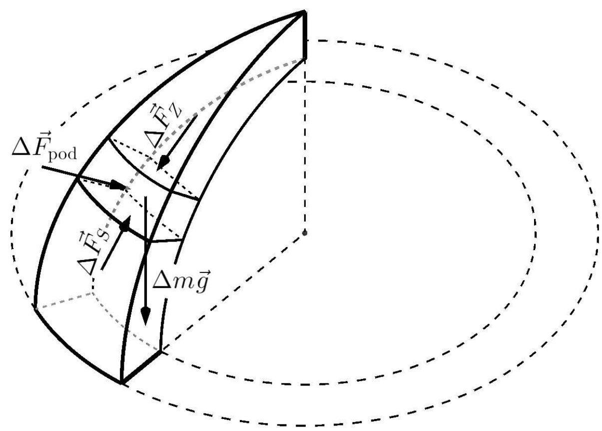
[1] A. Likar, *Veriga in obok*, Presek **18** 1990/1991, 130–133.

× × ×

Kupola

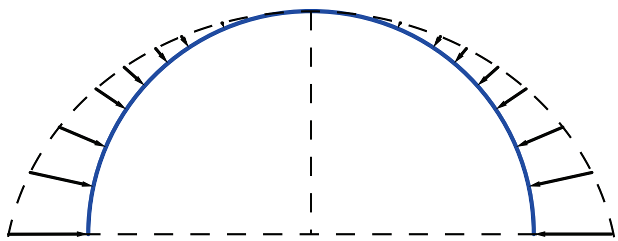
Andrej Likar

V prejšnjem prispevku smo govorili o obokih. Med prastare gradbene enote sodijo tudi kupole, ki so jih gradili nad vlažnimi kletmi, kjer bi tramovi trohneli, in nad črnimi kuhinjami, ker so se bali požara. Poleg tega so bile kupole pomemben okras verskih zgradb po celem svetu.



SLIKA 1.
Element kupole in sile nanj.

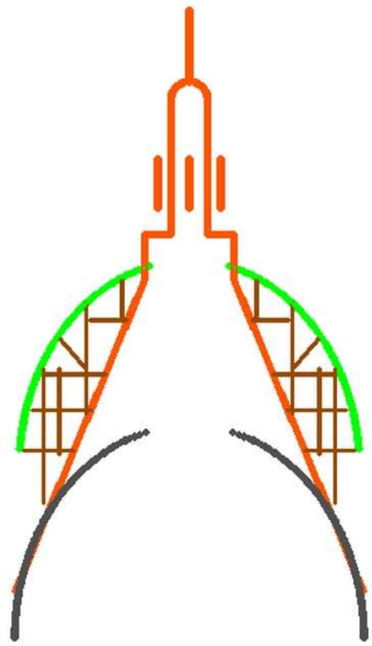
Kupole so bile različnih oblik. Prevladovale so kroglaste kupole. Pa si oglejmo statiko kroglaste kupole. Na sliki 1 smo prikazali element kupole in ključne sile nanj. Razmere so pri kupoli bolj zapletene kot pri oboku, saj ima vsak element kupole štiri sosede. Podrobni premisleki in ustrezni računi so kljub temu zelo podobni premislekom in računom, ki smo jih predstavili v prispevku o oboku, zato jih tu ne bomo ponavljali. Izkaže se, da moramo lupino kroglaste kupole podpirati s strani, da ne pride do posedanj in posledično do pokanja lupine. Na sliki 2 smo shematično prikazali stranske podporne sile, ki so na vrhu kupole zanemarljive, potem pa se polagoma večajo proti njenemu dnu. To velja pri ustrezno stisnjenem vršnem elementu kupole. Različne napetosti na vrhu lupine namreč terjajo različne podporne sile. Pri povsem ohlapni lupini na vrhu, na primer, moramo vso njeno težo premagati z navpično podporo.



SLIKA 2.
Krogelna kupola terja podporni tlak, ki je na sliki nakazan s puščicami.

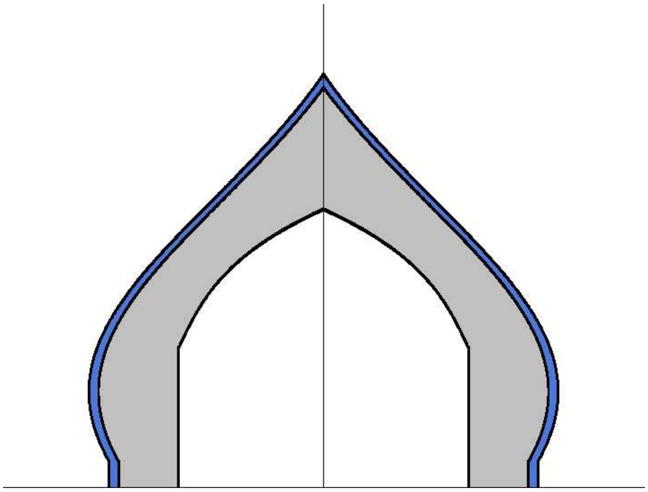
Kroglasto kupolo moramo torej podpirati s silami, ki delujejo proti notranjosti kupole. Pri obokih je podobno, a tam si take podpore lahko privoščimo. Pri kupolah, vidnih od zunaj, pa bi take podpore motile. Zato so gradbeniki posegli po različnih rešitvah, največkrat s kombinacijo zidov in lesenih konstrukcij. Omenimo dva zelo znana primera. Cerkev Sv. Pavla v Londonu premore veliko zunanjo kupolo. Podprta je s trami, ki se opirajo na trden zidan stožec. Le-ta nosi tudi težko lanterno na vrhu kupole (glej sliko 3). Pri Taj Mahalu v Agri v Indiji pa je zunanja kupola mavzoleja izrazito krogelna celo s previsom, kjer je podpora zelo pomembna. Kupolo tvori na videz tanka lahna zidana lupina, prerez pa pokaže, da je kupola vse prej kot to. Zunanja kupola je nazidana na masivno valjasto steno, ki pa je obiskovalec ne vidi, saj je notranja kupola bistveno nižja od zunanje (glej sliko 4).

Kroglaste kupole so gotovo očem prijetne. Videli pa smo, da terjajo podporne sile, ki jih ni lahko doseči. Ali obstaja kupola, ki ne terja podpore? Pri tem vprašanju pomislimo na obok v obliki verižnice,

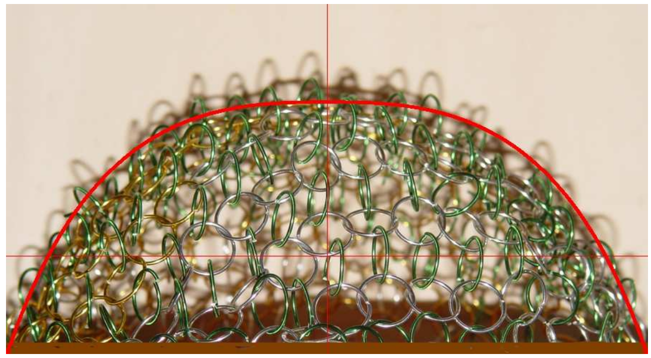


SLIKA 3.
Cerkev Sv. Pavla v Londonu ima s trami (rjavo) podprto zunanjo kupolo (zeleno), težko lanterno na vrhu pa nosi stožčast zid (oranžno).

ki ne potrebuje podpore. Tudi pri kupoli hitro najdemo obliko, pri kateri podpore ne potrebujemo. To sicer ni katenoid (verigoid), kot bi prvi hip pomislili, a je nekaj podobnega. Imenujmo ga kupoloid. Tako ploskev tvori vpeta verižina, torej »tkanina« iz kovinskih obročkov, ki so jo nekdaj nosili vitezi za zaščito pred puščicami. Na sliki 5 in sliki 6 smo posneli obliko dveh prosto visečih verižin in ju obrnili na glavo, da smo dobili kupoloid. Obliko smo sproti izračunavali in risali ob rob verižine. Ujemanje je kar dobro glede na grobost tkanine. Pri verižini, ki smo jo naredili iz kosov okrasne verige (glej sliko 7), smo upoštevali, da ni povsem homogena, na robovih je manj masivna kot proti sredini. Tako kot verižina pri visenju ne potrebuje stranske podpore, tako je tudi ne potrebuje kupola v obliki kupoloida. Zanimivo je, da Inuiti gradijo svoje igluje v obliki, ki je zelo podobna kupoloidu.



SLIKA 4.
Velika zunanja kupola Taj Mahala ima izredno lepo obliko. Posnemala naj bi še ne odprt tulipan. Prerez razkrije, da so graditelji poskrbeli za bočne sile z masivnim valjastim zidom (sivo), na katerega so nazidali zunanje plošče.

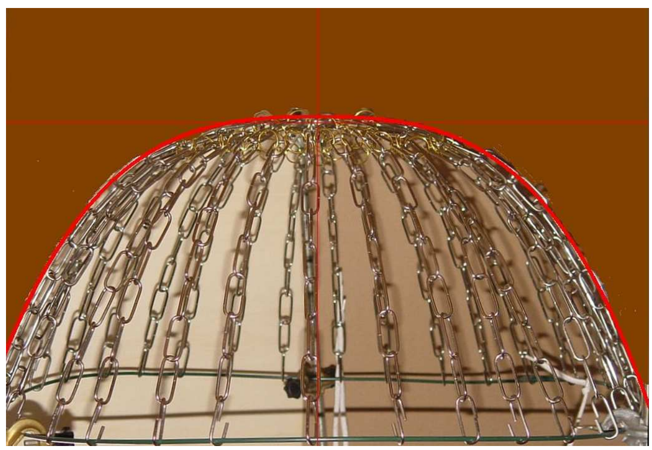


SLIKA 5.
Prosto viseča, na obeh koncih pritrjena veriga se umiri v značilni legi, ki jo opišemo s posebno krivuljo – verižnico. Krožno vpeta verižina se umiri v značilni ploskvi, ki ji rečemo kupoloid (rdeča črta).

Nazadnje si oglejmo dve cerkveni kupoli in poglejmo, kako sta grajeni: ali v obliki oble ali kupoloida. Prva je znamenita kupola cerkve Sv. Petra v Rimu. Na sliki 8 smo ji očrtali oblo in kupoloid. Vidimo, da je ta kupola nekje med obema tema ploskvama. Kupola ljubljanske stolnice na sliki 9 pa je bliže kupoloidu kot obli.

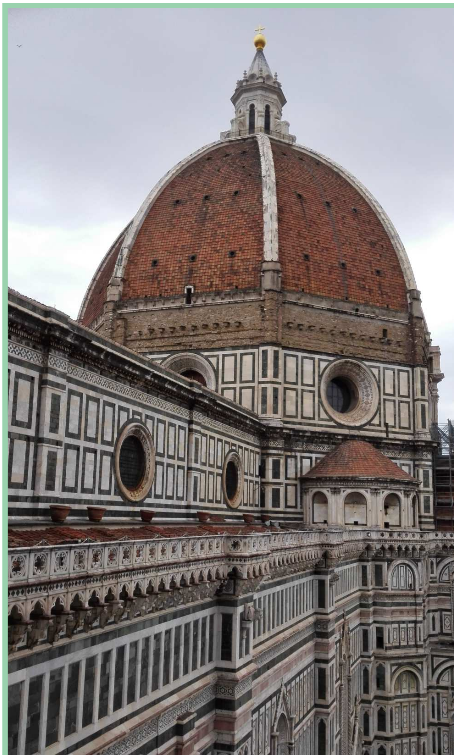
Literatura

[1] A. Likar, *Obok*, Presek **47**, 4, 2019/2020, 10–13.



SLIKA 6.
Verižina, narejena iz kosov okrasne verige, ni povsem homogena, kar smo upoštevali v računu.

Nagradna križanka



dMFA

SESTAVA DVEH FUNKCIJ ALI PRESLIKAV

ZADNJI ASIRSKI KRALJ, SARDANAPAL

PRENEHANJE ŽIVLJENJSKIH FUNKCIJ

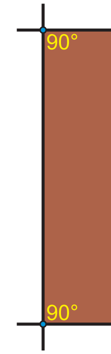
ŽIVILSKI POKLIC

PRIJETEN VONJ

"SREDINA" VERIGE

MEHURČAST IZPUŠČAJ NA SLUZNICI, HERPES

POMEMBNOST



NEKDANJI ŠAHOVSKI ŠAMPION (GARI)

SKUPINA ČETRTFINALISTOV

4

NAŠ LITER. ZGODOVINAR IN ETNOLOG (MATIJA)

SOSEDI ČRKE Z

FRANCOSKI BALETNIK (SERGE)

TEKSTILNI IZDELEK ZA POGRINJANJE MIZE

OBRAT ZA PREDELAVO ŽITA

KONJSKI TEK

ZAHODNOSIBIRSKI VELETOK

NAJVEČJE AFRIŠKO MESTO

ESTETSKA VREDNOTA

15

PEVKA KRALJ

MUSLIMANSKO POKRIVALO

VISOK KAMNIT SPOMENIK S PIRAMID. VRHOM

SISTEM HINDUJSKE FILOZOFIJE, KI IZHAJA IZ VED

TV VODITELJICA KOČAR

12

TORBA ZA SPISE

JUŽNOAMERIŠKI VELETOK

EDEN OD ČUTOV

LJUDSKI IZRAZ ZA BLAGAJNO

PRIMOŽ ROGLIČ

MESTO V NEMČIJI (BAYER)

HITRO POVEČANJE VREDNOSTI

BRITANSKI MATEMATIK RUSSELL

LAURENCE OLIVIER

5

VELIKA DRUŽINA RIB KOSTNIC

AVTOR MARKO BOKALIČ

GROBO KOMIČNO, IRONIČNO LITERARNO DELO

LETALIŠČE

FRANCOSKI MATEMATIK (JOSEPH LOUIS)

FINSKI POLITIK REHN

NEPROFESIONALEC

AMERIŠKI ROCKER TURNER

RAZPAD SISTEMA, ZLOM

AM. SUPERJUNAK

TRAGIČNO PREMINULI FRANCOSKI MATEMATIK (EVARISTE)

2

UMIVALNIK

11

OBSIJANOST S SONCEM, OSONČENJE

KONICA

NEKDANJA SREDNJA ŠOLA

VELIKA SLADKOVODNA RIBA

KRAJ NAD DOLINO IDRIJCE NA CERKLJANSKEM

MATEMAT. RELACIJA

DALMATINSKA KRČMA

GLASBILO S TIPKAMI IN PIŠČALMI

STAROGRŠKI FILOZOF

HOKEJSKI PLOŠČEK

NEVEKTOR

KRILATO BOŽANSKO BITJE

BRITANSKI KONSERVATIVEC

VOLČJI, LOŠKI, KRVAVI ?

REVNEJŠI LJUDJE

ZMAGOVIT POLOŽAJ PRI ŠAHU

KOŠARKAR BLAŽIČ

MUSLIMANSKI BOG

ENCIM, KI RAZGRADI SEČNINO

REKA V BOLOGNI

IME RUSJANOVIH LETAL

INDIJSKI MATEMATIK (SRINIVASA)

SVETOPIS. TRPIN

16

REKA IN DRŽAVA V ZDA

7. GRŠKA ČRKA

SAMEC GOZDNJE DIVJADI

6

AMERIŠKO VELEMESTO

BOB DYLAN

NAŠ SKLADATELJ (MARIJ)

BOSANSKOHRVAŠKI ROCKER (ŽELJKO)

ALKOHOL V PIJAČAH

ENOCELIČAR, KI SPREMINJA OBLIKO

ISLAMSKI RAJ ČUTNIH UŽITKOV

VELEMESTO V PAKISTANU, SREDIŠČE PANDŽABA

8

dMFA

VRTILNA KOLIČINA OSNOVNIH DELCEV

PODROČJE MATEMATIKE

BOLNIK ALI ALKOHOLIK V STANJU DELIRIJA

DIRKALIŠČE FORMULE ENA V ITALIJI

POLJSKI PISEC ZANANSTV. FANTASTIKE (STANISLAW)

PONOŠEN KLOBUK

BERAČICA IZ PREŽIHOVEGA ROMANA *JAMNICA*

ŽENSKA, KI NAMEŠČA SADIKE V ZEMLJO

NAŠ MATEMATIK IN PRVI REKTOR (JOSIP)

AVTOMAT ZA REKVIZITE NARKOMANOV

10

ASTRONAVT ARMSTRONG

4. SOLMIZACIJSKI ZLOG

ISLANDSKI VULKAN

OVČJI SAMEC, OVEN

DANSKI ASTRONOM (TYCHO)

HRIBOVJE V BELGIJI

FIZIK RUTHERFORD

BALETNA KOREOGAFINJA STARIČ WURST

DRUGA PLESNA SLIKA PRI ČETVORKI

VELIK KUŠČAR TOPLIH DEŽEL

GR. ČRKA

NEMŠKI MATEMATIK WEIERSTRASS

ČAS. ENOTA

PEVKA IN FOLKLORISTKA MAROLT

SORODEN, ZAMENLJIV POJAV ALI ELEMENT, USTREZNIK

KOBALT

KRAJAN IGA

NAŠ NEKDANJI KANUIST (ANDREJ)

AKTINIJ

TOK ZA PUŠČICE

NAŠA IGRALKA (MARUŠA)

NIHANJE ZEMLJINE OSI

MAJNA PO NEMŠKO

MORSKA ŽIVAL, BRAHIOPOD

ENOTA ZA RITEM

17

FILOZOFINJA SALECL

FRANCOSKA POKRAJINA

VAJA ZA ZBRANOST PRI JOGI

NEMŠKI FAŠIST

ALUMINIJ

KVADRATNI DEKAMETER

SOSEDNJI ČRKI

SREDSTVO ZA ŠIVANJE

FRANCOSKI AVTOMOBIL

ČASOPISNI SESTAVEK

KRAJ V LOŠKI DOLINI

14

NASPROTJE OSPREDJA

ZASLON

PEVEC Z NIZKIM GLASOM

9

VISOKO OBUVALO

13

TROHANTER

MESTO V EGIPTU OB JEZU NA NILU

TRAVA DRUGE KOŠNJE

SVEČENIK, VEDEŽ

SOL BOROVE KISLINE

ENAKI ČRKI

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

7

TANTALOVA HČI, KI STA JI APOLON IN ARTEMIDA POBILA VSE OTROKE

KAR JE ZBRANO V CELOTO, SKUPEK

GLEDALIŠKA ZAVESA

POVEZAN SNOP VEJ ZA KURJAVO

HEKTAR

STAROGRŠKI TRAGIK

3

ENOTA ZA MOČ

SPLETNA UMETNOST

OČE

NAGRADNI RAZPIS

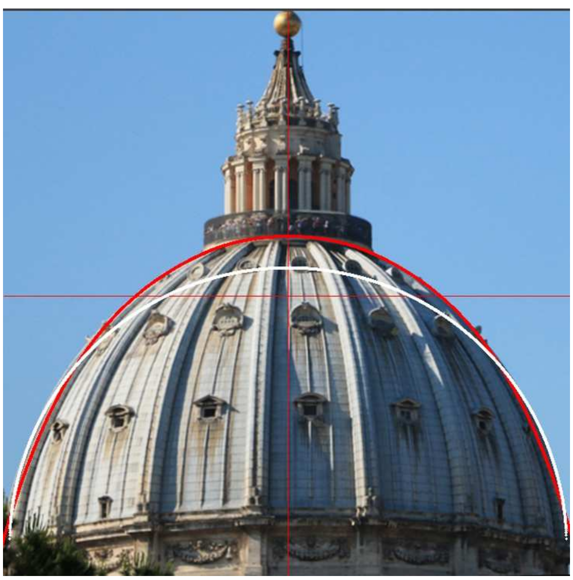
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

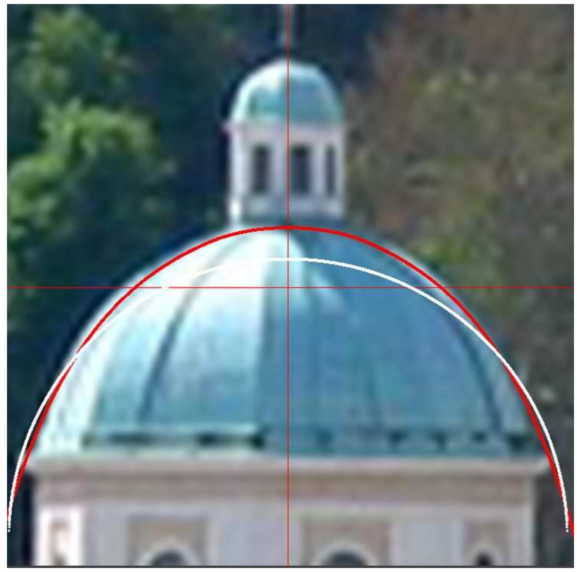
ter ga oddajte do **1. aprila 2020**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

SLIKA 7.
Verižina iz kosov okrasne verige ni povsem homogena, na robovih je njena specifična masa, to je masa na enoto ploščine, manjša kot na sredi.



SLIKA 8.
Kupola cerkve Sv. Petra v Rimu in prileganje oble (bela krivulja) in kupoloida (rdeča krivulja) nanjo.



SLIKA 9.
Kupola Stolnice je bolj podobna kupoloidu(rdeča krivulja) kot obli (bela krivulja).

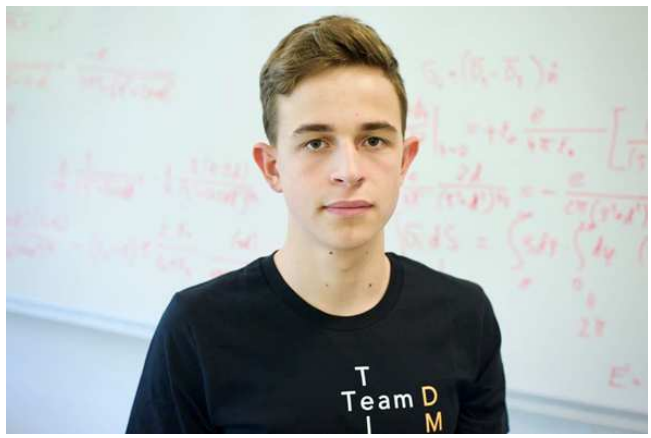
Barvni sudoku

REŠITEV BARVNI SUDOKU

8	7	1	3	5	2	6	4
5	4	2	6	1	3	7	8
2	6	4	8	3	5	1	7
7	3	5	1	8	6	4	2
6	1	8	7	2	4	3	5
4	2	3	5	6	7	8	1
3	8	7	2	4	1	5	6
1	5	6	4	7	8	2	3

50 let Mednarodne fizikalne olimpijade

Barbara Rovšek



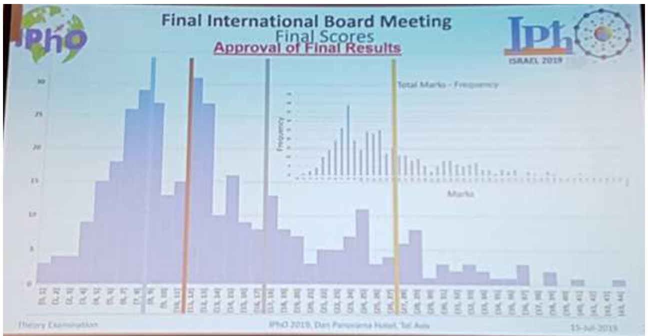
Slika 1.
Tevž Lotrič na pripravah za olimpijado (foto: Jan Šuntajs)

→ V začetku julija 2019 je družba petih dijakov in dveh vodij ekipe odletela v Tel Aviv na 50. Mednarodno fizikalno olimpijado (MFO, v angleščini IPhO – International Physics Olympiad). Iz Izraela smo se vrnili z novo zlato medaljo, šele tretjo za samostojno Slovenijo. Osvojil jo je Tevž Lotrič, dijak 3. letnika Gimnazije Kranj, ki je dosegel tudi najboljši absolutni uspeh slovenskega dijaka kadarkoli, 17. mesto v konkurenci 360 dijakov iz 78-ih držav. Od evropskih tekmovalcev so bili pred njim višje uvrščeni le trije Rusi. K lepo zaokroženemu ekipnemu uspehu so prispevali še dijaka 4. letnika Klemen Bogataj (Gimnazija Škofja Loka) in Sašo Domadenik (II. gimnazija Maribor) z osvojenima bronastima medaljama ter Vladimir Smrkolj (Gimnazija Bežigrad, 3. letnik) s prejeto pohvalo. Alešu Globočniku (Gimnazija Kranj, 4. letnik) pa je do pohvale zmanjkala ena točka.

Tekmovalne naloge so bile pričakovano zelo zahtevne. Porazdelitev po skupnih točkah prikazuje slika 2. Vseh možnih je bilo 50, in sicer 30 za tri teoretične naloge in 20 za dve eksperimentalni nalogi. Svetlo modra črta označuje mejo točk za pohvale, oranžna za bronasto medaljo, siva za srebrno medaljo in rumena za zlato.

Morda je na mestu opomba za osnovnošolce, ki jih skrbi, če na tekmovanju dosežejo manj kot 80 % vseh možnih točk: za vrhunski dosežek na MFO – zlato medaljo – je bilo letos treba zbrati 27,2 točke od 50 možnih, kar je 54,4 %. Prednost težkih nalog je, da gredo nagrade in medalje zanesljivo v prave roke, ker se najuspešnejši tekmovalci po točkah dobro ločijo.

Na sliki 3 so naši zmagovalci (z desne: Aleš, Vladimir, Tevž, Klemen in Sašo), ovenčani z medaljami, 14. julija 2019 pod vročim izraelskim opoldanskim soncem na trgu Leonarda Bernsteina pred največjo koncertno dvorano v Tel Avivu, Avditoriumom Char-



SLIKA 2.
Porazdelitev po skupnih točkah z mejami za medalje in pohvale na 50. MFO

lesa Bronfmana, domom Izraelskega simfoničnega orkestra. Na istem trgu so večer prej nastopili prav ti filharmoniki pod dirigentsko palico svojega maestra Zubina Mehte, na odprtem koncertu, s katerim so počastili 50-letnico glasbenega udejstvovanja omenjenega slavnega dirigenta. Prav lepo naključje, in še lepše bi bilo, če bi bili mi tudi takrat na trgu. Zaključna slovesnost je potekala prav v tej imenitni dvorani!

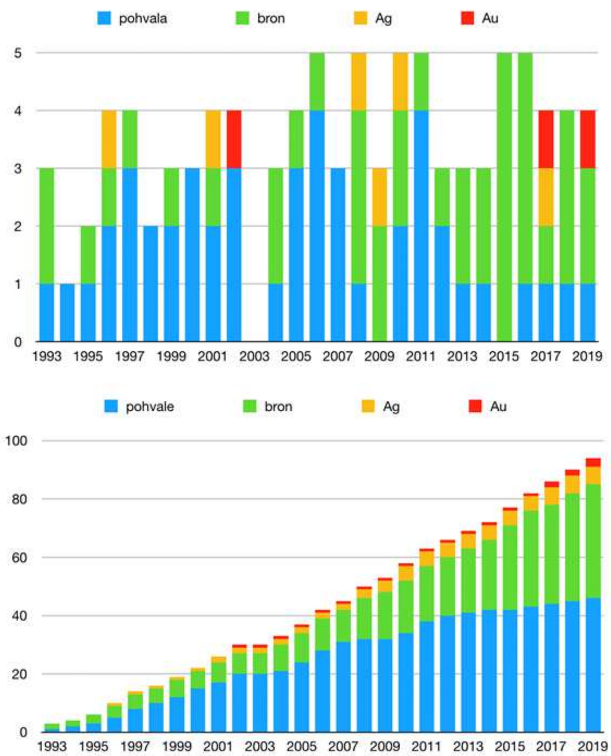
Naloge z zadnje olimpijade so objavljene na spletnih straneh DMFA Sovenije (www.dmfa.si/ODrustvu/NovicaPrikaz.aspx?itemid=285).

SLIKA 3.
Slovenska ekipa na 50. MFO z odličji

Ob tej imenitni priložnosti se ozrimo v preteklost. Prvo MFO so organizirali v Varšavi leta 1967, udeležilo se je je pet vzhodnoevropskih držav. Že prva olimpijada je poleg teoretičnega dela tekmovanja vključevala tudi eksperimentalni del, kar je, razumljivo, velik organizacijski zalogaj. Jugoslavija je prvič z ekipo treh dijakov na MFO sodelovala že naslednje leto na Madžarskem, in od takrat naprej vedno, dokler je Jugoslavija bila in ko je bila olimpijada. In bila je skoraj vsako leto, razen v letih 1973, 1978 in 1979. Slovenija je na MFO sodelovala najprej priložnostno, če so se slovenski dijaki na zveznih tekmovanjih uspeli uvrstiti v jugoslovansko pet člansko ekipo. Med člani zveznih ekip je bilo med leti 1968 in 1981 tudi 11 Slovencev, dva od njih po trikrat (Dean Mozetič in Andrej Vilfan), kar skupaj znese 15 zastopanj Slovenije. Kar trije slovenski dijaki so zastopali Jugoslavijo leta 1987 na 18. MFO v Jeni (tedaj še v Nemški demokratični republiki), med njimi tudi Jurij Bajc, kasneje (in še vedno) dolgoletni vodja olimpijske ekipe. V časih rajnke SFRJ je 11 slovenskih dijakov osvojilo dve srebrni in štiri bronaste medalje ter dve pohvali (kriteriji za osvajanje medalj in pohval pa so bili, glede na današnje, še precej strožji).

Leta 1993 je Slovenija drugič sodelovala na olimpijadi kot samostojna država. Prvo sodelovanje leto prej je bilo poskusno, ekipa je štela le dva člana (kasneje vedno pet). V vseh teh letih je bilo kar veliko dijakov, ki so se v olimpijsko ekipo uvrstili več kot enkrat, bodisi z dobrimi rezultati na državnem in izbirnem tekmovanju, bodisi na prejšnji olimpijadi. Dvakrat je na olimpijadi tekmovalo 19 dijakov, trikrat pa pet dijakov (Matjaž Payrits, Aleksej Jurca, Luka Govedič, Klemen Bogataj in Marko Čmrlec). V vseh letih slovenskega sodelovanja na MFO sta se v ekipo prebili vsega skupaj dve dekleti: Metka Demšar leta 1994 in Mojca Miklavc leta 2001.

Tako so se nabirale pohvale in medalje, ki so jih na MFO osvojili slovenski dijaki od leta 1993 naprej. Slika 4 zgoraj prikazuje porazdelitev odličij po letih, druga pa je kumulativni graf, ki prikazuje, kako se je večalo skupno število osvojenih medalj in pohval. Na zadnji olimpijadi smo dosegli številko 94, kar je vsota 46 pohval (modra), 39 bronastih medalj (zelena), šest srebrnih (rumena) in treh zlatih (rdeča; prva leta 2002 in druga 2017). Leta 2003 je po svetu



SLIKA 4.
Porazdelitev odličij slovenske ekipe po letih od 1993 naprej do danes, posamično in kumulativno.

razsajal SARS, zato se slovenska ekipa olimpijade, ki je potekala na Tajvanu, ni udeležila. Če so v zgodnjih letih prevladovale pohvale, v zadnjih letih prevladujejo bronasta priznanja.

Jubilejna 50. olimpijada je odlično uspela. Organizatorji so se izkazali in poskrbeli, da je vse potekalo gladko in brez zapletov. Iz Tel Aviva se vsi člani ekipe in vodji vračamo z lepimi vtisi in spomini na Tel Aviv, Jeruzalem, Haifo, Nazaret, Mrtvo morje in Akro ter na navdušene, neutrudne in neuničljive spremljevalke in spremljevalce ekip in vodij ekip, Noo, Malkiela in vse ostale. Olimpijada ni le tekmovanje, je še mnogo več. Je priložnost za spoznavanje in druženje z vrstniki s celega sveta, za navezovanje stikov, ki bodo morda trajali celo življenje. Za druženje z vrstniki, ki so si podobni po zanimanju za fiziko in naravoslovje, in različni, kot so si različni deli sveta med seboj. Je priložnost za spoznavanje dežele, pokrajine, mest in ljudi, ki tekmovanje gosti. Včasih je olimpijada dogodek, ki pomeni prelomnico v življenju in pomaga pri odločanju o poklicu, ki ga opravljaš v življenju. Vsem udeležencem pa ostane nedvomno za vedno lep spomin.

51. MFO bo v Vilni, glavnem mestu Litve.

SLIKA 5.
Slovenska ekipa na Mrtvem morju

× × ×

27. sanktpeterburška astronomska olimpijada (SAO)

Andrej Guštin

Tudi v letošnjem šolskem letu učenci in učenke zadnje triade osnovne šole in dijaki ter dijakinje tekmujejo na SAO. V izbirni krog SAO smo povabili najboljše tekmovalce državnega tekmovanja iz znanja astronomije. Za srednješolce in srednješolke je to tekmovanje tudi del izbirnega postopka za uvrstitev v ekipo za mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, ki bo septembra v Kolumbiji.

Tudi tokrat nas ruski organizatorji tekmovanja SAO niso razočarali in so pripravili zelo zanimive naloge. Tokrat objavljamo naloge izbirnega in teoretičnega kroga, prihodnjič pa rešitve in rezultate oz. uvrstitve naših tekmovalcev in tekmovalk.

7. in 8. razred osnovne šole

Naloge izbirnega kroga

- Sanktpeterburški študent astronomije ima doma zelo slabo uro, ki prehiteva za šest minut na dan. Ob 7. uri zjutraj je študent pred odhodom od doma nastavil uro točno na lokalni čas. Ko se je študent ob 18. uri vrnil domov, je spet pogledal na uro. Na kolikšni oddaljenosti od njegovega doma leži na isti geografski širini kraj, kjer bi ura takrat kazala pravi čas?
- Odkriti in nato izgubljeni asteroid 1995 SN55 se glede na izračune na svoji orbiti najbolj približa Soncu na 7,9 astronomske enote. Ker pa je bilo astronomskih meritev njegove orbite zelo malo, je razdalja ob periheliju znana z natančnostjo 350 milijonov kilometrov. Ali se na podlagi teh podatkov asteroid lahko Zemlji približa na manj kot 10-kratnik polmera Lunine orbite?
- Najmanjša mogoča relativna hitrost nekega planeta v Osončju glede na Jupiter je 22 km/s. Izračunaj največjo mogočo relativno hitrost tega planeta glede na Jupiter. Kateri planet je to? Lahko predpostaviš, da sta orbiti obeh planetov krožni in ležita v isti ravnini.
- Planetarna meglica M57 v Liri je od Sonca oddaljena $2{,}6 \times 10^3$ svetlobnih let. V 100 letih se je njena kotna velikost povečala za 1" (1 kotno sekundo). S kolikšno hitrostjo (km/s) se meglica dejansko širi?
- Nek komet sočasno opazujeta astronom na Zemlji in Marsu. Kotna velikost (dolžina) repa kometa na nebu Zemljana je dve stopinji. Izračunaj kotno velikost repa kometa na Marsovem nebu, če veš, da je Mars v času opazovanja v kvadraturi. Predpostavi, da je dolžina repa v času opazovanja za oba opazovalca enaka.

Naloge teoretičnega kroga

- V prvi polovici septembra 2019 je bil Neptun v opoziciji. Astronom iz Sankt Peterburga je takrat Neptun hotel opazovati na daljavo s teleskopom, ki je postavljen v Čilu. Teleskop je v časovnem pasu univerzalni čas −3 ure. Kdaj je po sanktpeterburškem času astronom izvajal ta opazovanja?
- Kroglasta kopica Omega Kentavra je največja taka kopica v Galaksiji in ima premer 90 svetlobnih let. V njej je toliko zvezd, da je povprečna oddaljenost med sosednjimi zvezdami vsega eno svetlobno leto. Predpostavi, da so vse zvezde v kopici podobne Soncu, in si zamisli, da bi jih stikoma postavil v vrsto. Ali bi ta vrsta segala od Sonca do Soncu najbližje zvezde?
- 26. decembra je Luna zakrila (okultirala) Jupiter. Istega dne je bil tudi kolobarjasti Sončev mrk. Ali je danes mogoče Jupiter videti na jutranjem ali večernem nebu? Oceni zemljepisne širine, na katerih Jupitra danes sploh ni mogoče videti.
- Neka raziskava je pokazala, da je skupna masa teles v Kuiperjevem pasu 1 % mase Zemlje. V modelu je Kuiperjev pas zamišljen kot sploščen kolo-

bar brez debeline z notranjim polmerom 30 astronomskih enot (a.e) in zunanjim polmerom 50 a.e. Izračunaj površinsko gostoto tega kolobarja v g/m^2.

- Ali je mogoče iz kateregakoli kraja v Rusiji videti obe zvezdi Altair in Alnair? Pomagaj si s sledečimi podatki. V Sankt Peterburgu zvezda Altair ni nikoli več kot 25 stopinj pod obzorjem. Največja višina zvezde Alnair v opazovališču na ekvatorju je 43 stopinj nad obzorjem. Najbolj severna točka Rusije ima zemljepisno širino 82 stopinj severno, najbolj južna točka Rusije pa zemljepisno širino 41 stopinj severno.

9. razred osnovne šole

Naloge izbirnega kroga

- Katero telo, Zemlja ali »vroči jupiter«, katerega velika polos orbite meri 0,05 a.e., hitreje opravi en obhod okoli matične zvezde, če dolžino orbite merimo v večkratnikih premera planeta? Kolikokrat hitrejše je eno telo od drugega? Vroči jupiter ima premer 90 tisoč kilometrov in kroži okoli zvezde, ki ima enako maso kot Sonce.
- Izračunaj višino zgornje kulminacije daljne galaksije MACSJ0647+7015 (rektascenzija α = 6 h 47 m, deklinacija $\delta = 70°15'$) v ozvezdju Žirafa, če bi jo opazoval iz kraja Haltiatunturi (leži na meji med Finsko in Norveško) z zemljepisno širino $\varphi = 69°19'$ in zemljepisno dolžino $\lambda = 21°17'$.
- Opazovalec na ekvatorju je videl, kako je šel neki umetni satelit čez zenit ob polnoči, ob 8.00 uri in ob 16.00 uri po lokalnem času. Izračunaj polmer orbite satelita, če predpostaviš, da se okoli Zemlje giblje po krožnici.
- Planet se okoli zvezde giblje po krožni orbiti s polmerom 2 a.e. in hitrostjo 15 km/s. Kolikokrat je masa zvezde manjša od mase Sonca?
- Neka zvezda ima letno paralakso $\pi = 0{,}0073''$ in navidezno magnitudo $m = 2{,}84$. Izračunaj njeno absolutno magnitudo.

Naloge teoretičnega kroga

- Prvi sladkor, ki so ga astronomi odkrili v medzvezdnih oblakih, je glikolaldehid CH_2OHCHO. V nekem medzvezdnem oblaku s polmerom 2 parseka je koncentracija molekul (število molekul v stolpcu oblaka z osnovno ploskvijo 1 cm^2) v smeri proti središču oblaka $2{,}8 \cdot 10^{14}$ molekul/cm^2. Oceni celotno maso molekul glikolaldehida v tem oblaku.
- Vesoljska ladja ima neverjeten pogon, ki troši zanemarljivo malo goriva in lahko mnogo let ladjo pospešuje s pospeškom 1 g. Ta vesoljska ladja vozi med nizko orbito okoli Zemlje do nizke orbite okoli Marsa. Oceni, najmanj koliko časa in največ koliko časa lahko traja dolžina leta te vesoljske ladje. Predpostavi, da mora imeti ladja v bližini Zemlje in Marsa hitrost nič glede na Sonce.
- Zvezda R Andromede zaradi močnega zvezdnega vetra izgublja 10^{-6} mase Sonca letno. Oceni gostoto delcev zvezdnega vetra iz te zvezde v bližini Osončja. Predpostavi, da delci z zvezde letijo enakomerno in premočrtno v vse smeri s hitrostjo $3 \cdot 10^2$ km/s. Letna paralaksa R Andromede je 0,004".
- Vsak od teleskopov sistema KELT je opremljen z objektivom premera 42 mm in CCD kamero velikosti 37×37 mm in z 4096×4096 slikovnimi elementi (piksli). Teleskop pokriva $26° \times 26°$ veliko polje neba. Kamera je najbolj občutljiva pri valovni dolžini svetlobe 600 nm. Izračunaj teoretično kotno ločljivost sistema teleskop-CCD kamera.
- Rentgenski izvor Cyg X-3 v Labodu je spremenljiv. Astronomi so opazili, da iz območja neba, ki je od izvora Cyg X-3 na nebu oddaljen 16", ravno tako prihaja rentgenska svetloba z enako periodo spremembe sija, le da s časovnim zamikom 2,7 let glede na Cyg X-3. Izračunaj, kako daleč je Cyg X-3 od Sonca. Kako daleč pa je od središča naše Galaksije?

Srednje šole

Naloge izbirnega kroga

- Točkasti telesi z masama 1 kg sta 1 m narazen in mirujeta. Čez koliko časa bosta skupaj? Upoštevaj le gravitacijsko silo med njima, vse ostale sile pa zanemari.
- Telo v Osončju, ki se okoli Sonca giblje po krožni orbiti in v ravnini ekliptike, pride vsake štiri leta najbližje k Saturnu. Kolikšna je najmanjša razdalja med telesom in Saturnom?
- Neka največja severna libracija Lune po ekliptični širini (latituda) sovpada z največjo zahodno libra-

cijo po ekliptični dolžini (longituda). Čez koliko dni se taka lega ponovi?

- Pred kratkim so astronomi zaznali radijski izbruh magnetarja XTE J1810-197. Pokazalo se je, da je bila radijska spektralna črta magnetarja s frekvenco $6{,}5 \cdot 10^2$ MHz razširjena na frekvenčno območje med $6{,}0 \cdot 10^2$ MHz in $7{,}0 \cdot 10^2$ MHz. Oceni hitrost gibanja točke na ekvatorju magnetarja, če predpostaviš, da je razširitev črte posledica vrtenja magnetarja.
- Neka zvezda ima efektivno temperaturo $48 \cdot 10^3$ K in polmer 1,5 polmera Sonca, od Sonca pa je oddaljena 3,2 kpc, leži pa v smeri proti središču Galaksije. Kolikšno navidezno magnitudo ima ta zvezda za opazovalca na Zemlji, če je ekstinkcija svetlobe v galaktični ravnini $2^m/kpc$?

Naloge teoretičnega kroga

- Gnomon (palica) horizontalne sončne ure je postavljen navpično. Med letom se dolžina opoldanske sence spremeni za dve dolžini gnomona. Izračunaj zemljepisno širino kraja, v katerem je ta sončna ura.
- Leta 2003 so astronomi odkrili luno, ki kroži okoli pulzarja XTE J1807-294 (njegova masa je 1,4 mase Sonca). Obhodni čas lune okoli pulzarja je 0,03 dneva in ima maso 14,5 mase Jupitra. Kaj lahko ugotoviš o snovi, iz katere je ta luna? Svoje odgovore utemelji tudi z računi.
- Gravitacijski teleskopi LIGO v Livingstonu (30° 33' severne zemljepisne širine, 90° 47' zahodne zemljepisne dolžine) in Hanfordu (46° 27' severne zemljepisne širine, 119° 25' zahodne zemljepisne dolžine) in VIRGO (43° 38' severne zemljepisne širine, 10° 30' vzhodne zemljepisne dolžine) so 31. decembra ob 22.00 uri po univerzalnem času zaznali gravitacijske valove. Časovna razlika v prihodu valov med tremi teleskopi ni bila večja od $3 \cdot 10^{-3}$ sekunde. V času pol ure za tem je ruski observatorij RAN (43° 40' severne zemljepisne širine, 41° 26' vzhodne zemljepisne dolžine) beležil zasij v vidni svetlobi, katerega izvor je bil izbruh sevanja gama, ki je bil tudi izvor gravitacijskih valov. Izračunaj približne ekvatorialne koordinate izvora gravitacijskih valov.
- Astronomi so v spektru neke zvezde opazovali absorpcijsko spektralno črto titanovega oksida, ki ima laboratorijsko valovno dolžino 5170,7 Å(1 Å$=10^{-10}$ m). Valovna dolžina te spektralne črte v središču ploskvice zvezde je bila 5174,1 Å, na robu ploskvice na ekvatorju zvezde pa 5174,2 Å. Gostota zvezde je 0,7 g/cm^3. Oceni najmanjši možni izsev te zvezde.
- Protoplanetarni disk je zelo tanek disk snovi, ki kroži okoli mlade zvezde. Predpostavi, da je disk v termodinamičnem in hidrostatičnem ravnovesju, in najdi odvisnost gostote snovi nad ravnino diska od oddaljenosti r od zvezde. Masa zvezde M, temperatura diska T in molska masa snovi μ so znane količine.

× × ×

Messierov maraton 2020

Andrej Guštin

Nov izziv – tekmovanje šol!

DMFA Slovenije, Astronomsko amatersko društvo Teleskop in Spika vabijo na Messierov maraton, ki bo 21. in 22. marca 2020 na Trnovem nad Novo Gorico. Letos smo prvič pripravili tudi poseben izziv za šole – tekmovanje šolskih skupin v iskanju Messierovih objektov. S tem izzivom bi radi šole, mentorje in mlade astronome spodbudili k opazovalni astronomiji. Šolske skupine bodo tekmovale po pravilih Messierovega maratona, le da bodo v posamezni ekipi oz. na enem teleskopu lahko trije tekmovalci. Posamezna šola lahko prijavi več ekip.

Prijavnine ni.

Dodatne informacije `www.dmfa.si/Tekmovanja/As`

Nadomestni termin za Messierov maraton je 28. in 29. marec na isti lokaciji.

× × ×

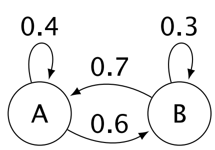
Ali lahko računalnik spiše esej?

Vid Kocijan

Za domačo nalogo moramo spisati esej o Prešernovem Krstu pri Savici. Ker nam gresta matematika in programiranje bolje od slovenske književnosti, nas zanima, ali lahko spišemo program, ki bi namesto nas spisal esej o Krstu pri Savici. V tem članku si bomo ogledali markovske verige in njihovo uporabo za generiranje besedil.

Markovska veriga

Markovska veriga je matematični model za opisovanje sistemov, kjer je verjetnost naslednjega dogodka v zaporedju odvisna zgolj od zadnjega dogodka v njem. Predstavimo ga kot množico stanj S in povezav med njimi P. Uteži na izhodnih povezavah iz vozlišča $s_i \in S$ predstavljajo verjetnosti prehoda iz stanja s_i v druga stanja. Vsota vseh uteži na izhodnih povezav iz nekega vozlišča se morajo tako sešteti v 1.



SLIKA 1.
Preprosta markovska veriga z dvema stanjema.

Preprost primer markovske verige lahko najdemo na sliki 1. Veriga je sestavljena iz dveh stanj $S = \{A, B\}$ in štirih povezav $p_{A,B} = 0{,}6$, $p_{B,A} = 0{,}7$, $p_{A,A} = 0{,}4$ in $p_{B,B} = 0{,}3$. Naš cilj je ustvariti markovsko verigo, kjer bodo vozlišča besede, povezave pa verjetnosti, da v našem eseju ena beseda sledi drugi. Nato lahko spišemo program, ki bi se po omenjeni markovski verigi sprehajal in pri tem ustvarjal esej. V vsakem stanju naključno izberemo naslednje stanje, sledeč verjetnostni porazdelitvi, ki jo podajajo uteži. Vzemimo markovsko verigo s slike 1. Če smo zadnjo izpisali črko A, pravimo, da smo v stanju A, bomo v naslednjem koraku z verjetnostjo 0,4 ponovno izpisali črko A, z verjetnostjo 0,6 pa bomo izpisali črko B. Podobno, če smo zadnjo izpisali črko B, pravimo, da smo v stanju B, bomo v naslednjem koraku z verjetnostjo 0,3 ponovno izpisali črko B, z verjetnostjo 0,7 pa naslednjo izpišemo črko A.

Če simuliramo gibanje po omenjeni markovski verigi, lahko dobimo besedilo, podobno sledečemu: BABABBBAABABABAABAAABABABBAABBAABBAAB ABBABABBAABAABABABABABBAABBAABBAABA. Kot vidimo, je v generiranem besedilu malo več črk A, kljub temu pa se črki A in B večinoma izmenjujeta.

Pisanje besedil z markovskimi verigami

Sestavljanje take verige na roko je seveda zahtevno, verjetno dosti bolj, kot pisanje samega eseja. Na srečo lahko na spletnem portalu `dijaski.net/` najdemo šest esejev o Krstu pri Savici. Uteži v markovski verigi lahko določimo s statistično analizo omenjenih esejev. Spišemo program, ki prebere omenjene eseje in za vsako unikatno besedo izračuna, katere besede so ji sledile in kako pogosto. Če je besedi rad v 23 % sledila beseda imam, bo od stanja S_{rad} v stanje S_{imam} vodila povezava s težo 0,23.

Oglejmo si dejansko izsek verige, ustvarjene na ta način. V tabeli 1 lahko najdemo izsek iz ustvarjene verige, seznam besed, ki najpogosteje sledijo besedi *je*.

beseda	verjetnost
bil	0,0611
to	0,0556
v	0,0389
bila	0,0333
tudi	0,0333
črtomir	0,0222

TABELA 1.
Šest besed, ki najverjetneje sledijo besedi *je* in pripadajoče verjetnosti.

Da poenostavimo zahtevnost besedil, iz njih izločimo vsa ne-končna ločila, vse velike tiskane črke pa spremenimo v male. Pike, vejice in klicaje obravnavamo kot samostojna stanja, poleg tega pa dodamo še dve stanji: `<start>` in `<konec>`. Naš esej se začne s stanjem `<start>`, ko dosežemo stanje `<konec>` pa z esejem zaključimo. Ti dve »besedi« dodamo na začetek in konec vsakega besedila. Omenjeni besedi nam bosta olajšali generiranje besedila. Naš sprehod po markovski verigi bomo začeli v stanju `<start>`, ko dosežemo stanje `<konec>`, pa generiranje zaključimo. Omenjeni besedi seveda izbrišemo iz besedila, preden ga izpišemo bralcu.

Program, spisan po zgornjem kuharskem receptu, nam bo med drugim spisal sledečo umetnino:

krst pa ga je zgrajen iz končnega dialoga jasno razviden značaj in poln besa vodi svoje patriotsko mišljenje in krvavega boja pa verjetno razočara marsikaterega bralca. te zvrsti ki jih prešeren je čutil do izraza misel kot sem jaz saj izvemo da je čopova smrt matije čopa...

Za tak esej verjetno ne bi dobili pozitivne ocene. Človeški jezik je prezapleten, da bi ga lahko opisali s preprosto markovsko verigo. Naslednja beseda v eseju je namreč bolj odvisna od širšega konteksta kot zgolj od zadnje besede. Naš model zato nadgradimo in uporabimo markovske verige drugega reda. Namesto, da bi naslednjo besedo izbirali glede na to, katera beseda je bila zadnja, jo izbiramo glede na zadnji dve besedi v eseju. Če imamo skupek besed »Krst pri Savici je« bomo opazovali, kako pogosto se posamezna beseda znajde za sosledjem besed »Savici je«.

Modelu jezika oz. jezikovnemu modelu, ki ga sestavimo iz markovskih verig višjih redov, pravimo tudi n-gram jezikovni model. Definirajmo n-gram jezikovni model bolj formalno. Naj bo A zaporedje $n-1$ besed, x ena beseda, in Ax zaporedje iz n besed, ki ga dobimo, če zlepimo A in x. Naj bo $N(A)$ število pojavitev zaporedja A v analiziranih besedilih. Verjetnost, da beseda x sledi zaporedju A, $\mathbb{P}(x|A)$, definiramo kot

$$\mathbb{P}(x|A) = \frac{N(Ax)}{N(A)}.$$

Bralcu v premislek prepuščamo, ali je sledeča definicija smiselna, torej, ali se vsota verjetnosti vseh besed, ki lahko sledijo zaporedju A, vedno seštejejo v 1.

Markovska veriga prvega reda, ki smo jo ustvarili, tako ustreza ravno 2-gram, oz. bigram jezikovnemu modelu. Da pridobimo koherentnejše besedilo, postopek ponovimo s trigram jezikovnim modelom oz. z markovsko verigo drugega reda. Ponovimo analizo vseh esejev in generiramo sledeče besedilo:

krst pri savici je zgrajen iz treh delov iz posvetilnega soneta matiji čopu nato pa nekako klone in se noče podjarmiti. v uvodu je zgradba skoraj v celoti epska saj o dogodkih poroča jedrnato in poudarja le prvine. v celoti epska saj o dogodkih poroča jedrnato in poudarja le prvine...

To se zdi morda bolj podobno smiselnemu eseju, vendar bi za tak esej še vedno dobili negativno. Hkrati pa nas zmoti, da v generiranem besedilu začenjamo opažati sosledje besed iz esejev, na podlagi katerih smo zgradili markovsko verigo. To ni presenetljivo, naš nabor esejev je relativno majhen, unikatnih trojic besed, ki se v njem pojavijo, pa je veliko. Naš program bo tako pogosto generiral sosledje besed, ki so se pojavile v esejih. Tega si ne želimo, saj se plagiatorstvu želimo ogniti.

Kaj pa, če povečamo nabor besedil, ki jih analiziramo? Završemo eseje o Krstu pri Savici in zberemo širši nabor literarnih del. Za potrebe tega članka je bila uporabljena večina proznih del s spletne strani `lit.ijs.si/leposl.html`. Trubarja, Janeza Svetokriškega in Brižinske spomenike odstranimo, saj se jezik v teh delih zelo razlikuje od današnje slovenščine. Nato ponovimo vajo, tokrat z naborom več kot

100 strnjenih besedil. Z markovsko verigo drugega reda lahko dobimo sledeče besedilo:

že peti dan pijan prišel domov mu je samostanski vojak. svetin je začel praviti ali si pozabil kaj sem mord sam govoril ž njo pa jo strahuje da si človek oddahnil naslonil se je ozrl šepavec proti oknu skomignila z rameni. bila je mokra. ko je drugo.. . .

Z 4-gram jezikovnim modelom oz. z markovsko verigo tretjega reda pa bolj koherentno:

že peti dan so bili zdoma. no z gradišča res ni daleč do belega dvora nemara se še nocoj vrneta na družinski pomenek vsekakor pa jutri. domačini so goste pospremili do ceste kjer so ga obvezali. nic nevarnega samo praska! in petdeset kron mu je dal oče ker mu iz gozda ni mogel ničesar prinesti.. . .

Oglejmo si izsek iz dobljenega 4-gram jezikovnega modela, ki ga lahko najdemo v tabeli 2. Kontekst treh besed je dovolj, da je ustvarjeno besedilo relativno smiselno. Kljub temu pa je mnogo premalo, da bi program lahko pisal vsebinsko konsistentno besedilo, ki ima rdečo nit. Ali slepo povečevanje reda verige zares reši ta problem?

beseda	verjetnost
da	0,0705
zdelo	0,0590
bilo	0,0210
v	0,0210
tresel	0,0171
zdela	0,0114

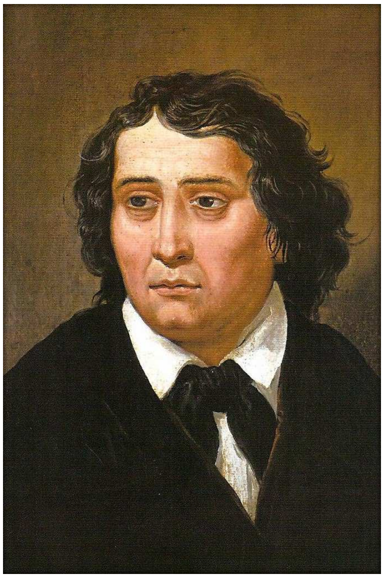
TABELA 2.
Šest besed, ki najverjetneje sledijo sosledju besed *se mu je* in pripadajoče verjetnosti.

Pri 5-gram jezikovnem modelu se ponovno zatakne, saj generirana besedila ponovno postanejo prepodobna besedilom, ki smo jih statistično analizirali.

Kje je meja?

Ker število različnih n-teric eksponentno narašča glede na n, s povečevanjem reda markovske verige eksponentno narašča tudi potreba po količini besedila za analizo. S še večjim naborom podatkov lahko ustvarimo markovsko verigo četrtega reda, potem pa se znova zatakne. 5-gram jezikovni model velja za najkompleksnejši smiselni model, ki ga je moč zgraditi s tako metodo. Tudi Google, dandanes verjetno eden od največjih zbirateljev podatkov, se ni trudil zbirati n-teric besed prek dolžine $n = 5$[1].

Za boljše modeliranje jezika dandanes uporabljamo močnejše metode, ki temeljijo na nevronskih mrežah in globokem učenju, kar pa presega obseg enega članka v Preseku. Če bralca zanima, kako se obnašajo trenutno najnaprednejši generatorji (angleškega) jezika, se z njimi lahko pozabava na naslednji spletni strani: `transformer.huggingface.co/`. Koda in gradiva, uporabljena pri pisanju tega članka, so dostopna na `github.com/vid-koci/presek\_generiranje\_besedila`. Ne glede na izjemne napredke pri avtomatskem generiranju besedila, bralcem priporočamo, da svoje eseje še naprej pišejo sami.



SLIKA 2.
France Prešeren (vir: Wikipedia)

× × ×

[1]Zbirka dostopna na `ai.googleblog.com/2006/08/all-our-n-gram-are-belong-to-you.html`

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 47/3

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Kozmologija.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Martin Mah iz Šmartnega pri Litiji, Jan Kočevar Polak iz Kranja in Ivanka Tompa iz Odrancev, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

Slika Lune

Jože Rakovec

Pogosto vidimo sliko Lune, ki je svetla zgoraj, čeprav je Sonce dosti niže na nebu, morda celo pod obzorjem. Tak je bil videti zadnji krajec 4. januarja 2020 zjutraj ob 07:52, ko je Sonce ravno vzšlo nad obzorje.

SLIKA 1.

Takrat je bil v ljubljanskem krajevnem krogelnem koordinatnem sistemu (izhodišče v točki 46,03° N, 14,49° E) azimut Sonca $A\odot$ = 122,03°, njegova elevacija pa $\varepsilon\odot$ = 1,17°, in azimut Lune $A☾$ = 261,95° ter elevacija $\varepsilon☾$ = 23,53°[1]. (Te podatke in še kaj o položajih na nebu lahko dobite na `www.suncalc.org/` in `www.mooncalc.org/`.[2]) Luna je bila torej po azimutu za okrog 140° »pred Soncem« ter po višini za 22° »nad Soncem«.

Na spletnih astronomskih in fizikalnih forumih pravijo, da je Luna osvetljena od zgoraj takrat, ko je elevacija Sonca večja od elevacije Lune. Naš primer pa je ravno obraten! Kako to?

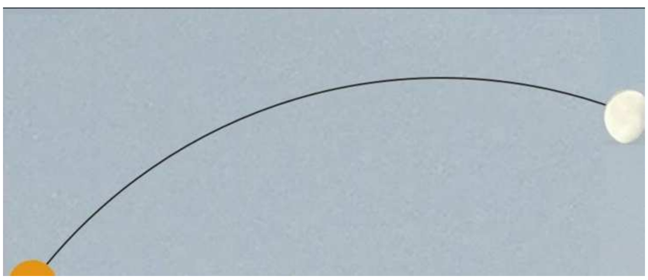
Razložimo torej! Če je polobla Lune na jugozahodnem delu neba videti osvetljena od zgoraj, potem pri taki podobi nanjo vpada svetloba od Sonca poševno navzdol, tako, kot je s puščico prikazano na povečani sliki zadnjega krajca: nekoliko od zgoraj pravokotno v sredino osvetljene površine Lune (slika 2).

Ker je vzhajajoče Sonce bolj na vzhodu in nizko blizu obzorja, potem gredo pri taki podobi žarki od Sonca najprej navzgor, celo nad elevacijo Lune in potem nazaj navzdol do Lune. Očitno so ti žarki ukrivljene črte po nebu. Če pomislimo na to, da zelo oddaljene podobe na nebu gledamo, kot bi bile prikazane na nebesni polkrogli, potem so te ukrivljene črte od Sonca do Lune loki na krogelnem »projekcijskem platnu« neba.

[1] Z azimutom označujemo smeri neba; to je kot po horizontalni ploskvi, štet od severa v smeri obračanja kazalcev na uri. Tako ima smer proti vzhodu azimut 90°, smer proti jugu 180° itd. Elevacija je kot, ki meri višino na nebesnem svodu. Elevacija je torej od 0° za točke na obzorju do 90° za zenit.

[2] Večina navedenih virov s spleta je (žal) v angleščini – sem in tja se najde kaj z vezi z našo obravnavo v slovenščini, npr. o krivuljah, ploskvah ter o krivuljah na krogli ter nekaterih projekcijah na spletni stani meteorologa Marjana Divjaka: `diameter.si/scimath/ch16.htm#15`. Seveda pa tudi v učbenikih in drugih knjigah.

SLIKA 2.



SLIKA 3.

Ker se svetloba širi premočrtno, se zavemo, da je ukrivljena pot le izgled ravne poti skozi prostor, kot je projicirana na nebesno polkroglo – torej je lok na površini krogle. Gre za perspektivno projekcijo[3] ravne črte, kot jo vidimo iz svojega gledišča na sredi dna nebesne polkrogle – podobno kot so videti ukrivljene sicer ravne sledi letal na nebu – te za razliko od namišljenih žarkov lahko tudi zares vidimo.

Kakšna bi bila obratna projekcija – krožnega loka v ravno črto? Krogelne površine ne moremo brezhibno predstaviti na ravni sliki, lahko pa brezhibno razvijemo plašč valja na ravnino. Za ta primer je Chris Jones[4] pripravil animacijo postopne pretvorbe krivega žarka na plašču stožca v ravno črto. Njegova animacija kaže, kako se postopno deformira razvita ploskev plašča valja in kako pri tem ukrivljena črta med Soncem in Luno postaja vse bolj ravna. Le kliknite na `chrisjones.id.au/MoonIllusion/` in ko se animacija odpre, klinite še na prikaz, pa se vam bo hitro posvetilo za kaj gre.

Pretvorbe krive črte s krogelne površine na ravno ploskev ni mogoče brezhibno narisati – ker pač na ravnini ne moremo brezhibno upodobiti ploskve krogle. Obstajajo pa razne projekcije, ki jih poznamo iz kartografije. Polarni predeli Zemlje so največkrat narisani v polarni stereografski projekciji, pri kateri je projekcijska ploskev tangentna ravnina ob enem polu (ali tudi kaj odmaknjena od pola), izhodiščeočišče pa točka na nasprotnem polu – torej je ta projekcija perspektivna. Pri njej poldnevniki, ki so sicer na zemeljski krogli krogi, postanejo ravne črte iz sredine karte navzven. Za naš primer opazovanja Lune na nebu, ko nebo gledamo iz središča osnovne ploskve polkrogle, je še bolj ustrezna gnonomska kartografska projekcija, kjer očišče ni na na nasprotnem zemeljskem polu, ampak v sredini Zemlje. (Glej npr. `www.winwaed.com/blog/2010/01/11/polar-maps-and-projections-part-1-overview/`).

Da ne zaidemo predaleč od opisa slike Lune: tudi Todd Lockwood[5] je opazil, da je pogosto videti svetel zgornji del Lune tudi kadar je Sonce nizko, ob horizontu ali celo pod njim. Njegovo razlago s pomočjo ukrivljenega loka na krogli se zelo splača ogledati: `www.muddycolors.com/2011/06/todd-lockwood-curvilinear-perspective-part-1/`, pa tudi nekatera nadaljevanja, pri katerih razlaga, kako je tre-

[3] Razne projekcije spoznamo že v osnovi šoli. Perspektivno projekcijo z enim očiščem v 9. razredu osnovne šoli pri likovnem pouku, pravokotne in nekatere druge projekcije pa postopoma pri tehniki (in manj pri geometriji), ko rišemo telesa ob pogledih iz raznih smeri. Razne kartografske projekcije srečamo pri geografiji.

[4] V Avstralijo preseljeni Anglež Chris Jones je predvsem raziskovalec na področju prepoznavanja govora – a očitno zna razložiti marsikaj, ne samo nenavadni izgled Lune na nebu: `chrisjones.id.au/MoonIllusion/`

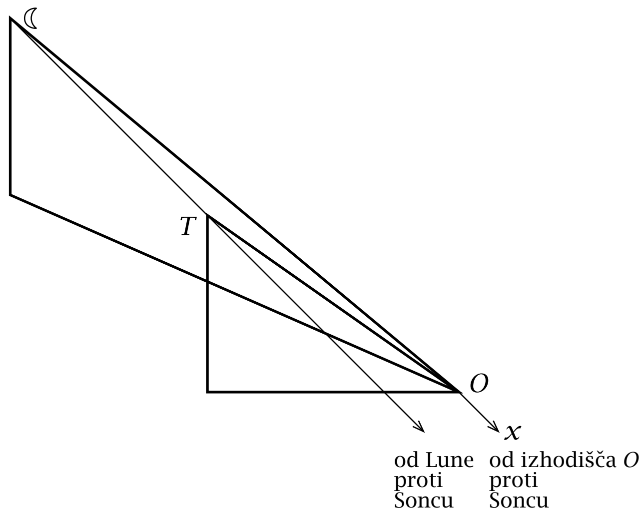
[5] Američan Todd Lockwood je predvsem ustvarjalec nenavadnih fantazijskih podob – glej še njegove druge spletne objave: `www.toddlockwood.com/`, pri razlagah ukrivljenih perspektiv pa nadomesti zadnjo enico z 2: namesto ...-part-1/ torej ...-part-2/-

ba upodobiti prizore iz 3D sveta, da tudi na sliki na ravnem papriju ali platnu izgledajo tridimenzionalni.

Poskusimo še mi malo poračunati. Za to moramo vedeti, kako sta povezana krogelni koordinatni sistem (A, ε, l) in kartezični koordinatni sistem (x, y, z), ki imata isto izhodišče O. Iz kroglenega koordinatnega sistema (A, ε, l) v kartezični koordiantni sistem (x, y, z) je pretvorba: $x = l \cos\varepsilon \cos A$, $y = l \cos\varepsilon \sin A$ in $z = l \sin\varepsilon$.

Za kar najmanj dela izberimo čas točno ob vzhodu sonca, ko je elevacija Sonca ε glede na lokalno ravnino nič in zato višina z nad to ravnino tudi nič. Če izberemo glavno os x naše obravnave od izhodišča O, kjer stojimo, točno proti Soncu, je Sonce na tej osi in oddaljeno (zaokroženo) $L_S = 147$ milijonov kilometrov. Torej so njegove koordinate $x, y, z = (147 \text{ milijonov km}, 0, 0)$. Smerni kot Lune štet po ravnini opazovanja od smeri osi x je enak $A'☾ = 139°$, elevacija Lune $\varepsilon☾ = 25°$, za njeno oddaljenost od izhodišča vzamemo $l☾ = 400\,000$ km. Po kratkem računu dobimo za Luno njene kartezične koordinate (zaokroženo na tisoč km) $x☾ = -274\,000$ km, $y☾ = -239\,000$ km in $z☾ = 169\,000$ km. Razdalja od Lune do Sonca je za nekaj stotisoč kilometrov daljša, kot od izhodišča: $D_{LS} = 147{,}274$ milijona kilometrov, kar je v primerjavi s 147 milijoni kilometrov le malo več – samo za desetinko promila več. Po tej daljici se pomaknimo v točko T toliko proti Soncu, da je koordinata te točke x enaka nič: to pomeni za $\Delta = 274/147274 = 0{,}00186$ celotne razdalje do Sonca. Ob tem se zmanjšata tudi koordinati y in z na $(1 - \Delta) = 0{,}99814$ vrednosti pri Luni. Torej je $y_T = (1 - \Delta)y☾ = -238555$ km in $z_T = (1-\Delta)h☾ = 168685$ km. Ko poznamo višino z_T točke T in njeno razdaljo od izhodišča do nje $d_{TO} = \sqrt{0 + y_T^2 + z_T^2} = 292\,170$ km, hitro izračunamo elevacijo iz $\sin\varepsilon_T = z_T/d_{TO}$ in dobimo $\varepsilon_T = 35{,}3°$ – kar precej več od elevacije Lune. Na sliki je to prikazano v izometrični predstavitvi, pri kateri kaže os y v desno in os z navzgor (dolžine so vse v istem merilu, smeri in koti pa niso pravi).

V zvezi z računom: ali smo v tej točki T blizu največji elevaciji? Ali je morda najvišja elevacija na tej daljici morda kaj bliže Luni ali morda kaj dlje od Lune? Razmislite!



SLIKA 4.
Os x od izhodišča O; razdalja do Sonca je $D_{OS} = 147{,}00$ milijona kilometrov, od Lune do Sonca je malce dlje: $D_{LS} = 147{,}274$ milijona kilometrov.
Koordinate Lune glede na izhodišče so $x☾ = -274$ tisoč km, $y☾ = -239$ tisoč km, $z☾ = 169$ tisoč km in elevacija $\varepsilon☾ = 25°$.
Koordinate točke T na daljici od Lune do Sonca glede izhodišča O pa so $x_T = 0$, $y_T = -238{,}6$ tisoč km, $z_T = 168{,}7$ tisoč km in elevacija $\varepsilon_T = 35{,}3°$.

Za konec. Morda bi morali tisti, ki po spletnih forumih pravijo, da je Luna osvetljena od zgoraj samo, kadar je elevacija Sonca večja od elevacije Lune, opozoriti, da pri tem mislijo na dejansko višino nad ravnino opazovanja, da pa podoba na nebu včasih izgleda tudi drugače.

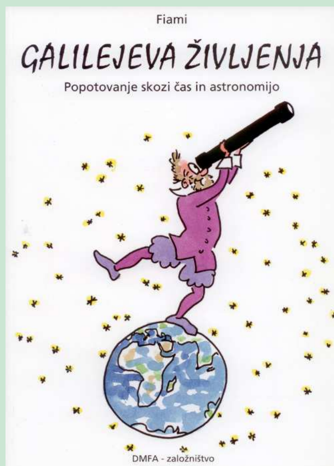
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.