UDK (UDC) 528.236.088.2
513.75
061.3(497.12):528 Geodetski dan „1993"

VPLIV POGREŠKA ENE TOČKE NA NATANČNOST AFINE TRANSFORMACIJE

mag. Miljenko Lapaine
prof.dr. Nedjeljko Frančula
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Prispelo za objavo: 20.8.1993

Izvleček

Afina transformacija je določena s tremi pari pridruženih točk. V prispevku raziskujemo vpliv pogreška ene od teh točk na porazdelitev napak afine transformacije.
Ključne besede: *afina transformacija, Bled, Geodetski dan, natančnost transformacije, 1993*

Abstract

Let the affine transformation be defined by three pairs of corresponding points. The paper investigates the influence of the error of one of these points on the error distribution of the affine transformation.
Keywords: *accuracy of transformation, affine transformation, Bled, Geodetic workshop, 1993*

UVOD

Ena najenostavnejših in najpogosteje uporabljanih transformacij v geodeziji in kartografiji je afina transformacija. Le-ta se lahko razume tudi kot aproksimacija poljubne funkcije in bo tem boljša, kolikor manjše bo zajeto območje za transformacijo. Enačbi afine transformacije se lahko napišeta v obliki:

$$\begin{aligned} y' &= a_1 y + b_1 x + c_1 \\ x' &= a_2 y + b_2 x + c_2 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

kjer so (y, x) in (y', x') koordinate točke in njene slike v dveh koordinatnih sistemih, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 pa so parametri transformacije. Teh šest parametrov se najpogosteje določi z uporabo metode najmanjših kvadratov, tedaj pa se lahko izvedejo tudi ustrezne formule za oceno točnosti samih parametrov, kot tudi za oceno točnosti transformiranih koordinat. Lapaine in Frančula (1990) sta dokazala obstoj zakonitosti delitve srednjih kvadratnih pogreškov koordinat po izvedeni afini transformaciji. Najmanjši srednji pogrešek ima težišče množice točk, ki definira transformacijo, vse točke z enakimi srednjimi pogreški ležijo na koncentričnih elipsah s središčem v težišču.

Če predpostavimo, da so podani samo trije pari pridruženih točk

$$(x_i, y_i),\ (x_i', y_i'),\ i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

tedaj lahko na podlagi (1.1) napišemo šest linearnih enačb

$$\begin{aligned} y_i' &= a_1 y_i + b_1 x_i + c_1 \\ x_i' &= a_2 y_i + b_2 x_i + c_2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

s šestimi neznanimi parametri a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Rešitev sistema (1.3) se lahko napiše v obliki

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{P_1}{P_0}, \quad b_1 = \frac{P_2}{P_0}, \quad a_2 = \frac{P_3}{P_0}, \quad b_2 = \frac{P_4}{P_0} \\ c_3 = y_0' - a_1 y_0 - b_1 y_0, \qquad c_2 = x_0' - a_2 y_0 - b_2 y_0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

če je P_0 različno od ničle in ob uvedbi naslednjih oznak:

$$\begin{aligned} P_0 &= (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) - (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \\ P_1 &= (y_1' - y_2')(x_2 - x_3) - (y_2' - y_3')(x_1 - x_2) \\ P_2 &= (y_1 - y_2)(y_2' - y_3') - (y_2 - y_3)(y_1' - y_2') \\ P_3 &= (x_1' - x_2')(x_2 - x_3) - (x_2' - x_3')(x_1 - x_2) \\ P_4 &= (y_1 - y_2)(x_2' - x_3') - (y_2 - y_3)(x_1' - x_2') \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_0' &= \frac{y_1' + y_2' + y_3'}{3} \qquad x_0' = \frac{x_1' + x_2' + x_3'}{3} \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pogoju $P_0 \neq 0$ se lahko pripiše geometrično tolmačenje, to pa je zahteva, da tri točke (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, ne pripadajo isti premici. O uporabi afine transformacije na trikotnih površinah je pisal Jenko (1993).

VPLIV POGREŠKA ENE OD DANIH TOČK NA AFINO TRANSFORMACIJO

Predpostavimo, da ima ena od danih točk, na osnovi katerih se določajo parametri afine transformacije, napačne koordinate. Vzemimo, da so (y_3', x_3') njene točne koordinate, $(y_3' + \Delta y_3', x_3' + \Delta x_3')$ pa napačne koordinate. V kolikor se parametri afine transformacije določajo iz napačnih koordinat tretje točke, se dobijo vrednosti za parametre, ki se razlikujejo od pravih vrednosti (1.4) za naslednje vrednosti:

$$\Delta a_1 = \frac{x_1 - x_2}{P_0} \Delta y_3', \qquad \Delta b_1 = \frac{y_1 - y_2}{P_0} \Delta y_3'$$

$$\Delta a_2 = \frac{x_1 - x_2}{P_0} \Delta x_3', \qquad \Delta b_2 = \frac{y_1 - y_2}{P_0} \Delta x_3'$$

$$\Delta c_1 = \Delta y_0' - \Delta a_1 y_0 - \Delta b_1 x_0, \qquad \Delta c_2 = \Delta x_0' - \Delta a_2 y_0 - \Delta b_2 x_0 \tag{2.1}$$

$$\Delta y_0' = \frac{\Delta y_3'}{3}, \qquad \Delta x_0' = \frac{\Delta x_3'}{3}.$$

Če izvajamo afino transformacijo s parametri $a_1 + \Delta a_1$, $b_1 + \Delta b_1$, $c_1 + \Delta c_1$, $a_2 + \Delta a_2$, $b_2 + \Delta b_2$, $c_2 + \Delta c_2$ namesto z a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, – tedaj se bodo transformirane koordinate razlikovale za:

$$\begin{aligned}
\Delta y' &= \Delta a_1 y + \Delta b_1 x + \Delta c_1 = \\
&= \left\{ \frac{1}{P_0} [\, (x_1 - x_2)(y - y_0) - (y_1 - y_2)(x - x_0)] + \frac{1}{3} \right\} \Delta y_3' = \\
&= \frac{1}{P_0} [\, (x_1 - x_2)(y - y_1) - (y_1 - y_2)(x - x_1)\,]\, \Delta y_3'
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \Delta a_2 y + \Delta b_2 x + \Delta c_2 = \\
&= \left\{ \frac{1}{P_0} [(x_1 - x_2)(y - y_0) - (y_1 - y_2)(x - x_0)] + \frac{1}{3} \right\} \Delta x_3' = \\
&= \frac{1}{P_0} [(x_1 - x_2)(y - y_1) - (y_1 - y_2)(x - x_1)]\, \Delta x_3'
\end{aligned}$$

Izrazi (2.2) se lahko zapišejo tudi v krajši obliki:

$$\Delta y' = \frac{P}{P_0} \Delta y_3', \qquad \Delta x' = \frac{P}{P_0} \Delta x_3', \tag{2.3}$$

kjer smo označili:

$$P = (x_1 - x_2)(y - y_1) - (y_1 - y_2)(x - x_1). \tag{2.4}$$

V zadnjem izrazu je P dvojna površina (do na predznak) trikotnika z vrhovi (x_1, y_1), $(x_2, y_2,)$ in (x, y). Če označimo:

$$d' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}, \qquad d_3' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2} \tag{2.5}$$

tedaj iz (2.3) izhaja relacija

$$d' = |P/P_0|\, d_3'. \tag{2.6}$$

Če lahko ocenimo odstopanje d_3' (2.5), tedaj lahko po zadnji formuli za vsako točko (x, y) določimo njeno odstopanje d' od točnega položaja, povzročeno zaradi napačnih koordinat točke ($x_2^{'}$, $y_3^{'}$), ki je sodelovala pri določanju parametrov transformacije.

Iz izraza (2.6) lahko tudi vidimo, da vzdolž premice, ki poteka skozi točki T_1 (x_1, y_1) in T_2 (x_2, y_2), ni odstopanj, ker je za točke te premice P = 0. Za točke izven premice T_1T_2 naraščajo odstopanja d proporcionalno z njihovo oddaljenostjo od te premice. Nadalje, linije, vzdolž katerih so odstopanja konstantna – so premice, vzporedne s premico T_1T_2. Vzdolž premice, ki je vzporedna s premico T_1T_2 in poteka skozi točko T_3, velja naslednje:

$$d^{'} = d, \qquad (2.7)$$

ker za točke te premice velja P = P_0. Na podlagi relacije (2.3) dobimo

$$\frac{\Delta y^{'}}{\Delta x^{'}} = \frac{\Delta y_3^{'}}{\Delta x_3^{'}} \qquad (2.8)$$

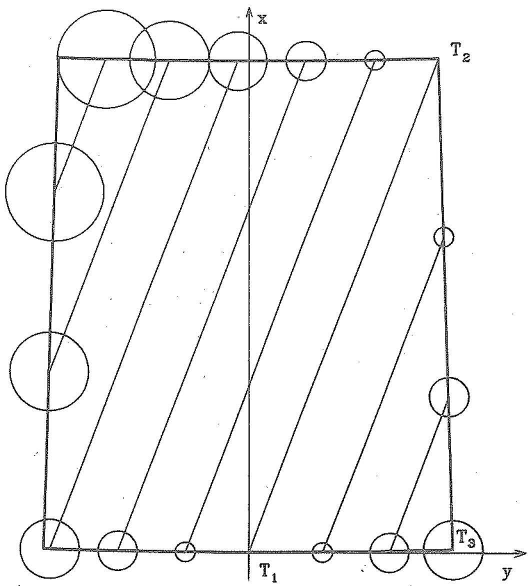
in iz tega sklepamo, da so vsa odstopanja v isti smeri, ki je določena s smerjo odstopanja točke ($y_3^{'}$, $x_3^{'}$).

PRIMER

Predpostavimo, da želimo digitalizirati list 55 pregledne topografske karte, izdelane v merilu 1:500 000 v Lambertovi konformni konusni projekciji z dvema standardnima vzporednikoma φ_1= 38° 30' in φ_2= 49° 00'. Predpostavimo, da na omenjeni karti nista vrisani ne pravokotna mreža ne mreža poldnevnikov in vzporednikov. Le na okviru karte (ki predstavlja projekcije delov dveh vzporednikov in dveh poldnevnikov) imamo označene vrednosti za vsako minuto za zemljepisno širino φ od 40° 00' do 43° 45' ter za zemljepisno dolžino λ od 16° 10' do 19° 50'.

Opredelimo kot os $x^{'}$ pravokotnega koordinatnega sistema projekcijo poldnevnika λ = 18° 00', ki se nahaja na sredini karte. Naj bo izhodišče tega koordinatnega sistema najnižja točka na karti, t.j. točka T_1 z geografskima kooordinatama φ = 40° 00' in λ = 18° 00'. Pravokotne koordinate te točke so $y_1^{'}$ = 0 in $x_1^{'}$ = 0. Os $y^{'}$ pravokotnega koordinatnega sistema naj poteka skozi točko T_1 navpično na os $x^{'}$. Tedaj bo imela točka T_2, ki se nahaja v desnem zgornjem vrhu lista, geogrefski koordinati φ= 43° 45' in λ = 19° 50'. Tem koordinatam ustrezajo pravokotne koordinate $y_2^{'}$ = 147013,241 in $x_2^{'}$ = 416666,005. Naj bo tretja točka T_3 v desnem spodnjem vrhu lista. Njeni geografski koordinati sta φ = 40° 00' in λ = 19° 50', pravokotne v ravnini pa $y_3^{'}$ = 156209,042, $x_3^{'}$ = 1730,741.

Pri digitaliziranju vsebine karte dobimo koordinate v lokalnem sistemu digitalizatorja. Na podlagi digitaliziranih pravokotnih koordinat točk T_1, T_2 in T_3 ter njim pridruženih koordinat v Lambertovi projekciji lahko s formulami (1.4) določimo parametre afine transformacije (1.1). Za tem s pomočjo (1.1) transformiramo vse ostale točke. Predpostavimo, da je pri digitaliziranju točke T_3 prišlo do napake, ter da so njene prave koordinate ($y_3^{'}$, $x_3^{'}$) zamenjane s ($y_3^{'} + \Delta y_3^{'}$, $x_3^{'} + \Delta x_3^{'}$). Vpliv te napake na vsako drugo točko po afini transformaciji se lahko izračuna s pomočjo formul (2.6) in (2.8). Na Sliki 1 je prikazana razporeditev odstopanj s pomočjo premic konstantnih odstopanj. Odstopanja se povečujejo proporcionalno z razdaljo točke od premice T_1T_2. Naraščanje odstopanj je ponazorjeno na Sliki 1 s krožnicami različnih velikosti.



Slika 1: Prikaz razporeditve odstopanj zaradi ene napačne točke pri afini transformaciji, določeni s tremi pari pridruženih točk

Viri:

Jenko, M., 1993, Saniranje obstoječih topografskih in katastrskih izmer, Geodetski vestnik (37), Ljubljana, štev. 1, 20-26.

Lapaine, M., Frančula, N., 1990, Prilog ocjeni točnosti pri afinoj transformaciji. ZGIGJ, Zbornik radova Sajetovanja Katastar nepokretnosti, Ilidža-Sarajevo, 63-76.

(prevod iz hrvaščine: prof. Zlatica Marok)

Recenzija: mag. Edvard Mivšek
Ivan Štupar