

Generiranje časovno minimalnih trajektorij v avtomatiziranem skladišču z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja

Martina Benko Loknar¹, Gregor Klančar¹, Sašo Blažič¹

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko
E-pošta: martina.benkoloknar@fe.uni-lj.si

Generation of minimum-time trajectories in warehouse environment considering limitations on velocity, acceleration and jerk

This paper considers a problem of minimum-time smooth trajectory planning for wheeled mobile robots with constraints on velocity, acceleration and jerk. The smooth path is defined by several Bézier curves and the calculated velocity profiles on individual segments are minimum-time with continuous velocity and acceleration in the joints. We describe a novel solution for the construction of a 5th order Bézier curve that enables simple and intuitive parameterization. The trajectory planning algorithm operation is demonstrated in a warehouse environment. Therefore, we have shown that the proposed path construction and trajectory generation algorithm can be applied to a constrained environment and can also be used in real-life time-minimization.

1 Uvod

Mobilni roboti so zaradi vse širše uporabe postali sestavni del raznolikih okolij; najdemo jih v proizvodnji, medicini in v številnih drugih storitvah, ki temeljijo na robotih, vključno z avtomatiziranimi skladišči. V delovnih okoljih, kjer lahka in delovno intenzivna opravila delavcev nadomestijo mobilni roboti, se zmanjša čas obdelave izdelkov, povečajo se delovna učinkovitost, nadgradljivost, prilagodljivost in preglednost skladišča.

Načrtovanje poti in trajektorij sta temeljna problema v avtonomni mobilni robotiki in celo širše v okviru avtomatizacije [1]. Algoritmi načrtovanja poti izračunajo pot skozi vnaprej določene točke, pri čemer je cilj najti neprekinjeno pot s čim krajšo razdaljo med začetno in končno točko tako, da ne pride do trkov z ovirami [2]. Medtem ko je planiranje poti geometrijski problem, pa se pri načrtovanju trajektorije nastalo pot dodatno parametrira s časom. Pomemben del metod načrtovanja poti je izbira geometrijskih krivulj, ki so lahko polinomi, Bézierjeve krivulje, kubični zlepki, B- zlepki, Dubinove krivulje, klotoide, hipocikloide ipd. [10, 11].

Posledica določanja časovnih trenutkov vzdolž poti pa vpliva na kinematične in dinamične lastnosti gibanja mobilnega sistema: sile in navori so odvisni od pospeška vzdolž trajektorije, medtem ko so nihanja njegove mehanske strukture večinoma določena z vrednostmi trzaja,

časovnega odvoda pospeška [3]. Da bi zadostili kinematičnim omejitvam vozila in uspešno prevažali nevarna, lomljiva ali dragocena bremena, mora biti končna pot gladka, izvedljiva pri visokih hitrostih in hkrati neškodljiva za mehanski sistem v smislu izogibanja trzajem in čezmernim pospeškom aktuatorjev [9].

Problem optimizacije hitrostnega profila je določiti časovno optimalni zakon hitrosti, ki upošteva določene kinematične ali dinamične omejitve in je bil obravnavan številnih člankih [6]. Trzaj se uporablja kot dejavnik oblikovanja za zagotavljanje udobja med vožnjo (npr. pri vožnjah v zabaviščnih parkih, v vodnih plovilih, dvigalih in avtonomnih avtobusih) in nastopa tudi v ISO standardih. Pomen trzaja se utrjuje v številnih znanstvenih in inženirskih aplikacijah, veliko raziskav pa je posvečenih omejevanju trzaja za zmanjšanje vibracij, pogreškov položaja ali za izboljšanje učinkovitosti dela obdelovalnih strojev, robotskih manipulatorjev in avtonomnih mobilnih robotov [7].

Članek obravnava problem generiranja časovno minimalnih trajektorij za kolesni mobilni sistem, ki se giba v omejenem prostoru brez ovir. Uporabljamo novo metodologijo konstrukcije in parametrizacije Bézierjevih krivulj petega reda, ki sestavljajo nastalo geometrijsko pot. Naša predstavljena metoda za generiranje časovno minimalnih trajektorij je še posebej primerna za avtonomne mobile sisteme v avtomatiziranih skladiščih.

2 Definicija problema

Naj bo gibanje delca vzdolž trikrat zvezno odvedljive planarne krivulje \mathcal{C} opisano kot funkcija časa $t \in [0, t_f]$ s pozicijskim vektorjem $\mathbf{r}(t)$ z začetkom v danem fiksnem izhodišču. Vektorje hitrosti $\mathbf{v}(t)$, pospeška $\mathbf{a}(t)$ in trzaja $\mathbf{j}(t)$ lahko izrazimo v tangentno-normalni obliki kot:

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad (1a)$$

$$\mathbf{a}(t) = a_T(t) \cdot \hat{\mathbf{T}} + a_R(t) \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (1b)$$

$$\mathbf{j}(t) = j_T(t) \cdot \hat{\mathbf{T}} + j_R(t) \cdot \hat{\mathbf{N}}, \quad (1c)$$

pri čemer sta $\hat{\mathbf{T}}$ in $\hat{\mathbf{N}}$ enotski tangentni in enotski normalni vektor.

Naš cilj je razviti in implementirati algoritem za generiranje časovno minimalnih trajektorij za kolesne mobile sisteme v ravninskem prostoru brez ovir, pri čemer

so upoštevane še naslednje omejitve hitrosti, pospeška in trzaja:

$$0 \leq \|\mathbf{v}(t)\| \leq v_{\text{MAX}}; \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (2a)$$

$$\frac{a_T^2(t)}{a_{T_{\text{MAX}}}^2} + \frac{a_R^2(t)}{a_{R_{\text{MAX}}}^2} \leq 1; \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (2b)$$

$$\frac{j_T^2(t)}{j_{T_{\text{MAX}}}^2} + \frac{j_R^2(t)}{j_{R_{\text{MAX}}}^2} \leq 1; \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (2c)$$

Rešitev iščemo z optimizacijo potovalnega časa vzdolž izvedljive poti, ki je sestavljena iz večih zlepkov. Algoritem, ki vzdolž danega segmenta poti generira časovno minimalen hitrostni profil z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja, je sestavljen iz dveh korakov in je podrobneje predstavljen v [4]: v prvem koraku algoritma se upoštevajo omejitve hitrosti in pospeška, v drugem koraku pa algoritem modificira prvotni hitrostni profil tako, da so upoštevane tudi omejitve trzaja, pri čemer se postopek razlikuje glede na tip kršitve (točkaste ali intervalne kršitve tangentnega trzaja).

3 Krivuljni primitivi in opis okolja

Pri načrtovanju trajektorij smo uporabili Bézierove krivulje, ki se zaradi ugodnih lastnosti (prilagodljivost, računaska nezahtevnost) in numerične stabilnosti pogosto uporabljajo pri načrtovanju poti mobilnih sistemov.

V posamezni iteraciji optimizacije z algoritmom, ki generira časovno minimalni hitrostni profil, izračunamo potovalni čas na dani poti, sestavljeni iz štirih Bézierovih krivulj. Postopek načrtovanja časovno minimalnih trajektorij smo prikazali na primeru avtomatiziranega skladišča.

3.1 Konstrukcija krivuljnih zlepkov

Bézierove krivulje določajo Bernsteinovi polinomi. N -dimenzionalen Bernsteinov polinom n -tega reda, $\mathbf{r}_n(\lambda) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, je definiran kot:

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{i,n} B_{i,n}(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (3)$$

pri čemer je λ normaliziran čas ($0 \leq \lambda \leq 1$), $\mathbf{P}_{i,n} \in \mathbb{R}^N$ je i -ta kontrolna točka in $B_{i,n}(\lambda)$ je baza Bernsteinovih polinomov, definirana kot:

$$B_{i,n}(\lambda) = \binom{n}{i} \lambda^i (1-\lambda)^{n-i}, \quad (4)$$

za vse $i \in \{0, \dots, n\}$, pri čemer je $\binom{n}{i}$ binomski koeficient. Naj bo $\mathbf{P}_n = [\mathbf{P}_{0,n}, \dots, \mathbf{P}_{n,n}] \in \mathbb{R}^{N \times (n+1)}$ vektor kontrolnih točk polinoma $\mathbf{r}_n(\lambda)$. Bernsteinov polinom v enačbi (3) lahko tedaj zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = \mathbf{P}_n \begin{bmatrix} B_{0,n}(\lambda) \\ B_{1,n}(\lambda) \\ \dots \\ B_{n,n}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Bézierove krivulje, ki jih določa zelo veliko število kontrolnih točk, so numerično nestabilne, zato je pri pla-

niranju poti zaželeno konstruirati gladko pot, ki jo sestavlja več Bézierovih krivulj nizkega reda. Na spojih posameznih krivulj mora biti izpolnjen pogoj zvezne ukrivljenosti. Najmanjši red Bézierovih krivulj, ki zadosti tej zahtevi je $n = 5$. Bézierova krivulja petega reda $\mathbf{r}_5(\lambda) = [x(\lambda), y(\lambda)]^T$ je definirana s šestimi kontrolnimi točkami $\mathbf{P}_{i,5} = [x_i, y_i]$, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$:

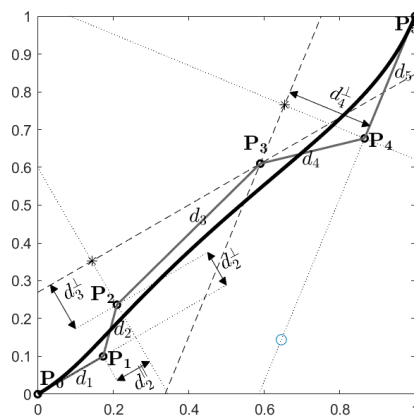
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_5(\lambda) = & (1-\lambda)^5 \mathbf{P}_{0,5} + 5\lambda(1-\lambda)^4 \mathbf{P}_{1,5} \\ & + 10\lambda^2(1-\lambda)^3 \mathbf{P}_{2,5} + 10\lambda^3(1-\lambda)^2 \mathbf{P}_{3,5} \\ & + 5\lambda^4(1-\lambda) \mathbf{P}_{4,5} + \lambda^5 \mathbf{P}_{5,5} \end{aligned} \quad (6)$$

Ker članek obravnava zgolj Bézierove krivulje petega reda, se v nadaljevanju članka zaradi preglednosti pri sklicevanju na kontrolne točke izpušča drugi indeks, ki označuje red krivulj.

Za učinkovito iskanje optimalne trajektorije je zelo pomemben način konstrukcije Bézierovih krivulj in izbor ustreznih optimizacijskih parametrov. Odvod ukrivljenosti določa vrednost radialnega trzaja (drugi člen v spodnjem izrazu):

$$\mathbf{j}(t) = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{\kappa^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{T}} + \frac{1}{v} \left(\frac{d}{dt} \frac{v^3}{\kappa} \right) \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (7)$$

ki jo v \mathbf{P}_0 postavimo na 0 kot smiselno dodatno omejitev trzaja na spojih zlepkov. Koordinate posameznih kontrolnih točk \mathbf{P}_i označimo z (x_i, y_i) za $i \in \{0, \dots, 5\}$. Za $i \in \{0, \dots, 4\}$ pa označimo razdalje med zaporednimi kontrolnimi točkami $d(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1})$ z d_{i+1} in kote $\angle(d_i, y = 0)$ s φ_i . Konstrukcija posamezne Bézierove krivulje poteka v naslednjih korakih (slika 1):



Slika 1: Konstrukcija Bézierove krivulje.

1. Začrtamo prvo kontrolno točko in jo označimo z \mathbf{P}_0 . V smeri φ_1 odmerimo dolžino d_1 in označimo drugo točko z \mathbf{P}_1 .
2. V smeri φ_1 nato odmerimo dolžino d_2^{\parallel} :

$$d_2^{\parallel} = d_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} d_1 \quad (8)$$

3. V pravokotni smeri nato odmerimo razdaljo d_2^{\perp} :

$$d_2^{\perp} = \frac{5}{4} d_1^2 \kappa_0 \quad (9)$$

in tretjo kontrolno točko označimo s \mathbf{P}_2 .

4. Vse točke, ki so od P_2 v isti smeri (pravokotno na daljico P_0P_1) oddaljene za d_3^\perp , označimo s črtkano črto:

$$d_3^\perp = \frac{5}{12}d_1^2\kappa'_0 \quad (10)$$

5. Začrtamo zadnjo kontrolno točko in jo označimo s P_5 . V smeri kota φ_5 odmerimo dolžino d_5 in peto kontrolno točko označimo s P_4 .

6. Vse točke, ki so od P_4 oddaljene za d_4^\perp pravokotno glede na daljico P_4P_5 , označimo s črtkano črto:

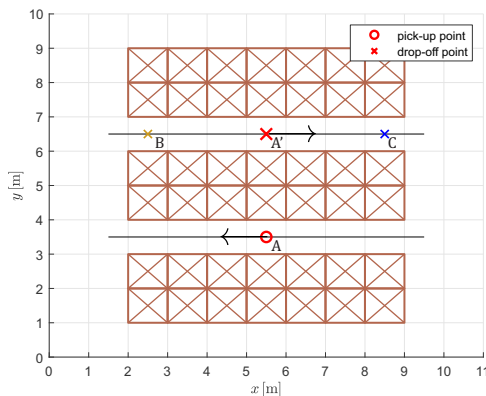
$$d_4^\perp = \frac{5}{4}d_5^2\kappa_5 \quad (11)$$

7. Četrta kontrolna točka P_3 leži na presečišču obeh črtkanih črt. Bézierova krivulja je sedaj popolnoma definirana.

3.2 Opis avtomatiziranega skladišča

Zaradi širokih tehnoloških zmogljivosti avtomatsko vodenih vozil in drugih avtonomnih mobilnih sistemov je možen razvoj v smeri popolnoma avtomatiziranih skladišč. Med običajne naloge, ki jih v skladiščih opravljajo mobilni roboti, so: natovarjanje in raztovarjanje blaga, zlaganje in prevzemanje artiklov, priprava naročil, sortiranje, vodenje popisov in vzdrževanje skladišča.

Algoritem za načrtovanje poti smo preizkusili v simulaciji avtomatiziranega skladišča, pri čemer smo obravnavali nalogo prevzemanja in zlaganja artiklov. Običajno je v skladiščih prostor zelo omejen in v našem primeru se mobilni robot lahko premika v okolici treh ravnih vrst skladiščnih regalov, kjer pobira in odlaga tovor z vnaprej določenih mest. Predpostavili smo, da je gibanje med regali omejeno na raven tir, medtem ko se oblika poti med prehodi določi naknadno z optimizacijo in jo sestavljata dve Bézierovi krivulji z nekaterimi prostimi parametri. Na mestih prevzema/vračila tovora je hitrost mobilnega robota postavljena na nič. Za analizo primera smo izbrali



Slika 2: Tloris skladišča z označeno točko prevzema in točkami vračila tovora.

tri pare prevzemno-vračilnih mest (slika 2). Predpisano gibanje mobilnega robota je v smeri urinega kazalca po krožni poti od mesta prevzema (ang. *PUP*: pick-up point) do mesta vračila (ang. *DOP*: drop-off point) in nato zopet

nazaj do izhodišča. Mobilni robot je torej natovorjen med gibanjem od točke prevzema do mesta vračila, preostali del poti pa je nenatorjen. Predpostavimo, da mobilni sistem prevaža občutljiv in dragocen tovor, zato se omejitve hitrosti, pospeška in trzaja (izrazi 2a-2c) (znatno) razlikujejo glede na položaj na krožni poti (tabela 1).

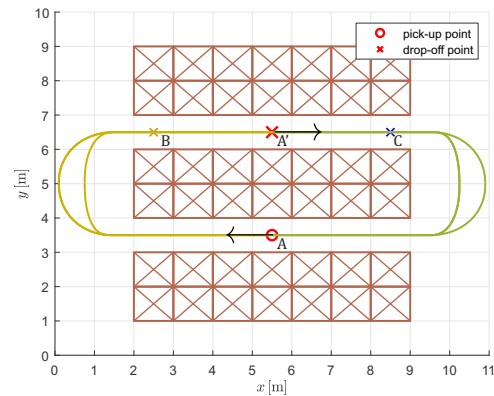
| tovor | v_{MAX} [m/s] | a_{RMAX} [m/s ²] | a_{TMAX} [m/s ²] | j_{RMAX} [m/s ³] | j_{TMAX} [m/s ³] |
|-------|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| × | 1.5 | 4 | 2 | 10 | 8 |
| ✓ | 1.5 | 1 | 0.5 | 2.5 | 2 |

Tabela 1: Omejitve hitrosti, pospeškov in trzajev za natovorjen in nenatorjen mobilni sistem.

4 Rezultati simulacij

S posamezno optimizacijo, katere rešitev je bila časovno minimalna trajektorija, smo določili hitrostni profil in obliko poti za polovico krožne poti. V točkah prevzema in vračila je namreč hitrost vozila postavljena na nič, optimizacija pa se tako tudi izvaja na manjšem številu zlepkov (ne na osmih segmentih, ampak na štirih). Zaradi simetrično (A' glede na A) oziroma komplementarno (B in C glede na A) postavljenih točk prevzema in vračila tovora je enostavno določiti čas potovanja na celotni krožni poti.

Najprej smo izračunali časovno minimalne trajektorije za simetrično postavljeni točki prevzema in vračila tovora. Dobljene poti na prvem delu krožne poti (dva ravna odseka in dve Bézierovi krivulji) so za oba primera obremenitve vrisane na tloris skladišča (slika 3).



Slika 3: Vrisane poti, ki so rezultat optimizacije časa potovanja. Krajša pot je rešitev v primeru neobremenjenega vozila.

Zanimivo bi bilo izvedeti, kakšne - če sploh - so razlike v časih potovanja, če se natovorjeno/nenatorjeno vozilo pelje po poti, ki ni bila optimizirana za isto obremenitev. Pot med točko prevzema in vračila tovora (in obratno), ki je rešitev časovno minimalnega načrtovanja trajektorije za simetrično postavljeni točki prevzema in vračila v primeru polne obremenitve, imenujemo N_{pot} (iz ang. *no load*), pot, ki je rešitev optimizacije v primeru nenatorjenega vozila, pa F_{pot} (iz ang. *full load*). Analogno označujemo tudi natovorjen in nenatorjen mo-

| primer krožne poti | | koordinate prevzema | koordinate vračila | čas potovanja |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|---------------|
| PUP → DOP | DOP → PUP | (PUP) | (DOP) | [s] |
| F_{agv}, N_{path} | N_{agv}, N_{path} | $A(5.5, 3.5)$ | $A'(5.5, 6.5)$ | 21.998 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $B(2.5, 6.5)$ | 21.477 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $C(8.5, 6.5)$ | 21.985 |
| F_{agv}, F_{path} | N_{agv}, F_{path} | $A(5.5, 3.5)$ | $A'(5.5, 6.5)$ | 21.523 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $B(2.5, 6.5)$ | 21.342 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $C(8.5, 6.5)$ | 21.519 |
| F_{agv}, F_{path} | N_{agv}, N_{path} | $A(5.5, 3.5)$ | $A'(5.5, 6.5)$ | 21.052 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $B(2.5, 6.5)$ | 20.859 |
| | | $A(5.5, 3.5)$ | $C(8.5, 6.5)$ | 21.035 |

Tabela 2: Potovalni časi natovorjenega/raztovorjenega mobilnega sistema (F_{agv}/N_{agv}) na poti, ki je rezultat optimizacije za natovorjeno/raztovorjeno vozilo (F_{path}/N_{path}).

bilni sistem: F_{agv} in F_{agv} (iz ang. *autonomous guided vehicle*). Tabela 2 prikazuje čase potovanja mobilnega sistema vzdolž poti N_{pot} in F_{pot} glede na oba primera obremenitve. Zaradi različno postavljenih točk prevzema in vračila tovora se primeri razlikujejo po razmerju časov oziroma dolžine poti, na kateri je mobilni sistem obremenjen oziroma razbremenjen.

Rezultati kažejo, da so potovalni časi res najkrajši v primeru, ko se na prvem delu krožne poti natovorjen mobilni sistem vozi po poti, ki je bila optimizirana za natovorjeno vozilo, v drugem delu poti pa nenatovorjeno vozilo potuje po poti, ki je bila optimizirana za nenatovorjen mobilni sistem. Demonstracijo delovanja algoritma v skladišču bi lahko še razširili in jo postavili v zahtevnejše okolje, opravili analize več setov dinamičnih omejitev in z večimi pari prevzemno-vračilnih mest.

5 Zaključek

V članku je predstavljen algoritem za planiranje časovno minimalnih trajektorij v okolju brez ovir. Temelji na uporabi Bézierovih krivulj in upošteva omejitve hitrosti, pospeška in trzaja. Načrtovanje trajektorij smo demonstrirali v simulaciji gibanja avtonomnih mobilnih sistemov v avtomatiziranem skladišču.

Kljub nekaterim omejitvam predstavljene metode verjamemo, da bodo rezultati te študije pripomogli k raziskavam o avtomatizaciji skladišč. V prihodnje se bomo ukvarjali z izboljševanjem robustnosti algoritma ter s preučevanjem njegove računske učinkovitosti. Morda bi se kot ugoden način reševanja izkazala tudi uporaba Bézierovih krivulj višjega reda, predvsem zaradi vpliva lastnosti krivulj na velikost radialnega trzaja.

Zahvala

Članek je nastal s finančno podporo Agencije Republike Slovenije za raziskovalno dejavnost (št. P2-0219).

Literatura

[1] A. Gasparetto, P. Boscaroli, A. Lanzutti, and R. Vidoni, *Motion and Operation Planning of Robotic Systems*,

vol. 29 of *Mechanisms and Machine Science*. Cham: Springer International Publishing, 2015.

- [2] H. Zhang and S. Yang, "Smooth path and velocity planning under 3D path constraints for car-like vehicles," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 107, pp. 87–99, sep 2018.
- [3] M. Tsirlin, "Jerk by axes in motion along a space curve," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Poland)*, vol. 55, no. 4, pp. 1437–1441, 2017.
- [4] M. Benko Loknar, S. Blažič, and G. Klančar, "Minimum-time velocity profile planning for planar motion considering velocity, acceleration and jerk constraints," *International Journal of Control*, pp. 1–15, oct 2021.
- [5] A. Zdešar and I. Škrjanc, "Optimum Velocity Profile of Multiple Bernstein-Bézier Curves Subject to Constraints for Mobile Robots," *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, vol. 9, no. 5, pp. 1–23, 2018.
- [6] P. F. Lima, M. Trincavelli, J. Martensson, and B. Wahlberg, "Clothoid-Based Speed Profiler and Control for Autonomous Driving," *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC*, vol. 2015-October, pp. 2194–2199, 2015.
- [7] R. Sato and K. Shirase, "Analytical time constant design for jerk-limited acceleration profiles to minimize residual vibration after positioning operation in NC machine tools," *Precision Engineering*, vol. 71, no. March, pp. 47–56, 2021.
- [8] H. Y. Zhang, W. M. Lin, and A. X. Chen, "Path planning for the mobile robot: A review," *Symmetry*, vol. 10, no. 10, 2018.
- [9] A. Ravankar, A. Ravankar, Y. Kobayashi, Y. Hoshino, and C.-C. Peng, "Path Smoothing Techniques in Robot Navigation: State-of-the-Art, Current and Future Challenges," *Sensors*, vol. 18, p. 3170, sep 2018.
- [10] M. Ghazaei, A. Robertsson, and R. Johansson, "Online Minimum-Jerk Trajectory Generation," *Proc. IMA Conf. Mathematics of Robotics*, 2015.
- [11] C. M. Kang, S.-H. Lee, and C. C. Chung, "On-Road Path Generation and Control for Waypoints Tracking," *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, vol. 9, no. 3, pp. 36–45, 2017.