

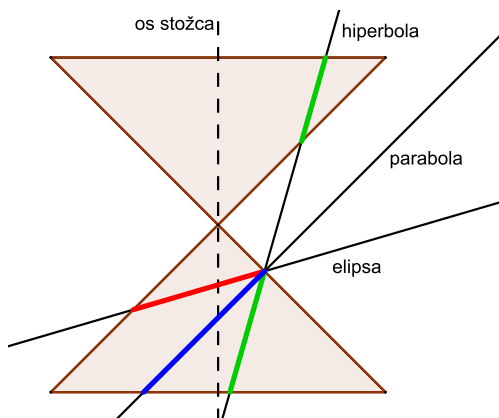
Stožnica skozi pet točk

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Stožnice so ravninske krivulje, ki nastanejo s presekom dvojnega stožca z ravnino. Zato se tudi tako imenujejo. Prave stožnice so elipsa, hiperbola in parabola. Tudi krožnica je stožnica, saj jo imamo lahko za poseben primer elipse. Na sliki 1 je poenostavljen prikaz nastanka pravih stožnic.

Vendar ni vsak presek dvojnega stožca z ravnino prava stožnica. Če se presečna ravnina stožca samo dotika vzdolž ene od njegovih tvorilk, je presek kar ta tvorilka, torej premica. Če presečna ravnina vsebuje os stožca, je presek unija dveh njegovih tvorilk, torej dveh sekajočih se premic. Če ravnina preseka stožec samo v njegovem vrhu, je presek točka. To so izrojeni ali degenerirani primeri stožnic, rečemo jim *izrojene stožnice*. Na sliki 2 je prikaz nastanka izrojnih stožnic.



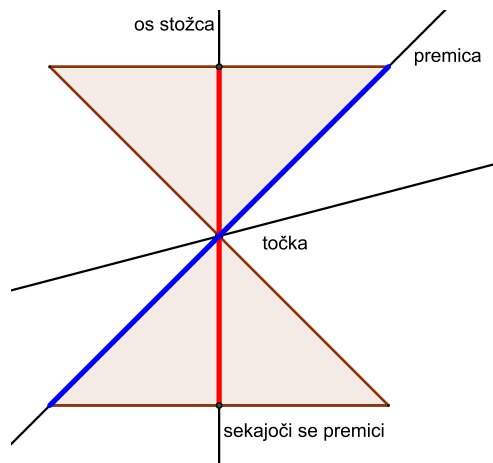
SLIKA 1.

Nastanek pravih stožnic.

V pravokotnem kartezijskem koordinatnem sistemu Oxy imajo vse stožnice enačbo

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

pri čemer so koeficienti A, B, C, D, E in F realna števila. Pri tem A, B in C niso vsi hkrati enaki 0. Vsaj



SLIKA 2.

Nastanek izrojnih stožnic.

en od teh je različen od 0 in z njim lahko (1) delimo in dobimo enakovredno enačbo s petimi koeficienti. Prav tako dobimo enakovredno enačbo, če (1) pomnožimo s poljubnim od 0 različnim številom. S petimi točkami pa je na splošno stožnica, prava ali izrojena, določena, morda ne ravno enolično. Problem določitve enačbe stožnice skozi pet točk nas privede do sistema petih linearnih enačb s petimi neznankami, ki pa bi se mu radi izognili.

Enačba (1) je po obliki algebrska enačba druge stopnje, zato uvrščamo stožnice med algebrske krivulje druge stopnje. V enačbi (1) se lahko skriva katera koli stožnica, prava ali izrojena, lahko pa tudi dvojica vzporednih premic ali celo prazna množica.

Primeri.

- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - krožnica;
- $4x^2 + 5y^2 - 2 = 0$ - elipsa;
- $4x^2 - 5y^2 - 2 = 0$ - hiperbola;
- $y^2 - 2x = 0$ - parabola;
- $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y) = 0$ - sekajoči se premici;
- $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2 = 0$ - dvojna premica;





- $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = (x + y)(x + y + 1) = 0$ - vzporedni premici;
- $x^2 + y^2 = 0$ - točka $(0, 0)$;
- $x^2 + y^2 + 1 = 0$ - prazna množica.

Oglejmo si, kako pridemo do enačbe stožnice skozi pet danih točk $T_k(x_k, y_k)$, kjer je $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Obravnavajmo primer, ko sta trojki (T_0, T_1, T_3) in (T_0, T_2, T_4) nekolinearni oziroma ko se dajo točke preindeksirati tako, da to drži. Trojka točk je nekolinearna, če njene točke ne ležijo na isti premici.

Kako najdemo enačbo stožnice skozi pet točk? Najprej poiščemo enačbe štirih premic, ki so določene z dvojicami točk $(T_1, T_2), (T_3, T_4), (T_1, T_3)$ in (T_2, T_4) . Njihove enačbe v implicitni obliki naj bodo $p_{i,j}(T) = p_{i,j}(x, y) = a_{i,j}x + b_{i,j}y + c_{i,j} = 0$ za dvojice $(i, j) \in \{(1, 2), (3, 4), (1, 3), (2, 4)\}$. Pri tem koeficienta $a_{i,j}$ in $b_{i,j}$ nista hkrati enaka 0. Veljajo seveda enakosti $p_{i,j}(T_i) = p_{i,j}(T_j) = 0$ za navedene dvojice. Nato zapišemo enačbo

$$P(T) = p_{1,2}(T)p_{3,4}(T) - \lambda p_{1,3}(T)p_{2,4}(T) = 0, \quad (2)$$

ki je po obliki algebrska enačba druge stopnje in s tem enačba algebrske krivulje druge stopnje. Pri tem je λ parameter, ki ga bomo izbrali tako, da bo tudi točka T_0 zadoščala enačbi (2), torej $P(T_0) = 0$. Očitno je $P(T_k) = 0$ za $k = 1, 2, 3, 4$. Pri tem pa $p_{1,3}(T_0)p_{2,4}(T_0) \neq 0$, ker trojki (T_0, T_1, T_3) in (T_0, T_2, T_4) nista kolinearni. Če izberemo

$$\lambda = \frac{p_{1,2}(T_0)p_{3,4}(T_0)}{p_{1,3}(T_0)p_{2,4}(T_0)},$$

velja $P(T_k) = 0$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ in dobili smo enačbo stožnice skozi pet danih točk, in sicer do neničelnega faktorja natančno. Tudi implicitne enačbe sodelujočih premic so določene samo do neničelnega konstantnega faktorja natančno, kar pa ne vpliva na končni rezultat, o čemer se ni težko prepričati.

1. naloga.

Poiščimo enačbo stožnice, ki poteka skozi točke

$$T_0(0, 0), T_1(4, 0), T_2(6, 2), T_3(0, 4), T_4(-1, 3).$$

Brez težav najdemo enačbe premic:

$$\begin{aligned} p_{1,2}(x, y) &= x - y - 4 = 0, \\ p_{3,4}(x, y) &= x - y + 4 = 0, \\ p_{1,3}(x, y) &= x + y - 4 = 0, \\ p_{2,4}(x, y) &= x + 7y - 20 = 0. \end{aligned}$$

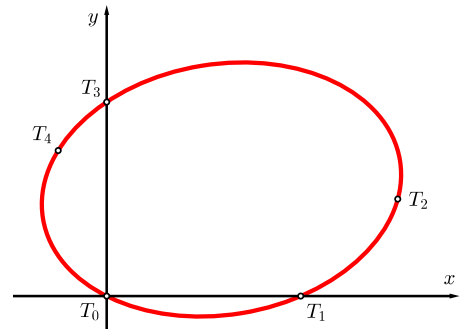
Iskana krivulja ima enačbo

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (x - y - 4)(x - y + 4) - \\ &\quad \lambda(x + y - 4)(x + 7y - 20) = 0. \end{aligned}$$

Ker mora veljati še $P(T_0) = P(0, 0) = 0$, dobimo enačbo $-16 - 80\lambda = 0$ z rešitvijo $\lambda = -1/5$, kar vstavimo v enačbo iskane krivulje. Poenostavimo in na koncu dobimo

$$3x^2 - xy + 6y^2 - 12x - 24y = 0.$$

Iskana stožnica je elipsa (slika 3).



SLIKA 3.

Elipsa skozi pet danih točk.

V primeru, ko je vsaj ena od trojk (T_0, T_1, T_2) in (T_0, T_3, T_4) kolinearna, trojki (T_0, T_1, T_3) in (T_0, T_2, T_4) pa nekolinearni, poiščemo enačbo premice $a_{1,2}x + b_{1,2}y + c_{1,2} = 0$ skozi T_1 in T_2 ter enačbo premice $a_{3,4}x + b_{3,4}y + c_{3,4} = 0$ skozi T_3 in T_4 . Izrojena stožnica je kar unija teh dveh premic, njena enačba pa se glasi $(a_{1,2}x + b_{1,2}y + c_{1,2})(a_{3,4}x + b_{3,4}y + c_{3,4}) = 0$.

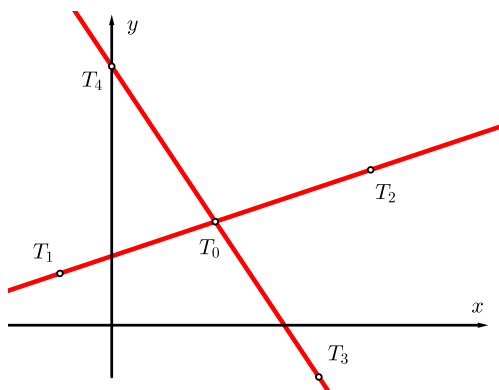
V preostalih primerih enačba izrojene stožnice ni do konstantnega faktorja enolično določena.

2. naloga.

Poiščimo še enačbo stožnice, ki poteka skozi točke

$$T_0(2, 2), T_1(-1, 1), T_2(5, 3), T_3(4, -1), T_4(0, 5).$$

Prve tri točke ležijo na premici $x - 3y + 4 = 0$, zadnji dve pa na premici $3x + 2y - 10 = 0$ (slika 4). Iskana izrojena stožnica ima enačbo $(x - 3y + 4)(3x + 2y - 10) = 3x^2 - 7xy - 6y^2 + 2x + 38y - 40 = 0$.



SLIKA 4.

Še en primer izrojene stožnice.

3. naloga.

Poiščimo še enačbo stožnice, ki poteka skozi točke

- $T_0(0, 0), T_1(1, 0), T_2(2, 0), T_3(3, 0), T_4(3, 3)$.

Prve štiri točke ležijo na premici $y = 0$. Premica skozi T_4 ima enačbo $k(x - 3) - y + 3 = 0$, kjer je k poljubna konstanta. Vseh pet točk najdemo na izrojeni stožnici $(k(x - 3) - y + 3)y = 0$, pa tudi na $(x - 3)y = 0$, kjer vzamemo navpično premico skozi T_4 . Rešitev je nešteto.

Domače naloge.

- Poišči stožnico, ki poteka skozi točke

- $T_0(0, 0), T_1(1, 1), T_2(-2, 0), T_3(4, 3), T_4(-3, 2)$.

(Rezultat: hiperbola z enačbo $22x^2 - 16xy - 31y^2 + 44x - 19y = 0$.)

- Poišči stožnico, ki poteka skozi točke

- $T_0(0, 1), T_1(-2, 0), T_2(-5, -2), T_3(0, -2), T_4(1, 0)$.

(Rezultat: parabola z enačbo $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.)

- Poišči še stožnico, ki poteka skozi točke

- $T_0(-2, 0), T_1(1, 1), T_2(4, 2), T_3(3, -1), T_4(2, 3)$.

(Rezultat: izrojena stožnica, dvojica sekajočih se premic, z enačbo $(x - 3y + 2)(4x + y - 11) = 0$.)

× × ×

Tekmovanje π

↓↓↓

NEŽKA MRAMOR KOSTA IN JASNA PREZELJ

→

Letošnji Mednarodni dan matematike je potekal pod sloganom *Matematika za vsakogar* in res bi matematika ta dan lahko dosegla vsakogar, saj so ji slovenski mediji namenili razveseljivo veliko pozornosti. Na Društvu matematikov fizikov in astronomov Slovenije smo poleg že tradicionalnega likovnega natečaja za čim lepše porisano matematično tablo, ki se zaključuje konec meseca marca, učencem in dijakom letos ponudili še en izziv – poiskati čim boljši približek števila π (ki mu je 14. marec ali v angleškem datumskem zapisu 3.14., posvečen) z mehaničnimi pripomočki in z merjenjem, tehtanjem in preštevanjem. Na razpis, ki je bil objavljen že v prejšnji številki Preseka, smo prejeli pet izvirnih in zanimivih rešitev. Prav vse si zaslužijo pohvalo in nagrado za domiselnost in zgledno skupinsko delo.

Najbolj izdelano rešitev so prispevali učenci 8a. razreda OŠ Cerkvenjak-Vitomarci pod mentorstvom učitelja Stanislava Toplaka. Oceno števila π so dobili s preštevanjem kvadratkov kvadratne mreže, ki skupaj pokrivajo četrtno kroga z znano ploščino, izboljšali pa so jo tako, da so na robu lika uporabili finejšo mrežo (slika 1).

Rezultat računa: 3,1410. Posebno pohvalo si zaslužijo za oceno in analizo napake svojega približka.

Najbolj izvirno rešitev naloge so prispevali Neža, Živa, Tamara Elena, Domen, Niko in Matjaž, učenci 8. razreda OŠ Globoko pod mentorstvom učiteljice Danijepe Pezdirc. Izmerili so obseg in premer kroga na šolskem športnem igrišču in še 41 okroglih predmetov, ki so jih našli doma – od majhnih, kot so smoki, kabel, baterija, ..., do krožnikov, ponev, globusa ... Tako so dobili celo vrsto približkov števila π s povprečno vrednostjo 3,1243.

→