Kitajske naloge

Marjan Jerman

Zaradi geografske izoliranosti, večtisočletne samosvoje kulture in številčne populacije se je kitajska matematika zelo dolgo razvijala skoraj popolnoma neodvisno od drugih civilizacij.

Prve zametke matematike najdemo že v mitih, ki izvirajo iz predzgodovinskega obdobja. Najbolj znana je legenda o cesarju Yuju, ki se je ohranila tudi preko tradicije *feng shuija*. Cesar je z darovi želel pomiriti boga reke Lou, ki je pogosto povzročala katastrofalne poplave. Po eni izmed inačic zgodbe ni pomagalo prav nobeno darovanje, dokler ni iz reke prilezla želva. Na oklepu je imela zapisano naslednjo nenavadno tabelo s števili od 1 do 9:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Cesar je opazil, da je vsota vsake vrstice in vsota vsakega stolpca v tabeli enaka 15. Potem, ko je reki ponudil 15 darov, se je reka umirila. To je verjetno prva omemba magičnih kvadratov. Zanimivo je, da je to edini magični kvadrat velikosti 3×3.

Večji del našega védenja o kitajski matematiki izvira iz približno desetih knjig, ki povzemajo dotedanje znanje matematike. Najstarejša je bila napisana približno 180 let pred našim štetjem. Verjetno najpomembnejša med njimi je knjiga z naslovom *Devet poglavij matematične umetnosti*. Knjigo so skozi stoletja spreminjali in dopolnjevali. Njena zadnja verzija je iz leta 200 našega štetja, vsebuje pa odkritja iz približno 1200-letne preteklosti.

Za razliko od današnjega razumevanja matematike, ki izvira iz starogrške tradicije in ga je prvi dokončno izoblikoval Evklid v svojih *Elementih* približno 300 let pred našim štetjem, je bila kitajska matematika predstavljena kot zbirka konkretnih problemov. Številski podatki v problemih so skrbno izbrani, tako da rešitve problemov delujejo tudi z drugačnimi podatki in se v bistvu obnašajo kot današnje spremenljivke. Tako lahko s pomočjo analogije naloge posplošimo in dobimo nekaj takšnega, kot so naši izreki.

Kako različna od naše je bila starokitajska kultura, pokaže tudi njihov sistem izobraževanja. Cesarska akademija je med nižjimi sloji izbrala 30 študentov, med katerimi jih je 15 študiralo abstraktno, 15 pa uporabno matematiko. Po sedmih letih študija so na zelo strogih izpitih za državne uradnike morali rešiti nekaj nalog iz obravnavanih knjig. Študentje abstraktne matematike so morali dodatno še pravilno dopolniti vsaj šest od desetih naključnih stavkov iz knjige *Devet poglavij matematične umetnosti*.

Za ilustracijo tedanjega poznavanja matematike si poglejmo nekatere izmed značilnih nalog.

Polnjenje ribnika

V šestem poglavju je zapisana še danes zelo popularna naloga s polnjenjem ribnika.

Ribnik napaja pet kanalov. Prvi kanal napolni ribnik v tretjini dneva, drugi v enem dnevu, tretji v dveh dneh in pol, četrti v treh dneh in peti v petih dneh. Hkrati odpremo vse kanale. Kdaj bo poln ribnik?

Naj bo x število dni, potrebnih za napolnitev ribnika. Potem je

$$3x + x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1.$$

Tako je $x = \frac{15}{74}$, kar je približno 4 ure, 51 minut in 54 sekund.

Kovanci

V sedmem poglavju so naloge, ki so povezane z reševanjem sistemov linearnih enačb.

Na prvem kupu je devet zlatih, na drugem pa enajst srebrnih kovancev. Oba kupa tehtata enako. Iz vsakega kupa vzamemo po en kovanec in ga damo na drugi kup. Kup, ki je v glavnem sestavljen iz zlatih kovancev, sedaj tehta 13 utežnih enot manj kot kup, ki vsebuje večino srebrnih kovancev.

Poišči teži zlatega in srebrnega kovanca.

Če z s označimo težo srebrnega in z z težo zlatega kovanca, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 9z &= 11s \\ 8z + s + 13 &= 10s + z. \end{aligned}$$

Sistem ima enolično določeni rešitvi

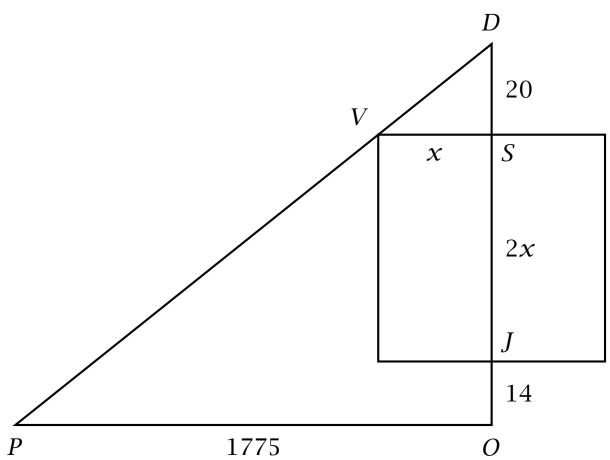
$$s = 29\tfrac{1}{4}, \quad z = 35\tfrac{3}{4}.$$

Kvadratno mesto

V zadnjem, devetem poglavju, so naloge, ki so povezane z znanjem o pravokotnih trikotnikih. Med bolj zanimivimi je naslednja:

Mesto je obdano s kvadratnim obzidjem. Na vsaki stranici zidu so na sredini vrata. Dvajset korakov pred severnimi vrati je drevo. Če mesto zapustimo pri južnih vratih, naredimo 14 *korakov proti jugu in nato* 1775 *korakov proti zahodu, prvič zagledamo drevo.*

Kako veliko je mesto?



SLIKA 1.
Kvadratno mesto

Skicirajmo mesto in uporabljajmo oznake s slike 1. Naj bo $2x$ njegova širina.

Ker sta trikotnika POD in VSD podobna, je

$$\frac{20}{x} = \frac{34 + 2x}{1775}.$$

Razmerje je ekvivalentno kvadratni enačbi

$$x^2 + 17x - 17750 = 0$$

z rešitvama

$$x = \frac{-17 \pm 267}{2}.$$

Za širino mesta moramo vzeti pozitivno rešitev $2x = 250$ korakov.

Oddaljeni otok

Liu Hui je leta 263 med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo o merjenju oddaljenega otoka:

Palici velikosti pet pujev sta postavljeni 1000 *pujev narazen (en pu ustreza približno dvema metroma). Če se postavimo med palici* 123 *pujev za prvo palico, ki je bližje otoku, sta vrh prve palice in vrh otoka poravnana. Če pa se postavimo* 127 *pujev za drugo palico, sta poravnana vrh otoka in vrh druge palice.*

Kolikšna je višina otoka in koliko je otok oddaljen od prve palice?

Naloga bo bolj jasna, če dodamo, da z obale vidimo visok klif nad morjem, ki je hkrati najvišja točka otoka. Povedati je treba tudi, da je obala sicer položna in da vrhova obeh palic ter vrh otoka vidimo s točk na tleh. Situacija je ilustrirana in skicirana na sliki 2.

Naj bo v višina klifa in d oddaljenost prve palice od otoka.

Trikotnika BP_1Q_1 in BOV sta si podobna, zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{123}{123 + d}.$$

Prav tako sta si podobna tudi trikotnika AP_2Q_2 in AOV, zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{127}{d + 1000 + 127}.$$

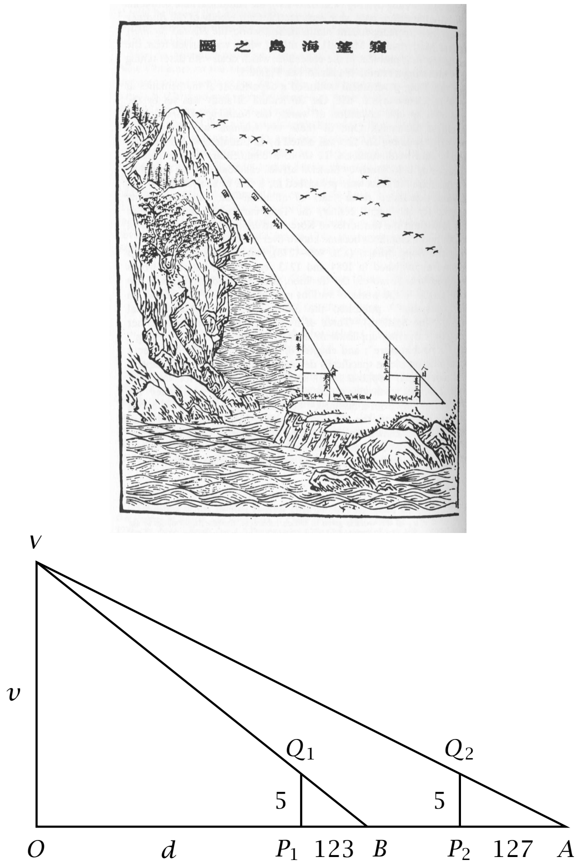
Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 615 + 5d &= 123v \\ 5635 + 5d &= 127v \end{aligned}$$

z rešitvama

$$v = 1255 \ \text{ in } \ d = 30750.$$

Otok je visok 1255 pujev in je 30750 pujev oddaljen od prve palice.



SLIKA 2.
Merjenje otoka z obale

Košara z jajci

Sun Zi je v petem stoletju med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo:

Če iz košare jemljemo po tri jajca, v košari ostaneta dve jajci. Če jemljemo po pet jajc, ostanejo tri. Če pa jih jemljemo po sedem, ostaneta dve. Koliko jajc je v košari?

Naj bo x število jajc v košari. Besedilo pravi, da je ostanek pri deljenju x s 3 enak 2, ostanek pri deljenju x s 5 enak 3 in ostanek pri deljenju x s 7 enak 2. Danes to krajše zapišemo kot sistem kongruenc:

- $$x \equiv 2 \pmod 3$$
  $$x \equiv 3 \pmod 5$$
  $$x \equiv 2 \pmod 7$$

Izkaže se, da je takšen sistem zagotovo rešljiv, če so moduli paroma tuji. Danes ta rezultat imenujemo *Kitajski izrek o ostankih*. Kitajci so vedeli, da morajo v tem primeru rešitev iskati v obliki

- $$x = 3 \cdot 5 \cdot a + 3 \cdot 7 \cdot b + 5 \cdot 7 \cdot c.$$

Zaradi tujosti modulov bi se dalo pokazati, da je prav vsaka rešitev te oblike. Vsak od seštevancev je premeteno nastavljen tako, da preostala dva data ostanek 0 po drugih dveh modulih. To pomeni, da mora hkrati veljati:

- $$15a \equiv 2 \pmod 7$$
  $$21b \equiv 3 \pmod 5$$
  $$35c \equiv 2 \pmod 3$$

Ker je $15a = 2 \cdot 7a + a$, $21b = 4 \cdot 5b + b$ in $35c = 11 \cdot 3c + 2c$, dobimo

- $$a = 7a' + 2, \quad b = 5b' + 3, \quad 2c = 3c' + 2.$$

Če preverimo vse možne ostanke pri deljenju s tri, vidimo, da mora biti c oblike $c = 3c'' + 1$. Ko rešitve vstavimo v nastavek za x, dobimo

- $$x = 3 \cdot 5 \cdot 7(a' + b' + c'') + 128 = 105n + 128.$$

Najmanjšo smiselno naravno rešitev dobimo v primeru $n = -1$. Takrat je $x = 23$. Naslednja je že 128. Vse ostale rešitve dobimo s prištevanjem večkratnikov števila 105.

Perutnina

Yang Hui je v trinajstem stoletju pazljivo predelal Devet poglavij matematične umetnosti in med komentarji zapisal zanimivo nalogo, ki je povezana z reševanjem linearnih diofantskih enačb:

Petelin stane pet čienov, kokoš tri čiene in trije piščanci en čien. 100 glav perutnine kupimo za 100 čienov. Koliko petelinov, koliko kokoši in koliko piščancev smo kupili?

Naj bo x število petelinov, y število kokoši in z število piščancev, ki smo jih kupili. Potem je

- $$5x + 3y + \tfrac{1}{3}z = 100\,,$$
  $$x + y + z = 100\,.$$

Če odpravimo spremenljivko z, dobimo enačbo

- $7x + 4y = 100.$

To je enačba premice v ravnini, na kateri leži neskončno točk s koordinatama (x, y). Za rešitev naloge bodo zanimive le točke, ki imajo za koordinate nenegativna cela števila. Kitajci so, enako kot Grki in Indijci, že znali reševati t. i. diofantske enačbe. Najprej je treba v celih številih rešiti diofantsko enačbo

- $7x + 4y = D(7, 4),$

kjer $D(7, 4) = 1$ pomeni največji skupni delitelj števil 7 in 4. Zelo lahko je uganiti eno od celih rešitev, recimo $x_0 = -1$ in $y_0 = 2$. Indijski matematik Brahmagupta je v sedmem stoletju pokazal, da so vse ostale celoštevilske rešitve enačbe $7x + 4y = 1$ oblike

- $x = x_0 + 4k = 4k - 1\ ,$
  $y = y_0 - 7k = 2 - 7k\ .$

Poskušajte opaziti idejo, da sta rešitvi nastavljeni tako, da se dodana $4k$ in $7k$ odštejeta. Iskani rešitvi originalne enačbe $7x + 4y = 100$ pa sta 100 krat večji:

- $x = 100x_0 + 4k = 4k - 100\ ,$
  $y = 100y_0 - 7k = 200 - 7k\ .$

Da bosta rešitvi smiselni, mora seveda veljati $x \geq 0$ in $y \geq 0$. To pomeni, da mora biti

- $25 \leq k \leq 28.$

Za smiselne k dobimo kar štiri ustrezne rešitve:

k	x	y	z
25	0	25	75
26	4	18	78
27	8	11	81
28	12	4	84

Prva rešitev odpade, če vemo, da smo kupili vsaj enega petelina.

Naloge

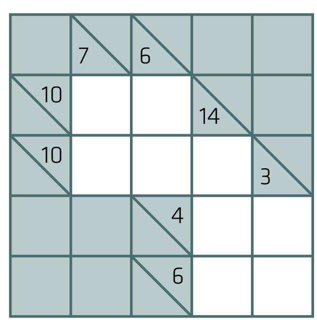
Če nam je uspelo z nalogami navdušiti katerega od bralcev, se lahko loti še naslednjih kitajskih nalog.

1. Hitri tekač preteče 100 korakov v enakem času kot počasni 60 korakov. Hitri tekač da počasnemu 100 korakov prednosti, nato starta tudi on. Čez koliko korakov bo ujel počasnega?
2. Kubični kun žada tehta sedem liangov, kubični kun peska pa šest liangov. V kocki s stranico tri kune je mešanica žada in peska, ki tehta 11 jinov. Kolikšni sta teži žada in peska v kocki? (1 jin=16 liangov)
3. Okroglo mesto z neznanim premerom ima na vsaki od strani neba vrata. Oseba A starta pri zahodnih vratih in naredi 480 pujev proti jugu. Oseba B pa starta pri vzhodnih vratih. Ko naredi 16 pujev proti vzhodu, zagleda osebo A. Poišči premer mesta.
4. Če neznano število kroglic postavimo v sedem enako dolgih vrst, nam ostane ena; če jih postavimo v osem vrst, ostaneta dve; če jih postavimo v devet vrst, ostaneta tri. Koliko je vseh kroglic?
5. V isto kletko damo fazane in zajce. Naštejemo 35 glav in 94 nog. Koliko fazanov in koliko zajcev je v kletki?

× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×