

# Geometric constructions of small regular graphs with girth 7

György Kiss\* 

*Department of Geometry and HUN-REN-ELTE Geometric and Algebraic Combinatorics Research Group, Eötvös Loránd University, 1117 Budapest, Pázmány s. 1/c, Hungary; and Faculty of Mathematics, Natural Sciences and Information Technologies, University of Primorska, Glagoljaška 8, 6000 Koper, Slovenia;*

Received 30 November 2023, accepted 15 July 2024, published online 22 May 2025

---

## Abstract

We present simple, geometric constructions for small regular graphs of girth 7 from the incidence graphs of some generalized quadrangles. We obtain infinite families of  $(q - 1)$ -regular,  $q$ -regular and  $(q + 1)$ -regular graphs of girth 7, for  $q$  a prime power. Some of them have the smallest order known so far.

*Keywords:* Cage problem, incidence graph, generalized quadrangle.

*Math. Subj. Class.:* 05C035, 51E12

---

---

\*This research was supported in part by the Hungarian National Research, Development and Innovation Office OTKA grant no. SNN 132625..

*E-mail address:* [gyorgy.kiss@ttk.elte.hu](mailto:gyorgy.kiss@ttk.elte.hu) (György Kiss)



# Geometrijske konstrukcije majhnih regularnih grafov ožine 7

György Kiss\* 

*Oddelek za geometrijo in raziskovalna skupina HUN-REN-ELTE za geometrijsko in algebraino kombinatoriko, Eötvös Loránd University, 1117 Budimpešta, Pázmány s. 1/c, Madžarska;*

*in Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Univerza na Primorskem, Glagoljaška 8, 6000 Koper, Slovenija;*

Prejeto 30. novembra 2023, sprejeto 15. julija 2024, objavljeno na spletu 22. maja 2025

---

## Povzetek

Predstavimo preproste geometrijske konstrukcije za tvorbo majhnih regularnih grafov ožine 7 iz incidenčnih grafov nekaterih posplošenih štirikotnikov. Na ta način dobimo neskončne družine  $(q - 1)$ -regularnih,  $q$ -regularnih in  $(q + 1)$ -regularnih grafov ožine 7, kjer je  $q$  praštevilo. Nekateri od njih imajo najmanjši red od vseh tovrstnih grafov, znanih doslej.

*Ključne besede: Problem kletk, incidenčni graf, posplošeni štirikotnik.*

*Math. Subj. Class.: 05C035, 51E12*

---

---

\*To raziskavo je delno podprl madžarski nacionalni urad za raziskave, razvoj in inovacije OTKA z donacijo št. SNN 132625.

*E-poštni naslov:* [gyorgy.kiss@tk.elte.hu](mailto:gyorgy.kiss@tk.elte.hu) (György Kiss)