
√matematika ≥ 1|2
v šoli
letnik XIX. (2013) ∞ št 1|2

Vsebina

Contents

Malo drugače

Uvodnik

Jerneja Bone
odgovorna urednica

O vsebini tokratne številke, kjer je osrednja tema nadarjeni učenci in dijaki pri matematiki, bom spregovorila na malo drugačen način.

Oblikovano s pomočjo http://www.wordle.net.

MATEMATIKA V ŠOLI, letnik 19, številka 1-2, maj 2013 | ISSN 1318-010X | **Izdal in založil:** Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, Poljanska 28 | **Predstavnik:** mag. Gregor Mohorčič | **Uredniški odbor:** | Jerneja Bone, ZRSŠ, OE Nova Gorica; jerneja.bone@zrss.si; | dr. Darjo Felda, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, darjo.felda@pef.upr.si; | dr. Marjan Jerman, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, marjan.jerman@fmf.uni-lj.si; | Darja Antolin, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta Maribor, darja.antolin@uni-mb.si; | dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta Ljubljana, zlatan.magajna@pef.uni-lj.si; | mag. Mojca Suban, ZRSŠ, OE Novo Mesto, mojca.suban@zrss.si; | Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem, simona.vres@guest.arnes.si; | Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica, kumer.sabina@gmail.com; | dr. Lucija Željko, OŠ Sostro, lucija.zeljko@guest.arnes.si; | dr. Šefket Arslanagić, Univerza v Sarajevu, Prirodno - matematički fakultet, Bosna in Hercegovina, | dr. Vladimir Kadum, Visoka učiteljska škola u Puli, Hrvaška, | dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen | **Jezikovni pregled:** Katja Križnik Jeraj | **Izvlečki v angleščini:** mag. Gregor Adlešič | **Prevod prispevkov iz hrvaščine:** Amela Sambolić Beganović | **Oblikovanje:** Anže Škerjanec | **Urednica založbe:** Simona Vozelj | **Naslov uredništva:** Zavod RS za šolstvo, OE Nova Gorica (za revijo Matematika v šoli, Erjavčeva 2, 5000 Nova Gorica | **Prelom in tisk**: Littera picta d.o.o. | **Naklada:** 640 izvodov | **Letna naročnina** (4 številke oziroma 2 dvojni): 20,86 EUR za šole in ustanove, 14,19 EUR za posameznike in 13,35 EUR za dijake, študente in upokojence. | Cena posamezne dvojne številke v prosti prodaji je 13,35 EUR. | **Naročila:** ZRSŠ – Založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-pošta: zalozba@zrss.si | Revija je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo pod zaporedno številko 568. | Revija Matematika v šoli je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: | MathEduc – Mathematics Education Database, ZDM – The International Journal on Mathematics Education, Co-operative Online Bibliographic System and Serveces (COBISS) | Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana. | © Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2013 | Revijo Matematika v šoli je v letu 2012 sofinanciralo Ministrstvo za izobraževanje, znanost, kulturo in šport. | Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja ni dovoljeno nobenega dela revije na kakršenkoli način reproducirati, kopirati ali kako drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske oblike reprodukcije (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje ali prepisovanje na kakršenkoli pomnilniški medij) ter medijske oblike reprodukcije. |

V prejšnji številki je prišlo do neljubih napak, za kar se imenovanim, njihovim staršem in mentorjem iskreno opravičujemo.

Druga (učenci 4. in 5. razreda osnovne šole)	1.	**Urh Krafogel**	Osnovna šola Litija	5.	17083
	2.	**Marko Bjelčević**	Osnovna šola Litija	5.	13888
	3.	**Lucas Lozar**	Osnovna šola Mirana Jarca Črnomelj	5.	13030
Tretja (učenci 6. in 7. razreda osnovne šole)	1.	**Dominik Lozar**	Osnovna šola Mirana Jarca Črnomelj	7.	18963
	2.	**Kaja Tuškei**	Osnovna šola Tišina	7.	18468
	3.	**Jan Gimpelj**	Osnovna šola Šmihel Novo mesto	7.	13115

Uredništvo

Miti o matematičnih talentih

Myths about Mathematically Talented Students

Ivan Ferbežer

Σ Povzetek

V prispevku analiziramo pozitivne, a nerealne predstave o nadarjenosti v splošnem in o matematičnih talentih posebej. V resnici so omenjeni in drugiobravnavani miti o matematično talentiranih učencih bodisi plod domišljije ali vsaj polresnice. Nekateri od teh mitov so povezani z učenčevim kognitivnim, drugi z učenčevim socialno-emocionalnim razvojem, tretji pa so povezani s kurikulumi in programi za nadarjene.

Ključne besede: miti o matematičnih talentih, socialni razvoj matematičnih talentov, emocionalni razvoj matematičnih talentov, kurikulumi in programi za matematične talente.

Σ Abstract

In the article we analyze the positive but unrealistic understanding of giftedness in general and of mathematically talented children in particular. In fact the myths about mathematically talented students are either fiction or, at best half-truths. Some of the myths are related to a student's cognitive and social-emotional development, where as others link to curricular issues and programs for the gifted.

Keywords: *the myth of the mathematically talented, social development of the mathematically talented, emotional development of the mathematically talented, curricula and programs for mathematically talented students*

α Uvod

Znanstveno dokazana zakonitost na interdisciplinarnem področju nadarjenosti je, da imajo stališča, torej subjektivne komponente, mnogo večji in usodnejši vpliv na oblikovanje nadarjenih učencev kakor objektivne okoliščine s kurikulumi, programi, šolami in vsemi oblikami edukacije. Paradoks pa je, da so prve mnogo težje najdene v strokovno znanstveni literaturi v svetu, posebej pa pri nas – poznan je prispevek Juriševič, M. (2011), in tudi nesorazmerno manj raziskovane, kar trdi Kranjčan D. (2003)

Medtem ko lahko definiramo stereotip kot ustaljeno in pogosto ponavljajočo se vsebino pojma nadarjenosti, kot omenja Krajnčan M. (2003), predsodek kot vrsto nepreverjenih in neutemeljenih stališč, pa so miti pozitivne, a pogosto nerealne predstave o nadarjenosti, kar trdi Ferbežer (1999).

V tem prispevku se bomo analitično poglobili v mite, ki se navezujejo na matematično talentirane učence. Pri tem so nekateri od obravnavanih mitov o matematičnih talentih povezani z učenčevim kognitivnim in socialno-emocionalnim razvojem, drugi pa so povezani s problemi kurikulumov in učnih programov.

Na primer, dva izmed pogosto omenjenih razvojnih mitov sta: *Otrok je premlad, da bi se že učil algebre.* in *Otroci, ki preskočijo razred, bodo v adolescenci doživljali socialne probleme*. Pogosto slišimo v šoli tudi učno programski mit o matematičnih talentih: »Če ga boste že sedaj pospešeno učili matematike, ne bo ostalo dovolj možnosti za učenje v srednji šoli. «Morda ste že slišali za podobna stališča o nadarjenih oziroma matematično talentiranih učencih, ki ste jih že dobro poznali? Četudi je lahko v ozadju dobronamerna narava omenjenih mitov, pa vendarle obstajajo zelo redki znanstveni dokazi za te trditve. V resnici so omenjeni in drugi obravnavani miti o matematično talentiranih učencih bodisi plod domišljije ali vsaj polresnica. Vseeno pa so tovrstni miti zelo prisotni in so s strani staršev, učiteljev, vzgojiteljev in ravnateljev pogosto predstavljali coklo v razvijanju pedagoških intervencij za matematično talentirane učence. Zato je namen tega prispevka pripeljati vzgojitelje, učitelje in starše do objektivnih strokovno znanstvenih informacij, potrebnih za razvijanje učnih programov za matematično talentirane učence.

β Miti o matematičnih talentih

Prvi mit: Samo tisti učenci, ki so identificirani za programe za nadarjene, so matematično talentirani.

Omenjena trditev je vezana na splošno naravo učno-vzgojnih programov za nadarjene učence. Mnogi izmed svetovnih programov za nadarjene učence so tako imenovani pull-out programi, to je, da nadarjeni učenci občasno pri kakšnem predmetu zapustijo razred in se tega predmeta ali učnih vsebin

[Slika 1] Nadarjeni učenci na obisku v Pragi, kamor jih je peljal avtor prispevka

učijo v višjih nivojih višjih razredov. (V Sloveniji žal še nimamo tovrstnih zakonskih možnosti, čeprav jih že zasledimo v naslovu med Predlagane oblike dela; zapisano v Nacionalnemkurikularnem svetu, 1999, str. 10).

Identifikacijski kriteriji za vstop v pullout programe poudarjajo celovito nadpovprečno razvitost nadarjenega učenca. Podoben je psihološki testni kriterij z IQ rezultatom 130 in več. Lahko pa se kot identifikacijski kriterij uporablja percentilni rang sestavljenega rezultata na standardiziranem inteligentnostnem testu ali testu dosežkov. Učenec, ki doseže rezultat 97. centil, mora doseči takšen rezultat na različnih delih psihološkega testa. Tedaj je lahko uvrščen v takšen program za nadarjene. Omenjena vrsta kriterijske meje pa izključuje tiste nadarjene učence, ki imajo posebne talente na enem področju ali na ožjih področjih in so samo nadpovprečni ali celo samo povprečni na drugih področjih potencialnih sposobnosti. Na takšen način je mogoče, da matematično talentirani učenci ne zadovoljijo kriterija za vstop v programe za nadarjene.

Kot dokaz zgoraj opisanih okoliščin nam lahko služi raziskava avtorjev Lupkowski in Assouline (2001). 26 % matematično talentiranih učencev se v tej raziskavi iz tega razloga ni uvrstilo v učne programe za nadarjene. Torej zanje niso bili izdelani individualizirani programi, niso bili deležni posebnih uslug in se niso vključevali v obogatene učne aktivnosti, ki bi njihove potencialne sposobnosti ustrezno izzvale in razvijale.

Na neki šoli v ZDA se lahko samo tisti učenci, ki so se po gornjih merilih vključili v programe za nadarjene, vključujejo tudi v dodatne izvenšolske matematične učne programe, kot je Matematična olimpijada za osnovne in srednje šole (MOEMS). Učenec tretjega razreda, Jason, je že obvladal ulomke, množenje, deljenje in osnove algebre. Na besednem inteligentnostnem testu je dosegel rezultat IQ=125, a šola je zahtevala kriterij IQ=130. (Pri nas v Sloveniji je kriterij IQ=120; Glej vir: Nacionalni kurikularni svet, 1999, str. 9). Ta učenec torej ni bil identificiran kot primeren za program za nadarjene učence in se tudi ni mogel udeležiti Matematične olimpijade za osnovne in srednje šole. Ne gre le za to, da bi Jasonu udeležba na matematični olimpijadi koristila, gre tudi za fenomenološko krivico, ko zaradi šolske operacijske definicije nadarjenosti matematično talentiran učenec ni prejel specializirane pedagoške oskrbe na svojem področju talenta in v skladu s svojimi potrebami.

Zagotavljanje posebnih pedagoških uslug za matematično talentirane učence samo skozi šolske programe, ki temeljijo na pristranskih razpoznavah, predstavlja nadarjenim posebnost tega mita. Po tej nerealni logiki so samo učenci, ki so bili identificirani za programe za nadarjene, lahko matematično talentirani učenci. Nobenega zagotovila ni, da bodo matematično talentirani učenci skozi uradne programe za nadarjene na šoli deležni pospešenih kurikularnih možnosti, ki ustrezajo matematičnim talentom. Do tega pride povsod tam, kjer programi za nadarjene učence niso izpeljani iz učenčevih individualiziranih identificiranih vrlin in potreb, temveč iz državno ali okrožno določene operacijske definicije nadarjenosti in identifikacijskih ter edukacijskih programov. Mnogi programi za nadarjene učence v državnih ali okrožnih okvirih ne nudijo specifičnih programov za vsakega od identificiranih učencev. Med njimi je tudi veliko matematičnih talentov. Podobno velja za likovne in glasbene talente.

Drugi mit: Rezultati standardiziranih razredno nivojskih testov so ustrezni za identificiranje matematično talentiranih učencev.

Četudi so lahko informacije z razredno nivojskih testiranj koristne pri iskanju matematično talentiranih učencev, pa vendarle ne dajejo dovolj natančnih informacij za oblikovanje učnih programov. Uporaba razredno nivojskih psiholoških testov za oceno posebno talentiranih učencev pomeni podobno, kakor če bi uporabili milje za merjenje nečesa, kar bi moralo biti merjeno s centimetri. Na primer, dva učenca lahko dosežeta enak identifikacijski rezultat na nivojsko razrednem testu, 99. centil (matematična baterija specifičnih sposobnosti), toda vsak dosega drugačen rezultat. Zato so primernejši psihološki testi, ki so bili standardizirani za identifikacijo nadarjenih učencev ali tako imenovani nadnivojski testi. Le-ti nam natančneje pomagajo meriti učenčeve sposobnosti in tudi bolje pomagajo razviti ustrezne učne programe. Žal takih psiholoških testov v zvezi z nadarjenimi učenci na slovenskem, kljub apologentskem zatrjevanju, še ne poznamo. (Center za psiho diagnostična sredstva, 2006/2007).

[Slika 2] *Posvet o nadarjenih, ki se ga je udeležil tudi avtor prispevka, Vršac, Srbija, 2011*

Tretji mit: Nadarjeni učenci se enako dobro odzivajo na isti kurikulum.

Nekatere zanimive tuje raziskave, ki so jih opravili Lupkowski-Shoplik in Assouline (2001), Colangelo, Assouline in Lu (1994) ter Lupkowski-Shoplik in Swiatek (1999), a redke domače raziskave, ki jo je opravil Ferbežer (2012), so pokazale, da predstavljajo nadarjeni učenci zelo raznoliko skupino glede na njihove psihofizične značilnosti in osebnostne lastnosti. Strinjamo se s Sheffieldovo (1999, a), da bi moral zato kurikulum za matematično talentirane učence prav tako odražati to raznolikost talentov. Iz tega razloga strokovno znanstveno vzeto ni ustrezno priporočati enovitega kurikuluma za vse nadarjene učence.

Ko je bilo v raziskavi Lupkowski-Shplik, Assouline (2001) tisoče nadarjenih učencev v ZDA vprašanih o učnih interesih, jih v najvišjem odstotku odgovarja, da se največ posvečajo matematičnim področjem aktivnosti (39 %), nato sledi posvečanje naravoslovju (27 %) in najmanj jezikovnim področjem (5 %). V Sloveniji bi bila, na tako velikem vzorcu, z visoko verjetnostjo slika popolnoma obrnjena. Da enovit kurikulum za nadarjene ne zadovolji potreb vseh nadarjenih učencev, ker so zelo raznolika populacija, lahko ugotovimo tudi v primeru, če učitelji ne ocenjujejo splošne intelektualne sposobnosti in specifične matematične zmožnosti, ampak druge kvalitete materinih nalog pouka.

Za matematično talentirane učence se priporoča uporaba učnih virov, ki so na voljo v njim prilagojenem matematičnem kurikulumu. To pomeni, da lahko za ta namen uporabimo matematični kurikulum za višje nivoje razredov z mlajšimi učenci.

Četrti mit: Učenci z akceleriranim tempom pouka in učenja ne morejo obvladati podrobnosti vseh poglavij, zato bodo imeli vrzeli v znanju.

Ko matematično talentirani učenci ob začetku šolskega leta vstopijo v običajen razred, že obvladajo neka specifično matematična znanja in imajo že razvite visoke umske sposobnosti. Z visoko verjetnostjo že obvladajo nekatera znanja, ki se bodo osvajala to šolsko leto. Odpira se nam vprašanje, kako jih voditi skozi pospešen učni program brez tveganja, da bi preskočili kakšne pomembne pojme.

V nadaljevanju priporočamo preprost in dovolj občutljiv model razvijanja učno-programskega načrta za matematično talentirane učence.

Najprej bi morali pri talentiranih učencih testirati (testi znanja ali naloge objektivnega tipa) predhodna znanja oziroma predznanja iz predvidenega učbenika oziroma kurikuluma. Matematično talentiranim učencem, ki so pravilno odgovarjali na 85 % učnega gradiva, predvidnega za naslednje šolsko leto, bi morali omogočiti, da nadaljujejo učno pot na zahtevnejših, višjih nivojih ali razredih. Zapolnitev morebitnih vrzeli v znanju in razumevanju vzame matematičnemu talentu le nekaj minut ali ur, kot opisujejoLupkowski, Assouline, Stanley (1990). Ko so učenci izkazali razumevanje in obvladanje manjkajočih pojmov, se lahko vključijo v naslednje, zahtevnejše poglavje ali predmet.

Nekateri učitelji že dolgo in rutinsko testirajo predznanja svojih učencev in glede na te rezultate tudi učno načrtujejo. Vendarle še prepogosto najdemo prakso, da se nekateri učitelji odločajo generalno učno napredovati ne glede na stopnjo obvladanja predhodnega učnega gradiva. Le tistim učencem, ki so dokazali, da obvladajo predhodno učno snov, bi morali omogočiti pospešen napredek. To zagotavlja, da v pridobivanju učne snovi niso izpuščene pomembne vsebine in pojmi. Tako tudi ni težaškega zatikanja za vsako temo na vsaki strani matematičnega učbenika.

Peti mit: Matematično talentirani učenci izkazujejo stoodstotno obvladanje učne snovi predmeta ali področja.

V tem stereotipu je posredno izraženo mnenje, da nadarjeni učenci ne bi smeli delati napak. Zaradi prakse, da nadarjeni učenci v prvih razredih šolanja pri nalogah ne delajo napak, začenjajo učitelji in pomembni drugi predpostavljati, da morajo ti vseskozi delati z odliko ali 100 % pravilno. Učenčeva verzija tega 100 % obvladanja je znana kot perfekcionizem.

Z učenčeve in učiteljeve perspektive termin 100 % pravilno reševanje testnih nalog ni ustrezen indikator popolnega obvladanja učne snovi. Zanimivo je, da v zadnjih razredih ali letnikih šol na področju izobraževanja nadarjenih učencev skoraj da ne najdemo definicije termina *obvladanje*.

V ustreznih tekstih se o obvladanju govori znotraj konteksta učne diferenciacije kurikuluma, toda brez definiranja. Ob pripravi tega prispevka smo našli dve specifični referenci, ki to opredeljujeta na področju branja. Ena od referenc z naslovom Edukacijske strategije za poučevanje nadarjenih, kot jih opisuje Parker (1989) je specifična z ozirom na nadarjene bralce. Prav tako avtorja Coleman in Cross v prispevku z naslovom Biti nadarjen v šoli: Uvod v razvoj, svetovanje in poučevanje (2001) govorita o otrokovi stopnji obvladanja pri branju. Trdita, da je ustrezen edukacijski nivo sestavljen iz 90 % znanih in 10 % neznanih informacij. Ker je omenjene podatke na tej točki v primeru nadarjenih učencev težko natančno ugotoviti, je to videti kot konservativni kriterij za začetek pouka za nadarjene. J S. Renzulli; Sally, M. Reis, (1997) poudarjata, da je pri tem odločilna pomembna vmesna spremenljivka, učenčev interes ali kristalizirana motivacija. (Coleman in Cross (2001) sta mnenja, da bi se težko obračali na motivacijo in interes preden se ne začne pouk in da bi bilo smiselno razmerje v odstotkih na nekaterih področjih 50:50.

[Slika 3] Delo z nadarjenimi matematiki na ŠCRM Kamnik

Šesti mit: Matematično talentirani učenci so mojstri v računanju.

Mnogi od matematično talentiranih učencev, s katerimi delamo, so odlični v matematičnih pojmovnih spretnostih, toda njihove spretnosti računanja so manj razvite. Na primer, učenec Jože bo imel odlično razumevanje množenja ulomkov, toda utegne pogosto delati napake v seštevanju kolone številk. V teh okoliščinah učitelji pogosto zadržujejo nadarjene učence z vajo omenjenih osnovnih računskih spretnosti, preden nadaljujejo z učenjem pospešenih matematičnih pojmov. To je lahko škodljivo za matematično talentiranega učenca oziroma za njegov matematični razvoj. Raziskave avtorjev Lupkowski-Shoplik, Sayler, Assoulline (1994) ter Rotigel (2000) so pokazale, da imajo mnogi matematično talentirani učenci odlično razumevanje razvojno pospešenih matematičnih pojmov, medtem ko imajo istočasno relativno manj razvite spretnosti računanja. To z drugo besedo pomeni, da njihove računske spretnosti zaostajajo za pojmovnim razumevanjem matematike, celo tako, da učenec, ki razume abstraktne matematične pojme, napačno odgovarja pri množenju ulomkov. Kakor sta opisala avtorja Lupkowski in Shoplik (1994), lahko matematični talenti izkazujejo te slabosti iz nekaterih naslednjih razlogov:

1. Ti učenci raje računajo v »glavah«, zatoda se intelektualno spodbujajo, ker gradiva, ki se jih običajno učijo v šoli, niso zanimiva in spoznavno izzivalna.
2. Pri neposrednem pouku se zahteva od učencev, da se učijo računskih spretnosti, medtem ko lahko vzporedno učenci razvijajo samostojno višjo pojmovno razumevanje.
3. Vtis učiteljev o učnih sposobnostih matematičnih talentov je lahko tak, da predpostavljajo, da vaja in praksa rutinskega računanja sploh ni več potrebna.

Žal v vsakodnevnem učnem procesu tipičen osnovnošolski kurikulum premalo omogoča matematičnim talentom, da demonstrirajo svoje višje matematične pojmovne razumske sposobnosti. Zato skoraj nihče ne ve, kakšne so njihove matematične pojmovne sposobnosti, ker je večino časa v osnovnošolskem kurikulumu posvečenega nalogam mehaničnega ponavljanja oziroma nalogam, ki preverjajo znanja na nižjih taksonomskih ravneh.

Sedmi mit: Matematično talentiranih učencev ni mogoče identificirati do srednje šole.

Splošna narava osnovnošolskega matematičnega kurikuluma lahko sugerira prepričanje, da do srednje šole ni mogoče identificirati matematičnih talentov. Vendar je z vidika optimalne aktivnosti nujno identificirati matematične talente že veliko prej (osnovna šola) tako, da je mogoče že zgodaj izoblikovati prilagoditve ustreznih matematičnih izobraževalnih programov. Na Univerzi Carnegie Mellon in na Univerzi Iowa so s pomočjo standardiziranih testov inteligentnosti uspešno identificirali matematične talente že v tretjem razredu osnovne šole zato, da so jim lahko dovolj zgodaj pripravili ustrezne učno programske izzive.

Le-ti so bili nato vključeni tudi v pospešene poletne ekstrakularne programe za matematične talente, kot opisujeta Swiatek in Lupkowski-Shoplik (2000, b). V mnogih primerih so tudi standardizirani testni rezultati potrdili to, kar so starši že dolgo slutili – da je njihov otrok nadarjen za matematiko. Z ozirom na podcenjevalno vlogo staršev v tako imenovanem projektu »Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci« v Sloveniji, smo na Institutu za razvijanje nadarjenosti Revivis Ptuj razvili optimalnejšo identifikacijo, in sicer ocenjevalno lestvico za starše z naslovom *Ocenjevalna lestvica staršev za odkrivanje potencialov talentov*, ki jo predstavi Ferbežer (2008) (Več o strokovno krivičnih podcenjevalnih pojmovanj starševskih razpoznav talentov glej tudi v: Ferbežer, 1990; Ferbežer, 1991; Ferbežer, 1990).

Celo več, obstaja mnogo zapisov v anekdostskih popisnicah o obstoju matematičnih talentov že pri osmih letih otrokove starosti. Torej, kakor je zgoraj povedano, so informacije o potencialnih sposobnostih matematičnih talentov s strani staršev v teh primerih še posebno koristne in celo nenadomestljive. Ameriški avtorji Waxman, Robinson in Mukhopadhayay (1996) so v posebnih znanstvenih projektih identificirali potenciale predšolskih otrok za posebne programe za matematiko na Univerzi Washington. Te otroke so bili najprej identificirali starši, nato pa so individualna psihološka testiranja potrdila nominacije staršev matematično talentiranih otrok.

[Slika 4] Delo z nadarjenimi matematiki na ŠCRM Kamnik

Osmi mit: Zgodaj zrel, zgodaj gnil.

Splošno javno mnenje predpostavlja, da v razvoju talentov pride do »pregorevanja« v skladu s pomenom gornjega reka. Toda naše bogate izkušnje dela s talenti in tudi naši in tuji raziskovalni dokazi označujejo, da to sploh ni realni problem. Prej in bolj kot to so realni problem neodkriti potencialno nadarjeni učenci, ki so pripravljeni na kurikularne izzive. Matematično talentirani učenci, ki so bili odkriti v nižjih starostih in so prejeli ustrezne objektivne in subjektivne možnosti za razvoj svojih matematičnih talentov, so se skozi celotno šolsko kariero in tudi dalje odlikovali v uresničevanju svojih sposobnostnih potencialov. Avtor Waxman (1996, b) je s sodelavci raziskovalno ugotovil, da so matematično talentirani otroci še v nadaljnjem razvoju vzdrževali svojo prednost v odnosu na običajne vrstnike. Vzorec predšolskih otrok njegove raziskave, ki je bil kasneje koncem prvega in koncem drugega razreda psihološko testiran, je še naprej dosegal višje rezultate in hitrejši napredek od vrstnikov primerljivih razredov.

Podobno zakonitost je pokazala longitudinalna raziskava avtorjev Stanley in Lubinski (1996) in Benbow in Stanley (1983). Vzorec učencev iz te raziskave je bil identificiran v starosti 12 do 13 let. Ti so bili nato študijsko spremljani do srednje šole in še dalje. Raziskovalni rezultati so jasno pokazali ne samo da so lahko matematični talenti identificirani že v zgodnji starosti, temveč prav tako da se njihov pospešen razvoj sposobnosti in dosežkov nadaljuje do odraslosti. Izmed nadarjenih učencev z visokimi dosežki, ki so obiskovali najbolj zahtevne programe v naravoslovnih vedah, so bili mnogi, ki so bili že zgodaj v osnovni šoli identificirani v posebne programe za nadarjene in so se v srednji šoli vključili v pospešene programe ter zadovoljili kriterije za vstop v najbolj zahtevne kolidže in univerze. Večina izmed njih se je že vključevala v raziskovalne dodiplomske programe. »Očitno imamo tukaj opravka z odličnostjo, ki plodi odličnost. Matematično nadarjeni učenci so že zelo zgodaj izkoristili zahtevnejše izobraževalne možnosti. Pri dosežkih gre torej za učinek snežne kepe. Višje učno aktiviranje povečuje motivacijo in obratno«, kar potrjujejo raziskovalci Benbow, Lubinski in Sanjani (1999). Matematični in drugi specifični talenti, ki se zgodaj uresničujejo in izkazujejo, kasneje ne ugasnejo ali ovenijo. V procesu aktiviranja se pospešeno razvijajo. V naslovu omenjen stereotip je bil predmet kritičnega raziskovanja v Sloveniji že leta 1970, ki ga je opisal Ferbežer (1970).

Deveti mit: Najboljša programska različica za matematično talentirane učence je obogatitev.

Četudi je učna obogatitev primerna in nujna oblikovalna programska možnost za matematično talentirane učence, pa to ni edina in najboljša možnost za vsakega posameznika. Pospešenega/naprednega programa za matematično talentiranega učenca ne bomo avtomatično opustili, če je učenec nekoliko mlajši. Matematično talentirani učenci, ki so prehitevali, imajo za svojo matematično izobraževanje več časa za obogatitvene učne aktivnosti, ki vsebujejo učenje matematikev večji globini.

Učne obogatitve se lahko predstavljajo v različnih oblikah, vključujoč aktivnosti, ki niso ozko povezane z matematiko, učne aktivnosti reševanja problemov in različnih aktivnosti ustvarjalnega mišljenja. Seveda pa imajo pri teh učencih prednosti matematično usmerjene obogatitvene aktivnosti, kot opisujeta Lupkowski in Assouline (1992).Vendar je pogosta praksa v ZDA, da se matematično talentirani učenci vključujejo v pullout programe (nekatere učne teme obdelujejo pri predmetih v višjih razredih) na področjih, ki niso povezani z matematičnim kurikulumom. Na primer, matematično talentirani lahko študirajo dramatiko, Shakespeara, negujejo rastline v okviru naravoslovnega projekta ali se vključujejo v krajevne civilnodružbene in varstvene službe. Medtem ko so vse te učno obogatitvene aktivnosti lahko za matematične talente dragocene, pa ne pospešujejo učenčevega razumevanja matematike.

Naslednja oblika učne obogatitve, povezane z matematiko, je reševanje problemov. Aktivnosti reševanja problemov matematičnim talentom nudijo možnosti, da razmišljajo o izzivalnih vprašanjih, kar jim je lahko v veselje in je intelektualno spodbujajoče. Vendar te aktivnosti največkrat nimajo matematičnih vsebin in so malo povezane z osnovnim matematičnim kurikulumom.

[Slika 5] Delo z nadarjenimi matematiki na ŠCRM Kamnik

Deseti mit: Najboljši način učnega izziva matematičnih talentov je preskok razreda in študij učbenikov v višjem razredu.

Preskok razreda in učenje matematike v višjem razredu je lahko odlična spodbuda nekaterim matematično talentiranim učencem. V tem primeru je kritičnega pomena sistematično kratkoročno in dolgoročno načrtovanje. Gre za vprašanje, ali bo učenec zmogel osvajati matematiko v višjem razredu s starejšimi učenci v razredu? Kako se bodo reševali problemi prevoza, če se bo moral učiti matematike v dislociranih in oddaljenih zgradbah? Kaj se bo zgodilo po zadnjem razredu osnovne in srednje šole? Ali bo učenec lahko normalno funkcioniral pri matematičnem pouku na bližnji šoli? Ali bo kot učenec, ki je hitreje napredoval, lahko uspešno delal v matematiki do zadnjega letnika?

Četudi je lahko zadovoljivo odgovorjeno na vsa gornja vprašanja vseh deležnikov (učenci, starši, pedagogi), lahko študij matematike med starejšimi ni najboljša možnost. Še posebej ne za izrazite matematične talente. Tempo pouka je v višjem razredu še vedno lahko prepočasen, četudi so lahko matematična gradiva individualizirano prilagojena na zahtevnejši ravni. Naslednja kritična možnost je, ali je splošni nivo pouka dovolj celovito izzivalen.

Enajsti mit: Če bodo matematično talentirani učenci študirali matematiko s hitrejšim tempom, bodo obdelali matematični kurikulum pred koncem osnovne oz. srednje šole.

Omenjen mit se nanaša na presojo hitrejšega napredovanja v nižjih starostnih obdobjih. Zlasti pri učencih nižjih starosti in nižjih razredov je treba razmišljati o dolgoročnem učinku hitrejšega napredovanja. Za matematične talente, ki so preskočili eno ali več let matematičnega kurikuluma, je povsem mogoče, da bo manj možnosti za višje in zahtevnejše matematične programe do konca osnovnega šolanja. Kljub vsemu obstaja še vedno veliko raznoterih in raznolikih možnosti zahtevnejšega študija matematike vse do univerze. Učitelji, učenci in starši naj bi bili fleksibilni in ustvarjalni pri zagotavljanju ustreznih učno-programskih možnosti učenja matematike. Na primer, učencu je mogoče organizirati možnosti različnih programov, začenši s študijem matematike z mentorjem v četrtem razredu, študij srednješolske geometrije v šestem razredu in tabori na različnih stopnjah izobraževanja, kjer učenci nadgrajujejo svoje znanje ob reševanju različnih matematičnih problemov. Z naraščajočo razpoložljivostjo računalnikov v internetsko zasnovanih tečajih se raznotere izobraževalne možnosti še povečujejo. In matematični talenti v podeželskih okoljih niso več prikrajšani za pospešeno učenje matematike in s tem za lastno uresničevanje.

Dvanajsti mit: Matematični talenti ne bi smeli študirati algebre do zadnjih razredov osnovne šole.

Uradna šolska administracija se večinoma drži tradicionalnega zaporedja usvajanja matematičnih pojmov in programov. V ameriškem osnovnem šolanju tradicionalno algebra ni zajeta v kurikulumu do osmega oziroma devetega razreda. Od tod zaskrbljenost, da učenci, mlajši od osmega razreda, ne bodo formalno pripravljeni v abstraktnem razmišljanju po načelih algebre.

V nasprotju z zgoraj povedanim, je avtor Julian Stanley s strokovnimi sodelavci na Univerzi John Hopkins v ZDA opustil razvojni vidik tega mita. Že skoraj štirideset let so avtorji Stanley, Benbow in Lubinski (1996) odkrivali matematično talentirane učence, ki so dobro obvladali algebro pred devetim razredom osnovne šole. Nekateri izmed njih so bili na področju algebre dobro pripravljeni že v petem razredu. Preučevalno delo Stanleyja z matematičnimi talentina Univerzi John Hopkins je dalo dalekosežne učinke, tako da so nekateri matematični talenti prehitevali že celo v algebri.

Medtem ko so matematični talenti izražali zadovoljstvo s programi iz algebre, saj so tudi kognitivno dobro napredovali, pa so matematični pedagogi reagirali na te programe hitrejšega napredovanja negativno. To strokovno sporno stališče je bilo celo eksplicitno izraženo v uradnem dokumentu matematičnih pedagogov z naslovom Kurikulum in evalvacija standardov za matematične šole (National Council of Teachers of Mathematics, 1989).

Na srečo omenjena hitrejša »filozofija« napredovanja ni uspela prodreti v novo verzijo dokumenta Principi in standardi za matematiko v šoli (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Novo pojmovanje oblikovanja matematičnih talentov promovira algebro kot svojstveno strukturno vlakno že od vrtca dalje.

Novi citirani standardi pa priporočajo, da bi se morali matematični talenti učiti precejšnji obseg algebre že v šestem, sedmem in osmem razredu osnovne šole, da bi tako do konca osnovne šole obvladali dobro razumevanje osnovnih algebraičnih in geometričnih pojmov.

Novi opisani standardi odpravljajo mit, da se algebre ne bi smelo učiti v okviru matematike do konca osnovne šole. Kajti le tako bodo lahko matematično talentirani učenci napredovali skozi matematični kurikulum z obsegom in tempom, ki je zanje spodbuden.

γ Zaključek

Na kratko smo predstavili in kritično razpravljali o stereotipih v podobi mitov, ki jih v pedagoškem življenju najpogosteje navajajo kot razloge, zakaj ne diferenciramo programov za matematično talentirane učence. Obravnavani miti so se globoko usidrali v zavesti pedagoško delujočih ljudi in močno vplivajo na svetovno izobraževalno politiko izobraževanja matematično talentiranih učencev. Širše povedano, ti izkrivljeni pogledi reflektirajo naivno perspektivo, ki spregleda individualne razlike med učenci. V prispevku smo poskušali utemeljiti, zakaj imamo opisana izkrivljena stališča in mite za fikcijo, zato smo analizirali znanstvena dejstva, ki te stereotipe zavračajo.

Nenavadno pa je trdoživ še en presegajoči mit, ki ga še nismo vsebinsko zajeli v prispevku. To je mit, da je za matematično talentirane učence najbolje nič drugega kot običajno učno programiranje za povprečne učence v šoli. Za starše matematično talentiranih učencev pa je to lahko tvegana frustracijska okoliščina, v kateri se poraja dvom v zagovorništvo svojih otrok. To pa ni več znanstveno polje tega prispevka.

δ Viri in literatura:

1. Benbow, C.P.; Lubinski, D. (1996). Intelectual talent: Psychometric and social issues. Baltimore: John Hopkins Press.
2. Benboww, C.P. Stanley, J. C. (1983). Academic precocity: Aspects of its development. Baltimore: John Hopkins Press.
3. Benbow, C. P.; Lubinski, D.; Sanjani, H. E. (1999). Oue future leaders in science: Who are they ? Can we identify them early? In Colangelo, N.; Assouline, S.G.: Talent development 3; Proceeding from the 1995 Herry B. and Joselyn Wallace National research Symposium on Talent development, str. 59–70. Scottsdale, AZ: Gifted Psychology Press.
4. Boben, D. (2012). Smo psihologi (edini) kompetentni za identifikacijo nadarjenih? V: Posvetovanje: Vloga psihologa v vzgoji in izobraževanju nadarjenih, 27. 1. 2012, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani, Urednici Mojca Juriševič in Božena Stritih, str. 57–76.
5. Center za psihodiagnostična sredstva (2006/2007). Katalog psiholoških testov, vprašalnikov, knjig. Ljubljana.
6. Colangelo, N.; Assouline, S.G.; Lu, W.H. (1994). Using EXPLORE as an above level instrument in the search for elementary students talent. In Colangelo, N.; Assouline, S.G.: Talent development 2, Proceedings from the 1993 Herry B. and Jocelyn Wallace National research symposium on talent development. Str. 281–298, Dayton, Ohio, Psychology Press.
7. Coleman, L.J.; Cross, T.L. (2001). Being gifted in school: An introduction to development guidance and teaching. Waco, TX: Prufrock Press.
8. Ferbežer, I. (1970). Nadarjen otrok. Sodobna pedagogika, Vol. 21, št. 7–8, str. 265–274.

9. Ferbežer, I. (1990). Starši in študij akceleriranih nadarjenih otrok. Vzgoja in izobraževanje, št. 2, str. 21–27.
10. Ferbežer, I. (1990). Starši odkrivajo predšolske nadarjene otroke. V: Zbornik referatov in prispevkov o predšolski vzgoji. Maribor, Pedagoška fakulteta Maribor, Univerza v Mariboru, str. 23–31.
11. Ferbežer, I. (1991). Starši odkrivajo predšolske nadarjene otroke, Sodobna pedagogika, Vol. 42, št. 3–4, str. 171–178.
12. Ferbežer, I. (1999). Stereotypes on giftedness, V: 5 th Alps Adria Conference, September, 9–11, 1999, Press Hungary. Psychology at the turn of millenium: abstracts, Pecs, Bureau of conference Services of James Panonius University, str. 25.
13. Ferbežer, I. (2012). Multidimenzionalni kurikulum za mlajše nadarjene otroke, 5. Mednarodni simpozij Avtonomija šole in razvojne možnosti na učnem in vzgojnem področju, Črenšovci, Osnovna šola Franceta Prešerna, 17.-18. 2. 2012, str. 106–118.
14. Ferbežer, I. (2008). Ocenjevalna lestvica staršev za odkrivanje potencialov talentov, V: Gojkov, Grozdanka. Porodica kao faktor podsticanja darovitosti: 14. Okrogli sto, Vršac, 2008. Zbornik Vršac, Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača »Mihailo Palov«, str. 108–118.
15. Juriševič, M. (2011). Vzgoja in izobraževanje nadarjenih. Bela knjiga o vzgoji in izobraževanju v republiki Sloveniji, 2011, Nacionalna strokovna skupina za pripravo Bele knjige o vzgoji in izobraževanju v Republiki Sloveniji. Ministrstvo za šolstvo in šport, september 2011, str. 331–345.
16. Kranjčan, D. (2003). Stereotipi o nadarjenih otrocih. Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta Maribor. Oddelek za predšolsko vzgojo, Maribor, diplomsko delo, str. 1–59.
17. Kranjčan, D. (2003). Prav tam, str. 5–37.
18. Lupkowski, A. E.; Assouline, S. G. (1992). Jane and Johny love math: Recognizing and encouraging mathematical talent in elementary students. Unionville, NY: Trillium Press.
19. Lupkowski-Shoplik, A. E.; Sajler, M. T.; Assouline S. G. (1994). Mathematics achievement of talented

elementary students. Basic concepts vs. Computation. In Colangelo, N.; Assouline, S. G. Ambroson, D. L.: Talent development. Proceeding from the Henry B. and Jocelyn Wallace National research Symposiumon Talent Development. Str. 409–414, Dayton, OH. Psychology Press.

20. Lupkowski-Shoplik, A. E.; Assouline, S. G. (2001). Reports of ESTS 2001 local item responses. Cornegie Mellon University, Pittsburgh.
21. Lupkowski-Shoplik, A. E.; Swiatek, M. A. (1999). Elementary student talent searches: Establishing appropriate guideleness for qualifying test scores. Gifted Child Quarterly, Vol. 43, št. 265–272.
22. Lupkowski, A. E.; Assouline, S. G.; Stanley, J. C. (1990). Applying a mentor model for young mathematicaly talented students. Gifted Child Quarterly, Vol. 13, str. 15–19.
23. National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
24. National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards of school mathematics, Reston, VA: Author.
25. Nacionalni kurikularni svet(1999). Koncept: Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci v devetletni osnovni šoli, 11. 2. 1999, Ljubljana, str. 9–12.
26. Parker, J. P. (1989). Instructional strategies for teaching the gifted. Boston, Allynand Bacon.
27. Rotigel, J. V. (2000). Exceptional mathematical talent: Comparing achievement in concepts and computation. Indiana University of Pensylvania, Indiana, PA.
28. Renzulli, J. S.; Sally M. Reis (1997). Schoolwide Enrichment Model. Creative learning Press, Inc. Mansfield Center, Connecticut. str. 6–7.
29. Sheffield, L. J. (1999). Developing mathematically promising students. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
30. Swiatek, M. A.; Lupkowski-Shoplik, A. E. (2000). Predicting performance in a summmer enrichment program from above level EXPLORE scores. Paper presented at the 5th Biennial Henry B. and Jocelyn

Wallace national Research Symposium on Talent development.
31. Waxman, B.; Robinson, M. B.; Mukhopadhayay, S. (1996 a). Parents nurturing math talented young children. Seatlle, University of Washington.
32. Waxman, B.; Robinson, M. B. ; Mukhopadhayay, S. (1996 b). Teachers nurturing math talented young children. Storrs: The National Research Center on the Gifted and Talented. University of Connecticut.

Sporočilo uredništva

Zahvaljujemo se Pavlu Škoberne iz Šolskega centra Rudolfa Maistra Kamnik, ki nam je odstopil fotografije 3-5.

Delo z nadarjenimi učenci pri matematiki v tretji triadi osnovne šole

Work with Gifted Pupils at Mathematical Lessons in the Third Triad of Primary School

Darinka Rogina
Osnovna šola Loka
Črnomelj

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljenih nekaj preizkušenih načinov dela, idej, skrbno izbranih nalog za delo z nadarjenimi učenci pri matematiki v 3. triadi osnovne šole.

Ključne besede: nadarjeni učenci, matematika, geometrijske naloge, naloge iz vsakdanjega življenja, medpredmetno naloge.

Σ Abstract

The article describes some of the proven work methods, ideas, and carefully selected exercises for work with gifted pupils at mathematical lessons in the third triad of primary school.

Key words: *gifted pupils, mathematics, geometry exercises, everyday life mathematical exercises, cross-curricular exercises*

α Uvod

Nadarjeni učenci – splošno

Nadarjeni učenci so po Zakonu o osnovni šoli (11. člen) učenci s posebnimi potrebami.[11]

Na šoli jih odkrivamo že v 1. in 2. triadi, intenzivno pa v 3. triadi. V postopku odkrivanja sodelujejo šolska svetovalna služba (testi sposobnosti in nadarjenosti), učitelji in starši.

Učitelji matematike smo pozorni na nekatere značilnosti, ki so skupne matematično nadarjenim učencem.

Ti učenci:

- imajo razvito logično in divergentno mišljenje,
- znajo sklepati in kritično presojati,
- pri reševanju problemov imajo izviren pristop, izkazujejo visoko stopnjo ustvarjalnosti pri iskanju nenavadnih rešitev,
- so radovedni, vedoželjni, se hitro učijo, imajo dober spomin, natančno opazujejo, razumejo matematične ideje in povezave,
- k delu pristopijo analitično, so sistematični in zanesljivi,
- zlahka ugotovijo vzorce, pravila, lastnosti,
- svoje znanje znajo uporabiti, tudi v neobičajnem kontekstu,
- skoncentrirajo se za daljši čas, sledijo dolgoročnim dejavnostim, vztrajajo pri iskanju rešitve, so vešči pri postavljanju vprašanj in so sposobni slediti rdeči niti raziskovanja,
- imajo visoke aspiracije, posledično visoko storilnostno motivacijo, in uživajo v dosežkih.

Delo z nadarjenimi učenci pri matematiki na naši šoli

Na šoli učencem, ki kažejo nadarjenost za matematiko, prilagodimo oblike in metode dela, vključimo jih k dodatnemu pouku, interesnim dejavnostim, svetujemo jim udeležbo na pripravah na tekmovanja. Ti učenci delajo tudi raziskovalne in seminarske naloge, v 8. in 9. razredu imajo nivojski pouk matematike.

Učence 8. in 9. razreda, ki izkazujejo izrazito nadarjenost pri matematiki tudi z dosežki na področnih tekmovanjih, vključimo v program za nadarjene z osebnim mentorstvom.

Na začetku leta se s temi učenci pogovorim o vsebini in načinu dela pri tako imenovanem individualnem pouku. Včasih je to samo en učenec, kakšno leto je skupinica večja, a ne večja od 4 učencev. Dobivamo se enkrat tedensko, pred tekmovanji bolj intenzivno, tudi v popoldanskem času.

Naloga učitelja je med drugim priprava ustreznih nalog, zanimivih, dovolj zahtevnih, predvideti je treba različne strategije reševanja posamezne naloge, različne »intervencije«, tudi v obliki dodatnih, nekoliko lažjih nalog, če je osnovna naloga prezahtevna (najprej konkretni podatki, šele nato splošno). Naloge morajo biti za posameznega učenca ravno prav zahtevne, tako da jih z veliko truda zmore rešiti. Da je zmogel rešiti težko nalogo, je za učenca nepopisna sreča in najboljša motivacija, da se bo spoprijel s še zahtevnejšimi primeri. Zahtevnost nalog pri obdelavi posamezne učne teme stopnjujem.

Z nadarjenimi učenci pogosto obiščemo spletno stran www.nrich.maths.org, ki jo podpira Univerza Cambridge. Na tej spletni strani vsak mesec objavijo zanimive matematične probleme za različne starostne stopnje, od nižjih razredov OŠ do prvih letnikov srednje šole. Naloge so objavljene od 1. do 21. v mesecu in do tega datuma tudi pričakujejo rešitve, ki jih, v angleščini seveda, prispevajo mladi z vseh koncev sveta. Vsakega 1. v mesecu pravilne rešitve in reševalce omenijo, izvirne, dobre rešitve pa objavijo v celoti.

V lanskem šolskem letu so se trije devetošolci naše šole ukvarjali z dvema problemoma.

V prvi nalogi so se ukvarjali s problemom, ko enakostranični trikotnik rotira okoli enakostraničnega trikotnika, pa okoli kvadrata, okoli pravilnega petkotnika, splošno okoli pravilnega n-kotnika. Iskali so obsege različnih »rožic«, ki so nastale z rotacijo. Izpeljali so tudi splošno formulo za izračun obsega »rožice«, ki nastane, če enakostranični trikotnik rotira okoli poljubnega n-kotnika (glej Triangles and Petals – september 2010).

V drugi nalogi so raziskovali zvezo med Celzijevo, Fahrenheitovo in Kelvinovo temperaturno lestvico. (glej Temperature – maj 2011).

Naloge, privzete z www.nrich.maths.org, učenci dobijo v izvirniku, torej v angleškem jeziku. Skupaj se o zastavljenem problemu pogovorimo, razjasnimo morebitne nejasnosti. Rešitev običajno izdelajo v slovenščini (pravijo, da še vedno bolje razmišljajo v maternem jeziku), nato pa jo prevedejo v angleščino. Če se kje zatakne, priskoči na pomoč učitelj angleščine. Zgodi se, da je kak problem zanje pretrd oreh in ga ne uspejo rešiti; tedaj zelo napeto pričakujejo 1. v mesecu, ko na spletni strani običajno vidijo rešitev nekoga drugega. Pomembno je, da se s problemom ukvarjajo, včasih je pot pomembnejša od cilja.

Naloge, ki jih pripravim za nadarjene učence, iščem na različnih javno dostopnih spletnih straneh, domačih in tujih, veliko izzivov najdem v nalogah s preteklih tekmovanj, kakšno nalogo pa sestavim tudi sama.

V nadaljevanju navajam nekaj nalog, ki so jih učenci z veseljem reševali v preteklih letih. Opažam, da zelo radi rešujejo naloge, ki povezujejo matematiko z drugimi področji (fiziko, kemijo, tehniko …), in tako vidijo uporabo matematične teorije v konkretnih primerih (linearna funkcija v povezavi s fiziko). Nadarjeni učenci zelo radi rešujejo probleme iz vsakdanjega življenja (zahtevni problemi s področja procentnega računa). Pritegnejo jih geometrijski problemi, zlasti pa tudi naloge, pri katerih se je treba odločati med različnimi izbirami.

β Izbrane naloge za delo z nadarjenimi učenci

Naloge s področja medpredmetnega povezovanja

1. naloga

Temperatura (v °C) v pečici je linearno odvisna od časa t (v minutah). Če je pečica vključena 5 minut, doseže temperaturo 55 °C, če je vključena 10 minut, se temperatura poveča na 87 °C.

a) Določi enačbo linearne funkcije, ki opisuje odvisnost temperature T v pečici od časa t!
b) Kolikšna je temperatura po pol ure?
c) Biskvit je treba dati v pečico, ko je temperatura v njej 175 °C. Koliko minut po vključitvi je treba vanjo dati biskvit?
d) Drobno pecivo je treba vstaviti v pečico, potem ko je v njej temperatura med 150 °C in 180 °C. V katerem časovnem intervalu je potrebno, potem ko smo vključili pečico, vanjo vstaviti drobno pecivo? Meje intervala zaokroži na celo vrednost minute!

Vir [3]: http://dokumenti.ncvvo.hr/Nacionalni_ispiti_06/MPM_IIdio.pdf

Reševanje

a) Učenci zapišejo splošno enačbo linearne funkcije $T(t) = kt + n$ in z uporabo 2 točk, ki sta podatka (5,55) in (10,87,) pridejo do enačbe

$$T(t) = 6{,}4t + 23 \qquad (1)$$

b) Potem ko vstavijo v enačbo (1) podatek t = 30 minut, pridejo do rešitve, da je temperatura v pečici po pol ure 215 °C.
c) Iz enačbe (1) izpeljejo čas t.

$$t = \frac{T - 23}{6{,}4} \qquad (2)$$

V (2) vstavijo T = 175 °C in izračunajo, da je treba biskvit vstaviti v pečico po 23,7 minutah.
d) Podobno izračunajo, da je treba drobno pecivo vstaviti v pečico v intervalu
20 min < t < 25 min po vključitvi pečice.

2. naloga

Znano je, da je med Fahrenheitovo in Celzijevo temperaturno lestvico obstaja linearna odvisnost, in sicer

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32.$$

a) Voda zavre pri 100 °C. Koliko Fahrenheitovih stopinj je to?
b) Zunaj je 15 °C. Koliko Fahrenheitovih stopinj je to?
c) Iz enačbe $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ izrazi C in izračunaj, koliko Celzijevih stopinj je 115 °F!
d) Ali obstaja temperatura, ki je enaka v °F in v °C? Ugotovitev prikaži tudi grafično!

Reševanje in komentar

Z odgovori na prva tri vprašanja učenci niso imeli težav, nekaj dodatnih pojasnil pa so potrebovali pri reševanju d) primera.

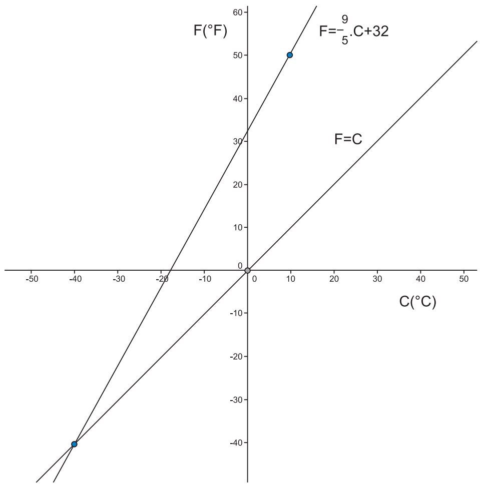
Najprej računska rešitev:

$F = C$, pri čemer namesto F vstavimo $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ in dobimo

$$C = \frac{9}{5} \cdot C + 32 \qquad (1)$$

Z rešitvijo enačbe (1) dobimo odgovor, da je ta temperatura -40 °.

In še grafična predstavitev:



V naslednjih dveh nalogah ne gre za linearni funkciji. Z njima razširimo pojem odvisnosti dveh količin, še posebej če učenci, ki so sicer zelo radovedni in vedoželjni, postavljajo dodatna vprašanja. Naloga 3 je zanimiva tudi zato, ker se učenci srečajo s potenco z negativnim eksponentom. Nalogo 4 rešujemo z metodo ekstremalnih problemov (brez odvoda).

3. naloga

Število bakterij B v telesu je odvisno od časa t (v urah), in sicer velja:

$$B(t) = 1000 \cdot 2^{3t}$$

a) Koliko bakterij je bilo v telesu na začetku merjenja ($t = 0$)?
b) Ali je bilo v telesu kaj bakterij 1 uro pred začetkom opazovanja ($t = -1$)?
c) Koliko je bilo bakterij v telesu po 40 minutah od začetka merjenja?
d) Čez koliko časa bo v telesu 1024000 bakterij?

Reševanje

a) $B(0) = 1000 \cdot 2^0 = 1000$

Na začetku opazovanja je bilo v telesu 1000 bakterij.

b) $B(-1) = 1000 \cdot 2^{-3} = 125$

Eno uro pred začetkom opazovanja je bilo v telesu 125 bakterij.

c) $B(\frac{40}{60} = \frac{2}{3}) = 1000 \cdot 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4000$

40 minut po začetku opazovanja je bilo v telesu 4000 bakterij.

d) Odgovor na vprašanje prinese reševanje enačbe, ki jo nadarjeni učenci zmorejo rešiti z znanjem osnovnošolske matematike.

$1024000 = 1000 \cdot 2^{3t}$

(Enačbo delimo s 1000.)

$1024 = 2^{3t}$

(1024 zapišemo kot potenco števila 2.)

$2^{10} = 2^{3t}$

$3t = 10$

$t = 3\frac{1}{3}h$

V telesu bo 1024000 bakterij po 3 urah in 20 minutah.

4. naloga

Temperatura T (v °C) v rastlinjaku t ur potem, ko se zmrači, je podana z enačbo

$$T(t) = \frac{1}{4}t^2 - 5t + 30,$$

pri čemer je $0 \le t \le 12$. Zmrači se ob 19. uri.

a) Kolikšna je bila temperatura ob 21. uri?
b) Ob kateri uri je bila temperatura najmanjša?
c) Kolikšna je bila najnižja temperatura v rastlinjaku?

Vir [4]: http://www.gssjd.hr/nastavni-predmeti/matematika/nacionalni-ispiti-iz-matematike/zadaci-s-nacionalnih-ispita/

Reševanje:

a) $T(2) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 30 = 21$

Ob 21. uri je bila temperatura 21°C.

b) Ker učenci v osnovni šoli ne poznajo odvoda, s katerim bi elegantno odgovorili na vprašanje b)

$(T' = \frac{1}{4} \cdot 2t - 5 = 0$ in $t = 10)$,

so rešili nalogo tako, da so izračunali T v odvisnosti od t in izračune prikazali v preglednici.

t [h]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12
T [°C]	30	25,25	21	17,25	14	11,25	9	7,25	6	5,25	**5**	5,25	6

Najnižja temperatura je bila čez 10 ur, to je ob 5. uri zjutraj.

c) Najnižja temperatura v rastlinjaku je 5 °C.

Problemi iz vsakdanjega življenja, pri katerih se je treba odločati med različnimi možnostmi

5. naloga

Družina Mesojedec se je odločila kupiti rabljen avtomobil, ki stane 5800 €. V prodajnem salonu jim ponujajo 2 možnosti:

a) če plačajo z gotovino, jim dajo 5 % popusta;
b) lahko pa plačajo 1000 € takoj, nato pa po 230 € mesečno 24 mesecev.

Ker je kriza in Mesojedčevi nimajo gotovine za celoten avto, se odločijo za drugo ponudbo.

Koliko € več bodo plačali, kot če bi plačali z gotovino? Izrazi v %!

Reševanje in komentar

a) $5\ \%$ od $5800\ € = \dfrac{5}{100} \cdot 5800\ € = 290\ €$

$5800\ € - 290\ € = 5510\ €$

Če bi Mesojedčevi plačali z gotovino, bi za avtomobil plačali 5510 €.

b) $30\ € \cdot 24 = 5520\ €$

$5520\ € + 1000\ € = 6520\ €$

$6520\ € - 5510\ € = 1010\ €$

$\dfrac{1010}{5510} \approx 18{,}3\ \%$

Ker so se Mesojedčevi morali odločiti za 2. ponudbo, bodo plačali 1010 € več, kar je približno 18,3 % več, kot če bi plačali z gotovino.

Take naloge se mi zdijo pomembne z vidika vsakdanjega življenja. Od šole se danes pričakuje, da posameznika pripravi na drugačen način življenja, v katerem je za mladega šolajočega se človeka le malo zaposlitvenih možnosti. Od posameznika se tako pričakuje, da se učinkovito odloča pri razreševanju različnih problemov, zato take in podobne naloge učence usposobijo za inteligentno odločanje.

6. naloga

Trije učenci 9. razreda obiskujejo različne šole. Pisali so 2 testa iz matematike.

- Matic je pri prvem testu dosegel 24 od 60 točk, pri drugem pa 32 od 40 točk.
- Kristjan je pri prvem testu dosegel 35 od 70 točk, pri drugem pa 54 od 60 točk.
- Ninin dosežek je 27 od 90 točk pri prvem testu in 45 od 50 točk pri drugem testu.

a) Kateri izmed učencev je dosegel najboljši rezultat pri prvem in kateri pri drugem testu?
Učiteljice matematike menijo, da je bil drugi test vsebinsko pomembnejši, zato se odločijo, da bodo končno oceno oblikovale tako, da bodo od prvega testa vzele 30 % točk, od drugega pa 70 %.
b) Izračunaj dosežek posameznega učenca v %, upoštevajoč zgornji ključ.

Dosežke predstavi v preglednici!

(Opomba: Naloga je zgolj hipotetična. V naši OŠ velja, da so vse pridobljene ocene enakovredne in ne obstajajo delne ocene, ki bi jih lahko sestavljali v neko drugo oceno.)

Reševanje in komentar

a)

Učenci	Dosežene točke 1. testa v %	Dosežene točke 2. testa v %	Razlika
Matic	40 %	80 %	40 %
Kristjan	50 %	90 %	40 %
Nina	30 %	90 %	60 %

b)

Učenci	30 % 1. testa	70 % 2. testa	Skupaj
Matic	12 %	56 %	68 %
Kristjan	15 %	63 %	78 %
Nina	9 %	63 %	72 %

Najboljši rezultat je dosegel Kristjan.

3. naloga

Gospod Ciklama se je s svojim avtom odpravil v Veliko mesto. Glede parkiranja ima na voljo 4 različne možnosti:

A Parkirati je možno v parkirni hiši blizu kliničnega centra, kjer je cena parkiranja 0,80 € za prvo uro, nato pa za vsako naslednjo uro 0,50 €.

B Parkira lahko na Mestnem trgu, kjer stane prva ura 1,50 €, vsaka naslednja ura pa 0,30 €.

C Obstaja možnost, da avto pusti v predmestju, kjer vsaka ura parkiranja stane 0,40 €. V tem primeru se mora v center Velikega mesta peljati z mestnim avtobusom – vožnja v mesto in nazaj stane 0,60 €.

D Na voljo ima možnost, da avto pusti v 15 km oddaljeni Črni vasi, kjer je parkiranje na železniški postaji brezplačno, povratna vozovnica za vlak pa stane 3,50 €.

Svetuj gospodu Ciklami najugodnejšo varianto parkiranja.

Reševanje in komentar

Učenci so imeli kar precej težav, da so izbrali pravo strategijo reševanja te naloge. Najprej so poskušali z grafično potjo, pa so se zapletli. Ni jim bilo jasno, kaj pomeni pri A za vsako naslednjo uro 0,5 €. Ali to pomeni, da je cena parkiranja do 2 ur enaka, če parkira 1 uro in 1 minuto ali če parkira 2 uri? Kar nekaj časa je potekala možganska nevihta - kresala so se mnenja, padali so najrazličnejši predlogi, nato pa je prevladalo mnenje, da bo najbolje vse štiri možnosti predstaviti v preglednici.

Ure parkiranja	PARKIRNA HIŠA	MESTNI TRG	PRED-MESTJE	ČRNA VAS
1	**0,80 €**	1,50 €	1,00 €	3,50 €
2	**1,30 €**	1,80 €	1,40 €	3,50 €
3	**1,80 €**	2,10 €	**1,80 €**	3,50 €
4	2,30 €	2,40 €	**2,20 €**	3,50 €
5	2,80 €	2,70 €	**2,60 €**	3,50 €
6	3,30 €	**3,00 €**	**3,00 €**	3,50 €
7	3,80 €	**3,30 €**	3,40 €	3,50 €
8	4,30 €	3,60 €	3,80 €	**3,50 €**
9	4,80 €	3,90 €	4,20 €	**3,50 €**
10	5,30 €	4,20 €	4,60 €	**3,50 €**

Ugotovitve

1. Če bo gospod Ciklama parkiral 3 ure ali manj, naj parkira v PARKIRNI HIŠI.
2. Če bo parkiral 3 ure in več, a največ 6 ur, naj uporabi parkirišče v PREDMESTJU.

3. Če namerava parkirati 7 ur, naj parkira na MESTNEM TRGU.
4. Če bo v Ljubljani ostal več kot 7 ur, naj parkira v ČRNI VASI in pride v VELIKO MESTO z vlakom.

Nalogo lahko nadgradimo z dodatno nalogo:

Oblikuj take pogoje parkiranja na posameznih parkiriščih, da bodo veljali spodnji scenariji.

a) Na parkirišču A je ugodneje parkirati, če traja parkiranje manj kot 5 ur, sicer je ugodnejše parkirišče B.
b) Parkiraš lahko na parkiriščih C, D, in E. Parkirišče C je najcenejše, če traja parkiranje manj kot 2 uri, če parkiraš med 2 in 6 urami, je najcenejše parkirišče D, parkirišče E pa je najcenejše, če parkiraš več kot 6 ur.
c) Parkiraš lahko na parkiriščih F, G, in H. Če parkiraš 3 ure ali manj, je najugodnejše parkirišče F, če parkiraš več kot 3 ure, je najugodnejše parkirišče G. Parkirišče H ni nikoli najcenejše.
d) Parkiraš lahko na parkiriščih I, J, in K. Parkirišče I je vedno cenejše od J in K, ne glede na to, koliko časa parkiraš.

Komentar

Naloga je zelo koristna. Učenci se učijo zastavljati matematično smiselna vprašanja, učijo se iskati pravilnosti, postavljati domneve, jih preverjati ter sporočati svoje ugotovitve na najprimernejši način (preglednica).

Vse to počno na zahtevnostni ravni, ki jo še obvladajo, kar jim vzbuja zadovoljstvo.

Cilj dodatnih nalog je modeliranje danih življenjskih situacij in predstavlja za učence precejšen napor.

4. naloga

V nekem trenutku je bila cena bencina na bencinski črpalki A in bencinski črpalki B enaka.

Na črpalki A so bencin zaporedoma povečali za 5 %, 6 %, 4 %, na črpalki B pa so ceno zaporedoma povečali za 2 %, 10 % in za 6 %.

Na kateri bencinski črpalki je bila cena po 3 podražitvah višja in za koliko %?

Vir [5]: http://www.stkpula.hr/mat-natj/zadaci/2010/2010-OS-drz-78-zad+rj/2010-OS-drz-78-zad.pdf

Opomba: Naloga je zgolj hipotetična. Ceno naftnih derivatov v Sloveniji določa Uredba o oblikovanju cen naftnih derivatov (UL, št. 76/2012), trgovci jo morajo pri podražitvah upoštevati. Pri vseh prodajalcih naftnih derivatov so cene enake.

Reševanje

ČRPALKA A
Začetna cena: x
1. podražitev:
$x + 5\ \% \cdot x = 105\ \% \cdot x$
2. podražitev:
$105\ \% \cdot x + 6\ \%$ *od* $105\ \% \cdot x = 111{,}3\ \% \cdot x$
3. podražitev:
$111{,}3\ \% \cdot x + 4\ \%$ *od* $111{,}3\ \% \cdot x =$
$= 115{,}752\ \% \cdot x \doteq 115{,}8\ \% \cdot x$

ČRPALKA B
Začetna cena: x
1. podražitev:
$x + 2\ \% \cdot x = 102\ \% \cdot x$
2. podražitev:
$102\ \% \cdot x + 10\ \%$ *od* $102\ \% \cdot x = 112{,}2\ \% \cdot x$
3. podražitev:
$112{,}2\ \% \cdot x + 6\ \%$ *od* $112{,}2\ \% \cdot x =$
$= 118{,}932\ \% \cdot x \doteq 119\ \% \cdot x$

Po 3 podražitvah je bencin dražji na črpalki B, in sicer za $\frac{3{,}2\% \cdot x}{115{,}8\% \cdot x} \doteq 2{,}7\ \ \%$.

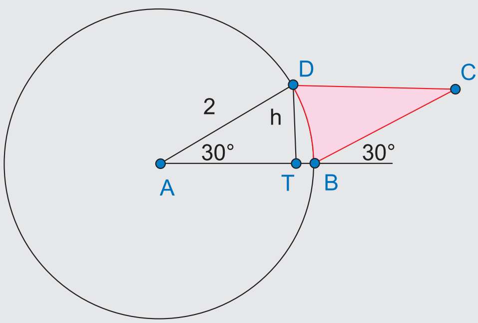
Komentar

Z reševanjem te naloge so imeli učenci kar nekaj težav, saj niso vedeli, kako bi se je lotili. Potrebna je bila »intervencija« v obliki lažjih nalog s konkretnimi podatki, šele nato so se lahko lotili te naloge.

Geometrijski problemi

1. naloga

Dana je krožnica s središčem A in polmerom 2 cm. Lik $ABCD$ je paralelogram. Izračunaj ploščino osenčenega dela paralelograma na dve decimalki natančno.



Vir [6]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems /grade10.html

Reševanje, komentar

Ploščino osenčenega dela dobimo tako, da od ploščine paralelograma, ki je romb, odštejemo ploščino krožnega izseka. Višina romba h = 1, saj je pravokotni trikotnik polovica enakostraničnega trikotnika.

Torej velja:

$$p = p_{\text{paralelograma}} - p_{\text{krožnega izseka}}$$

$$p = |AB| \cdot h - \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$$

$$p = 2 \cdot 1 - \frac{\pi \cdot 4 \cdot 30°}{360°}$$

$$p = 2 - \frac{\pi}{3}$$

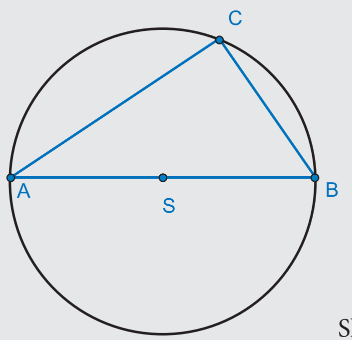
$$p = 0{,}95$$

Ploščina osenčenega dela meri 0,95 cm^2.

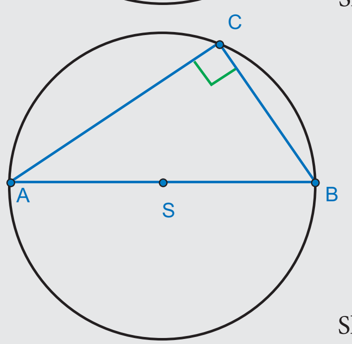
Pri reševanju te naloge je učencem predstavljalo največjo težavo odkriti, da je zaradi pravega kota in kota 30º trikotnik ATD polovica enakostraničnega trikotnika.

2. naloga

V krogu je AB premer in meri 10 cm. Ploščina trikotnika ABC (oglišče C leži na krožnici) je *11 cm²*. Izračunaj obseg trikotnika ABC.



Slika 1



Slika 2

Vir [7]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems /grade12.html

Reševanje, komentar

Ob tej nalogi sem pomišljala, ali naj učencem ponudim sliko 1 ali sliko 2. Sama bi se na začetku odločila za sliko 1, saj iz podatkov, da je daljica AB premer kroga in točka C točka, ki leži na krožnici, učenci sami ugotovijo, da je trikotnik ABC pravokoten. Če tega sami ne bi ugotovili, bi jim kot intervencijo ponudila sliko 2.

Ker je AB premer in ker točka C leži na krožnici, je trikotnik ABC pravokoten.

Naj velja $|AB| = c$, $|BC| = a$ in $|AC| = b$.

1. Velja Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2$, torej $a^2 + b^2 = 100$.
2. Hkrati velja $p = \dfrac{ab}{2}$ torej $ab = 22$.
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2+b^2) + 2ab = 100 + 2\cdot 22 = 144$
4. Torej velja $(a+b)^2 = 144$ in s korenjenjem obeh strani enačbe dobimo, da je $a + b = 12$.
5. $o = a + b + c = 12 + 10 = 22$

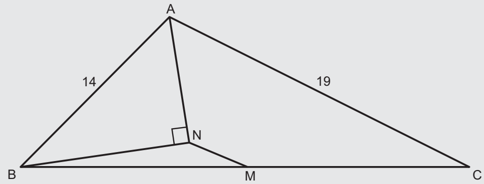
Obseg trikotnika ABC je 22 cm.

Večina učencev pri reševanju te naloge ugotovi, da je $a^2 + b^2 = 100$ in $ab = 22$. Potem nadaljujejo reševanje tako, da iz enačbe $ab = 22$ izrazijo $a = \dfrac{22}{b}$ in to vstavijo v enačbo $a^2 + b^2 = 100$.

Dobijo enačbo 4. stopnje, ki je z osnovnošolskim znanjem ne znajo rešiti. Tu in tam kak učenec samostojno pride do zamisli in reši je nalogo tako, kot je opisano zgoraj. Večina učencev pa tu potrebuje nekaj usmerjanja.

3. naloga

V trikotniku ABC je točka M središče daljice BC, daljica AN leži na simetrali kota BAC, daljici AN in BN sta pravokotni. Stranici trikotnika ABC sta dolgi: $AB = 14$ cm in $AC = 19$ cm. Koliko je dolga daljica MN?



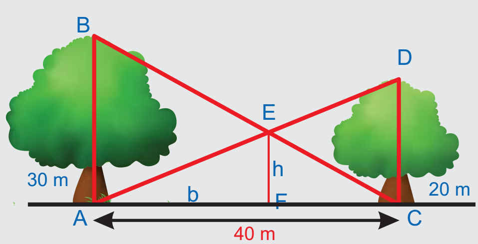
Vir [8]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade11.html

Reševanje in komentar

Ideja, ki pripelje do rešitve, je, da je treba daljico BN podaljšati do daljice AC. Točko, v kateri nosilka daljice BN seka daljico AC, označimo z E. Ugotovimo, da sta trikotnika BNA in ANE skladna (ujemanje v stranici in priležnih kotih). To pomeni, da je $|AB| = |AE| = 14$ cm in $|EC| = 5$ cm. Ker velja $|BN| = |NE|$ in je točka M središče daljice BC, je daljica NM srednjica v trikotniku BCE in zato enaka polovici dolžine stranice $|CE|$, torej meri 2,5 cm.

4. naloga

Dve drevesi sta 40 m narazen. Prvo drevo je visoko 30 m, drugo pa 20 m. Izračunaj višino h!



Vir [9]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade7.html

Rešitev

1. Ugotovimo, da je $\Delta ABC \approx \Delta CFE$, in zato velja

$$AB : AC = EF : FC$$
$$30 : 40 = h : (40 - b)$$
$$40\,h = 30 \cdot (40 - b)$$
$$40h = 1200 - 30b,$$
enačbo delimo z 10
$$4h = 120 - 3b$$
$$h = \frac{120 - 3b}{4} \quad (1)$$

2. Vidimo tudi, da je $\Delta ADC \approx \Delta AFE$, in tako velja

$$AC : CD = AF : EF$$
$$40 : 20 = b : h$$
$$40h = 20b$$
$$h = \frac{b}{2} \quad (2)$$

3. Enačbi (1) in (2) izenačimo in dobimo:

$$\frac{120 - 3b}{4} = \frac{b}{2},$$
enačbo pomnožimo s 4:
$$120 = 5b$$
$$b = 24\ m$$

4. Vstavimo $b = 24\ m$ v enačbo (1) in dobimo $h = 12\ m$.

Učenec, ki se je lansko leto ukvarjal s to nalogo, jo je rešil na svoj, zame zelo izviren in presenetljiv način, ki ga v svojem razmisleku nisem predvidela.

Kakšna je bila njegova pot?

Postavil je pravokotni koordinatni sistem s koordinatnim izhodiščem v točki $A(0, 0)$, abscisna os je tako postala premica skozi točko $C(40, 0)$, ordinatna os pa premica skozi točko $B(0, 30)$.

Problem je tako prevedel v iskanje enačb premic skozi točki (A, D) in (B, C) in njunega presečišča $E(b, h)$.

Tako je našel enačbo premice skozi $A(0,0)$ in $D(40,20)$: $y = \frac{1}{2}x$ in (1)

enačbo premice skozi točki $B(0,30)$ in $C(40,0)$:

$$y = -\frac{3}{4}x + 30 \quad (2)$$

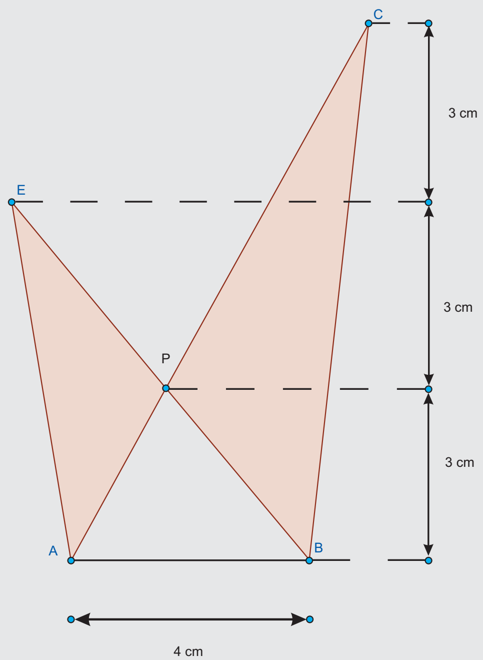
Enačbi (1) in (2) je izenačil in dobil enačbo $\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + 30$, pomnožil je s 4:

$$2x = -3x + 120$$
$$5x = 120$$
$x = 24$ in z vstavitvijo v (1) $y = 12$.

Koordinate točke E so $(24,12)$, torej velja $b = 24\ m$ in $h = 12\ m$.

5. naloga

Izračunaj vsoto ploščin osenčenih trikotnikov, ki se »poljubljata« v skupni točki P.



Vir [10]: http://nrich.maths.org/542

Reševanje in komentar

Ko učenci vidijo naslov naloge, se najprej veselo nasmejejo in postavijo raziskovalno vprašanje: »Ali se tudi trikotnika lahko poljubljata?«

Nato iščejo idejo in večina nadarjenih učencev pride do naslednje rešitve:

$$p_{PBC} = p_{ABC} - p_{ABP} = \frac{4 \cdot 9}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 18 - 6 = 12$$

$$p_{APE} = p_{ABE} - p_{ABP} = \frac{4 \cdot 6}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 12 - 6 = 6$$

Vsota ploščin osenčenih trikotnikov je 18 cm^2

Nalogo lahko uporabimo kot problem, ključno vprašanje, »vžig« na začetku obravnave ploščine trikotnika v 7. razredu.

γ Zaključek

Delo z nadarjenimi učenci v 3. triadi osnovne šole v okviru dodatnega pouka in individualnih ur je nadaljevanje dela, ki ga opravim pri rednem pouku matematike. Na naši šoli izvajamo nivojski pouk, saj menimo, da je za poučevanje matematike ustreznejši. Pomembno je, da je pouk v najvišji zahtevnostni ravni problemsko naravnan, vendar postopen.

Nadarjenim učencem ponudim naloge, pa tudi različne aktivnosti, pri katerih razvijajo matematične procese, kot so iskanje vzorcev, ocenjevanje rezultata, razgraditev kompleksnega problema na posamezne naloge, utemeljevanje, oblikovanje in preverjanje hipotez, posploševanje, dokazovanje … Poznavanje in obvladovanje matematičnih procesov in strategij je, poleg obvladovanja matematičnih pojmov in veščin, nujno za obravnavo problemskih situacij.

Pri obravnavi posamezne učne teme tako učenci osvojijo osnovna in konceptualna znanja, rutinska in kompleksna proceduralna znanja in se lotijo problemskih znanj. [1] in [2]

Kako uporabiti znanje v novih situacijah, kako poiskati ustrezne strategije reševanja določenega problema?

Naloge, ki so predstavljene v članku, so v praksi preizkušen odgovor na zgornje vprašanje.

Poseben primer je motivacija – kako učence pritegniti k reševanju zahtevnih matematičnih nalog, ko pa jih danes obkroža toliko vsega, kar vzbuja njihovo pozornost? Tu igrajo pomembno vlogo matematična tekmovanja. Ko učencu enkrat uspe s svojim talentom, a tudi s trdim delom, osvojiti npr. srebrno Vegovo priznanje, smo ga največkrat pridobili, da bo trdo delal tudi prihodnje leto.

Motivacijsko zelo uspešno je tudi v članku opisano reševanje matematičnih problemov na spletni strani www.nrich.maths.org, ki daje mednarodno dimenzijo, učencem in učitelju pa potrditev, da smo na pravi poti, saj se tudi na drugih koncih sveta ukvarjajo s podobnimi matematičnimi problemi.

δ Viri in literatura:

1. Predmetna kurikularna komisija za matematiko, Učni načrt: *program osnovnošolskega izobraževanja. Matematika,* Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2006.
2. Predmetna komisija za posodabljanje učnega načrta za matematiko, *Predlog posodobljenega učnega načrta. Matematika*, Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2008.
3. http://dokumenti.ncvvo.hr/Nacionalni_ispiti_06/MPM_IIdio.pdf, (20. 4. 2012)
4. http://www.gssjd.hr/nastavni-predmeti/matematika/nacionalni-ispiti-iz-matematike/zadaci-s-nacionalnih-ispita/, (20. 4. 2012)
5. http://www.stkpula.hr/mat-natj/zadaci/2010/2010-OS-drz-78-zad+rj/2010-OS-drz-78-zad.pdf, (24. 4. 2012)
6. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade10.html, (24. 4. 2012)
7. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade12.html, (24. 4. 2012)
8. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade11.html, (24. 4. 2012)
9. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade7.html, (24. 4. 2012)
10. http://nrich.maths.org/542, (20. 4. 2012)
11. Zakon o osnovni šoli, Državni zbor RS, 2006

Načini motiviranja učencev pri pouku matematike

Approaches to Motivation of Pupils at Mathematics Lessons

Katja Ilc
Gimnazija Brežice
Samo Repolusk
Univerza v Mariboru,
Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljenih nekaj preizkušenih načinov dela, idej, skrbno izbranih nalog za delo z nadarjenimi učenci pri matematiki.

Ključne besede: nadarjeni učenci, matematika, geometrijske naloge, naloge iz vsakdanjega življenja, medpredmetno naloge.

Σ Abstract

In the article we first present some theoretical frameworks for learning motivation and subsequently discuss nine different techniques, offering an example for each.

***Key words:** mathematical lessons, motivational approaches, learning motivation, teaching methods*

α Uvod s predstavitvijo izhodišč

V članku predstavimo devet načinov motiviranja učencev pri pouku matematike. Ti načini so: izhajanje iz pomanjkljivega znanja učencev, opazovanje vzorcev, predstavitev izziva, matematični »triki«, prikaz uporabnosti matematike, uporaba razvedrilnih nalog, pripovedovanje slikovitih zgodb, aktivno vključevanje učencev v utemeljevanje matematičnih zanimivosti ter uporaba didaktičnih modelov in gradiv. Pri predstavitvi načinov motiviranja smo izhajali iz predlogov v knjigi *The Art of Motivating Students for Mathematics Instruction*, avtorjev Alfreda Posamentiera in Stephena Krulika (2011).

Učna motivacija obsega vse, kar daje pobude za učenje, ga usmerja, mu določa intenzivnost, trajanje in kakovost (Marentič Požarnik, 2003, str. 184). Različne teorije imajo različne poglede na učno motivacijo. Behavioristična teorija podkrepitve poudarja pomembnost posledic nekega ravnanja za njegovo izvajanje. Le-te so lahko pozitivne, kjer gre za zadovoljitev kake potrebe v obliki pohvale, nagrade, ali negativne, kjer gre na primer za podkrepitev zavedanja o neustreznosti določenega napačnega ravnanja s kaznijo. Problem behaviorističnega pristopa je, da človek pri ravnanjih ne izhaja iz notranjih pobud, ampak zgolj od zunaj s sistemom nagrad in kazni. Kognitivna perspektiva poudarja pomembnost ciljev, pričakovanj, razlag in predvidevanj. Pohvala ima lahko pozitiven ali negativen učinek. Negativen v smislu, da ima učenec občutek, da učitelj dvomi o njegovih sposobnostih, če ga na primer pohvali za pravilno rešitev neke lahke naloge. Pri človekovi dejavnosti gre torej za premik k izhajanju iz notranjih pobud. Konstruktivizem poudarja aktivno vlogo učenca pri izgradnji razumevanja. Poudarek je na predhodnem znanju in učenčevi miselni aktivnosti. Socialni konstruktivizem pa opozarja na vpliv skupine na učenje in motiviranost posameznika. Pomemben je dialog med učenci. Humanistično usmerjeni psihologi menijo, da je pomembno, da učenje povezujemo z osebnimi izkušnjami, z radovednostjo, s pozitivnimi čustvi in z odnosom spoštovanja in zaupanja med učiteljem in učencem (prim. Marentič Požarnik, 2003).

Učna motivacija je lahko zunanja ali notranja. Zunanja motivacija se kaže na primer v oceni ali pohvali in ni trajna. Pogosto je povezana s pritiski ali z napetostjo. Viri zunanje motivacije so starši, učitelji in vrstniki. Notranja motivacija se kaže v želji po razvoju lastnih sposobnosti, doseči želimo nekaj, kar nas zanima. Določajo jo izzivi, radovednost, interes, samostojno obvladanje nečesa, neodvisno odločanje za aktivnost, notranji kriteriji uspešnosti. Prednost notranje motivacije je v zadovoljstvu in njeni trajnosti. Pri spodbujanju notranje motivacije učitelja marsikaj omejuje (že na primer to, da je šola obvezna, da je poudarek na ocenah in v srednji šoli posledično na maturi, učni načrt je predpisan). Zunanja in notranja motivacija se med seboj prepletata. Zunanje nagrade lahko zmanjšajo notranjo motivacijo, ki je bolj učinkovita. Vendar nekatere učence ne navdihuje notranja motivacija, zato jih mora učitelj spodbuditi z zunanjimi motivacijskimi sredstvi, da vzbudi začetno ukvarjanje z dejavnostjo (prim. Marentič Požarnik, 2003).

V nadaljevanju bomo predstavili prej omenjene načine motiviranja učencev pri pouku matematike.

β Načini motiviranja učencev pri pouku matematike

Cilj dobrega učitelja je, da se na vsako uro čim bolje pripravi in jo učinkovito izvede. Velik vpliv na dosežek imajo poleg učiteljevega osebnega odnosa do učencev še motivacija, različni poučevalni pristopi in naloge. Učitelji si želimo matematiko približati otrokovemu izkustvenemu svetu in poleg razvijanja logičnega in kritičnega mišljenja predstaviti tudi nekatere vidike njene uporabe (v vsakdanjem življenju in drugih znanostih), njene lepote za človekov intelektualni in duhovni razvoj, strategije reševanja problemov … To lahko dosežemo preko načrtne skrbi za ustvarjanje pogojev za pozitiven odnos do matematike in izzivov, s katerimi se pri njej srečujejo. Med načini vzpostavljanja pozitivnega odnosa je tudi ustrezna motivacija. Ogledali si bomo devet različnih načinov motiviranja in pri vsakem izmed načinov po en zgled. Tukaj gre za enega od možnih načinov razvrščanja motivacijskih tehnik. Marsikatero motivacijo lahko prepoznamo v več kot eni od teh kategorij.

Izhajanje iz pomanjkljivega znanja učencev

V človekovi naravi je, da si navadno želimo neko stvar, ki se je lotimo in se nam zdi smiselna, tudi končati. Tako na primer zbiralci sličic želijo zapolniti svoj album do konca, majhni otroci do zadnjega sprašujejo »Zakaj?«, dokler ne pridejo stvari do dna. Na podoben način imajo učenci naravno potrebo po tem, da svoje znanje razširijo in nenehno dopolnjujejo.

Običajno učence motivira, če odkrijemo pomanjkljivosti v predznanju, tako da razpravljamo o določeni matematični vsebini in učenci sami ugotovijo, v kolikšni meri to vsebino razumejo. Učiteljeva naloga je, da učence aktivira v smeri, da sami poiščejo to »luknjo« v znanju in se sami potrudijo, da jo zapolnijo, kolikor je v domeni njihovih zmožnosti.Ta način motiviranja lahko uporabimo pri prav vsaki uri matematike.

Predstavili bomo, kako lahko učence motiviramo, tako da izhajamo iz njihovega pomanjkljivega znanja. Ko začnemo obravnavati novo matematično vsebino, navedemo nekaj enostavnih primerov, ki vsebujejo podobne situacije, nato pa primer, kjer se situacija nekoliko spremeni, vendar gre še vedno za isto matematično vsebino. Učence na tak način vodimo do nepoznanega pojma in jim zbudimo željo po tem, da nadgradijo svoje znanje pri določeni matematični vsebini. Tak način je boljši kot deduktivni pristop, kjer je ura razdeljena v grobem v dva dela: teorija (frontalni zapis nove vsebine na tablo) in naloge (utrjevanje naučenega). Seveda je to učinkovito, če je pravilno izvedeno.

ZGLED 1: Uvod v logaritemsko funkcijo

Učenci se bodo prvič srečali z definicijo logaritma. Ker že poznajo potenčno in eksponentno funkcijo, navedemo nekaj primerov, ki jih bodo znali rešiti z njihovo pomočjo in nato primer, kjer bodo odkrili luknjo v svojem znanju.

1. $2^3 =$
2. $8^2 =$
3. $10^6 =$

Za temi uvodnimi primeri zastavimo nekoliko drugačen problem:

4. $7^x = 49$
5. $4^x = 64$
6. $3^x = 243$
7. $10^x = 15603$

Tudi pri 4., 5. in 6. primeru učenci nimajo težav, saj že poznajo eksponentno enačbo. Ob tem jim povemo, da smo z iskanjem x v resnici že spoznali nov postopek, ki mu bomo rekli logaritmiranje. Poudarimo, da iskanje logaritma pomeni iskanje eksponenta x. Seveda pa to še ni razlog, zakaj bi morali za iskanje neznanke v eksponentu vpeljati čisto novo operacijo, zato si bomo pogledali še primer, kjer neznanke ne moremo poiskati kar na pamet, in takšen je 7. primer. Za tem lahko zapišemo definicijo logaritma najprej na konkretni, nato na splošni ravni:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Tako rešimo 7. primer, pri katerem si za izračun logaritma lahko pomagamo z računalom:

$$x = log_{10}\ 15603 \Rightarrow x \doteq 4{,}19\ .$$

Opazovanje vzorcev

Učitelj lahko motivira učence s preiskovanjem vzorcev. Pri tem mora biti spreten, njegova navodila naj bodo diskretna, tako da imajo učenci občutek, da so sami prišli do ideje. Takšen način je bistven za izboljšanje njihovega razumevanja in spoznanja.

Različne načine reševanja problemov in preiskovanja vzorcev lahko uporabimo za predstavitev novih pojmov, ki jih bomo obravnavali v prihodnje. Pri opazovanju vzorca in odkrivanju splošne lastnosti gre za induktivno sklepanje. Splošno lastnost v obliki obrazca lahko izpeljemo na enostaven in eleganten način s sredstvi, ki so učencem na voljo pri preiskovanju vzorca.

Preiskovanje vzorcev ni vedno uporabno. Kadar pa je, je zelo učinkovito.

Vzorce srečujemo vsak dan. Človek se je že od nekdaj ob ukvarjanju z matematiko srečeval tudi z vzorci: opazovanjem in napovedovanjem določenih pravil. Učenci gredo pri raziskovanju vzorcev skozi več korakov. Najprej zberejo podatke, ki jih uredijo v nek smiselni red. Nato poskušajo poiskati vzorec, s pomočjo katerega dobijo iskani obrazec oziroma definicijo. Vendar moramo paziti na pasti pri vzorcih, saj ne moremo vedno na podlagi posameznih primerov sklepati o splošnemo brazcu. Primer pasti je opisan v drugem zgledu.

V osnovni šoli so primerni ne le algebraični vzorci (npr. številska zaporedja), ampak tudi slikovni vzorci (npr. z liki, barvami …).

ZGLED 2: Potence z negativnim celim in ničelnim eksponentom

Učenci že poznajo potence z naravnimi eksponenti, in sicer na način, da 5^n pomeni produkt n faktorjev števila 5. Ko jih vprašamo, kaj je n, bodo najverjetneje odgovorili, da je n naravno število. Naslednji način jih bo spodbudil, da upoštevajo tudi negativna cela števila in število 0.

Oglejmo si naslednje primere:

$3^4 = 81$

$3^3 = 27$

$3^2 = 9$

$3^1 = 3$

Sedaj nadaljujemo vzorec tako, da desno stran delimo s 3, na levi strani pa eksponent za 1 zmanjšujemo. Na tablo zapišemo dva primera, ostale primere naj zapišejo učenci sami:

$3^0 = 1$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$3^{-2} = \frac{1}{9}$

$3^{-3} = \frac{1}{27}$

To bo učence motiviralo za nadaljnjo obravnavo negativnih celih eksponentov. Sedaj ne moremo reči, da pomeni na primer x^{-3} produkt -3 faktorjev števila x. Z uporabo pravil računanja z eksponenti lahko vpeljemo pomen negativnih celih eksponentov. Oglejmo si primer:

$$\frac{x^4}{x^7} = \frac{1}{x^3}\ .$$

Ta ulomek smo okrajšali, tako kot ga učenci že znajo. Če upoštevamo pravila za računanje z eksponenti, dobimo naslednji rezultat:

$$\frac{x^4}{x^7} = x^{4-7} = x^{-3}.$$

Iz tega vidimo, da bi bilo v redu, če bi veljalo: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. Zato tudi tako definiramo pomen negativnih celih eksponentov in ostane naš sistem skladen.

Pri ničelnem eksponentu pa gledamo na problem na naslednji način: $\frac{x^5}{x^5}$, kjer je $x \neq 0$, kar je enako $x^{5-5} = x^0$. Iz tega vidimo, da je $x^0 = 1$. Tudi tu nima pomena, da rečemo, da je to produkt faktorjev števila x. Definiramo $x^0 = 1$, da ostanemo dosledni s pravili računanja z eksponenti.

Učence vprašamo, kaj bi pomenilo 0^0. Na podoben način kot prej vidimo: $0^0 = 0^{k-k} = \frac{0^k}{0^k}$; k je naravno število. To seveda nima pomena, saj je $0^k = 0$, $\frac{0}{0}$, pa je nedoločeno. Na podoben način ne moremo definirati 0^{-k}, ker bi to pomenilo $\frac{1}{0^k}$, kar pa ni definirano. Tako učenci ugotovijo, da osnova ne sme biti enaka 0, če je eksponent negativen ali enak 0.

Sedaj definiciji $x^0 = 1;\ x \neq 0$ in $x^{-k} = \frac{1}{x^k};\ x \neq 0$ dobita pomen.

ZGLED 3: Pasti pri vzorcih

Induktivno sklepanje je lahko tudi nevarno. Med vzorci pogosto obravnavamo številska zaporedja, za katera pa vemo, da jih lahko nadaljujemo na neskončno mnogo načinov. Formalna utemeljitev o različnih načinih nadaljevanja istega zaporedja bo za učence morda pretežka, zato si pomagamo s kakšnim konkretnim problemom.

Oglejmo si primer zaporedja: . Učenci bi običajno kot naslednji člen zaporedja predvideli število 32, mi pa jim na konkretnem primeru pokažemo, da lahko sledi tudi število 31. Tak primer je lep za prikaz tega, da induktivno izpeljan sklep ne pripelje nujno do pravilne rešitve in da ni enak dokazu.

Narišimo krožnico, na njej izberimo točke in jih paroma povežimo. V tabelo (tabela 1) zabeležimo, na koliko največ delov narisane daljice razdelijo krog, seveda v odvisnosti od števila izbranih točk. Učenci si pomagajo s tem, da narišejo krog in na njem točke, jih povežejo med seboj ter preštejejo dele.

Število točk na krožnici	Največje število delov, na katere krog razpade
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57
8	99

[Tabela 1] Zaporedja

S tem primerom učencem nazorno prikažemo, da se lahko navidezno enolična številska zaporedja nadaljujejo na različne načine. Učitelj mora biti previden, ko predstavlja vzorce, da učencev ne vodi v napačno smer. Samo ugibanje in prepoznavanje vzorca lahko služi kot hipoteza, vendar jo moramo, preden ta postane matematični rezultat, potrditi z dokazom.

Predstavitev izziva

Učenje je učinkovitejše, če ga znamo predstaviti kot izziv, ki ga učenec želi rešiti sam. Problem ne sme biti prelahek, saj je naš namen v učencih zbuditi občutek, da gre za izziv. Vendar pa ne sme biti pretežek, da ne izgubijo volje do reševanja, ker ga ne znajo rešiti. Izziv naj vodi do teme, ki jo želimo obravnavati in za katero želimo motivirati učence. Pripravimo jih do tega, da postanejo radovedni in odprti za novo matematično vsebino, ki jo bodo spoznali.

Učitelji, ki imajo v razredu heterogene skupine, morda lahko lažje ustvarijo ustrezne skupine po dva ali tri učence, da razmislijo o izzivu, ki smo ga predstavili celotnemu razredu. Večje skupine so navadno neproduktivne, ker je lahko zraven nekdo pasiven in nekdo, ki bi vse naredil sam. Poleg tega je dobro, da imamo več manjših skupin, saj bodo učenci drugače pristopili k problemu in bodo lahko razredu predstavili različne poti do rešitve. Ta način motivacije lahko uporabimo pri mnogih urah matematike.

ZGLED 4: Uvod v geometrijsko vrsto

Uro začnemo tako, da učencem zastavimo naslednji izziv:

Bi raje zaslužili 100 000 € vsak dan v mesecu ali bi raje zaslužili 1 cent prvi dan, 2 centa drugi dan, 3 cente tretji dan, 4 centov četrti dan, 5 centov peti dan in tako naprej vseh 31 dni?

Učenci bodo najverjetneje izbrali prvo možnost, kar bi jim skupno prineslo 3 100 000 €. Pričakujemo, da jih ne bo zanimal seznam centov. Povemo jim, da so se slabo odločili, saj nam druga možnost prinese več denarja, in sicer 21 474 836,47 €. To izračunamo po obrazcu

$$\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{4}{100}+\frac{8}{100}+\ldots+\frac{2^{30}}{100}=$$

$$=\frac{\frac{1}{100}\cdot(2^{31}-1)}{2-1}=21\ 474\ 836{,}47.$$

Matematični triki

Pri učencih lahko spodbudimo zanimanje in radovednost tudi s predstavitvijo paradoksov, napačnih sklepanj ali navideznih čarovnij. Učitelj učencem pokaže, kako enostavno rešimo neke situacije, ki vodijo do nepričakovanih rezultatov. Motiviramo jih s tem, da problem, ki je enostavno rešljiv, kratek in se še vedno navezuje na našo temo, predstavimo tako, da se učenci vprašajo, kako in zakaj smo do predstavljene rešitve prišli.

Takšen način motiviranja je lahko zelo učinkovit, saj učenci vidijo, kako je lahko matematika zabavna in čarobna. Vendar pa takšni zanimivi primeri niso vedno na voljo in jih zato pri uri matematike uporabimo redkeje. Kadar pa so, je vredno vložiti čas in trud za njihovo predstavitev.

ZGLED 5: Obravnavanje deljenja z nič

Eno izmed pomembnih pravil pri matematiki je, da ne smemo deliti z 0. Učencem je smiselno pokazati preprost in nazoren primer, kaj se zgodi pri deljenju z 0. Najlažje je, če jim preprosto rečemo, da je to prepovedano, vendar se bodo še vedno spraševali »Zakaj?«.

V nadaljevanju si bomo ogledali enostavno situacijo s preprostimi algebraičnimi računi.

Učencem napovemo, da bomo »dokazali« enakost 1 = 2.

Ta trditev bo verjetno sprožila radovednost in smeh. Začnemo z »dokazom«. Na tablo postopoma zapisujemo korake, ki so prikazani spodaj in vsakega posebej komentiramo:

1. Privzemimo: $a = b$
2. Obe strani pomnožimo z b: $ab = b^2$
3. Na obeh straneh odštejemo a^2: $ab - a^2 = b^2 - a^2$
4. Razstavimo obe strani enačbe: $a\,(b - a) = (b + a)(b - a)$
5. Obe strani enačbe delimo z $b - a$: $a = b + a$
6. Na desni strani lahko namesto b pišemo a: $a = a + a = 2a$
7. Obe strani delimo z a: $1 = 2$.

Učenci bodo najverjetneje zelo začudeni. Vprašamo jih, kje smo naredili napako. Očitno gre za matematično napako, ker vemo, da $1 \neq 2$. Počasi gremo še enkrat čez vse korake in ugotovimo, da smo naredili napako v petem koraku. Delili smo z 0, saj smo delili obe strani z $b - a$. Tako pokažemo učencem, da deljenje z 0 pripelje do čudnih in neresničnih rezultatov. Ta motivacijska tehnika nas vodi do razprave o pomembnosti določilnih pogojev v matematičnih definicijah in lastnostih.

Prikaz uporabnosti matematike

Prikaz uporabnosti matematike je ena uspešnejših motivacijskih tehnik pri matematiki, saj se veliko učencev sprašuje o njeni uporabnosti in za vsako temo posebej jih zanima, kje je predstavljena matematična vsebina uporabna.

Matematiko lahko povežemo z drugimi predmeti, na primer fiziko, kemijo, biologijo, zgodovino, ekonomijo, športno vzgojo in podobno. Še večji učinek motivacije bomo dosegli, če nam uspe povezati matematično vsebino, ki jo obravnavamo, z vsakdanjimi življenjskimi situacijami in dogodki.

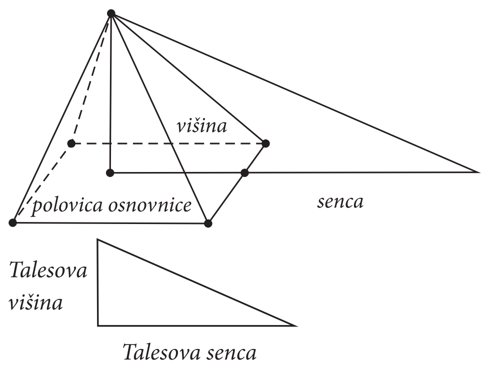
ZGLED 6: Uvod v podobne trikotnike

Primer, ki ga bomo opisali, nas vodi do teme o podobnih trikotnikih in o uporabi sorazmerja ustreznih stranic. Učenci izračunajo velikost nekega objekta s pomočjo velikosti podobnega objekta.

Povemo jim zgodbo, kako je grški matematik Tales moral izračunati višine piramid v starem Egiptu. Našel je pametno rešitev. Učence vprašamo, kako je po njihovem mnenju to izračunal.

Nekateri učenci bodo morda pomislili, da je uporabil lestev ali kaj podobnega. To ni priročno, saj bi morala biti lestev zelo dolga, da bi lahko prišel do vrha. Najprej lahko nekaj časa razpravljamo o različnih možnostih preden povemo, kaj je naredil Tales.

Tales je izbral tri točke, da je dobil trikotnik, in sicer vrh piramide, končno točko njene sence ter pravokotno projekcijo višine na osnovno ploskev. Dobil je dva podobna trikotnika, tako da je uporabil svojo višino in senco ter primerjal to z dolžino sence piramide, kot je prikazano na sliki 1.



[Slika 1] Podobnost trikotnikov

Ker sta trikotnika podobna, je uporabil naslednje razmerje:

$$\frac{\text{Talesova višina}}{\text{višina piramide}} = \frac{\text{Talesova senca}}{\text{Senca piramide}}.$$

To je eden izmed načinov, kako računamo s podobnimi trikotniki. Učencem bi lahko dali izziv, kako bi to samo z vrvico in metrom izračunali danes, če bi bilo vreme oblačno.

Primeri uporabe matematike so še logaritemska skala v fiziki (potresna jakost, zvočna jakost), eksponentna funkcija pri opazovanju rasti ali upada populacij, v biologiji, odstotki pri kemiji, ekonomiji, statistika pri športni vzgoji, vektorji v fiziki, intervali v glasbi in podobno. Danes lahko take primere učitelj razmeroma hitro najde z brskanjem po spletu. Pri tem ni nujno, da učenci razumejo vse podrobnosti uporabe matematike, ampak zadošča že to, da prepoznajo matematiko kot orodje pri opisu nekega realnega pojava ali procesa.

Uporaba razvedrilnih nalog

Ljudje radi igramo različne igrice. Tudi pri matematiki lahko zastavimo naloge, ki vključujejo razne uganke, paradokse, igrice in podobne matematične probleme. Razvedrilni problemi in matematične igrice prikažejo matematiko na zabaven način. Pred leti je postala svetovno znana matematična igrica Sudoku, ki jo rešujejo tako otroci kot tudi odrasli. Če primerno uporabimo matematične igrice pri pouku, je ta način motiviranja lahko zelo uporaben za učitelje pri vpeljavi nove snovi. Ne le, da učence s tem motiviramo, damo jim tudi občutek uspeha ob reševanju problemov. Na ta način si želijo raziskovati dalje in imajo željo po spoznavanju novih vsebin. Ko učitelj izbira naloge, mora biti pozoren na to, da ne zaide stran od matematične vsebine, ki jo obravnava. Nekatere razvedrilne naloge so lahko sestavni del snovi, ki jo obravnavamo, lahko pa jih uporabimo samo za razvedrilo. Za pravo motivacijsko moč izbiramo kratke in prijetne naloge. Čeprav so včasih te naloge nekoliko nepraktične in neživljenjske, so po drugi strani zabavne, povečajo zanimanje, spodbujajo intelektualno radovednost in omogočajo raziskovanje matematičnih tehnik in konceptov. Da je ta motivacijska tehnika učinkovita, moramo učencem omogočiti, da uspeh dosežejo z razvedrilnimi nalogami brez prevelikega napora.

Najboljši primeri razvedrilnih nalog so tisti, ki pokažejo zahtevnost, vendar so hkrati presenetljivo enostavno rešljivi. Učitelj mora pri izbiri nalog biti pozoren, da niso prelahke, saj se bodo učenci morda počutili premalo izzvane, a tudi ne pretežke, da bi bile izven dosega večine učencev. Razvedrilne naloge so nam pri vpeljavi snovi redkeje na voljo.

ZGLED 7: Razvijanje logičnega mišljenja

Predstavimo primer uvoda v naravna števila, ki ga osredotočimo na to, da si učenci vzamejo čas, da razmislijo o matematičnem problemu, preden se spoprimejo z njim. Pogosto se zgodi, da takoj začnemo reševati nek problem in se vanj zaletimo, ne da bi prej o njem dobro premislili.

> Palindrom je število, ki ga naprej in nazaj preberemo enako, kot je na primer 353 ali 7117. Koliko palindromov je med številoma 1 in 1000, vključno z njima?

Učenci bodo najverjetneje pristopili tako, da si bodo začeli zapisovati vsa števila in bodo iz tega poskušali ugotoviti, katera izmed njih so palindromi. Ta način je neroden in dolgotrajen, poleg tega pa se hitro zgodi, da katerega izmed palindromov izpustimo. Izbrati moramo primerno strategijo reševanja problema in tako najprej poskusimo, če si lahko pomagamo z vzorcem, da rešimo problem. Oglejmo si tabelo 2:

Rang	Število palindromov	Skupno število
1 – 9	9	9
10 – 99	9	18
100 – 199	10	28
200 – 299	10	38
300 – 399	10	48
…	...	...

[Tabela 2] Palindromi

Vidimo, da vzorec obstaja. Po številu 99 je v vsaki skupini 100 števil natanko 10 palindromov. To pomeni, da dobimo 9 nizov po 10, kar je 90 palindromov, prištejemo pa še 18 in dobimo, da je med številoma 1 in 1000, vključno z njima, skupno 108 palindromov.

Ta problem lahko rešimo še na drugačen način. Pogledamo najprej vsa enomestna števila, za katera vemo, da so že sama po sebi palindromi. Teh je 9. Dvomestnih palindromov (obe števki sta enaki) je ravno tako 9. Trimestna števila imajo 9 možnih »zunanjih« števk in 10 »vmesnih« števk, zato jih je 90. Tako pridemo do istega rezultata kot prej, torej je med številoma 1 in 1000, vključno z njima, skupno 108 palindromov. To je primer motivacijske tehnike, ki bi jo lahko uvrstili tudi med opazovanje vzorca.

Pripovedovanje slikovitih zgodb

Kadar matematiko povežemo z zgodovino in povemo kakšno zanimivo zgodbo, ki je povezana z matematičnim raziskovanjem, učence motiviramo, saj so nekatere zgodbe lahko tudi poučne oz. nosijo sporočilo, nekatere so zgolj zabavne, nekatere so resnične, druge spet ne. Učenci se seznanijo tudi s tem, kako so v preteklosti znani matematiki razmišljali.

S takšnimi zgodbami učenci drugače gledajo na matematične enačbe, obrazce in simbole. Prednost pripovedovanja slikovitih zgodb je v čudenju in obujanju otroške radovednosti, v spoznavanju zgodovinskega in kulturnega okolja, v katerem je matematika nastajala, in v vedenju, da se za obrazci skrivajo usode ljudi, neprespane noči, tudi tragedije, trdo delo, zgodovinski preobrati … Na ta način učenci matematiko doživijo kot sooblikovalko kulture in civilizacije. Zavedajo se premišljenih načinov, ki so bili odkriti skozi leta in ne kot takojšnji rezultati, ki jih zapišemo na tablo, kot so navadno predstavljeni v šoli.

Zavedati se moramo, da večina ljudi rada prisluhne kakšni dobri zgodbi, kjer jih radovednost pripelje do tega, da želijo izvedeti, kakšen je zaključek. Zgodba bo učinkovito pedagoško orodje, če je učitelju, ki jo pripoveduje, tema zgodbe všeč, če dela primerne prekinitve, in če zgodbo povez navdušenjem. Slabo povedana zgodba ima lahko negativen učinek, ravno obratno kot je bil naš namen. Izogibati se moramo tudi temu, da zgodbo povemo prehitro, samo zato, da pridemo do zaključka in naredimo uvod v matematično vsebino, ki jo bomo obravnavali. Tako zgodba ni le neučinkovita, ampak gre tudi za izgubo časa. Motivacija bo še bolj učinkovita, če bomo zgodbo povedali na smešen način, lahko vpletemo še kakšno šalo. Upoštevati moramo tudi starost učencev.

ZGLED 8: Praštevila

Učencem na začetku povemo, da obstaja veliko matematičnih problemov, za katere še niso našli rešitev. Takšni problemi so včasih postavljeni kot uganka ali domneva brez dokaza. Enega izmed takšnih primerov je predstavil grški matematik Christian Goldbach (1690–1764) v pismu Leonardu Eulerju (1707–1783), ki ga je poslal 7. junija 1742. Ta znani primer iz teorije števil se imenuje Goldbachova domneva, ki še ni bila dokazana. Glasi se: Vsako sodo število, večje od 2, lahko zapišemo kot vsoto dveh praštevil.

Soda števila večja od	Vsota dveh praštevil
4	2+2
6	3+3
8	3+5
10	3+7
12	5+7
14	7+7
16	5+11
18	7+11
20	7+13
...	...
48	19+29
...	...
100	3+97

[Tabela 3] Goldbachova domneva

Kot zanimivost lahko učencem povemo, da je angleški založnik TobyFaber ponudil milijon dolarjev tistemu, ki mu uspe do 15. marca 2002 dokazati to domnevo. Veliko znanih matematikov jo je poskušalo dokazati. 16. februarja 2008 je portugalski profesor Tomas Oliveira e Silva pokazal, da domneva velja do števila $1{,}1 \cdot 10^{18}$.

Učenci naj zapišejo seznam sodih številin njihove vsote dveh praštevil (tabela 3). Tako naj nadaljujejo, da se prepričajo, da se to očitno nadaljuje v neskončnost.

ZGLED 9: Veliki Fermatov izrek

Veliki Fermatov izrek pravi, da je nemogoče zapisati potencoštevila kot vsoto dveh potenc enakih stopenj, če je potenca večja kot dva. Enačbo $x^n + y^n = z^n$ imenujemo Fermatova enačba. Izrek je eden od najbolj znanih izrekov v zgodovini matematike.

Učenci lahko sami poiščejo primere za $n = 1$ in 2, za $n = 3$ in večje pa jih pustimo kratek čas, da preiskujejo z računalom. Pri $n = 2$ lahko hitro najdemo iskana števila. To so ravno pitagorejske trojice: $x^2 + y^2 = z^2$.

Znameniti francoski matematik Fermat (1601–1665) je domneval, da obstajajo cele netrivialne rešitve samo pri $n = 2$, pri $n > 2$ pa po njegovi domnevi ni nobene netrivialne rešitve (trivialne rešitve so tiste, pri katerih je ena od spremenljivk enaka nič, take pa seveda obstajajo pri vsakem n). Slavni Fermatov problem je poiskati dokaz ali protidokaz te domneve. Od Fermatovih časov do danes je mnogo matematikov poskusilo dokazati ali ovreči domnevo. Zanimivo je, da je Fermat zapisal, da je našel dokaz za svojo trditev, ki pa ga ni nikjer objavil. Pravega dokaza niso našli 357 let, dokler ga ni končno rešil Andrew John Wiles. Objavljen je bil leta 1995.

Aktivno vključevanje učencev v utemeljevanje matematičnih zanimivosti

Obstaja veliko trikov s števili, ki krožijo po internetu. Ljudje se sprašujejo, kako se lahko to zgodi. To je navadno mogoče pojasniti s pomočjo enostavne algebre in je lahko dobra motivacijska tehnika.

Takšne zanimive primere izberemo tako, da učencem zbudimo zanimanje za matematično vsebino, ki sledi, in ti primeri morajo biti ustrezni glede na starost učencev. Pri teh zanimivostih moramo biti previdni, saj ne smejo prevladati nad matematično vsebino, ki jo želimo obravnavati.

ZGLED 10: Uvod v verjetnost

Pri tem primeru je priporočljivo, da imamo razred s čim več učenci, recimo okoli 30.

Najprej preverimo, ali imata dva učenca v tem konkretnem razredu na isti dan rojstni dan.Nato učence vprašamo, kakšna je verjetnost, da imata dva sošolca rojstni dan na isti datum (upoštevamo mesec in dan).

Učenci navadno začnejo razmišljati o verjetnosti, da imata 2 osebi isti datum v 365 dneh (predpostavimo, da ni prestopno leto).

Januar	Februar	Marec
3. Michael Schumacher	6. Bob Marley	4. Antonio Vivaldi
3. Mel Gibson	19. Nikolaj Kopernik	10. ChuckNorris
8. Elvis Presley		14. Albert Einstein
27. W. A. Mozart		25. Elton John
April	**Maj**	**Junij**
3. Eddie Murphy	10. Bono	9. Johnny Depp
15. Leonardo da Vinci		14. Che Guevara
20. Adolf Hitler		18. Paul McCartney
23. William Shakespeare		
Julij	**Avgust**	**September**
3. Franz Kafka	15. Napoleon Bonaparte	
24. Jennifer Lopez	16. Madonna	
	29. Michael Jackson	
Oktober	**November**	**December**
9. John Lennon	2. Borut Pahor	5. Walt Disney
25. Pablo Picasso	11. Leonardo DiCaprio	18. Brad Pitt
	26. Tina Turner	

[Tabela 4] Znane osebnosti

Učencem pokažemo primer, kjer smo izbrali 30 naključno izbranih znanih osebnosti. Poiskali smo datume njihovih rojstnih dni in jih po vrsti zapisali. Med njimi imata dva isti datum (tabela 4).

Vidimo, da imata 3. januarja rojstni dan Michael Schumacher in Mel Gibson. Če nam čas dopušča, lahko za popestritev povemo kaj o njiju ali učence vprašamo, če vedo kaj o njiju in sami povejo. Učenci bodo presenečeni, ko bodo izvedeli, da je verjetnost, da imata dve osebi od na isti datum rojstni dan, več kot 0,7. Vodimo jih do utemeljitve te nepričakovane verjetnosti na naslednji način:

Kolikšna je verjetnost, da ima en učenec na isti datum rojstni dan kot ga ima sam? Seveda je odgovor 1. To zapišemo kot $\frac{365}{365}$.

Verjetnost, da nek drugi učenec nima na isti datum rojstni dan kot naš izbrani, je $\frac{365-1}{365}=\frac{364}{365}$.

Verjetnost, da nek tretji učenec nima na isti datum rojstni dan kot naša dva izbrana, je $\frac{365-2}{365}=\frac{363}{365}$.

Verjetnost, da vseh učencev nima na isti dan rojstni dan, je produkt vseh teh verjetnosti:

$$p=\frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-28}{365}\cdot\frac{365-29}{365}.$$

Naj bo q verjetnost, da imata dva učenca iz skupine na isti datum rojstni dan in naj bo p verjetnost, da dva učenca iz skupine nimata na isti datum rojstni dan. Vsota teh dveh verjetnosti je 1, torej $p+q=1$.

V tem primeru je

$$q=1-\frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-28}{365}\cdot\frac{365-29}{365}=$$
$$=0{,}7063162427.$$

Učenci si bodo želeli raziskati kaj več o verjetnostni funkciji. V tabeli 5 imamo naštetih nekaj primerov verjetnosti ujemajočih rojstnih datumov za različno velike skupine:

Število ljudi v skupini	Verjetnost ujemajočih rojstnih datumov
10	0,1169481777
15	0,2529013198
20	0,4114383836
25	0,5686997040
30	0,7063162427
35	0,8143832389
40	0,8912318098

[Tabela 5] Verjetnost

ZGLED 11: Branje misli

Ta enostaven primer bo navdušil učence. Predvidevamo, da bodo vsi sodelovali pri tej »igrici« in nas pozorno spremljali. Vodimo jih do teme o algebraični predstavitvi in dokazu. Lahko si izmislimo različne primere, v tabeli 6 je opisan eden izmed njih.

Korak 1: Zamisli si število.	x
Korak 2: Podvoji število.	$2x$
Korak 3: Prištej 8.	$2x+8$
Korak 4: Odštej 2.	$2x+6$
Korak 5: Deli z 2.	$x+3$
Korak 6: Odštej prvotno število.	3
Korak 7: Tvoj rezultat je 3.	

[Tabela 6] Branje misli

Učenci bodo presenečeni, kako vemo, kaj imajo v mislih. Povemo jim, da nismo čarovniki in ne beremo misli, ampak se vse skriva v zgornjem algoritmu. Učenci naj poskusijo še sami sestaviti kakšen podoben primer.

Uporaba didaktičnih modelov in gradiv

Za večino učencev je najboljši način motiviranja, da jim snov predstavimo s pomočjo didaktičnih pripomočkov. Za lažje dojemanje in razumevanje matematične vsebine jim lahko pripravimo razne konkretne materiale, ki jih lahko primejo v roke, morda kakšne video posnetke, kjer so na primer prikazani postopki konstrukcije raznih geometrijskih objektov, uporabimo lahko kakšen računalniški program, na primer GeoGebro, uporabimo aplete, uporabimo informacije na svetovnem spletu ... Pri izbiri takšnega gradiva in načrtovanju ure smo pozorni, da motiviramo učence v smeri matematične vsebine, ki jo želimo obravnavati, in ne odstopamo od glavne teme. Menimo, da je ta način poleg praktične uporabe matematike eden izmed najboljših in najučinkovitejših, saj nam je vsem ljudem prirojeno, da moramo nekaj izkusiti, prijeti, videti in slišati, da si lažje zapomnimo. Pri tem bodo sodelovali tudi učenci, ki imajo morda do matematike odpor, in ki se je na nek način bojijo. Seveda ne moremo vsake ure izpeljati na takšen način, saj vzame precej časa, vendar je priporočljivo, da se takšne ure izvedejo čim pogosteje.

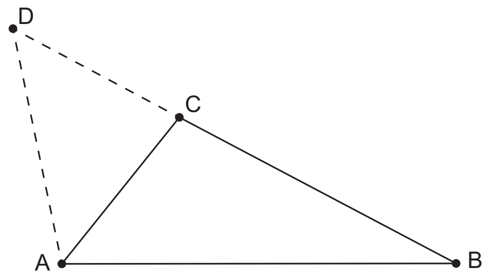
ZGLED 12: Trikotniška neenakost

Za izpeljavo tega primera potrebujemo zavoj špagetov. Učenci bodo presenečeni, ko bomo v učilnico vstopili s špageti.

S pomočjo špagetov bomo utrdili koncept trikotniške neenakosti. Vsakemu izmed učencev razdelimo po deset špagetov. Vsakega morajo razlomiti na tri dele. Nato morajo vzeti poljubne tri dele in na mizi sestaviti različne trikotnike. Ali lahko vedno sestavijo trikotnik? S poskušanjem jih vodimo do tega, da ugotovijo, da lahko trikotnik sestavimo le, če je vsota dveh stranic večja od tretje stranice.

Učenci vedo, da je najkrajša razdalja med dvema točkama daljica. To dejstvo lahko uporabimo, da pridemo do trikotniške neenakosti: Vsota dolžin poljubnih dveh stranic trikotnika mora biti večja od dolžine tretje stranice.

Dokaz za to razmerje je enostaven. Oglejmo si poljuben trikotnik ABC, kot je prikazano na sliki 2 in izberimo točko D na nosilki stranice BC, tako da je $|CD| = |CA|$.



[Slika 2] *Trikotnik*

Trikotnik $\angle DAC$ je enakokrak, zato sta kota $\angle ADC$ in $\angle CAD$ skladna in kot $\angle BAD$ je večji od kota $\angle ADC$. Iz tega sledi, da je v trikotniku ABD stranica BD daljša od stranice AB, saj je v trikotniku nasproti večjega kota daljša stranica. Vemo, da je $|CD| = |CA|$ in $|BD| = |BC| + |AC|$. Zato je $|BC| + |AC| > |AB|$, kar smo želeli dokazati.

γ Zaključek

Velikokrat se lahko zgodi, da matematika postane učencem nezanimiva, predvsem zaradi abstraktnosti. Učitelji lahko naredimo marsikaj, da bodo učenci ta predmet vzljubili in ne bodo imeli odpora do učenja. Pri tem je zelo pomembna učna motivacija. Pomagamo si lahko s predstavljenimi primeri. Zanimive primere lahko najdemo na spletu, v raznih knjigah, kjer so zbrane razvedrilne matematične naloge ali knjige iz zgodovine matematike, kjer so zbrane različne zgodbe. Ko enkrat spoznamo načine motiviranja pri pouku matematike, si lažje tudi sami pripravimo nove primere motivacij. Če bi učitelji matematike posvetili nekoliko več časa načinom motiviranja, bi v razredu lažje delali. Ko enkrat učence uspemo motivirati in zbuditi v njih zanimanje za določeno matematično vsebino, smo naredili velik korak na poti k cilju. Glavni korak pa morajo narediti še učenci in se učiti – tega učitelj ne more namesto njih. Cilj motiviranja je večje prevzemanje odgovornosti učencev za lastno znanje, skrb učitelja za kakovost pouka, večanje radovednosti in ustvarjalnosti učencev, spodbujanje pozitivnega odnosa do matematike in znanja nasploh. Učenci bodo po formalnem izobraževanju pozabili mnogo dejstev, ki so se jih naučili, ne bodo pa izgubili ustvarjalnosti, radovednosti in pozitivnega odnosa do matematike, znanja in dela, kar jim lahko pomagamo razvititudi preko ustrezne motivacije.

δ Viri in literatura:

1. Posamentier, A., Krulik, S. (2011). The Art of Motivating Studentsfor Mathematics Instruction. McGraw-Hill Education – Europe.
2. Marentič Požarnik, B. (2003). Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.
3. Ilc, K. (2012). Načini motiviranja učencev pri pouku matematike: diplomsko delo. Maribor: FNM UM, spletna stran: http://dkum.uni-mb.si/Dokument.php?id=28829

Matematična indukcija

Mathematical Induction

Željka Zorić
Naravoslovno-matematična fakulteta,
Split

Σ Povzetek

V članku opišemo predstavitev matematične indukcije pri dodatnem pouku matematike v 1. letniku srednje šole. Najprej z dijaki ugotavljamo razliko med deduktivnim in induktivnim načinom sklepanja, nato z različnimi primeri pokažemo, da z indukcijo ne dobimo vedno pravilne trditve. Po predstavitvi matematične indukcije pokažemo še nekaj primerov njene uporabe pri različnih nalogah: pri seštevanju končnih vsot, pri dokazovanju deljivosti in pri nekaj nalogah z geometrijsko vsebino. Na koncu sledi izbor praktičnih nalog za utrjevanje.

Ključne besede: matematična indukcija, končne vsote, deljivost, geometrija

Σ Abstract

In the article we describe a presentation of mathematical induction during additional mathematical lessons in the first grade of secondary school. First the teacher and pupils jointly determine the difference between the deductive and inductive methods of reasoning, after which we demonstrate with the help of various examples that induction doesn't always lead to the right solution. After presenting mathematical induction, we demonstrate some additional examples of how to use mathematical induction on various types of exercises, such as addition of final amounts, proofing of divisibility, as well as with some exercises featuring geometrical content. In the end we offer a selection of practical exercises for revising the subject.

Key words: *mathematical induction, final amounts, divisibility, geometry*

α Uvod

Splitsko matematično društvo (SMD) jev šolskem letu 2011/2012 uvedlo projekt »Mladi matematičari SMD-a«, v okviru katerega so organizirana sobotna predavanja za učence srednjih in osnovnih šol. Želja društva je bila, da zbere vse učence, ki jih zanima dodatno delo pri matematiki. Učence smo razvrstili v tri skupine: 5. in 6. razred osnovne šole, 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole. Teme, ki smo jih obravnavali, so bile povezane z obravnavano tematiko pri matematiki v šoli, pogosto pa tudi vsebine iz matematičnih tekmovanj. Kolegica Blaženka Kunac je vodila in koordinirala predavanja osnovnih šol, jaz pa sem vodila srednješolce. Ena izmed tem, ki smo jih obravnavali, je bila tudi matematična indukcija. V članku opisujem, kako in na kakšen način smo jo obravnavali.

β Predstavitev induktivnega in deduktivnega načina sklepanja

V življenju pogosto uporabljamo dva osnovna načina sklepanja oz. razmišljanja: deduktivni in induktivni način sklepanja. Deduktivni način sklepanja izhaja iz neke splošne resnice, iz katere se potem razvijejo resnice, ki so vezane na konkreten, posamezni primer.

Splošni primer: Vsi ljudje so umrljivi. Peter je človek. Peter je umrljiv.

Matematični primer: V paralelogramu se diagonali razpolavljata. Pravokotnik je paralelogram. Diagonali pravokotnika se razpolavljata.

Za razliko od deduktivnega načina sklepanja, induktivni način sklepanja izhaja iz resničnih, konkretnih primerov, na podlagi katerih skušamo izvesti sklep o resnici, ki velja za nek splošni primer.

Splošni primer: Ivan je manjši od 2 metrov. Jakob je manjši od 2 metrov. Ante je manjši od 2 metrov. Vsi moški so manjši od 2 metrov.

Matematični primer: Število $1 \cdot 2$ *je sodo število. Število* $2 \cdot 2$ *je sodo število. Število* $3 \cdot 2$ *je sodo število. Na splošno velja, da je število* $n \cdot 2$ *sodo število.*

Zapišite svoj primer deduktivnega in induktivnega sklepanja.

Poglejmo zgoraj zapisane primere. Pri deduktivnem načinu sklepanja uporabljamo pravila sklepanja, sklepi so pravilni, a nam v večini primerov ne dajo novih informacij. Pri induktivnem načinu pa iz resničnih dejstev ne moremo dobiti resnične, splošne trditve. Vsakdo od nas zagotovo pozna vsaj eno osebo moškega spola, ki je višja od dveh metrov. Takšna indukcija se v matematiki imenuje nepopolna indukcija, in ta nima »moči dokaza«. Kljub tej ugotovitvi nismo zmanjšali vrednosti nepopolne indukcije, ker nam ta pomaga, da dobimo različne hipoteze, med katerimi so ene resnične druge ne.

γ Nepopolna indukcija

Navajamo še nekaj primerov, ki nam prikazujejo, kako lahko z nepopolno indukcijo pridemo do neresničnih zaključkov.

Primer 1:

$f(x) = x^2 - x + 41$.

Kaj lahko povemo o številu $f(x)$, če je x naravno število?

Rešitev: Vstavimo po vrstnem redu naravna števila v polinom $f(x) = x^2 - x + 41$. Dobimo:

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
1	41	6	71	11	151	16	281
2	43	7	83	12	173	17	313
3	47	8	97	13	197	18	347
4	53	9	113	14	223	19	383
5	61	10	131	15	251	20	421

Iz preglednice je razvidno, da so vrednosti tega polinoma za $x = 1, ..., 20$ vedno praštevila.

Z nepopolno indukcijo bi lahko sklepali, da to velja za vsako naravno število n, t.j., da je število $f(n) = n^2 - n + 41$ praštevilo za vsako naravno število n. Ali to res drži? Ne! Ko vstavimo $x = 41$, dobimo
$f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$,
kar ni praštevilo, saj je deljivo z 41.

Primer 2:
Dan je polinom $f(x) = 991x^2 + 1$. Naj bo x naravno število. Ali imajo števila $f(x)$ kakšne zanimive lastnosti?

Rešitev: Vstavimo nekaj števil v polinom. Dobimo:

x	*f(x)*	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
1	992	2	3965	3	8920	4	15857
5	24776	6	35677	7	48560	8	63425

Ne opazimo posebnih lastnosti števila $f(x)$: niso praštevila, niti niso kvadrati naravnih števil. Lahko bi zaključili, da $f(n) = 991n^2 + 1$ ni popolni kvadrat, ne glede na to, kolikšen je n. Izkazalo se je, da to ni res. Najmanjši n, pri katerem je $f(n) = 991n^2 + 1$ popolni kvadrat, je število $n = 12055735790331359447442538767$.

Tudi največji matematiki so se na ta način ujeli v zanko nepopolne indukcije.

Primer 3:
Opazujmo števila oblike $f(n) = 2^{2^{n-1}} + 1$ za naravna števila n.

Rešitev:

n	*f(n)*	*n*	*f(n)*	*n*	*f(n)*	*n*	*f(n)*	*n*	*f(n)*
1	3	2	5	3	17	4	257	5	65637

Vsa dobljena števila so praštevila. Veliki francoski matematik Pierre de Fermat je postavil hipotezo, da so števila take oblike praštevila. Šele v 18. stoletju je švicarski matematik Leonhard Euler dokazal, da to ne drži. Dokazal je, da za $n = 6$ velja

$$f(6) = 2^{2^{6-1}} + 1 = 225 + 1 =$$
$$4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

to pa je sestavljeno število.

δ Matematična indukcija

Induktivni način sklepanja je odlično sredstvo za postavljanje novih hipotez, kar je idealno za znanost. Ni nujno, da so take trditve resnične, zato jih je treba preveriti in dokazati. V matematiki pa obstaja metoda, ki nam pomaga dokazati, ali je neka trditev pravilna ali ne. Metodo imenujemo matematična indukcija.

Princip matematične indukcije

Če poljubna matematična trditev, ki je odvisna od naravnega števila n,

- velja za število $n_0 \in \mathbf{N}$ in
- če izhajamo iz predpostavke, da ta trditev velja za naravno število k, iz tega sledi, da ta velja tudi za naslednje število $k + 1$,

takrat ta trditev velja za vsako naravno število $n \geq n_0$.

ε Uporaba matematične indukcije pri seštevanju končnih vsot

Pokažimo na nekaj primerih, kako pri seštevanju končnih vsot uporabljamo princip matematične indukcije.

Primer 4:
Dokažimo, da za vsako naravno število n velja enakost:
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Rešitev:
Matematično indukcijo izvedemo v več korakih:

1. Osnova indukcije
Preverimo, ali velja enakost za nekaj prvih naravnih števil:

Naj bo $n = 1$. Takrat je $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ tj. $1 = 1$.

Preverimo[1] še za $n = 2$.

Takrat je $1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$ tj. $3 = 3$.

2. Predpostavka
Predpostavimo, da enakost velja za naravno število $n = k$, to je da velja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

3. Korak indukcije
Z uporabo te predpostavke želimo pokazati, da trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$, tj. da velja hipoteza

$$\text{(H)} \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

Začnimo z vsoto

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{\textit{predpostavka}} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

To smo tudi želeli pokazati.

4. Zaključek
Z matematično indukcijo smo dokazali, da trditev velja za vsako naravno število .

Primer 5:
Izračunajte vsoto prvih n lihih naravnih števil.

Rešitev:
V tem primeru bomo uporabili hevristično lastnost nepopolne indukcije. Z njo bomo dobili hipotezo, s katero bomo nato dokazali matematično indukcijo. Na začetku zapišimo splošni zapis n–tega lihega števila. Poglejmo preglednico:

n	1	2	3	4
$2n + 1$	3	5	7	9
$2n - 1$	1	3	5	7

Vsako liho naravno število je oblike $2n$-1 za primerno naravno število n. V nadaljevanju nas zanima, kolikšna je vsota:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

1 *Preverjanje v primeru n = 2 je sicer matematično odveč, je pa včasih koristno za boljše razumevanje problema in za pridobitev ideje, kako preiti iz n na n + 1.*

Za $n = 1, 2, 3, 4$ izračunajmo vsoto:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Iz teh konkretnih primerov lahko predpostavimo, da za vsa naravna števila velja enakost

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Dokažimo, da je to res. Videli smo, da trditev velja za $n = 1$ (osnova indukcije je del iskanja hipoteze).

Predpostavimo, da trditev velja za $n = k$, tj. da je : $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$.

Preverimo, ali iz predpostavke sledi, da velja trditev tudi za naravno število $n = k + 1$, tj. da velja hipoteza:

(H) $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Po indukcijski predpostavki imamo

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)}_{predpostavka} + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Z matematično indukcijo smo pokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Primer 6:

Če bi lahko v dokazovanju z matematično indukcijo izpustili preverjanje osnove indukcije, pokažite, da bi se dalo dokazati, da za vsako naravno število n velja enakost: $n = n + 1$.

Rešitev:

Usmerimo se na predpostavko indukcije.

Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, tj. naj bo $k = k + 1$.

Preverimo, ali velja trditev za naravno število $k = k + 1$, tj. ali velja hipoteza

(H) $k + 1 = k + 2$

S predpostavko imamo

$$k + 1 = (k + 1) + 1 = k + 2 \,,$$

predpostavka

kar smo tudi želeli pokazati.

Kaj smo pravzaprav dokazovali? S »skrajšano« verzijo principa matematične indukcije smo dokazali, da so vsa naravna števila med seboj enaka, za kar pa vemo, da ni res. Torej lahko zaključimo, da je pomembno preveriti osnovo indukcije.

γ Uporaba matematične indukcije pri dokazovanju deljivosti

Primer 7:

Število 2 deli izraz $n^2 - n$ tj., $2 \mid (n^2 - n)$ za vsako naravno število n. Dokažite.

Rešitev:

Za $n = 1$ trditev velja, ker je

$1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, kar je deljivo z 2.

Zaradi boljšega občutka lahko preverimo[2] trditev še za $n = 2$. Trditev velja, ker je $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$, kar je deljivo z 2.

Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, torej je $k^2 - k$ deljivo z 2.

To dejstvo lahko zapišemo tudi na drug način $k^2 - k = 2x$, $x \in \mathbf{N}$.

2 *Preverjanje v primeru n = 2 je sicer matematično odveč, je pa včasih koristno za boljše razumevanje problema in za pridobitev ideje, kako preiti iz n na n + 1.*

Preverimo, ali trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$ tj. da velja hipoteza

(H) $\quad 2|((k + 1)^2 - (k + 1))$.

Poglejmo sedaj

$$\begin{aligned}(k + 1)^2 - (k + 1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 &= (k^2 - k) + 2k \\ &= 2x + 2k \\ \textit{predpostavka} \qquad &= 2(x + k)\end{aligned}$$

Pokazali smo, da je izraz deljiv z 2, kar je bil tudi naš namen. S principom matematične indukcije smo dokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Primer 8:

Za vsako naravno število n je število $3^{6n} - 2^{6n}$ deljivo z 665. Dokažite.

Rešitev:

Za $n = 1$ trditev velja. To pomeni, da je $3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665$, deljivo s 665.

Predpostavimo, da je trditev resnična za neko naravno število $n = k$, torej, da je $3^{6k} - 2^{6k}$ deljivo s 665. To lahko zapišemo tudi drugače: $3^{6k} - 2^{6k} = 665x$, $x \in \mathbf{N}$.

Preverimo še, da trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$ tj. da velja hipoteza

(H) $\quad 665|(3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)})$.

predpostavka

Poglejmo sedaj,

$$\begin{aligned}3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)} &= 3^{6k+6} - 2^{6k+6} = 3^6 \cdot 3^{6k} - 2^{6k+6} \\ &= 729(665x+2^{6k})\text{-}64 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot 729x + 729 \cdot 2^{6k} - 64 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot 729x + 665 \cdot 2^{6k} \\ &= 665 \cdot (729x + 2^{6k})\end{aligned}$$

Dokazali smo, da je izraz deljiv s 665. S principom matematične indukcije smo dokazali, da trditev velja za vsa naravna števila.

Pokazali smo primere uporabe matematične indukcije za dokazovanje enakosti in deljivosti.

η Uporaba matematične indukcije v geometriji

V naslednjih primerih bomo prikazali, kako matematično indukcijo uporabljamo v geometriji.

Primer 9:

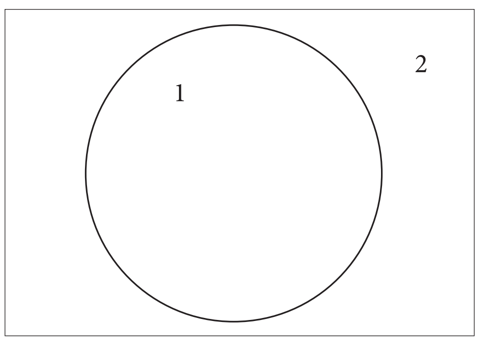
Dokažite, da n krožnic v splošni legi (nobena od treh krožnic ne gre skozi isto točko in vsaki dve se sekata) deli ravnino na $n^2 - n + 2$ področij.

Rešitev:

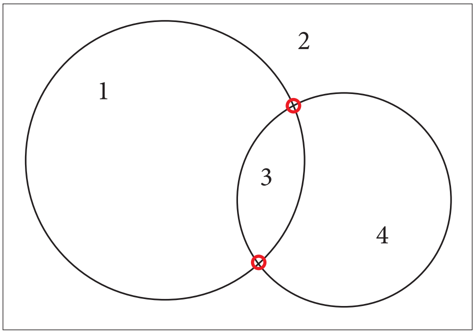
Naj bo $P(n) = n^2 - n + 2$ število področij, na katere n krožnic v splošni legi deli ravnino.

Za $n = 1$ imamo $P(1) = 2$. Ena krožnica deli ravnino na dve področji, s čimer smo dokazali osnovo indukcije.

Poglejmo še za $n = 2$. Dve krožnici delita ravnino na štiri področja (slika 1 in slika 2). Dobimo $P(2) = 4$.



[Slika 1] $n = 1$



[Slika 2] $n = 2$

Predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število $n = k$, tj. da velja $P(k) = k^2 - k + 2$.

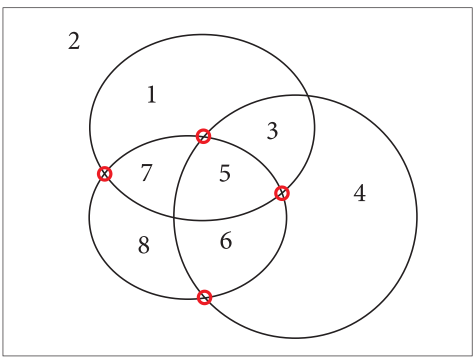
Preveriti moramo še, če trditev velja tudi za naravno število $n = k + 1$, tj.:
(H) $P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 2 = k^2 + k + 2$.

Kaj se zgodi, če dodamo $(k + 1)$ - to krožnico?

Ta krožnica seka obstoječe krožnice v $2k$ točkah.

Teh $2k$ točk razdeli $(k + 1)$ krožnico na $2k$ lokov. Vsak lok deli obstoječe območje, v katerem leži, na dva dela.

Z dodajanjem nove krožnice smo tako dobili novih $2k$ delov.



[Slika 3] $n = 3$

Torej imamo

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= P(k) + 2k \\
&= k^2 - k + 2 + 2k \\
&= k^2 + k + 2
\end{aligned}
$$

Potrdili smo, da trditev velja za vsako naravno število n.

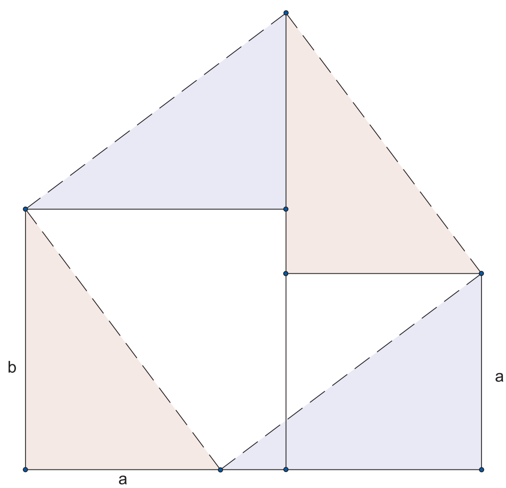
Primer 10:

Danih je n kvadratov. Dokažimo, da jih lahko razrežemo na dele, s katerimi sestavimo nov kvadrat.

Rešitev:

Dovolj je, če pokažemo, da iz dveh kvadratov lahko sestavimo nov kvadrat.

Pri tej nalogi začnemo z $n = 2$. Na sliki 4 je pokazano, kako s pomočjo Pitagorovega izreka iz dveh kvadratov sestavimo nov kvadrat. Če smo na n-tem koraku iz $n + 1$ kvadratov sestavili nov kvadrat, v $(n + 1)$ koraku nov sestavljen kvadrat na enak način kot v primeru $n = 2$ dopolnimo z $(n + 2)$ kvadratom do naslednjega kvadrata.



[Slika 4] Iz dveh kvadratov nov kvadrat

φ Zaključek

Za konec povejmo še, kako je množica naravnih števil definirana s Peanovimi aksiomi (1889):

- 1 je naravno število, tj. $1 \in \mathbf{N}$.
- Vsako naravno število n ima natančno enega naslednika n^+ v množici naravnih števil.
- Vedno velja $n^+ \neq 1$, tj. 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Iz $n^+ = m^+$ sledi $n = m$, tj. če sta naslednika enaka, sta tudi števili enaki.

Aksiom indukcije. Vsaka množica naravnih števil, v kateri je 1 in ki z vsakim številom n vsebuje tudi n^+,vsebuje vsa naravna števil.

Z aksiomi lahko dokažemo vsa tista dejstva in lastnosti, ki jih imajo množice naravnih števil. Na matematičnih tekmovanjih (na Hrvaškem) se pogosto pojavljajo naloge, ki opisujejo neko lastnost, ki je odvisna (na nek način) od naravnih števil, zato je dobro in koristno pri dodatnem pouku matematike izvesti princip matematične indukcije.

λ Naloge za utrjevanje

1. Dokažite, da za vsako naravno število n velja:

a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

2. Postavite hipotezo in dokažite:

a. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

b. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

3. Ali za vsako naravno število n velja enakost:

a. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n\cdot(3n+1) = n\cdot(n+1)^2$

b. $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

c. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}, n>1$

d. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$

4. Dokažite, da za vsako naravno število$n$- velja:

a. $48|(5n+2)^2 - (2-n)^2$

b. $19|^{7n+2} + 8^{2n+1}$

c. $225|16^n - 15n - 1$

d. $17|2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$

5. Dokažite, da je za vsako naravno število n, število $\dfrac{10^n - 1}{81} - \dfrac{n}{9}$ celo število.

6. Naj bo na ravnini n premic, od katerih niti dve nista vzporedni in niti tri ne gredo skozi isto točko. Dokažite, da te delijo ravnino na $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

7. Naj bo $q \neq 1$. Dokažite, da je $G(n) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

8. Pokvarjena *dxd* šahovska plošča je *dxd* šahovska plošča z enim skritim poljem (poljubnim). Dokažite, da se vsaka pokvarjena šahovska 2^n x 2^n, $n \in \mathbf{N}$ plošča lahko prekrije z triominimi, to je figurami s tremi polji v obliki črke L. (Državno tekmovanje iz predmeta matematike Republika Hrvaška, 1992.)

δ Viri in literatura:

1. B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4, 1. dio, udžbenik za 4 razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.
2. B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, Male teme iz matematike, Element, Zagreb, 1994.
3. Luka Čeliković, Princip matematičke indukcije, Pitagorinimaterijali za mlade matematičare 24, Beli Manastir, 1990.
4. S. Antoliš, A. Copić, Matematika 4, 1. dio, udžbenik za 4 razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
5. D. Blanuša, Viša matematika, 1 dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.

Evklidov algoritem

Euclidean Algorithm

Marjan Jerman
Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za matematiko
in fiziko

Σ Povzetek

V prispevku je na kratko opisana zgodovina Evklidovega algoritma. Navedene so nekatere njegove klasične uporabe v teoriji števil: Bezoutova identiteta, reševanje linearnih diofantskih enačb, uporaba pri kitajskem izreku o ostankih, aproksimacija korenov naravnih števil z verižnimi ulomki in reševanje Pellove enačbe. Prispevek se konča s posplošitvijo na evklidske kolobarje, kjer so omenjeni kolobarji polinomov v eni spremenljivki s koeficienti iz obsega, Gaussova števila in Eisensteinova števila.

Ključne besede: zgodovina matematike, Evklidov algoritem, Bezoutova identiteta, linearne diofantske enačbe, kitajski izrek o ostankih, verižni ulomki, Pellova enačba, evklidski kolobar

Σ Abstract

The article briefly describes the history of Euclidean algorithm. Described within are some classical methods of its use in the theory of numbers: Bézout's identity, solving linear Diophantine equations, its application on the Chinese remainder theorem, approximation of the roots of natural numbers with help of continued fractions, and solving Pell's equation. The article concludes with a generalization based on Euclidean domains, mentioning the domains of polynomials in one variable with coefficients from a division ring, Gaussian integers and Eisenstein integers.

Keywords: *history of mathematics, Euclidean algorithm, Bézout's identity, linear Diophantine equations, Chinese remainder theorem, continued fractions, Pell's equation, Euclidean domain*

α Uvod

Evklidov algoritem je prvič omenjen v Evklidovih Elementih[1], vendar so ga poznali že dosti prej. Pitagorejci[2] so verjetno z njegovo pomočjo računali zelo natančne približke korenov naravnih števil. V sedmi knjigi Elementov je zelo strnjeno zapisana različica algoritma za cela števila, ki nam izračuna največji skupni delitelj dveh naravnih števil:

Zaporedoma odštevaj manjše število od večjega, dokler manjše število ne postane delitelj večjega. Takrat je manjše od števil največji skupni delitelj začetnih števil.

V deseti knjigi Elementov je opisana geometrijska različica Evklidovega algoritma, s pomočjo katere lahko Evklidov algoritem do neke mere posplošimo na realna števila. Za dani daljici pravimo, da sta *soizmerljivi*, če obstaja takšna (krajša) daljica, imenovana *skupna mera daljic*, da je vsaka od danih daljic enaka celemu številu kopij krajše daljice. Tudi v geometrijskem primeru poteka Evklidov algoritem skoraj enako kot prej:

Zaporedoma odštevaj krajšo daljico od večje. Če po nekaj korakih dobiš enaki daljici, si s tem dobil največjo skupno mero začetnih daljic. Če se postopek v končnem številu korakov ne konča z enakima daljicama, začetni daljici nista soizmerljivi.

V modernem matematičnem jeziku bi lahko rekli, da sta realni števili soizmerljivi, če je njun kvocient racionalno število.

V srednji šoli običajno povemo Evklidov algoritem za naravni števili kot eno od možnosti za iskanje največjega skupnega delitelja teh dveh števil. V nadaljevanju prispevka bodo opisane še nekatere druge pomembne uporabe algoritma, ki so zaradi elementarnosti velikokrat dostopne tudi srednješolcem, ki želijo poglobiti svoje znanje matematike.

1 *Evklidovi Elementi so zbirka 13 knjig iz tretjega stoletja pr. Kr., ki povzemajo najpomembnejše starogrško znanje matematike.*

2 *Pitagora (570-500 pr. Kr.). Na jugu Italije, ki je bil tedaj del antične Grčije, je ustanovil versko-filozofsko bratovščino, ki se je ukvarjala s teoretično matematiko, glasbo in astronomijo.*

β Bezoutova identiteta

Naj bosta m in n naravni števili z največjim skupnim deliteljem D in $n \geq m$. Evklidov algoritem poteka takole:

$$
\begin{aligned}
&n = k_1 m + r_1;\, 0 < r_1 < m\\
&m = k_2 r_1 + r_2;\, 0 < r_2 < r_1\\
&r_1 = k_3 r_2 + r_3;\, 0 < r_3 < r_2\\
&\vdots\\
&r_{s-1} = k_{s+1} r_s + r_{s+1};\, 0 < r_{s+1} < r_s\\
&r_s = k_{s+2} r_{s+1} + D;\, 0 < D < r_{s+1}\\
&r_{s+1} = k_{s+3} D
\end{aligned}
$$

Preberimo Evklidov algoritem v obratnem vrstnem redu:

Iz predzadnje enačbe lahko izrazimo D kot

$$D = r_s - k_{s+2} r_{s+1}.$$

Na enak način preberemo

$$r_{s+1} = r_{s-1} - k_{s+1} r_s,$$

zato velja tudi

$$D = r_s - k_{s+2}(r_{s-1} - k_{s+1} r_s).$$

V vsakem naslednjem koraku s pomočjo višje ležečih vrstic v Evklidovem algoritmu vsak ostanek zamenjamo s celoštevilsko kombinacijo ostankov r_{t-1} in r_{t-2}. Skupni delitelj D tako vsakič napišemo kot celoštevilsko kombinacijo ostankov z nižjima indeksoma.

Prva vrstica nam pove Bezoutovo identiteto[3]

3 *Étienne Bézout (1730-1783), francoski matematik*

$D = mx + ny$

za primerni celi števili x in y.

Poglejmo si jo za par naravnih števil 67 in 120.

Najprej izvedimo Evklidov algoritem:

$120 = 1 \cdot 67 + 53$
$67 = 1 \cdot 53 + 14$
$53 = 3 \cdot 14 + 11$
$14 = 1 \cdot 11 + 3$
$11 = 3 \cdot 3 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$

Največji skupni delitelj 1 lahko sedaj napišemo kot celoštevilsko kombinacijo števil 67 in 120:

$1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 4 \cdot 3 - 11 =$
$= 4 \cdot (14 - 11) - 11 = 4 \cdot 14 - 5 \cdot 11 =$
$= 4 \cdot 14 - 5 \cdot (53 - 3 \cdot 14) = 19 \cdot 14 - 5 \cdot 53 =$
$= 19 \cdot (67 - 53) - 5 \cdot 53 = 19 \cdot 67 - 24 \cdot 53 =$
$= 19 \cdot 67 - 24 \cdot (120 - 67) = 43 \cdot 67 - 24 \cdot 120$

Razcep ni enoličen. Na primer, velja tudi:

$$1 = (43 + 120) \cdot 67 - (24 + 67) \cdot 120$$

δ Linearne diofantske enačbe

Naj bosta m in n naravni števili z največjim skupnim deliteljem D. Če je rešljiva linearna diofantska enačba

$$mx + ny = c,$$

je jasno, da mora D deliti tudi c, $c = Dc'$.

Bezoutova identiteta nam pove, da velja tudi obratno. Če D deli c, lahko najdemo celi števili x' in y', za kateri velja

$$D = mx' + ny'$$

in tako dobimo eno od rešitev diofantske enačbe:

$$c = Dc' = m(x'c') + n(y'c').$$

Če je $m = Dm'$ in $n = Dn'$, lahko D v diofantski enačbi pokrajšamo. S tem dosežemo, da sta števili m' in n' tuji. Lahko je videti[4], da so vse rešitve enačbe

$$m'x + n'y = 1$$

oblike $x = x' + kn'$, $y = y' - km'$. Rešitve enačbe

$$m'x + n'y = c'$$

pa so le ustrezno pomnožene, $x = c'x' + kn'$, $y = c'y' - km'$.

Rešimo na primer diofantsko enačbo

$$67x + 120y = 3.$$

V prejšnjem razdelku smo dobili razcep

$$1 = 43 \cdot 67 - 24 \cdot 120$$

Zato so vse rešitve enačbe $67x+120y=1$ oblike

$$x = 43 + 120k,\ y = -24 - 67k$$

rešitve enačbe $67x + 120y = 3$ pa oblike

$x = 3 \cdot 43 + 120k$, $y = -3 \cdot 24 - 67k$,
$x = 9 + 120l$, $y = -5 - 67l$

V teoriji kodiranja je zelo pomembno iskanje multiplikativnih inverzov iz obsega ostankov po praštevilskem modulu $\boldsymbol{Z}_p$, kjer je p praštevilo. Če je $m \in \boldsymbol{Z}_p\backslash\{0\}$, dobimo $m^{-1} \in \boldsymbol{Z}_p\backslash\{0\}$ kot rešitev diofantske enačbe

$$mx = 1 + py$$

Ker je p praštevilo, sta si števili m in p tuji in enačba je rešljiva s samo eno rešitvijo $x \in \{1,2, \dots p - 1\}$.

Tako recimo inverz elementa 14 v obsegu $\boldsymbol{Z}_{23}$ dobimo z reševanjem diofantske enačbe

$$14x - 23k = 1$$

4 *To je verjetno prvi uvidel indijski matematik Brahmagupta (598-670).*

Iz Evklidovega algoritma za 14 in 23

$23 = 14 + 9$

$12 = 9 + 5$

$9 = 5 + 4$

$5 = 4 + 1$

dobimo:

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 - 9 = 2 \cdot (14 - 9) - 9 =$$
$$= 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot (23 - 14) = 5 \cdot 14 - 3 \cdot 23$$

Zato je 5 multiplikativni inverz elementa 14 v obsegu $\boldsymbol{Z}_{23}$. Res je $5 \cdot 14 = 70 = 1$.

ε Kitajski izrek o ostankih

V slavni klasični kitajski matematični knjigi *Devet poglavij matematičnih spretnosti* iz drugega stoletja, v kateri je zbrano kitajsko znanje matematike od 10. stoletja pr. Kr. naprej, je zapisana naslednja naloga:

Skupina prijateljev prispeva za skupen nakup. Če vsak plača po 8 kovancev, zberejo tri kovance preveč. Če pa vsak da po 7 kovancev, zmanjkajo štirje. Poišči število prijateljev in znesek nakupa.

Z vidika stroge moderne matematike manjka še dodatna zahteva, da iščemo najmanjše možno število prijateljev v skupini. Rešitev sicer ni enolična.

Iščemo torej najmanjše naravno število, ki da pri delitvi z 8 ostanek 3, pri delitvi s 7 pa ostanek -4.

V knjigi je še več podobnih nalog, vse pa lahko posplošimo na reševanje sistema kongruenc:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

Kitajski izrek o ostankih pove, da je ta sistem zagotovo rešljiv, če so moduli paroma tuji. Prvi algoritem za reševanje sistema je zapisal indijski matematik Aryabhata[5]. Zvito je ugotovil, da je treba rešitev x iskati v obliki

$$x = x_1 m_2 m_3 \cdots m_k + x_2 m_1 m_3 m_4 + m_k + \cdots$$
$$+ x_k m_1 m_2 \cdots m_{k-1}.$$

Vsak od seštevancev je deljiv z vsemi moduli, razen z enim, zato lahko problem prevedemo na reševanje več lažjih in manjših problemov oblike

$$x_t m_1 \cdots m_{t-1} m_{t+1} \cdots m_k \equiv a_t (\text{mod } m_t), \ 1 \le t \le k,$$

vsak od njih pa je ekvivalenten reševanju ustrezne linearne diofantske enačbe, ki jo lahko rešimo s pomočjo Evklidovega algoritma.

Pri naši kitajski nalogi torej rešujemo sistem kongruenc

$$x \equiv -3 \pmod 8,$$
$$x \equiv 4 \pmod 7.$$

Modula 8 in 7 sta si tuja, zato je sistem rešljiv. Rešitev iščemo z nastavkom

$$x = 8x_1 + 7x_2$$

pri čemer morata x_1 in x_2 ustrezati diofantskima enačbama

$$8x_1 = 7k + 4$$
$$7x_2 = 8l - 3.$$

Na enak način kot prej lahko najdemo rešitve teh diofantskih enačb:

$$x_1 = 4 + 7m, \ k = 4 + 8m,$$
$$x_2 = 3 + 8n, \ l = 3 + 7n,$$

zato je

$$x = 8(4 + 7m) + 7(3 + 8n) = 53 + 56(m + n).$$

5 *Aryabhata (476-550), indijski matematik*

Najmanjše naravno število, ki ustreza zgornji zahtevi, je $x = 53$. Če 7 prijateljev prispeva po 8 kovancev, je zbranih 56 kovancev za 3 preveč, če pa prispevajo po 7 kovancev, je zbranih 49 za 4 premalo.

γ Verižni ulomki

Evklidov algoritem za realna števila je na prvi pogled zelo nenavaden, je pa že Pitagorejcem služil za iskanje izjemno dobrih približkov korenov naravnih števil.

Poglejmo si, kako lahko najdemo zaporedne približke za $\sqrt{2}$.

Evklidov algoritem za $\sqrt{2}$ in 1 se sicer zaradi iracionalnosti števila $\sqrt{2}$ nikoli ne konča, a med računanjem opazimo zelo jasen vzorec:

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})$$
$$\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) + (5\sqrt{2} - 7)$$
$$3 - 2\sqrt{2} = 2 \cdot (5\sqrt{2} - 7) + (17 - 12\sqrt{2})$$
$$\vdots$$

Sorazmernostne dvojke se v vseh naslednjih korakih ponavljajo. Posamezne korake algoritma bi lahko zapisali tudi drugače:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{17-12\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-7}}}} = \cdots$$

Običajno na kratko napišemo, da številu $\sqrt{2}$ ustreza periodičen neskončni *verižni ulomek*

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}].$$

Ker se ostanki z vsakim korakom Evklidovega algoritma manjšajo, dobivamo čedalje boljše približke za $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \cong 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \cdots$$

Izkaže se, da se da vsak koren naravnega števila, ki ni popoln kvadrat, zapisati s periodičnim verižnim ulomkom, ki pa je lahko veliko bolj zapleten, recimo

$$\sqrt{61} = [7; \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}].$$

Približki za korene z verižnimi ulomki so v vseh primerih zelo dobri. Zaporedna racionalna aproksimacija $\frac{a}{b}$ se od prave vrednosti korena razlikuje za manj kot $\frac{1}{b^2}$. Na primer:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12^2}$$

Z neskončnimi verižnimi ulomki se da napisati celo transcendentna števila, na primer

$$\pi = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\ldots],$$

ki pa seveda nimajo periode. Presenetljivo lahko najdemo vzorec v verižnem ulomku za osnovo naravnega logaritma e:

$$e = [2; 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,\ldots].$$

Naj bo n naravno število, ki ni popoln kvadrat. Diofantski enačbi

$$x^2 - ny^2 = 1$$

pravimo *Pellova enačba.*[6]

Enačbo lahko rešimo tako, da najprej z Evklidovim algoritmom poiščemo verižni ulomek za $\sqrt{n}$. Prvi od okrajšanih približkov $\frac{x}{y}$, ki jih dobimo z računanjem verižnega ulomka in ustreza Pellovi enačbi, je osnovna rešitev (x_1, y_1) enačbe. Vse druge rešitve (x_k, y_k) so z osnovno povezane z enačbo

6 *Enačbo je Euler pomotoma poimenoval po angleškem matematiku Johnu Pellu (1611-1685). Natančno je njene rešitve opisal William Brouncker (1620-1684), poznali pa so jih že indijski matematiki v 12. stoletju. V posebnih primerih so jo znali rešiti že Pitagorejci.*

$x_k + y_k\sqrt{n} = (x_1 + y_1\sqrt{n})^k$.

Na primer, pri reševanju enačbe
$x^2 - 7y^2 = 1$
si pomagamo z verižnim ulomkom
$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$.

Med zaporednimi približki $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \ldots$ najdemo osnovno rešitev $x_1 = 8$, $y_1 = 3$. Ostale rešitve dobimo iz enakosti

$$x_k + y_k\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^k.$$

η Posplošitve Evklidovega algoritma

Evklidov algoritem za naravni števili se vedno konča v končno korakih zato, ker se ostanki v vsakem naslednjem koraku algoritma strogo manjšajo. S to idejo lahko Evklidov algoritem izvajamo tudi v veliko bolj splošnih algebrskih strukturah.

Naj bo $\boldsymbol{N}$ množica naravnih števil in K komutativen kolobar. Kolobar K je *evklidski kolobar*, če obstaja funkcija

$$\varphi: K\backslash\{0\} \to \boldsymbol{N} \cup \{0\}$$

z naslednjima lastnostma:

1. Če za $a, b \in K$ velja $ab \neq 0$, je $\varphi(a) \leq \varphi(ab)$.
2. Za $a, b \in K$, $b \neq 0$, obstajata elementa q, $r \in K$, tako da je $a = qb + r$. Pri tem je bodisi $r = 0$ bodisi $r \neq 0$ in $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Druga lastnost nam zagotavlja, da lahko v kolobarju K izvajamo Evklidov algoritem, ki se konča po končno korakih.

Poglejmo si nekaj najpomembnejših primerov evklidskih kolobarjev.

Običajni Evklidov algoritem dobimo v primeru $K = \boldsymbol{Z}$ in $\varphi(x) = |x|$.

Zelo pomemben primer so polinomi v eni spremenljivki s koeficienti iz komutativnega obsega, na primer $\boldsymbol{R}[x]$. Za $\varphi(p)$ vzamemo stopnjo polinoma p.

Za ilustracijo z Evklidovim algoritmom poiščimo največji skupni delitelj polinomov $x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$ in $x^2 + x - 1$:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = (x^2 + 3)(x^2 + x - 1) + (-3x + 2)$$

$$x^2 + x - 1 = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)(-3x + 2) - \frac{11}{9}$$

$$-3x + 2 = (\frac{27}{11}x - \frac{18}{11})(-\frac{11}{9})$$

Njun največji skupni delitelj je konstanta, zato sta si polinoma tuja.

Na enak način kot v celih številih lahko s pomočjo Evklidovega algoritma rešujemo tudi polinomske linearne diofantske enačbe in si z njim pomagamo pri uporabi kitajskega izreka o ostankih. Algoritem nam pomaga tudi pri tvorbi *Sturmovega zaporedja*[7], ki nam prešteje realne ničle polinoma na danem intervalu.

Podmnožici kompleksnih števil $\boldsymbol{Z}[\mathrm{i}] = \{a + bi;\ a, b \in \boldsymbol{Z}\backslash\}$, opremljeni z običajnima operacijama, pravimo *Gaussova števila*[8]. Za funkcijo φ vzamemo običajno razdaljo kompleksnega števila od izhodišča:

$$\varphi(a + bi) = a^2 + b^2.$$

Zanimivo je, da se da s pomočjo obravnave kolobarja $\boldsymbol{Z}[\mathrm{i}]$ dobiti nekaj pomembnih lastnosti običajnih celih števil, ki bi jih bilo težko dokazati neposredno. Z Gaussovimi števili se da recimo zelo elegantno poiskati Pitagorejske trojice. Prav tako se da pokazati, da je možno praštevila, ki dajejo pri deljenju s 4 ostanek 1, napisati kot vsoto dveh celoštevilskih kvadratov.

7 *Jacques Charles François Sturm (1803-1855), francoski matematik*

8 *Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nemški matematik, astronom in fizik*

V teoriji števil so pomembna tudi podobno skonstruirana *Eisensteinova števila*[9] oblike

$$z = a + b\omega, a, b \in \boldsymbol{Z}, \omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

z ustrezno funkcijo $\varphi\ (a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$.

Vsako naravno število se da na le en način napisati kot produkt potenc praštevil (pravimo, da je ***K*** kolobar kolobar z *enolično faktorizacijo*). Prav tako drži zanimivo dejstvo, da za naravni števili in z največjim skupnim deliteljem D velja

$$\{am + bn;\ a, b \in \boldsymbol{Z}\} = \{cD;\ c \in \boldsymbol{Z}\}$$

(rečemo, da je kolobar ***Z*** *glavni*). V bolj splošnih algebrskih strukturah veljajo le inkluzije: vsak evklidski kolobar je glavni, vsak glavni kolobar pa je kolobar z enolično faktorizacijo.

φ Časovna zahtevnost Evklidovega algoritma

Zaradi široke uporabnosti Evklidovega algoritma v računalništvu je zelo pomembna tudi njegova časovna zahtevnost. Algoritem za naravni števili $n > m$ se konča prej kot v $5d$ korakih, kjer je d število števk števila m.[10] Zanimivo je, da algoritem poteka najpočasneje v primeru dveh zaporednih elementov Fibonaccijevega[11] zaporedja. Povprečno število korakov Evklidovih algoritmov za vse pare *(m, n)*, $m < n$, je približno $0{,}843 \cdot \ln n$.

9 *Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (18231852), nemški matematik*

λ Zaključek

Evklidov algoritem je lep primer, kako pogosto za na videz standardno, rutinsko in ne preveč impresivno temo iz srednješolskega kurikuluma stoji navdušujoča zgodovina izjemnih idej, ki so jih skoraj istočasno zaradi praktičnih potreb neodvisno odkrivale različne civilizacije. Osnovne ideje ljudstev, ki abstrakcije niti niso znali zapisati v simboličnem zapisu, so postale temelji moderne matematike.

Zato upam, da bo pričujoči prispevek služil tudi kot ena od idej, kako matematiko na zanimiv način približati srednješolcem.

10 *Gabriel Leon Jean Baptiste Lamé (1795-1870), francoski matematik*

11 *Leonardo Pisano Bigollo-Fibonacci (1170-1250), italijanski matematik. Fibonaccijevo zaporedje lahko definiramo z dvočleno rekurzivno zvezo* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *in začetnima členoma* $F_1 = F_2 = 1$.

δ Viri in literatura:

1. W. S. Anglin, *Mathematics: a concise history and philosophy*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
2. T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.
3. J. J. Tattersall, *Elementary number theory in nine chapters*, Cambridge University Press, 1999.
4. I. Vidav, *Algebra*, 4. natis, DMFA, Ljubljana, 1989.
5. The Mac Tutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/, citirano 11. 10. 2012.

Pri matematiki so pomembne ideje

What's Important in Mathematics are Ideas

Šefket Arslanagić

Moj um je bil obsijan
s svetlobo in moje želje
izpolnjene.
Dante, Raj, petje XXXIII

V glavi Arhimeda
je bilo več domišljije
kot v glavi Homerja.
Volter

Σ Povzetek

V članku so predstavljene tri naloge, in sicer iz algebre, teorije števil in geometrije. Za vsako od nalog sta podani dve ali več rešitev. Najprej so podane standardne oz. klasične rešitve teh nalog, nato pa rešitve z uporabo različnih idej, ki vodijo do zelo »lepih in elegantnih«rešitev teh nalog.

Ključne besede: dokaz, ideja, neenakost, enakost, kot, pravokotnost, rešitev

Σ Abstract

The article presents three exercises from the fields of algebra, theory of numbers and geometry. For every exercise, two or more solutions are given. At first just standard or classical solutions of those exercises are given and later solutions by using various ideas are given, providing "nice and elegant" solutions of these problems.

Key words: *proof, idea, inequality, equality, angle, perpendicularity, solution*

α Uvod

Pri pouku matematike ima reševanje nalog zelo pomembno vlogo. Naloge se največkrat rešujejo s standardnimi metodami, s čimer se večina učiteljev zadovolji. Včasih se zgodi, da kateri od učencev ponudi eno ali več rešitev, ki so drugačne od standardnih. Dober učitelj, ki je strokovno podkovan na področju srednješolske matematike in metodologije poučevanja matematike, bo tega zelo vesel. Učence bo pohvalil in jih še naprej vzpodbujal pri njihovem delu. Učencem bo ponudil sodelovanje ter jim predstavil zahtevnejše gradivo, knjige, članke … iz matematike.

To področje dela mi je zelo znano, saj se že celo svoje delovno obdobje ukvarjam z delom z nadarjenimi učenci, pri čemer neizmerno uživam, predvsem pa se veselim uspehov, ki jih dosegajo učenci na tekmovanjih doma in v tujini. Takšni učenci imajo zelo veliko dobrih idej pri reševanju matematičnih nalog, predvsem pri dokazovanju. Njihove ideje prinašajo v reševanje nalog jasnost in natančnost (red) v tistih delih, ki so bili do takrat nejasni, izgubljeni in na videz nedosegljivi.

Da bi bolje razumeli, kaj pomeni osebna izkušnja pri delu z nadarjenimi učenci, vam bomo v nadaljevanju pokazali primere nalog, ki se rešujejo po standardni metodi. Nato bomo prikazali reševanje istih nalog še na druge različne načine, predvsem z uporabo idej, ki jih podajo posamezni učenci (na našo srečo in zadovoljstvo). V nadaljevanju bodo predstavljene naloge iz algebre (neenakosti), teorije števil in geometrije.

β Naloga iz algebre

Najbosta a in b pozitivni realni števili. Dokažite, da velja neenakost

$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4} \qquad (1)$$

Kdaj velja enakost?

1. rešitev (standardna)

Z množenjem obeh strani neenakosti (1) s $4a^2b$ dobimo enakovredno neenakost:

$4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3 \geq 27a^2b$

$\Leftrightarrow 4a^3 - 15a^2b + 12ab^2 + 4b^3 \geq 0 \ / : (b^3 \neq 0)$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 15\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12\left(\frac{a}{b}\right) + 4 \geq 0$

Naj bo $\frac{a}{b} = t > 0$. Dobimo:

$\Leftrightarrow 4t^3 - 15t^2 + 12t + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (4t + 1)(t^2 - 4t + 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)^2 (4t + 1) \geq 0$

Ker je $4t + 1 > 0$ $4t + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ in $(t - 2)^2 > 0$ $(t - 2)^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$, velja zadnja neenakost in potemtakem tudi njej enakovredna neenakost (1).

Enakost velja v (1) le v primeru
$t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.

Pri dokazovanju neenakosti (1) smo uporabili regresivni dokaz, v katerem smo izhajali iz neenakosti (1)in z uporabo več resničnih trditev potrdili njeno veljavnost. Seveda obstaja tudi težji direktni dokaz.

2. rešitev (z idejo)

Pri tej rešitvi, ki bo zelo kratka in elegantna, bomo uporabili učencem znano neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino treh pozitivnih števil, ki se glasi:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz};\ (x, y, z \ > 0) \quad (2)$$

Enakost velja, če je $x = y = z$.

Sledi:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^3 \geq \frac{a^2 b}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b}$$

Ta neenakost velja zaradi (2). Enakost velja, če je $\frac{a}{b} = b$, to je $a = 2b$.

Vsekakor je predstavljena rešitev enostavna in kratka. Kljub temu morajo učenci poznati določena dejstva o neenakostih, kot je na primer neenakost (2). Nadarjeni učenci za matematiko jih seveda poznajo, kar lahko potrdim iz številnih delovnih izkušenj z njimi.

γ Naloga iz teorije števil

Dokažite trditev: Ne obstajata pozitivni celi števili a in b, za kateri velja enakost $4a\,(a + 1) = b\,(b + 3)$**.**

1. rešitev (standardna)

Podano enakost lahko zapišemo v obliki $(2a + 1)^2 - (b + 1)^2 = b$ oziroma (razlika kvadratov):

$(2a + 1 + b + 1)(2a + 1 - b - 1) = b$,

to je $(2a + b + 2)(2a - b) = b$.

Prvi faktor $2a + b + 2$ je pozitiven in večji od b. Drugi faktor $2a - b$ ne more biti enak nič, ker bi za $b = 2a$ takrat veljalo, da je $b = 0$. To je seveda nemogoče, ker je $b \in \mathbb{Z}^+$. Zato je drugi faktor enak najmanj 1, od tu sledi, da je produkt teh dveh faktorjev večji od b. S tem je trditev dokazana.

Z učenci, ki znajo reševati kvadratne enačbe, lahko v primeru realnih rešitev kvadratne enačbe in z upoštevanjem dejstva, da je $\sqrt{(x^2)}=x$, $(x \geq 0)$, dobimo naslednji dve rešitvi:

2. Rešitev (z idejo)

Zapišimo podano enakost iz naloge v obliki kvadratne enačbez neznanko a:

$4a^2 + 4a - (b^2 + 3b) = 0$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16(b^2+3b)}}{8},$$

to je $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{b^2+3b+1}}{2}$.

Da bi bilo število a pozitivno celo število (naravno število), mora biti število popolni kvadrat nekega naravnega števila. Vendar je

$(b + 1)^2 =$

$= b^2 + 2b + 1 < b^2 + 3b + 1 < b^2 + 4b + 4 =$

$= (b + 2)^2$.

Od tu sledi, da je število $b^2 + 3b + 1$ med dvema zaporednima popolnima kvadratoma $(b + 1)^2$ in $(b + 2)^2$, vendar to število ne more biti popolni kvadrat. To pomeni, da je $a \in \mathbb{Z}^+$, s čimer je trditev iz naloge dokazana.

3. Rešitev (z idejo)

Zapišimo dano enakost kot kvadratno enačbo z neznanko b:

$b^2 + 3b - 4a(a + 1) = 0$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16a(a+1)}}{2},$$

to je $a_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{16a^2+16a+9}}{2}$.

Če bi veljalo $b \in \mathbb{Z}^+$, sklepamo, da mora biti število $16a^2 + 16a + 9 = (4a + 2)^2 + 5$ popolni kvadrat nekega naravnega števila. Torej mora biti $16a^2 + 16a + 9 = (4a + 2)^2 + 5$ popolni kvadrat nekega naravnega števila.

Edina popolna kvadrata, pri katerih je razlika enaka 5, sta števili 2^2 in 3^2. Zato mora veljati $4a + 2 = 2$. Torej je $a = 0$, kar pa ne pride v poštev. Ker je $4a + 2 > 0$, ne more biti niti $4a + 2 = -2$ (čeprav je $(-2)^2 = 4$).

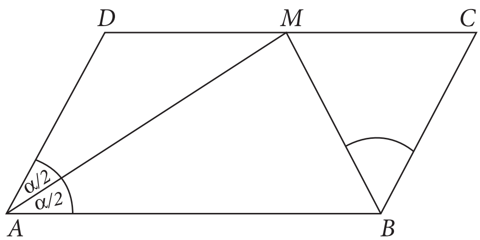
Menimo, da so vse tri predstavljene rešitve te naloge lepe in enostavne. Kljub temu sta 2. in 3. rešitev močnejši in zahtevnejši od 1. rešitve, ker je treba podano enakost preoblikovati in jo zapisati kot razliko kvadratov in iz nje izpeljati zaključek.

δ Naloga iz geometrije

V paralelogramu $ABCD$ je točka M razpolovišče stranice CD in leži na simetrali kota $\angle BAD$. Dokažite, da je kot $\angle BAD$ pravi kot.

1. Rešitev (standardna)

Daljica AM leži na simetrali kota $\angle BAD = \alpha$. Velja (glej sliko 1):
$\angle BAM = \angle MAD = \frac{\alpha}{2}$ in $\angle BAM = \angle AMD = \frac{\alpha}{2}$ (kota z vzporednima krakoma).



[Slika 1] *K 1. rešitvi naloge iz geometrije*

Od tod sledi, da je $\angle MAD = \angle DMA = \frac{\alpha}{2}$, zato je trikotnik ΔAMD enokraki in velja $|AD| = |MD|$. Zaradi $|AD| = |BC|$ in $|MD| = |MC|$, je $|BC| = |MC|$, kar pomeni, da je tudi trikotnik ΔBMC enakokraki, od koder je $\angle MCB = \angle BAD = \alpha$. Ker je
$\angle CBM = \angle BMC = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, dobimo:

$$\angle DMA + \angle BMC = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°$$

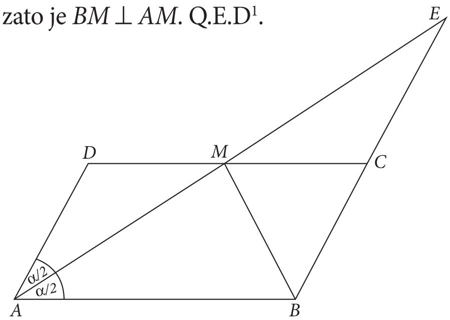
$\angle AMB = 180° - (\angle AMD + \angle BMC) =$
$= 180° - 90° = 90°$, kar je bilo treba tudi dokazati.

2. Rešitev (z idejo)

Označimo z E presečišče med simetralo AM kota $\angle BAD$ in nosilko stranice BC paralelograma $ABCD$ (sl. 2). Sedaj imamo:

$\angle BAM = \angle MAD = \angle AEB$. Od tu sledi, da je trikotnik $\Delta\, ABE$ enakokraki z osnovnico AE.

Očitno sta trikotnika ΔAMD in ΔEMC skladna, saj velja $|MD| = |MC|$, $\angle DMA = \angle CME$ in $\angle MAD = \angle MEC$. Zato je, torej je točka M razpolovišče osnovnice trikotnika ΔABE. Zaradi $\angle BAM = \angle MEB$ je trikotnik ΔABE enakokraki. Iz tega zaključimo, da je dolžina daljice BM višina enakokrakega trikotnika ΔABE, zato je $BM \perp AM$. Q.E.D[1].

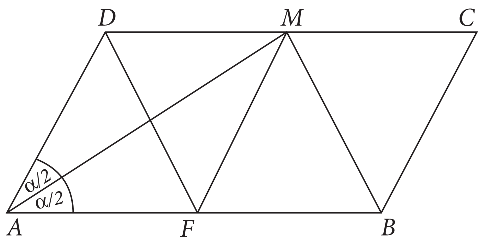


[Slika 2] *K 2. rešitvi naloge iz geometrije*

1 *Q. E. D. je okrajšava za latinski izraz quoderatdemonstrandum (dobesedno kar je bilo treba pokazati). Q.E.D. se lahko zapiše na konec matematičnega dokaza, kar pomeni, da je dokaz končan. (vir: http://sl.wikipedia.org/wiki/Q.E.D. (27. 12. 2012))*

3. Rešitev (z idejo)

Naj bo točka F razpolovišče stranice AB paralelograma $ABCD$ (sl.3). Daljica AM je simetrala kota $\angle BAD$ tega paralelograma in ker je $MF \parallel AD$, velja: $\angle BAM = \angle MAD = \angle AMF$. Od tu sledi, da je trikotnik $\Delta\ AMF$ enakokrak, kar pomeni, da imamo: $|BF| = |AF| = |MF|$. To pomeni, da točka M leži na krožnici, katere premer je daljica AB. Kot $\angle AMB = 90°$ (Talesov izrek o kotu v polkrogu: Kot, ki ima vrh na krožnici, njegova kraka pa potekata skozi krajišči premera te krožnice, je pravi kot.)



[Slika 3] K 3. rešitvi naloge iz geometrije

4. Rešitev(z idejo)

Naj bo točka F razpolovišče stranice AB paralelograma $ABCD$. Ker je $MF \parallel AD$ in $AB \parallel CD$ ter daljica AM leži na simetrali kota $\angle BAD$, je

$\angle BAM = \angle MAD = \angle AMF = \angle DMA$. Zaradi tega sta trikotnika ΔAFM in ΔMDA enakokraka in skladna. Skupaj tvorita romb $AFMD$. Diagonali AM in DF romba $AFMD$ sta pravokotni. Ker je $DF \parallel BM$, iz tega sledi, da je $AM \perp MB$, torej je $\angle AMB = 90°$. Q.E.D.

Poglejmo vse štiri rešitve navedenih nalog iz geometrije. 1. rešitev je klasična rešitev, v kateri uporabimo računanje kotov enakokrakega trikotnika, kar je učencem najbližje in najbolj enostavno. Menim, da bi se velika večina učencev odločila za prvo rešitev. 2., 3. in 4. rešitev prinašajo ideje, katerih uporaba hitro pripelje do lepih rešitev predstavljene naloge iz geometrije. V 2. rešitvi izhajamo iz dejstva, da je višina na osnovnico v enokrakem trikotniku pravokotna na osnovnico.V 3. rešitvi je uporabljeno dejstvo, da je kot v polkrogu pravi kot. V 4. rešitvi je uporabljena ena izmed lastnosti romba, da se diagonali romba sekata pod pravim kotom.

ε Zaključek

Pri teh treh nalogah in njihovih različnih rešitvah lahko v veliki meri preučimo pomen reševanja nalog na več različnih načinov. Najbolj pomembno je, da znamo rešiti nalogo na katerikoli način, kasneje pa razmišljamo, na kateri način se še lahko reši posamezna naloga. Tu pridejo v ospredje različne ideje, ki so neločljivo povezane z maloštevilnimi nadarjenimi učenci pri matematiki. Veselilo bi nas, da bi v prihodnosti (tudi mladi) bralci tega članka imeli predvsem korist od njega, tako pri obvladovanju gradiva iz matematike kot tudi pri učinkovitem in pestrem reševanju nalog.

Naj povem, da sem pri večletnem delu z nadarjenimi učenci iz matematike že od prvega letnika gimnazije vztrajal, da matematično nalogo poskusijo rešiti (včasih z mojo pomočjo in podporo) na več različnih načinov. Kasneje sem doživel oz. ugotovil, da so starejši dijaki (tretjega in četrtega letnika) rešili neko nalogo na več različnih načinov. To je še posebej pomembno pri pripravi članov ekipe BiH IMO (mednarodna matematična olimpijada). Zame je bilo to veliko zadovoljstvo in o tem sem pisal v svoji knjigi Matematička čitanka 1, 2, 3 in 4. Namen mojega članka je pomagati učencem in učiteljem v Sloveniji in izven nje pri delu z nadarjenimi učenci, s ciljem doseganja čim boljših rezultatov pri matematiki.

ζ Viri in literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.
3. Grozdev, S., *For High Achievements in Mathematics*, The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Association for the Development of Education, Sofia, 2007.
4. Kurnik, Z., *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
5. Kurnik, Z., *Znanstveni okviri nastave matematike*, Element, Zagreb, 2009.
6. Polya, G., *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2003.

Tetivni večkotniki

Cyclic Polygons

Vladimir Kadum

Σ Povzetek

V članku predstavimo tetivne večkotnike. Natančneje sta obravnavana trikotnik in tetivni štirikotnik. Predstavljene vsebine niso vključene v redni učni načrt (na Hrvaškem), se pa lahko na zelo učinkovit način predelajo z učenci, ki so nadarjeni za matematiko in se željo naučiti tudi kaj novega.

Ključne besede: tetivni večkotniki, trikotnik, štirikotnik, učni načrt, nadarjeni učenci

Σ Abstract

The article presents cyclic polygons. The triangle and cyclic quadrilateral are described in detail. The presented topics are not included in the regular curriculum (in Croatia), but can be examined very efficiently with pupils who are gifted in mathematics and willing to learn more.

Key words: *cyclic polygons, triangle, quadrilateral, curriculum, gifted pupils*

α Uvod

Večkotnike, ki jim lahko očrtamo krožnico, imenujemo *tetivni večkotniki.* Stranice večkotnika so tetive očrtane krožnice. Od tu izvira tudi ime.

Tetivni večkotnik z najmanjšim številom stranic ($n = 3$), ki je tudi najbolj raziskan in najbolj poznan, je *trikotnik*. Že stari Grki so o njem veliko vedeli.

Če štirikotniku lahko očrtamo krožnico, temu štirikotniku pravimo tetivni štirikotnik. Štirikotnik je tetiven, če in samo če je vsota nasprotnih kotov enaka 180°. Ptolemejev izrek pa poda zvezo med stranicami in diagonalama štirikotnika. Tetivni štirikotnik je popolnoma določen s svojimi stranicami. Ploščino tetivnega štirikotnika izračunamo po *Heronovi formuli*.

Na podoben način definiramo tudi tetivni večkotnik.

β Trikotnik

V nadaljevanju si bomo pogledali nekatere pomembne zveze, ki veljajo v trikotniku.

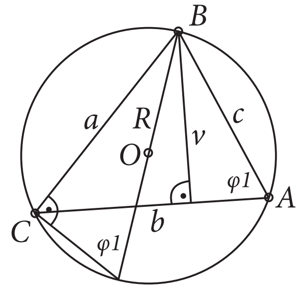
TRDITEV 1.

Naj bo ABC poljuben trikotnik, pri katerem so $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CA|$ stranice, P ploščina in R polmer očrtane krožnice. Takrat velja enakost

$$4PR = abc. \quad (1)$$

Dokaz:

Najprej predstavimo dokaz, ki ga lahko najdemo tudi v osnovnošolskih učbenikih in ki so ga dobro poznali že stari Grki. V dokazu bomo uporabili podobnost trikotnikov in enakost obodnih kotov. Opazujmo sliko 1.



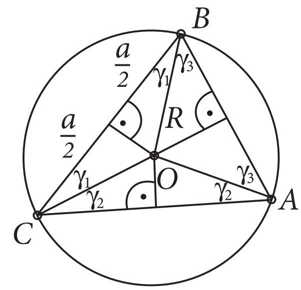
[Slika 1] *Trikotnik ABC*

Veljajo enakosti

$a : 2R = v : c, \quad av = 2P.$

Od tu sledi enakost (1).

S pomočjo slike 2 bomo enakost (1) izpeljali še na drug način.



[Slika 2] *Trikotnik ABC*

Zapišemo

$2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 180°,$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 90°,$

$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin\gamma_3,$

$\cos\gamma_1 \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 = \sin\gamma_3.$

Zaradi preglednosti in krajšega zapisa bomo uvedli oznake: c_1, c_2, s_1, s_2, s_3, pri čemer so

$c_1 = \cos\gamma_1, \quad c_2 = \cos\gamma_2,$

$s_1 = \sin\gamma_1, \quad s_2 = \sin\gamma_2, \quad s_3 = \sin\gamma_3.$

Velja torej

$$c_1 c_2 = s_1 s_2 + s_3. \quad (2)$$

Zapišimo $s_i = \sqrt{1-c_i^2}$ ($i = 1, 2, 3$). Iz enakosti (2) s kvadriranjem pridemo do enakosti, v kateri ne nastopa koren. Tako dobimo naslednje enakosti

$$c_1^2 c_2^2 = s_1^2 s_2^2 + 2\, s_1 s_2 s_3 + s_3^2,$$

$$(2\, s_1 s_2 s_3)^2 = (c_1^2 c_2^2 - s_1^2 s_2^2 - s_3^2)^2,$$

$$4s_1^2 s_2^2 s_3^2 = c_1^4 c_2^4 + s_1^4 s_2^4 + s_3^4 - 2c_1^2 c_2^2 s_1^2 s_2^2 - 2c_1^2 c_2^2 s_3^2 + 2s_1^2 s_2^2 s_3^2. \quad (3)$$

Ker je

$$c_1 = \frac{a}{2R}, \quad c_2 = \frac{b}{2R},$$

$$s_1^2 = 1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2, \; s_2^2 = 1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2, \; s_3^2 = 1 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

lahko enakost (3) zapišemo v obliki

$$16\, P^2 R^2 = a^2 b^2 c^2,$$

kjer je

$$16P^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Z direktnim računom lahko preverimo, da velja

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

kjer je s polovica obsega, tj. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Tako smo izpeljali Heronovo formulo, ki jo uporabljamo za izračun ploščine trikotnika s podanimi stranicami.

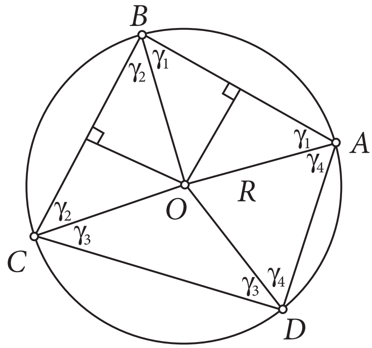
δ Tetivni štirikotnik

TRDITEV 2.

Naj bo $ABCD$ poljuben tetivni štirikotnik, pri katerem so $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, P ploščina in R polmer očrtane krožnice. Tedaj velja enakost

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16P^2}. \quad (5)$$

Dokaz. Opazujmo sliko 3.



[Slika 3] *Poljubni tetivni štirikotnik ABCD*

Veljajo enakosti

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 180°, \quad (6)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{a}{2R}, \; \cos\gamma_2 = \frac{b}{2R},$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{c}{2R}, \quad \cos\gamma_4 = \frac{d}{2R}. \quad (7)$$

Iz enakosti (6) lahko izpeljemo naslednje enakosti

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180° - (\gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos(\gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2 = -\cos\gamma_3\cos\gamma_4 + \sin\gamma_3\sin\gamma_4. \quad (8)$$

Uvedemo oznake $c_1, c_2, c_3, c_4, s_1, s_2, s_3, s_4$ tako, da je

$$c_i = \cos\gamma_i, \quad s_i = \sin\gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Vsoto $c_1c_2 + c_3c_4$ krajše označimo z s, enakost (8) pa zapišemo v obliki

$$s_1s_2 + s_3s_4 = s. \quad (9)$$

S kvadriranjem preoblikujemo zapis do enakosti, v kateri bodo vrednosti s_1, s_2, s_3, s_4 na drugo ali na četrto potenco. S tem se izognemo zapisom s koreni. Na sliki 3 opazimo še nekatere enakosti, na primer,

$$s_1 = \sqrt{1-c_1^2} = \sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2}$$

Situacija je podobna kot v predhodni trditvi.

S kvadriranjem enakosti (9) dobimo enakosti

$$s_1^{\,2} s_2^{\,2} + 2\, s_1 s_2 s_3 s_4 + s_3^{\,2} s_4^{\,2} = s^2,$$

ali

$$2\, s_1 s_2 s_3 s_4 = s^2 - s_1^{\,2} s_2^{\,2} - s_3^{\,2} s_4^{\,2}.$$

S kvadriranjem predhodne enakosti dobimo

$$4s_1^{\,2}s_2^{\,2}s_3^{\,2}s_4^{\,2} = \\ = s^4 + s_1^{\,4}s_2^{\,4} + s_3^{\,4}s_4^{\,4} - 2s^2s_1^{\,2}s_2^{\,2} - 2s^2s_3^{\,2}s_4^{\,2} + 2s_1^{\,2}s_2^{\,2}s_3^{\,2}s_4^{\,2} \qquad (10)$$

Da smo se znebili korenov v izrazih za s_1, s_2, s_3, s_4, sta bili potrebni dve zaporedni kvadriranji.

Če zdaj vstavimo v enakost (10) namesto c_1, c_2, c_3, c_4 ustrezne izraze navedene pod (7) in s pomočjo njih izrazimo s_1, s_2, s_3, s_4, dobimo enakost, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kjer je s polovica obsega, tj.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

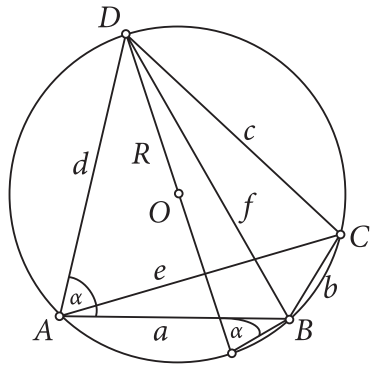
S pomočjo Heronove formule

$$P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \qquad (11)$$

lahko izračunamo ploščino tetivnega štirikotnika s podanimi stranicami. Njeno pravilnost bomo videli ob alternativnem dokazu trditve 2.

Dokazovanje trditve 2 na alternativni način je lahko zelo zanimivo. Pri tem opazujemo, kako se na različne načine odkrivajo resnice v matematiki.

Opazujmo sliko 4.



[Slika 4] *Tetivni štirikotnik ABCD*

Ker sta nasprotna kota v tetivnem štirikotniku suplementarna, nam kosinusni izrek da naslednje enakosti

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \qquad (12)$$

Od tu sledi

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}. \qquad (13)$$

Glede na zgoraj uporabljeno enakost sklepamo, da je

$$1+\cos\alpha = \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)},$$

$$1-\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)},$$

ali, ker je $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$,

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)},$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}.$$

Ker je $a + b + c + d = 2s$, lahko zapišemo enakost

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}, \qquad (14)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}, \qquad (15)$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

Če vstavimo v enakost (12) vrednosti za *cos* navedeno pod (13), dobimo enakost

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}. \qquad (16)$$

Podobno je

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$$

in

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ad+bc}. \qquad (17)$$

Če pomnožimo (16) in (17) ter korenimo, dobimo enakost

$$ef = ac + bd.$$

Imenujmo še Ptolomejev izrek za tetivni štirikotnik. Ptolomej jo je brez uporabe trigonometrije dokazal pred več kot dva tisoč leti. Ker trigonometrija takrat še ni bila razvita, je bil njegov dokaz seveda drugačen.

Dodajmo, da z deljenjem enakosti (16) in (17) dobimo enakost

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Tej enakosti pravimo Ptolomejev izrek za tetivni štirikotnik.

Za dokaz Heronove formule (11) bomo ploščino štirikotnika napisali kot vsoto ploščin dveh trikotnikov

$$P = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

ali

$$P = (ad+bc)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Z vstavljanjem izrazov za $\sin\frac{\alpha}{2}$ in $\cos\frac{\alpha}{2}$ navedenih pod (14) in (15), dobimo enakost (11).

Iz slike 4 opazimo povezavo

$$f = 2R\sin\alpha,$$

od tu sledi enakost

$$R^2 = \frac{f^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Z uporabo navedenih izrazov za $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ in $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ zapišemo zgornjo enakost v obliki (5).

γ Na kratko o tetivnih večkotnikih z več kot štirimi stranicami

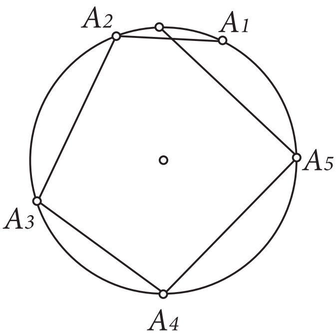
Najprej predstavimo naslednjo trditev.

TRDITEV 3.
Naj bo n poljubno naravno število, ki ni manjše od 3, in naj bodo $a_1, a_2, ..., a_n$ poljubne dolžine stranic, za katere velja, da je vsaka od njih manjša od seštevka preostalih $n - 1$ dolžin. Tedaj obstaja vsaj en tetivni večkotnik z n stranicami, katerega dolžine stranic so $a_1, a_2, ..., a_n$.

Vsebino trditve se da intuitivno enostavno videti (naloga 1). Vzemimo na primer, da so podane dolžine stranic poljubnega petkotnika:

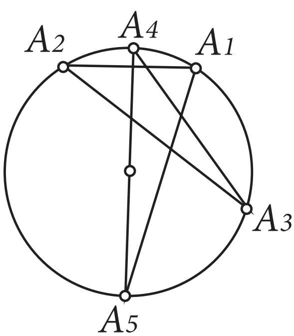
$a_1 = 2\ cm$,
$a_2 = 3.5\ cm$,
$a_3 = 3\ cm$,
$a_4 = 3.7\ cm$,
$a_5 = 3.6\ cm$.

Krožnica na sliki 5 bi morala biti malo večja, da bi bila očrtana petokotniku, z znanimi dolžinami stranic.



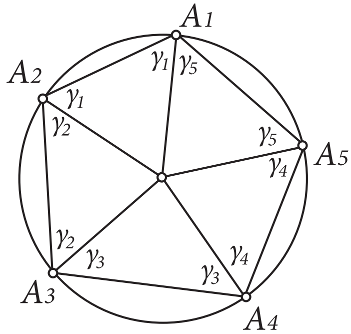
[Slika 5] Poljubni petkotnik

Tetivni štirikotnik je s svojimi stranicami natanko določen. V primeru več kot štirih stranic pa obstaja več različnih tetivnih večkotnikov z enako dolgimi stranicami. V zgoraj navedenem primeru za dane dolžine stranic obstaja še en petokotnik. Prikazan je na sliki 6.



[Slika 6] Tetivni petkotnik

Pri splošnih tetivnih večkotnikih je zelo težko s pomočjo dolžin stranic izračunati polmer večkotniku očrtane krožnice. Za primer si poglejmo petkotnik na sliki 7.



[Slika 7] Petkotnik

Iz enakosti

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 3 \cdot 90°$,

in z uporabo trigonometrijskih funkcij za sinus in kosinus (kot v trditvi 2) dobimo enačbo, v kateri moramo odpraviti korene, ki nastopajo pri sinusih. Na koncu vrednosti trigonometrijskih funkcij napišemo kot funkcije stranic večkotnika.

Na koncu si postavimo še nekaj vprašanj, ki so povezana s trditvijo 3:

1. V trditvi 3 privzamemo, da je najdaljša stranica krajša od vsote dolžin ostalih stranic. Zakaj je ta pogoj sploh potreben? (V nasprotnem primeru stranic ne moremo skleniti v večkotnik. Za obstoj trikotnika je na primer potrebna veljavnost trikotniške neenakosti za njegove stranice.)
2. Obstajajo tetivni štirikotniki z enako dolgimi stranicami in različnimi polmeri očrtanih krožnic, vendar se pri drugačnih polmerih nesosedne stranice večkotnika lahko sekajo.

3. Obstaja le en tetivni štirikotnik z dolžinami stranic $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 3\ cm$. Ugotovite, zakaj ne obstaja še kakšen drug.

ζ Viri in literatura:

1. Dörrie, H. (1965), 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution. Dover Publications, Inc. (Originally published in German under the title of Triumph der Mathematik)
2. Fuss, N. (1797), De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quamcircumscribere licet. Nova acta acad. sci. Petrop. 10, St. Petersburg, 103-125
3. Griffiths, P. – Harris, J. (1978), On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. Enseign. Math. 31-40
4. Poncelet, J. W. (1865), Traité des propriétés projectives des figures. Paris, (first ed. in 1822).
5. Radić, M. i Kadum (2005), Tangencijalni i tetivni poligoni. Bicentrički poligoni. Pula: IGSA

Zgodovina matematike

History of mathematics

Marko Razpet
Univerza v Ljubljani,
Pedagoška fakulteta

Σ Povzetek

V prispevku je v bistvenih potezah predstavljena zgodovina matematike in kakšno je njeno današnje stanje na Slovenskem.

Ključne besede: matematika, zgodovina matematike.

Σ Abstract

In this contribution, the history of mathematics in its essential features, and its contemporary situation in Slovenia are presented.

Key words: *mathematics, history of mathematics.*

α Namesto uvoda. Zakaj zgodovina matematike?

Nemškega zgodovinarja matematike, Hansa Wußinga (1927–2011), Univerza v Leipzigu, so mnogi spraševali, čemu študirati še zgodovino matematike, saj imajo mnogi ljudje že tako in tako strah pred matematiko in jih oblije kurja polt, če se samo spomnijo na pisanje testov, šolskih nalog in pisnih izpitov iz matematike, izpraševanj pred tablo ter popravnih, ustnih in drugih izpitov. Njegov odgovor je bil kratek in preprost: »Ravno zato.«

Da ne bomo ostali samo pri bežni predstavitvi zgodovine matematike, poskusimo nekoliko obširneje razložiti, s čim se ta, prav tako pomembna veja matematike, sploh ukvarja. Ker je tega veliko, bomo samo nekatere stvari nekoliko bolje osvetlili.

β Seminar za zgodovino matematičnih znanosti

Pobudo za oživitev zgodovine matematike je na začetku tretjega tisočletja dal prof. dr. Tomaž Pisanski. Leta 2002 smo namreč nekoliko bolj skromno, kot bi kdo pričakoval, obeležili 200. obletnico smrti Jurija barona Vege (1754–1802), dve leti kasneje pa veliko bolj slovesno 250. obletnico njegovega rojstva. Po tem dogodku smo pripravili obširen zbornik *Jurij baron Vega in njegov čas*, ki je izšel leta 2006. Kot glavni organizator Vegovih dni v letih 2002 in 2004 je prof. Pisanski po izdaji zbornika prišel na dan z idejo, da bi se v neki obliki stalneje ukvarjali z zgodovino matematike v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Fakultete za matematiko in fiziko ter Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Odločili smo se za zelo navzven odprto, seminarsko obliko dela, seminar pa imenovali **Seminar za zgodovino matematičnih znanosti**, kamor sodi vse, kar ima vsaj malo zveze z matematiko.

Zgodovina matematike na naših šolah se s tem seminarjem ni pojavila prvič. Učitelji in profesorji že od nekdaj radi svoja izvajanja za poslušalce popestrijo s kakim utrinkom iz zgodovine matematike. Na Univerzi v Ljubljani je prof. dr. France Križanič nekaj časa bodočim profesorjem matematike predaval o zgodovini matematike. V zvezi s tem je izdal knjigo *Križem po matematiki* (Križanič, 1960). Kasneje je izdal še knjigo *Nihalo, prostor, delci* (Križanič, 1982), ki je prav tako zgodovinsko-matematična, posega pa praktično v celotno zgodovino matematike, čeprav je njena vodilna tema harmonična analiza. Društvo matematikov, fizikov in astronomovje poskrbelo za prevod Struikove *Kratke zgodovine matematike* (Struik, 1978). V slovenščini imamo tudi delo *Zgodovina matematike: zgodbe o problemih* (Jaboeufidr., 2000, 2001). Namenjeno je predvsem učiteljem matematike, zasnovano pa je tako, da v vsakem poglavju najprej pojasni zgodovinsko pomemben matematični problem, ki predstavlja začetek nekaj bistveno novega, in nato daje namige in navodila, kako se ga rešuje. Poučevanje matematike s pomočjo njene zgodovine se je izkazalo kot primerno. Pri tem poslušalci pridobijo pravi občutek, da je matematika zelo povezana z drugimi znanostmi, na primer z logiko, fiziko, astronomijo in računalništvom. Izvejo pa tudi, da je matematika nastajala, se očiščevala, nenehno stremela po izboljšavah, se trudila, da bi bila dostopna in razumljiva tudi manj nadarjenim ljudem.

Na fakultetah, ki izobražujejo bodoče profesorje matematike, je zgodovina matematike v neki obliki stalno prisotna: vključena je v didaktiko oziroma metodiko matematikeali paje ponujena študentom kot izbirni predmet. Marsikateri študent si za diplomsko delo izbere kakšno zgodovinsko temo. Na Fakulteti za matematiko in fiziko se je v akademskem letu 2012/13 izvajala celo kot samostojni predmet za pedagoške matematike.

Tudi na nekaterih srednjih šolah srečujemo zanimanje za zgodovino matematike. Dijaki radi pripravljajo seminarske naloge iz matematično-zgodovinskih tem, profesorji pogosto objavljajo tovrstne članke v revijah

Presek in **Matematika v šoli**. Prof. Vilko Domajnkopa je izdal celo priročnik (Domajnko, 1993), v katerem predstavi nekatere zanimive naloge, ki so se v različnih časih in na različnih krajih pojavile v zgodovini matematike.

Seminar za zgodovino matematičnih znanosti je stekel konec februarja 2010 in od takrat praviloma poteka v obeh semestrih v tednih, ko so na fakultetah predavanja. Seminar poteka 2 uri tedensko. O naslovih in predavateljih sproti obveščamo.

Obvestila s povzetki so objavljena na spletni strani

http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Kategorija:Seminar

kjer izberete *Seminar za zgodovino matematičnih znanosti.* Lahko pa do obvestil pridemo tudi na spletni strani

http://www.fmf.uni-lj.si/si/raziskave/

rubrika *Napovedujemo.* Pridružite se nam! Če hočetena primer izvedeti, kdo so bili *harpedonapti*, ki jih omenja predsokratski grški filozof Demokritiz Abdere, je naš seminar pravo mesto. Prav tako je zanimivo izvedeti, kako je Jurij Vega računal število π, to je razmerje med obsegom in premerom kroga,na 140 decimalk in se nekje zmotil, česar pa ni mogel vedeti, ker boljšega izračuna takrat ni poznal. Prvič ga je pravilno izračunal na 126 decimalk, malo kasneje pa na 136. V vsakem primeru pa je odkril, da je 113. decimalkaštevila π, ki ga je izračunal Francoz Thomas Fantetde Lagny (1660–1734), napačna. V zvezi s številom π se Slovencem spodobi vedeti, da je Leopold Karl Schulz von Strassnitski (1803–1852), ki je nekaj let poučeval na ljubljanskem liceju, pregovoril Franca Močnika, da se je ta posvetil matematiki in poučevanju in ne duhovništvu. Poleg tega je Strassnitzki poznal preprosto formulo in postopek za izračun števila π z vrstami, s katerimi ga je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) leta 1844 tudi zares izračunal, in to na pravilnih 200 decimalk.

Doslej smo živeli v prepričanju, da je William Rutherford (1798–1871) prvi pravilno izračunal število π na 152 decimalk. Ravno Strassnizkemu gre zahvala, da izvemo, da je to storil nekdo pred njim, saj Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832), Gaussov sodobnik in kolega, v peti izdaji svojega učbenika, ki je izšel leta 1831, navaja število π prav tako na 152 decimalk, in to pravilno. Strassnizki namreč v spremnem besedilu k Dasejevi objavi 200 decimalk števila π leta 1844 omenja Thibauta, ki naj bištevilo π na 152 decimalk poznal, posredno ali neposredno, iz nekega rokopisa, arhiviranega v knjižnici Radcliffe v Oxfordu. Podrobnosti o tem, kje je podatek našel, pa Thibaut ne navaja. Brskanje po virih nas ni privedlo do avtorja omenjenega oxfordskega rokopisa, pač pa smo našli podatek, da je astronom Franz Xavervon Zach (1754–1832) pisal francoskemu zgodovinarju matematike Jean-Étiennu Montuclu (1725–1799), da je rokopis videl. Verjetno je bilo to med Zachovim bivanjem v Londonu med letoma 1783 in 1786. Iz vsega lahko sklepamo, da je nekdo izračunal število π na 152 decimalk natančno pred letom 1799, ni pa za natančnost vedel, saj boljšega rezultata do takrat po vsej verjetnosti ni bilo. Verjetno Vega za oxfordski rokopisni vedel.

Osnovna vprašanja v zgodovini matematike so (Wußing, H. idr., 1997):

- Zgodovina problemov, pojmov, odnosov
- Matematika v povezavi z naravoslovjem in tehniko
- Biografije
- Matematične institucije in oblike organiziranosti

- Matematika kot del človeške kulture
- Matematika in družba
- Matematika kot del splošne izobrazbe
- Zgodovinsko-kritična analiza izvirnih besedil

Seminar za zgodovino matematičnih znanosti jim skuša po najboljših močeh slediti. Zaveda pa se, da še dolgo ne bo dosegel tistega, kar si bi marsikdo želel že danes. Povedati je namreč treba, da se z zgodovino matematike po nekaterih državah ukvarjajo že dolgo, zlasti tam, kjer je doma bogata matematična tradicija. Omenimo samo nekatere.Francozom sta v ponos že omenjeni Jean-Étienne Montuclain Paul Tannery (1843–1904), Nemci se ponašajo z Moritzem Cantorjem (1829–1920), Danci z Johanom Ludvigom Heibergom (1854–1928). Zgodovino starogrške matematike je do obisti preštudiral Anglež Thomas Little Heath (1861–1940). Za prvega zgodovinarja matematike pa velja Grk Evdemz Rodosa (~ 350–290 pnš.). V Avstriji je bilo v zadnjih 25 letih že 11 simpozijev z mednarodno udeležbo iz zgodovine matematike. Izhaja pa tudi nekaj specializiranih mednarodnih revij, posvečenih tej veji matematike.

Slovenci habilitiranega zgodovinarja matematike še nimamo, zahvaljujoč posameznikom pa imamo dobro obdelane vsaj nekatere matematike: Jurija Vega (1754–1802), Franca Močnika (1814–1892), Franca Hočevarja (1853–1919), Josipa Plemlja (1873–1967), Iva Laha (1896–1979). Glede na našo burno zgodovino seveda ne moremo mimo razvoja matematikev nam bolj ali manj oddaljenih deželah. Nekoč so namreč naši ljudje študirali na Dunaju, v Gradcu, Pragi, Brnu, Padovi, Zagrebu in drugje. Nekateri so v tujini tudi uspešno delovali kot profesorji in raziskovalci in prenašali svoje znanje domov.

δ Svetovna zgodovina matematike

Ko se ukvarjamo z zgodovino matematike v svetovnem merilu, jo navadno grobo razdelimo nanaslednja poglavja (Wußing idr., 1997):

- Prazgodovina
- Mezopotamija
- Egipt
- Grčija in helenizem
- Kitajska
- Indija
- Islamski svet
- Predkolumbijska Amerika
- Srednjeveška Evropa
- Evropa v renesansi
- Evropa v racionalizmu in razsvetljenstvu
- Svet – devetnajsto stoletje
- Svet – dvajseto stoletje

Pri tem nas zanimajo sami začetki matematike prinarodih in kulturah v različnih delih sveta, kdo je kaj odkril in zakaj, kakšni so bili medsebojni vplivi, kako se je znanje matematike širilo, v katere težave so zašli matematiki, katere ideje so se ohranile in katere so bile obsojene na neuspeh itd.

Navedimo nekatere pomembne probleme, ki jih obravnavamo pri zgodovini matematike:

- Klasični problemi antike
- Reševanje polinomskih enačb
- Konstruktibilnost v geometriji
- Kriza matematičnih osnov
- Hilbertovi problemi

Klasični problemi antike obsegajo podvojitev kocke, tretjinjenje kota in kvadraturo kroga. Stari Grki so jih skušali rešiti po evklidsko, samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, kar pa je nemogoče, kar se je izkazalo mnogo stoletij kasneje. Njihov trud pa ni bil popolnoma zaman, saj so spotoma odkrili, kar se je pogosto dogajalo skozi celo zgodovino matematike, marsikaj drugega.

Linearno in kvadratno enačbo so znali algebrsko, to je z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in korenjenjem, reševati že stari babilonski, islamski in indijski matematiki, ustavilo pa se je pri kubični enačbi. Šele v obdobju italijanske renesanse so obvladali tudi polinomsko enačbo tretje in četrte stopnje. Ustavilo se je pri polinomskih enačbah pete in višje stopnje. Trajalo je kar precej časa, da so dokazali, da se takih enačb na splošnoalgebrsko ne da rešiti.

Ko govorimo o konstruktibilnosti v geometriji, mislimo predvsem na probleme, ki se jih da rešiti samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Tak problem je na primer, katere pravilne n-kotnike se da načrtati samo z omenjenima orodjema. Za $n = 3, 4, 5, 6$ to na primer gre, za $n = 7$ pa ne.

Matematiki so uspešno prebrodili tudi krizo matematičnih osnov. V določenem obdobju so se namreč pojavili problemi, kaj je sploh kaj v matematiki. Kaj je funkcija? Kaj je množica? Nepazljivosti v definicijah osnovnih matematičnih pojmov namreč hitro privedejo do logičnih protislovij, antinomij, paradoksov.

Znani matematik David Hilbert (1861–1943) je na mednarodnem kongresu matematikov v Parizu leta 1900 objavil 23 do takrat nerešenih težkih matematičnih problemov, ki se imenujejo po njem. S tem je zaposlil matematike za daljše obdobje. Večino Hilbertovih problemov so do danes rešili, nekateri pa so kljub izjemnemu trudu ostali nerešeni.

ε Zgodovina slovenske matematike

Matematika se je slovenskih dežel dotaknila že zelo zgodaj. Marsičesa še ne vemo in bo treba še marsikaj raziskati, imamo pa nekaj oseb, mimo katerih ne moremo, na primer:

- Marko Pohlin
- Jurij Vega
- Franc Močnik
- Anton Martin Slomšek
- Franc Hočevar
- Josip Plemelj
- Ivo Lah
- novejši slovenski matematiki

Marsikdo se bo vprašal, zakaj sta navedena oče Marko Pohlin in škof Anton Martin Slomšek. Prvi je napisal prvo slovensko računico *Bukuvze za rajtengo* (1781), ki je nedvomno svojčas odigrala pomembno vlogo v izobraževanju mladih deklet in fantov. Slomšek pa je knjigi *Blasheino Neshiza v' nedelşki şholi* (1842), ki je bila večkrat ponatisnjena z malenkostno spremenjenim naslovom zaradi pravopisa inprehoda na gajico, podal najnujnejše lekcije in zglede iz vseh takratnih šolskih predmetov, tudi iz računstva, ki naj bi se jih naučili v osnovni šoli. Verjetno knjiga ni služila le samoukom, temveč tudi vaškim učiteljem.

Naštejmo še nekaj pomembnih tem, ki so ali bodo vedno zanimive za zgodovinarje matematike. Morda bo kdo sam našel še kakšno, zaenkrat zapišimo naslednje:

- Pomen zgodovine matematike
- Zapisovanje števil
- Pitagorov izrek
- Evklidovi *Elementi*
- Razvoj matematične misli
- Razvoj oznak v matematiki
- Matematika kot jezik
- Nastajanje novih področij
- Razvoj poučevanja matematike
- Povezave z drugimi znanostmi
- Etnomatematika

γ Sklepne besede

Poznavanje zgodovine matematike je vsekakor koristno tako za posameznika kakor tudi za šole vseh stopenj. Literature v zvezi z zgodovino matematike je ogromno. Poleg že omenjenih del je koristno vsaj malo poznati tudi dela [1, 3, 4, 8, 9, 10, 13] s seznama na koncu prispevka. Namen prispevka bo dosežen, če bo vsaj enega bralca ali bralko navdušil za zgodovino matematike.

ζ Viri in literatura:

1. Courant, R., Robbins, H. (1996). *What is Mathematics*. New York idr.: Oxford University Press.
2. Domajnko, V (1993). *Z nalogami v zgodovino matematike*. Ljubljana: Mladinska knjiga.
3. Eves, H. (1964). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York idr.: Holt, Rinehartand Winston.
4. Hairer, E., Wanner, G. (1995). *Analysis by Its History*. Berlin idr.: Springer-Verlag.
5. Jaboeuf, F. idr. (2000,2001). *Zgodovina matematike: zgodbe o problemih,* 1. in 2. del. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
6. Križanič, F. (1960). *Križem po matematiki*. Ljubljana: Mladinska knjiga.
7. Križanič, F. (1982). *Nihalo, prostor, delci*. Ljubljana: Slovenska matica.
8. Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. Hobiken, New Jersey: John Wiley & Sons.
9. Ostermann, A., Wanner, G. (2010). *Geometry by Its History*. Heidelberg idr.: Springer.
10. Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History*. New Yorkidr.: Springer.
11. Struik, D. J. (1978). *Kratka zgodovina matematike.* Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
12. Wußing, H. idr., I. (1997). *Vom Zählstein zum Computer.* Hildesheim: Franzbecker.
13. Wußing, H., Arnold W. (1989). *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin: Volkund Wissen Volkseigener Verlag.

O usvajanju matematičnega števila in morebitni povezavi s slovničnim številom

On Learning the Mathematical Number and its' Possible Connection with Grammatical Number

Franc Marušič, Vesna Plesničar, Tina Razboršek, Rok Žaucer
Univerza v Novi Gorici, Fakulteta za humanistiko

Jezikoslovci z Univerze v Novi Gorici smo od januarja do junija 2012 v sodelovanju s psihologoma Davidom Barnerjem in Jessico Sullivan z ameriške univerze University of California at San Diego v ljubljanskih vrtcih opravljali raziskavo usvajanja števil pri predšolskih otrocih.

Osrednje vprašanje raziskave je bilo otrokovo razumevanje števila, tako slovničnega kot matematičnega. Oziroma konkretneje: ali je otrokovo znanje štetja povezano z njegovim razumevanjem drugih jezikovnih elementov, ki se tudi nanašajo na količino, recimo samostalniških obrazil za slovnično število (*balon – balon**a** – balon**i***). Ali recimo otroci, ki poznajo pomen števila 2, vedo, kdaj uporabiti obrazila za dvojino? Oziroma splošneje, ali je človekova jezikovna zmožnost povezana z drugimi kognitivnimi zmožnostmi ali pa je bolj ali manj neodvisna?

Ozadje raziskave je vezano na primerjalne študije usvajanja števil med japonskimi, ameriškimi in ruskimi otroki, ki so pokazale, da so angleško in rusko govoreči otroci hitrejši pri usvajanju števil od njihovih japonskih vrstnikov. Raziskovalci so, ob upoštevanju socialnih in kulturnih postavk, opaženo razhajanje pripisali razlikam v jezikih, saj za razliko od ruščine in angleščine (pa tudi slovenščine) japonščina ne pozna slovničnega števila in samostalnikom tako ne dodaja obrazil za množino, ko se ti nanašajo na več kot en predmet (slov. *gumb* vs. *gumb**i***, rus. *knopk**a*** vs. *knopk**i***, angl. *button* vs. *button**s*** – jap. *botan=botan*). A če obstoj razlikovanja med ednino in množino pomeni določeno prednost za otroka pri razumevanju števil, se v luči slovenščine takoj postavi naslednje vprašanje, namreč ali pomeni obstoj ločevanja med ednino, dvojino in množino še dodatno prednost.

Preverjanja predpostavljene povezave med obstojem slovničnega števila v jeziku in hitrostjo usvajanja jezika se nismo lotili v goriških temveč v ljubljanskih vrtcih, saj se uporaba dvojine med slovenskimi narečji precej razlikuje in prav v narečjih na Goriškem dvojina ni posebej močna (npr. ljubljanski *Sva šla* je na goriškem bolj običajno *Smo šli*). Poznavanje števil in razumevanje številskih obrazil smo preverjali s serijo testov, ki so bili zasnovani kot igra. Pri prvi nalogi, ki jo lahko preizkusite tudi sami, smo uporabili posodico in nekaj gumbov. Otroka smo na primer prosili, naj »da enega v posodico«, in beležili, ali je v odziv prestavil ustrezno količino gumbov (slika 1). Preverjali smo poznavanje števil 1, 2, 3, 4, 5, 8 in 10. Ta način preverjanja poznavanja števil smo uporabili zato, ker razkrije, ali otroci res razumejo, na kakšno količino se nanašajo konkretna števila. Otroci so namreč pogosto zelo dobri v recitiranju števil v pravem vrstnem redu (kar smo tudi preverili s prošnjo, naj štejejo, do kolikor visoko znajo), vendar obenem pogosto ne dajo prave količine predmetov, če jih recimo prosimo za štiri gumbe.

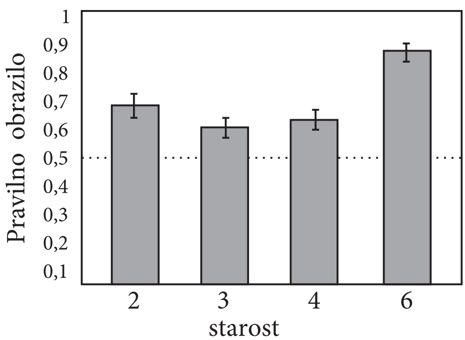
[Slika 1] Preizkus s posodico in gumbi

Z nadaljnjimi testi smo pri otrocih ugotavljali tudi poznavanje obrazil za ednino, dvojino in množino. Otroku smo na računalniku naprimer pokazali sliko z dvema gumboma in ga vprašali, kaj je na sliki. Beležili smo si, ali je otrokov odgovor vseboval dvojinsko obliko »gumba«. Drugič pa smo mu pokazali sliko s tremi bobni in opazovali, ali se je otrok odzval z množinsko obliko »bobni« (in ne »bobna«). Otrokom smo kazali tudi posnetke, na katerih sta ovčka in opica opisovali sliko (npr. sliko z enim balonom): ena je sliko opisala pravilno (»To je balon!«), druga pa napačno (»To so baloni!«). Beležili smo, ali so se otroci odločali za pravilni opis.

Raziskava, katere rezultate trenutno pripravljamo za objavo v znanstveni reviji, je

[Slika 2] Pokazali smo sliko in ugotavljali poznavanje obrazil za ednino, dvojino in množino

pokazala, da so že najmlajši otroci pravilno opisovali predmete, ki smo jim jih pokazali, oziroma da se je to zgodilo pogosteje, kot bi pričakovali, če bi se otroci odločali naključno. To kaže, da znajo otroci obrazila za ednino, dvojino in množino pravilno uporabljati že zelo zgodaj. Otroci so se sicer najbolje odrezali pri označevanju ednine, vendar so bili uspešni pri prav vseh treh slovničnih številih. To ponazarja spodnji grafikon 1, v katerem vsak od štirih stolpcev predstavlja uspešnost za eno od štirih starostnih skupin: prvi stolpec z leve za dvoletnike, drugi za triletnike, tretji za štiriletnike in četrti za petletnike. Vodoravna pikčasta črta pri vrednosti 0,5 označuje, kakšna bi bila vrednost odgovorov, če bi otroci odgovarjali naključno; ker so vsi odgovori precej (in statistično značilno) nad pikčasto črto, lahko zaključimo, da torej otroci vseh preučevanih starosti, že od drugega leta naprej, do določene mere poznajo in pravilno razumejo obrazila za ednino, dvojino in množino.

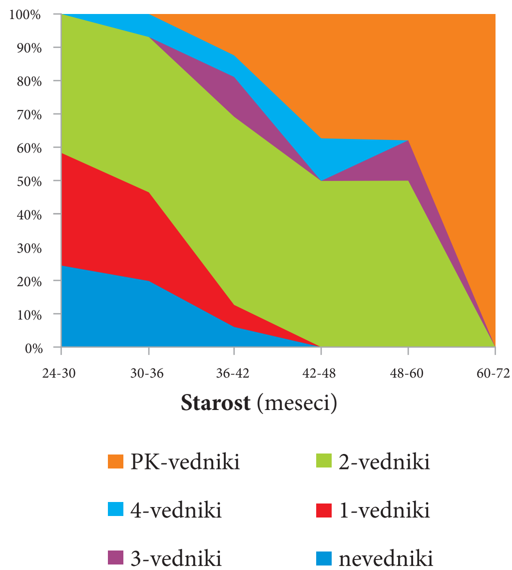


[Grafikon 1] Starost otrok in poznavanje obrazila za ednino, dvojino in množino

Obenem smo ugotovili, da so bili ti isti otroci, ki so očitno slovnično število že usvojili, precej slabši v poznavanju matematičnega števila in da torej slovnično število v razvoju usvojimo prej kot matematično.

Raziskave, ki so jih do sedaj opravili na otrocih, ki odraščajo v okolju z angleščino, ruščino, japonščino in drugimi jeziki, so pokazale, da poteka učenje matematičnega števila postopoma. Otroci najprej usvojijo pomen števila 1, nato kar nekaj časa ostanejo »1-vedniki« (od pol do enega leta). Ko usvojijo pomen števila 2, zopet za nekaj mesecev obstanejo kot »2-vedniki«, nakar postanejo »3-vedniki« ter čez nekaj mesecev usvojijo še pomen števil 4 in 5 ali pa že iz razumevanja števila 4 preskočijo med tiste, za katere velja, da so usvojili princip kardinalnosti – »PK-vedniki«. Pri tem postopnem usvajanju pomena števil naj bi pomembno vlogo odigralo jezikovno znanje, saj naj bi se usvajanje števil opiralo ravno nanj in ravno iz njega izvleklo relevantne pomene (angl. bootstrapping).

Enako kot njihovi vrstniki z drugačnimi jezikovnimi ozadji tudi slovensko govoreči otroci števila usvajajo postopoma in gredo pri tem skozi enake stopnje (grafikon 2).



[Grafikon 2] Starost slovensko govorečih otrok in usvajanje pomena števila

Zanimivo pa je, da začnejo slovenski otroci števila usvajati zelo zgodaj (verjetno pred svojimi vrstniki iz Amerike) ter da ostanejo na stopnji 2-vednikov dlje kot njihovi vrstniki, ki usvajajo jezik, kakršen je angleščina, torej jezik, ki ločuje med slovnično ednino in množino, ne pa tudi dvojino.

Rezultati še niso dokončno obdelani, vendar prve analize jasno kažejo, da za razliko od angleško govorečih otrok, ki dalj časa obstanejo na stopnji 1-vednika, slovensko govoreči otroci dalj časa obstanejo na stopnji 2-vednika. To očitno razliko v načinu usvajanja števil pa se da povsem naravno navezati na očitno medjezikovno razliko. Tako kot naj bi obstoj slovničnega števila oz. obrazil za ednino in množino dajal angleško govorečim otrokom prednost pred na primer japonsko govorečimi otroki, naj bi slovenskim še dodatno prednost omogočalo naše trojno razlikovanje po slovničnem številu.

Če imate glede raziskav, ki jih opravljamo, kakršnekoli pripombe, komentarje ali vprašanja, se lahko brez težav obrnete na nas po telefonu (05 3315 207 – Franc Marušič) ali elektronski pošti (franc.marusic@ung.si). Obenem se ob tej priložnosti ponovno zahvaljujemo Vrtcu pod Gradom, Viškim vrtcem, Vrtcu Kolezija, vrtcu Mladi rod, Vrtcu Mojca, Vrtcu Ciciban Ljubljana in staršem testiranih otrok ter otrokom samim, ki so nam omogočili opravljanje raziskave.

Pogled na raziskovalne naloge iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev

Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za elektrotehniko

A Look at Research Exercises from the Field of Mathematics at Young Researcher Meetings

Od leta 1990-2011 je komisija pregledala okoli 180 raziskovalnih nalog s področja matematike na srečanjih mladih raziskovalcev, ki ga vsako leto organizira ZOTKS. Na srečanjih so svoje naloge predstavili osnovnošolci zadnjih razredov osnovne šole in srednješolci.

Najprej je bilo treba doreči, kaj je dobra raziskovalna naloga iz matematike. Glede na specifičnost matematike je to nekoliko drugače kot pri nekaterih drugih področjih. Od učencev in dijakov ne moremo pričakovati, da bodo odkrivali matematiko. Lahko pa pričakujemo, da bo učenec izbrano področje matematike obvladal, se znal natančno izraziti, da bo spoštoval jezik in izrazoslovje, ki sta uveljavljena. Od učenca lahko pričakujemo, da prispeva nekaj svojega, nekaj malega dodane vrednosti, če se smemo tako izraziti. Recimo, da bi učenec izbral neko področje, se naučil uporabljati matematično orodje s tega področja in rešil kak droben problemček, ki ga s pomočjo mentorja korektno predstavi. Problem je lahko čisto matematičen ali pa ne.

Na zadnjem občnem zboru matematikov, fizikov in astronomov (oktober 2012, Rimske Toplice) sta bili predstavljeni dve nagrajeni raziskovalni nalogi, ki sta bili modela dobre raziskovalne naloge vsaka na svoji strani spektra. Ena je bila čisto matematična, učenec je naredil nekaj svojih lastnih zaključkov, druga pa je predstavila uporabo matematike na konkretnem problemu, ki sicer spada bolj v psihologijo oziroma pedagogiko kot pa v matematiko, ampak je bila še kako dobrodošla zaradi svoje svežine morda tudi drznosti.

Glede na to, da srečanje mladih raziskovalcev poteka na dveh nivojih, regionalnem in državnem, smo na državnem srečanju dobili v oceno naloge, ki so na regionalnih srečanjih zmagovale. Naše mnenje, to je mnenje komisije, na državnem nivoju je težko prodrlo do mentorjev na šolah. Bilo je sicer nekaj bolj ali manj uspešnih poizkusov neposrednih pogovorov z mentorji na šolah. Tako nismo mogli vplivati na izbor tem raziskovalnih nalog. Prihajale so naloge, ki so pod pritiskom mnenja, da mora biti naloga raziskovalna, ne seminarska, in so nekritično uporabljale statistične metode ter skoraj niso bile matematične.

Zaredi tega so se v zadnjem času množično pojavljale naloge statistične narave, ki praviloma niso bile ustrezne. Učence in dijake so silili, da postavijo hipotezo, nato naredijo anketo in na koncu obdelajo rezultate. Edino kar je bilo matematično, je bila morda vsebina ankete.

Na kratko, kako so se teme spreminjale v tem času, ko sodelujem v komisiji. Na začetku je bilo dobrih srednješolskih nalog več kot osnovnošolskih. V splošnem so obravnavale bolj zahtevno snov, kar je tudi razumljivo. Naloge so bile seveda bolj seminarske kot raziskovalne. Bilo pa je kar nekaj bolj ali manj uspešnih poizkusov, da bi naloga postala bolj raziskovalna. V spominu mi je ostala naloga o aritmetiki brez prenosa, kjer sta dijakinji raziskovali, kakšne lastnosti imajo računske operacije v tej aritmetiki in nakazale uporabo. Nekatere naloge so kazale tipično nezainteresiranost mentorjev, ker so se učenci ukvarjali s temami, ki niso imele nobenega smisla, ali pa so uporabljali celo napačne predpostavke.

Sledilo je obdobje uporabe računalnikov. V tem obdobju je bilo nekaj zanimivih nalog iz uporabe programskih orodij, kot so Mathematica, geometrijsko orodje Cabri in drugo. Nekatere so bile bolj računalniške, kot na primer uporaba podatkovnih baz za evidenco ocen dijakov.

Zanimiva je bila naloga, kjer so dijaki s pomočjo programskega orodja Cabri sestavili načrtovalna orodja za konstrukcije, ki niso mogoče s šestilom in ravnilom, kot je trisekcija kota in podvojitev kocke. Ustrezna konstrukcijska orodja so s pomočjo mizarskega mojstra tudi realizirali. Druga naloga, ki mi je ostala v spominu, so bili nemogoči geometrijski objekti. Ti so bili narejeni iz papirja tako, da so bili videti z določene perspektive kot nemogoči geometrijski objekti, kot so na primer Escherjeve stopnice in podobno. V spominu mi je ostala tudi naloga, kjer je dijakinja izračunala profil ceste, po kateri se kotalijo kvadratna kolesa.

Najbolj pa je novo obdobje zaznamoval način predstavitve, množična uporaba orodja PowerPoint. Zanimiva je bila tako rekoč popolna odsotnost programskega orodja TeX za pisanje matematičnih besedil. Mislim, da v vsem tem času niso bile več kot tri raziskovalne naloge zapisane s pomočjo tega orodja, ena na zadnji predstavitvi.

Osebno imam pripombo pri uporabi programskega orodja PowerPoint. Ker ima to orodje pestro izbiro funkcij za obarvanje, animacijo in druge učinke, so učenci to obilno izkoriščali mnogo več, kot pa bilo potrebno za dobro predstavitev. Lahko rečemo, da so bile nekatere predstavitve zaradi tega moteče.

Delež nalog, ki so bile čisto matematične, je upadal, enako pravilnost izražanja in zahtevnost.

Po drugi strani pa se je razmerje med gimnazijskimi in osnovnošolskimi nalogami obrnilo v prid osnovnošolskih, tako po številu kot po kakovosti. Očitno so bili na osnovnih šolah pogoji za mentorje bolj stimulativni kot na srednjih šolah.

V zadnjem času so prevladovale naloge anketne narave. Ankete in statistiko so uporabljali tudi pri temah, kjer to ne bi bilo potrebno.

V tem času se je zvrstila tudi serija nalog na temo zlatega reza. Omenjam jo predvsem zato, ker odraža v duh časa in me je zelo razočarala. Naloge po pravilu niso poskušale razložiti, da je zlati rez v naravi posledica njenega pragmatičnega delovanja, ampak so namesto tega iskali nekakšno lepoto in estetiko v tem razmerju. Veliko je bilo nalog, kjer so nekritično iskali razmerje zlatega reza v dimenzijah človeškega telesa. Ankete so poskušale dokazovati, da je zlati rez čudežno božansko pravilo, univerzalna estetika. Menim, da so popolnoma zgrešili in da so se ukvarjali, recimo v prenesenem pomenu, z astrologijo namesto astronomijo. V spominu mi je ostal tipični nesmiselni (vudu) stavek, ki ni nesmiseln, ker je iztrgan iz konteksta, ampak so bili enako nesmiselni tudi drugi stavki. Ta stavek je: »Delitev slike v zlatem rezu postavi vse ključne elemente v samostojno lego.«

Naredimo kratek pregled tem raziskovalnih nalog. Skupno število osnovnošolskih nalog je bilo 110, gimnazijskih pa je bilo 70:

- **Zgodovinskih naloge** (5 %). Naj navedem dva primera, ki sta mi ostala v spominu:
  - Egipčanski ulomki. Uporaba in računanje z njimi.
  - Inkovski quipu. Opis knjigovodstva ljudstva Inkov s pomočjo vozlov.
- **Statistika in verjetnost** (40 %) Nekaj tem.
  - Primerjava možnosti dobitka pri igrah na srečo, kot sta loto in športna napoved.
  - Teorija iger.
  - Sledijo teme, s katerimi so se ukvarjale ankete: težavnost in tipi matematičnih nalog. razlika pri med deklicami in dečki, uspešnost reševanja besedilnih nalog, odnos do matematike, učinkovitost učenja matematike itd.
- **Zlati rez in fraktali** (20 %).
  - Merjenje in statistična obdelava razmerij pri človeškem telesu, v glasbi, poeziji itd.
  - Zlati rez v arhitekturi.
  - Lastnosti Fibonaccijevega zaporedja.
  - Fraktali in fraktalna dimenzija.
- **Geometrijske naloge** (15 %)
  - Uporaba programskega orodja Cabri.
  - Predstavitev poliedrov in kristalov.
  - Prestavitev nemogočih predmetov.
  - Znamenite točke trikotnika.
  - Aritmetična in geometrijska sredina.
  - Tlakovanja, trikotniki in satovje.
  - Profil ceste, za kvadratna kolesa.
- **Kombinatorika** (15 %)
  - Pomoč pri računanju na pamet.
  - Štetje diagonal mnogokotnikov.

- Paskalski trikotniki in piramide.
- Večkotniška števila.
- Matematična indukcija.
- Hanojski stolpi.
- Zveneča matematika, matematika v glasbi.
- Številski sestavi.
- Šifriranje.
- Rimske številke.

- **Analiza** (5 %)
  - Parakompleksna števila.
  - Kompleksna analiza.
  - Topologija.

Razpis, navodila in ostale koristne informacije dobite na spletni strani ZTKOS http://www.zotks.si/www/portal/sl/default.asp pod zavihkom Gibanje znanost mladini. Pri izbiri tem in strokovni pomoči pri izdelavi raziskovalnih nalog s področja matematike je pripravljen sodelovati tudi avtor prispevka. Lahko pišete na njegov e-naslov: borut@fe.uni-lj.si.

[Slika 1] Spletna stran Gibanja znanost mladini

Matematične aktivnosti na UP FAMNIT za učence, dijake in učitelje

Martin Milanič
Univerza na Primorskem,
Fakulteta za matematiko
naravoslovje in
informacijske tehnologije

α Famnitovi Izleti v matematično vesolje

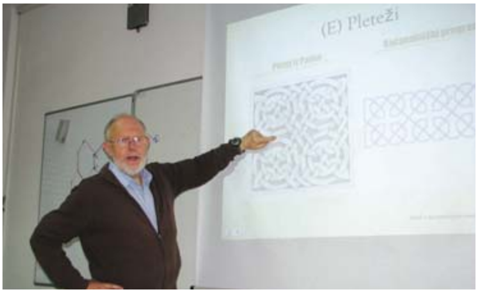
To je cikel poljudnih predavanj o matematiki in njeni vlogi v sodobnem svetu. Na fakulteti UP FAMNIT (Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem) v študijskem letu 2012/13 že četrto leto zapored organiziramo **cikel poljudnih predavanj o matematiki in njeni vlogi v sodobnem svetu *Famnitovi Izleti v matematično vesolje*.**

V obliki krajših zaključenih celot so predstavljeni zanimivi matematični problemi, delo raziskovalcev in uporaba matematike na različnih področjih znanosti in tehnologije. Predavatelji so raziskovalci in pedagogi s pestrimi mednarodno obarvanimi življenjepisi, ki so tako ali drugače povezani z našo fakulteto.

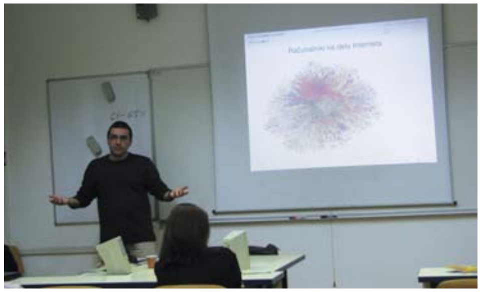
Vsebine. Na dosedanjih štirih ciklih predavanj so se ali se še bodo zvrstila predavanja z najrazličnejših področij matematike in njene uporabe, z naslednjimi naslovi:

[Slika 1]

[Slika 2]

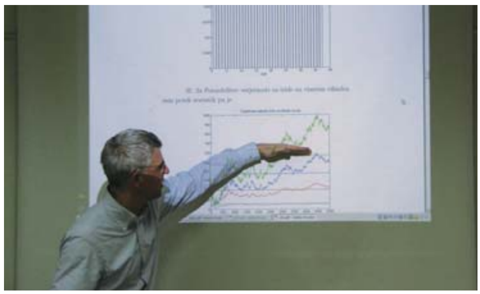


[Slika 3]



[Slika 4]

[Slika 5]



[Slika 6]

[Slika 7]

[Slika 8]

[Slika 9] Utrinki iz FAMNIT-ovih izletov v vesolje (avtorica fotografij: Olga Kaliada)

- Matematika: od zapletene simbolnosti do preproste vsakdanjosti
- Teorija iger: matematika strateškega odločanja
- Zakaj je □□ = 4 in druge zgodbe o razdaljah
- Na kratko o teoriji števil
- Iskanje filogenetskih dreves: smo matematiki in opice v sorodu?
- Donos in tveganje: matematikove finančne dileme
- Vam je všeč brokoli?
- O nogometnih žogah ali zakaj matematike zanima tudi kemija
- Od matrik do barvanja grafov
- Matematični modeli v biologiji: zgodba D'Ancone in Volterre
- Verižnica
- Zgodovina reševanja polinomskih enačb
- Dragi polinom, kje so tvoje ničle?
- Pomen nadzora ruletnih cilindrov
- Zgodba s srečnim koncem
- Kompleksni grafi in omrežja
- Sprehod skozi zgodovino teorije grafov
- O stičiščih matematike in glasbe
- Od linearne funkcije do hanojskega stolpa
- Od matematike do razvoja zdravil
- Kaj vse lahko narišemo z ravnilom in s šestilom?
- Računalnik, ki sliši in govori slovensko
- Grafi na gotskih stropih
- Optimalni vzpon na goro
- Kako računalnik naučimo igrati »4 v vrsto«?
- Najkrajše poti in reševanje nalog o prestavljanjih
- Delta roboti in matematika
- Igre v naravi
- Kako vsemogočen je vsemogočni računalnik?

Predavanja so namenjena vsem, ki jih zanima matematika: učiteljem matematike, dijakom srednjih šol, zainteresirani širši javnosti. Primerna so tudi za nadarjene učence višjih razredov osnovnih šol.

Vljudno vas vabimo, da se udeležite predavanj cikla, da med učence oz. dijake razširjate znanja, pridobljena na predavanjih, ali pa na predavanja pripeljete tudi svoje učence oz. dijake. Vstop je prost.

Predavanja potekajo **enkrat mesečno,** ob sredah ali petkih ob 18. uri, večinoma v Veliki predavalnici fakultete UP FAMNIT, na Glagoljaški 8 v Kopru. Cikel predavanj bomo predvidoma nadaljevali tudi v letu 2013/14.

Več informacij o ciklu je na voljo na spletu, http://matematicni-izleti.famnit.upr.si/ Veseli bomo tudi vaših predlogov in vprašanj preko e-pošte, na martin.milanic@upr.si.

β Famnitov poletni tabor Matematika je kul

Od 26. avgusta do 1. septembra 2012 je v Kopru potekal že drugi Famnitov poletni tabor Matematika je kul, v organizaciji fakultete UP FAMNIT in Inštituta Andrej Marušič Univerze na Primorskem.

Tabor je bil namenjen učencem 7., 8. in 9. razreda osnovnih šol in dijakom srednjih šol, ki jih zanima matematika. Mladi matematični navdušenci so na taboru poslušali predavanja o raznovrstnih matematičnih temah, se spopadli z zanimivimi matematičnimi orehi in na delavnicah spoznali nekatera računalniška orodja, ki lahko pri tem služijo v pomoč. Zadnji večer so se pomerili v nagradnem kvizu, kjer so se preizkusili v znanju, ki so ga osvojili na taboru.

[Slika 10]

[Slika 11]

[Slika 12] Utrinki s FAMNIT-ovega poletnega tabora Matematika je kul (fotografije: Olga Kaliada)

Glavni **cilj tabora** je bil predvsem udeležencem prikazati matematiko na čim bolj uporaben način, z raznimi primeri aplikacij matematičnih teorij v praksi.

Nadejamo se, da bo tabor Matematika je kul postal tradicionalno druženje mladih matematičnih navdušencev. Naslednji tabor je predviden **konec avgusta 2013**.

Rok za prijavo: 1. julij 2013 oz. do zapolnitve mest.

Vljudno vas vabimo, da o taboru obvestite vaše učence oz. dijake.

Vse informacije o natančnem terminu tabora in o načinu prijave bodo na voljo maja 2013 na spletni strani http://tabor.famnit.upr.si. Tam so na voljo tudi informacije o preteklih taborih.

Veseli bomo tudi vaših predlogov in vprašanj preko e-pošte, na martin.milanic@upr.si.

δ 56. tekmovanje srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja

V soboto, 21. aprila 2012, je v prostorih Gimnazije Koper potekalo 56. tekmovanje srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja. Dogodek je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, gostitelji pa so bili UP FAMNIT, UP PEF (Pedagoška fakulteta Univerze na Primorskem) in Gimnazija Koper. Tekmovanja se je udeležilo 172 najboljših dijakov z regijskih tekmovanj.

ε Raziskovalni dnevi iz matematike

Od četrtka 30. avgusta do ponedeljka 3. septembra 2012 so v Kopru potekali Raziskovalni dnevi iz matematike. Organiziralo jih je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, pri organizaciji pa sta bili močno vpeti UP FAMNIT in UP PEF, ki sta priskrbeli prostore in krili vse stroške bivanja dijakov v dijaškem domu v Kopru. Vodje zadnjih treh raziskovalnih dni so bili z UP FAMNIT. Udeleženci raziskovalnih dni so teoretično in skozi reševanje nalog obravnavali naslednje teme: kombinatoriko (rekurzivne enačbe in načelo ekstremnega elementa), geometrijo (Ptolomejev izrek in Ptolomejevo neenakost), funkcijske enačbe in polinome, teorijo števil (Evklidov algoritem, kongruence, mali Fermatov izrek) in neenakosti.

γ Matematični dan na UP FAMNIT

Zakaj ne bi mladim matematičnim navdušencem namesto športnega ali kulturnega dne ponudili *matematični dan*? Učenci oz. dijaki bi imeli priložnost preživeti dan v prijetnem mediteranskem okolju in se ob tem seznaniti z zanimivimi matematičnimi problemi, z delom raziskovalcev in z uporabo matematike na različnih področjih znanosti in tehnologije. Enourna predavanja/delavnice za mlade matematične navdušence lahko pripravimo z naslednjih področij:

- *algebra,*
- *teorija grafov,*
- *teorija iger,*
- *kombinatorika,*
- *geometrija,*
- *teorija števil,*
- *numerična matematika,*
- *matematično modeliranje,*
- *uporaba matematike v računalništvu.*

Matematični dan na UP FAMNIT je **namenjen učencem 9. razreda osnovnih šol in dijakom srednjih šol**, ki jih zanima matematika. Matematični dan smo prvič izvedli v petek, 29. marca 2013, ko so nas obiskali učenci 9. razreda OŠ Sostro.

Naslednji možni termin za *Matematični dan na* Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Univerze na Primorskem, je **petek 11. oktober 2013.**

Za več informacij nam pišite na: info@famnit.upr.si. Prijave sprejemamo do **petka 20. septembra 2013**.

7. matematični raziskovalni tabor za srednješolce MaRS 2012

The 7th Mathematical Research Camp MARS 2012 for Secondary Schoolboys

Boštjan Kuzman
Univerza v Ljubljani,
Pedagoška fakulteta

MARS je enotedenski matematični raziskovalni tabor za srednješolce, ki poteka že od leta 2006. Lanskoletni MaRS je potekal v Fari, Kostel, od 17. do 24. avgusta 2012, udeležilo pa se ga je 24 dijakov iz vse Slovenije. Za udeležbo se lahko načeloma prijavi vsakdo, ki ima veselje do matematike in raziskovanja ter želi aktivno preživeti teden dni počitnic v družbi vrstnikov, kandidati pa morajo k prijavi priložiti motivacijsko pismo in tako izkazati pristen interes za udeležbo. Med sicer kar številnimi raziskovalnimi tabori in poletnimi šolami za mlade v Sloveniji je tabor MARS iznašel razmeroma izviren koncept, kako mlade tudi med počitnicami naučiti kaj strokovnega, jih soočiti z lastnimi mejami in sposobnostmi ter jih navdušiti za ambicioznejše raziskovalno delo in izbiro življenjske poti.

Program tabora vsebuje različne aktivnosti, tako strokovne (predavanja, delavnice, priprava projektov) kot tudi tiste, ki so namenjene predvsem druženju, izmenjavi izkušenj ter razvoju osebnosti in poklicne kariere. Strokovno jedro MaRS predstavljajo delavnice, v katerih dijaki pridobijo nova teoretična in praktična znanja (npr. izbrane vsebine matematične stroke, uporaba tehnologije za simbolno računanje, dinamično geometrijo, programiranje), ter priprava skupinskih projektov dijakov, ki jih dijaki ob zaključku tabora tudi predstavijo. Tematsko so projekti zelo raznoliki in prilagojeni predznanju avtorjev, običajno pa vsebujejo samostojen študij krajšega strokovnega članka, izdelavo modelov (npr. s pomočjo računalnika) in pripravo predstavitve. Letošnje teme projektov so bile denimo *Problem pravične delitve, Celoštevilsko linearno programiranje* in *Mrežni mnogokotniki* s področja kombinatorične optimizacije, *Lov na komete* s področja geometrije stožnic, *Marsovec v hribih* s področja polinomske aproksimacije, *Problem tibetanskih menihov* s področja teorije grafov, *Peanova krivulja* iz elementarne analize ter *Vigenerjeva šifra* iz kriptografije. Kljub morda nekoliko zastrašujočim naslovom so bili projekti izbrani tako, da vsebina za dijake ni bila prezahtevna, kot vsako leto pa je med njimi nastalo nekaj odličnih izdelkov, ki daleč presegajo običajno šolsko raven znanja.

Vodilna tema letošnjih marsovskih delavnic pa je bila *kriptografija*. Niz predavanj iz tega področja je za udeležence pripravil dr. Jernej Tonejc, matematik z bogatimi izkušnjami na industrijskih projektih s tega področja. Piko na i pa strokovnim aktivnostim na MaRS vsako leto dodajo večerna predavanja, ob katerih vabljeni ugledni raziskovalci predstavijo aktualne znanstvene probleme, svoje raziskovalno delo in karierno pot. Dijaki so letos poslušali odlična predavanja *Prijatelji in sovražniki v družabnih omrežjih* (dr. Jure Leskovec, Stanford University, ZDA),

[Slika 2] *Dr. Jure Leskovec, Stanford University, je dijakom predaval o Prijateljih in sovražnikih v socialnih omrežjih.*

[Slika 1] *Marsovci in celoštevilsko linearno programiranje*

[Slika 3] *Dr. Jernej Tonejc, Univerza v Ljubljani, je pripravil niz predavanj na temo Kriptografija.*

Rodovne funkcije (dr. Matjaž Konvalinka, UL FMF), *Optimalni vzpon na goro* (dr. Gašper Jaklič, UL FMF), Kako deluje Google (dr. Helena Šmigoc, University College Dublin), ter *Computation in Brains and Computers* (dr. Barak A. Pearlmutter, Hamilton Institute, Ireland). Vsi predavatelji so z dijaki radodarno delili tudi bogate izkušnje iz lastne študijske in poklicne poti, ki jih je vodila po nekaterih najuglednejših univerzah in raziskovalnih ustanovah v tujini.

Poleg kakovostnih strokovnih aktivnosti MaRS udeležencem nudi primerno socialno okolje, ki ga izstopajoči in nadarjeni mladostniki v šolah včasih pogrešajo. Skupinsko delo na projektih jih spodbuja k sodelovanju in delitvi odgovornosti, po drugi strani pa lahko posamezniki zainteresiranim vrstnikom predstavijo svoje dosežke (na primer raziskovalne naloge ali udeležbo na mednarodnih tekmovanjih) brez zadrege in odpora, ki bi ga bili kot izstopajoči deležni pri svojih sošolcih. Tako so letos med šolskim letom izdelani raziskovalni nalogi predstavili dijaki Rok Gregorič (Parakompleksna analiza) ter Vesna Iršič in Anja Petković (Matematični model sprotnega in kampanjskega učenja), svoja doživetja z mednarodnih olimpijad v znanju pa Rok Kaufman, srebrni v lingvistiki in kemiji, Vesna Iršič, bronasta v matematiki, ter Jan Šuntajs, udeleženec fizikalne olimpijade.

[Slika 4] Dijakinji Anja Petković in Vesna Iršič med predstavitvijo raziskovalne naloge

MaRS vsako leto popestrijo tudi številne druge družabne aktivnosti, denimo Vzlet (spoznavni večer), vsakodnevna Marsovska telovadba z anekdotami iz zgodovine matematike, Velika marsovska avantura (matematično-orientacijsko tekmovanje), Marsovski piknik in Pristanek (zaključna predstavitev), ki so vse šaljivo povezane z idejo raziskovanja neznanega planeta. Ko se udeleženci po preživetem tednu na taboru vrnejo v šolske klopi, se zares počutijo kot pravi marsovci. Več o njihovih podvigih lahko izveste na spletni strani http://mars.dmfa.si. MaRS 2013 bo predvidoma potekal 3. teden v avgustu, več informacij o njem pa bo na spletni strani na voljo v aprilu 2013. Vodja programa MaRS pri DMFA Slovenije je dr. Boštjan Kuzman.

Novice DMFA

Boštjan Kuzman

α Strokovno srečanje in 65. Občni zbor DMFA Slovenije

DMFA Slovenije vljudno vabi vse ljubitelje matematike, fizike in astronomije k sodelovanju na srečanju, ki bo tokrat potekalo v Hotelu Golf na Bledu **15. in 16. novembra 2013**. Vodilna tema strokovnega srečanja za učitelje bo predvidoma **Matematično-fizikalni sprehodi v naravo**, v okviru katere bodo udeleženci in vabljeni predavatelji pripravili različna predavanja in praktične delavnice. Na srečanju bomo obeležili tudi **140-letnico rojstva akad. prof. dr. Josipa Plemlja**, dobrodošli pa bodo tudi drugi prispevki in predstavitve udeležencev o aktualnih strokovnih temah s področja poučevanja matematike, fizike ali astronomije. Natančnejše informacije o srečanju bodo v kratkem objavljene na spletni strani www.dmfa.si.

β Matematični raziskovalni tabor MARS 2013

Že 8. raziskovalni tabor za srednješolce MARS 2013 v organizaciji DMFA Slovenije bo potekal v Bohinju od 18. do 24. avgusta. Vodja programa je dr. Boštjan Kuzman. Za udeležbo se lahko prijavijo vsi dijaki, ki imajo veselje do raziskovanja in želijo preživeti teden dni počitnic v družbi vrstnikov iz vse Slovenije. Udeleženci bodo sodelovali v različnih delavnicah in pripravili skupinske projekte, poljudna predavanja zanje pa bodo pripravili uveljavljeni slovenski matematiki. Več informacij o vsebini in prijavi najdete na spletni strani mars.dmfa.si.

[Slika 1] Matematično raziskovalno srečanje, fotografija: J. Šuntajs

δ Bistroumi 2013

26. maja je v Cankarjevem domu v Ljubljani potekala tradicionalna podelitev nagrad najuspešnejšim učencem in dijakom na državnih tekmovanjih iz znanja matematike, fizike in astronomije v organizaciji DMFA Slovenije. Vrhunec prireditve je bila predstavitev petnajsterice dijakov, izbranih za udeležbo na letošnjih mednarodnih olimpijadah iz znanja, ki sta jih na odru sprejela predsednik RS Borut Pahor in predsednik DMFA Slovenije prof. dr. Andrej Likar, olimpijske majice pa so jim predali nosilci medalj s preteklih olimpijad Vesna Iršič, Matej Aleksandrov in Veno Mramor. Tekmovalce so nagovorili tudi predstavniki

[Slika 2] Slovenske ekipe za mednarodne olimpijade, fotografija: V. Opaškar

slovenskih univerz in bivši olimpijec astrofizik dr. Anže Slosar, ki ga je revija Popularscience leta 2012 uvrstila med deset »najbriljantnejših« umov na svetu. V programu prireditve, ki sta jo pripravila dr. Boštjan Kuzman in dr. Matjaž Željko, so sodelovali še matematik in stand-up komik dr. Uroš Kuzman, ustanova Hiša eksperimentov s fizikalnimi poskusi v živo ter glasbenik Jože Bogolin na tolkalih.

ε Člani olimpijskih ekip:

54. Mednarodna matematična olimpijada,
18. - 28. julij 2013, Santa Marta, Kolumbija
Rok Havlas, II. gimnazija Maribor
Klara Nosan, I. gimnazija v Celju
Mihaela Pušnik, I. gimnazija v Celju
Juan Gabriel Kostelec, Gimnazija Bežigrad
Žiga Krajnik, Gimnazija Škofja Loka
Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor

44. Mednarodna fizikalna olimpijada,
7. - 15. julij 2013, Kopenhagen, Danska
Žiga Krajnik, Gimnazija Škofja Loka
Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor
Bine Brank, Gimnazija Bežigrad
Michel Adamič, Gimnazija Bežigrad
Žiga Nosan, Gimnazija Ledina, Ljubljana

7. Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike,
27. julij - 5. avgust 2013, Volos, Grčija
Michel Adamič, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija
Jernej Černigoj, Sr. šola Veno Pilon Ajdovščina
Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor
Krištof Skok, I. gimnazija v Celju

7. srednjeevropska matematična olimpijada,
avgust 2013, Madžarska
Lara Jerman, Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik
Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor
Juš Kosmač, Gimnazija Jesenice
Juan Gabriel Kostelec, Gimnazija Bežigrad
Žiga Krajnik, Gimnazija Škofja Loka
Klara Nosan, I. gimnazija v Celju

2. evropska dekliška matematična olimpijada,
8. - 14. april 2013, Luksemburg
Lara Jerman, Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik (pohvala)
Klara Nosan, I. gimnazija v Celju
Maruša Pečovnik, I. gimnazija v Celju (bronasta medalja)
Mihaela Pušnik, I. gimnazija v Celju (pohvala)

Iz naše založbe za vas

Avtor: Sonja Pečjak, Ana Gradišar
Vrsta gradiva: monografija
Stopnja izobraževanja: osnovna šola, srednja šola
Predmet: slovenščina, splošno
Leto izida: 2012
Obseg strani: 424 str.

Temeljno delo za vse, ki se ukvarjajo s spodbujanjem bralne pismenosti in razvijanjem kompetence učenje učenja. Gre za drugo, razširjeno in dopolnjeno izdajo knjige, v kateri so temeljito prenovljena in z novejšimi spoznanji stroke posodobljena prva štiri poglavja. Ta so teoretično izhodišče in okvir za razumevanje kasnejših poglavij, v katerih so predstavljene posamezne bralne strategije. Ključni pojmi, ki označujejo knjigo, so kompetenca učenje učenja, motivacija in samoregulacija učenja, učne strategije in bralne učne strategije, raziskave s področja učenja, bralne učne strategije pred in med branjem ter po njem – tudi na ravni konkretnih besedil –, kompleksne učne strategije idr. Posebna pozornost je namenjena novejšim raziskavam motivacije za branje kot enega najpomembnejših dejavnikov za spodbujanje bralne pismenosti pri učencih. Knjiga je namenjena pedagoškim delavcem v najširšem smislu – tudi študentom bodočim učiteljem, zlasti učiteljem na vseh stopnjah izobraževanja, svetovalnim delavcem, ne nazadnje pa tudi staršem, da bi lahko bolj učinkovito pomagali otrokom pri učenju.

Avtor: Tanja Bezić, (ur.)
Vrsta gradiva: priročnik za učitelje
Stopnja izobraževanja: osnovna šola
Predmet: splošno
Leto izida: 2012
Obseg strani: 359 str.

Priročnik temelji na najsodobnejših spoznanjih edukacijskih ved in ugotovitvah svetovno znanih strokovnjakov s področja odkrivanja in dela z nadarjenimi učenci. Sestavljen iz teoretičnega uvoda o učni diferenciaciji in individualizaciji ter konkretnih primerov prepoznavanja nadarjenih učencev pri pouku različnih predmetov in področij. Posebni prispevek je namenjen tudi individualiziranim načrtom vzgojno-izobraževalnega dela (INDEP), ki naj bi predstavljali osnovno sintezo spoznanj o značilnostih učenca, njegovih potrebah, interesih in željah ter idej in dogovorov učiteljev in učenca ter staršev o tem, kako učencu čim bolje prilagoditi vzgojno-izobraževalno delo v šoli, pa tudi dejavnosti zunaj nje. V priročniku so predstavljena izhodišča za prilagajanje vzgojno-izobraževalnega dela pri posameznih predmetih in drugih vzgojno-izobraževalnih aktivnostih ter primeri uspešne prakse. V veliko pomoč bo vsem strokovnim delavcem, še posebej učiteljem razrednega in predmetnega pouka ter ravnateljem. Priročnik pomembno prispeva k pogledu, smislu in pomenu posebne skrbi za nadarjene učence v osnovni šoli.

Informacije in naročila za vse opisane publikacije:
- po pošti: Zavod RS za šolstvo, Poljanska 28, 1000 Ljubljana
- po faksu: 01/3005 199
- po elektronski pošti: zalozba@zrss.si
- na spletni strani: http://www.zrss.si/default_zalozba.asp

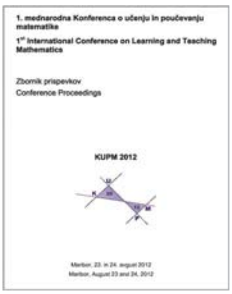
Berimo knjige iz digitalne knjižnice

Kako do DIGITALNE KNJIŽNICE? Imate dve možnosti:

1. Na spletni strani Zavoda RS za šolstvo http://www.zrss.si/ poiščite in kliknite na ikono . In vstopili ste v digitalno knjižnico.
2. Vpišite v naslovno vrstico vašega brskalnika http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/.
3. Ali pa v spletni brskalnik vpišite ZRSŠ Digitalna knjižnica.

Priporočamo vam:

Zbornik prispevkom s 1. Mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike



Vse okoli nas se spreminja. Ali se spreminja tudi pouk matematike? V zadnjem desetletju so bili prenovljeni vsi učni načrti in katalogi znanj in prinesli nekaj ključnih novosti, od avtonomije učitelja do učenja z uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije. V zborniku so zbrani prispevki, kjer so nam strokovnjaki s področja didaktike matematike predstavili teoretična izhodišča, kjer učitelji nakazujejo, kako poučujejo matematiko po vsej vertikali, od 1. razreda osnovne šole do 4. letnika srednje šole, matematiko danes, za jutri.

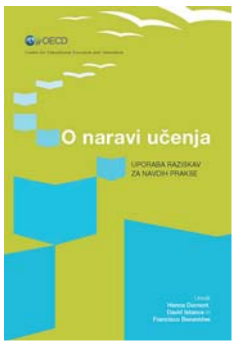
Povezana je teorija in praksa učenja in poučevanja matematike.

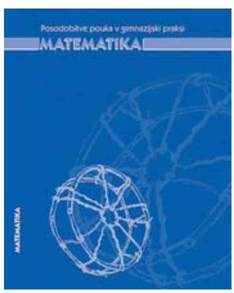
Vsebine so navedene v naslednjih tematskih sklopih:

1. Strategije in oblike dela pri pouku matematike s preverjeno učinkovitostjo
2. Aktivna raba informacijsko-komunikacijske tehnologije pri učenju in poučevanju
matematike
3. Uvajanje novosti iz učnih načrtov in katalogov znanja
4. Matematika in naravoslovni predmeti
5. Ugotavljanje znanja pri matematiki

Želimo, da bo zbornik prispevkov pripomogel k izboljševanju pouka matematike po vsej vertikali in prispeval k bogatitvi in razvoju vsakega učitelja.

In še naslednje knjige, ki jih lahko prelistate, preberete …





Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi

Uredili:
mag. Mojca Suban, Silva Kmetič

Avtorji:
mag. Mojca Suban, Silva Kmetič, dr. Amalija Žakelj, dr. Alenka Lipovec, dr. Zlatan Magajna, mag. Mateja Sirnik, Vesna Vršič, PolonaLegvart, Andreja Perkovič, Damijana Čekada, Metka Flisar, Marija Magdič, Katja Kmetec, Ana Kodelja, Jerneja Bone, mag. Sonja Rajh, BoštjanRepovž, JožeSenekovič

Strokovni pregled:
dr. Marko Razpet, Sonja Kosič, Mateja Peršolja, Davorka Pregl

Naklada: 500 izvodov

Ljubljana, 2013

Publikacija je brezplačna.

V okviru zbirke Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi bo v kratkem izšla publikacija z zgoščenko za matematiko, ki je prvenstveno namenjena strokovni podpori učiteljev razrednega pouka in učiteljem matematike pri uvajanju novosti iz učnega načrta za matematiko v prakso.

Ogrodje priročnika poleg uvodnega poglavja, ki prinašacelovito sliko novosti in posodobitev učnega načrta ter nekatere specifike razredne stopnje z didaktičnimi priporočili za vsebine, ki učencem povzročajo največ preglavic (merjenje dolžine, mase in prostornine, denarne enote …), predstavlja pet vsebinskih stebrov: problemske naloge, vzorci, matematično modeliranje, ocenjevanje ter vrednotenje in samovrednotenje znanja, ki so jih pripravili članov Predmetne razvojne skupine za matematiko v osnovni šoli in mentorskih učiteljev.

Zbirka Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi je nastala v okviru projekta Posodobitev kurikularnega procesa v osnovni šoli in gimnaziji v sklopu Posodobitev pouka na osnovni šoli in gimnaziji, ki ga sofinancirata Evropski socialni sklad Evropske unije in Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport.

Povabilo k sodelovanju

Revija Matematika v šoli je namenjena učiteljem matematike v osnovnih in srednjih šolah ter strokovnjakom s področja didaktike matematike. Ker so cilji revije vzpodbuditi komunikacijo med učitelji in drugimi strokovnjaki z namenom razvijati in izboljševati učno prakso z izmenjavo informacij, znanja, idej in izkušenj, so prispevki učiteljev na vseh stopnjah izobraževanja in drugih strokovnjakov s področja izobraževanja neprecenljive vrednosti, zato vabimo vse k sodelovanju.

Članki lahko pokrivajo različno tematiko npr. medpredmetno povezovanje, preverjanje in ocenjevanje znanja, uvajanje novih učnih načrtov, razvoj in uporabo učne tehnologije, zanimivosti iz stroke, uspehe učiteljev, učencev oziroma dijakov na področju interesnih in izvenšolskih dejavnosti ter tekmovanjih, izsledke raziskav in novejših spoznanj s področja teorije učenja in poučevanja.

Članek naj obsega do 16 strani. Vsebuje naj naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), povzetek v slovenskem jeziku, ki naj ne bo daljši od 7 vrstic, ključne besede ter citirano literaturo. Po možnosti lahko avtor doda naslov, povzetek in ključne besede zapisane tudi v angleškem jeziku.

Besedilo naj bo napisano v Wordovem dokumentu. Fotografije naj bodo vsaj ločljivosti 300 dpi.

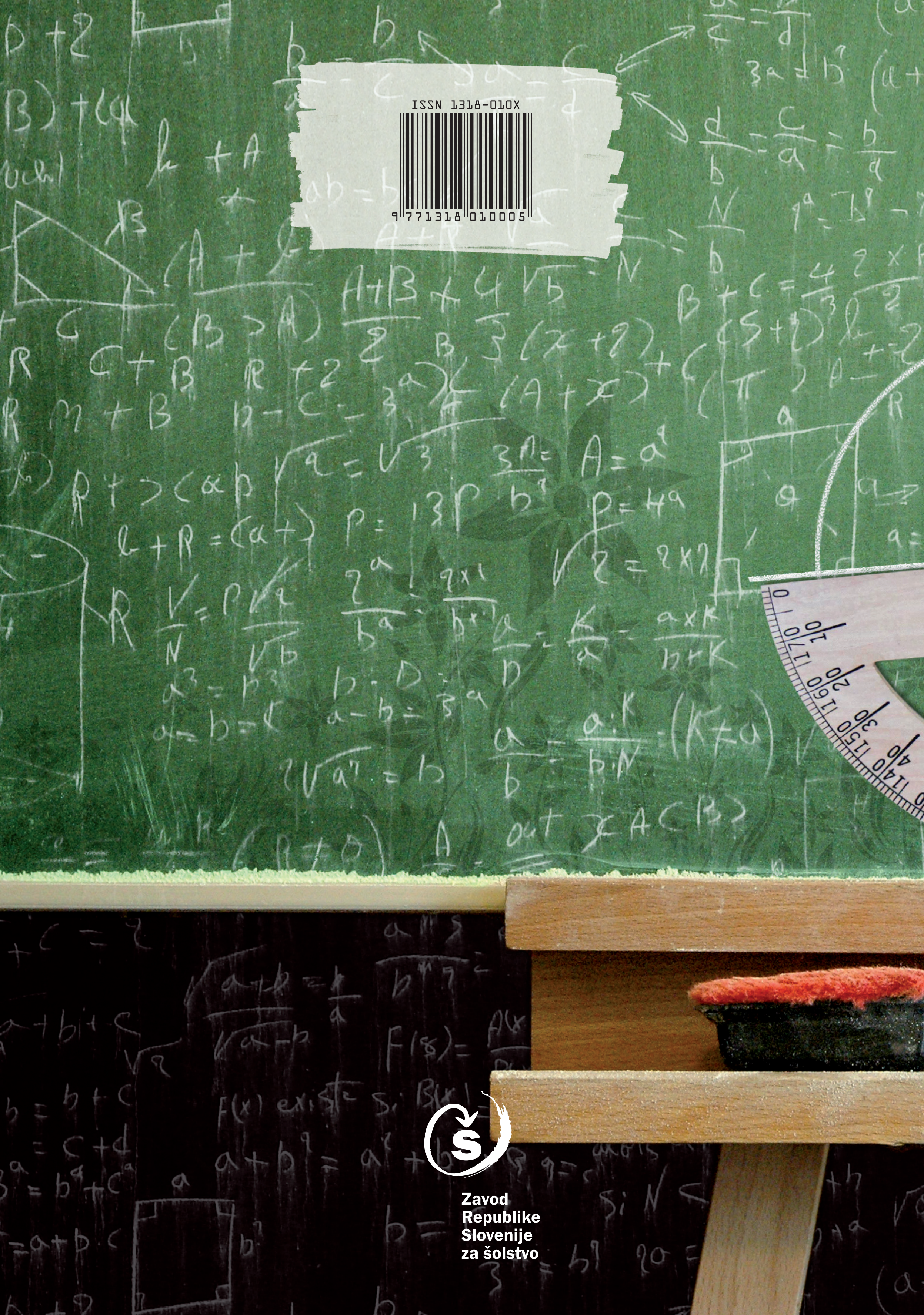
Način navajanja literature in virov si lahko pogledate v reviji pri posameznih člankih.

Članki v reviji so recenzirani in razvrščeni v štiri kategorije:

- izvirni znanstveni članek,
- pregledni znanstveni članek,
- strokovni članek,
- drugo (poročilo, ocena, intervju …).

Izvorne datoteke pošljite na naslov: Zavod RS za šolstvo, OE Nova Gorica (za revijo Matematika v šoli), Erjavčeva 2, 5000 Nova Gorica ali po elektronski pošti na naslov **jerneja.bone@zrss.si** ali kateremu od ostalih članov uredniškega odbora.

Veseli bomo vsakega vašega prispevka, vsak avtor pa bo prejel odgovor o ustreznosti članka za objavo v reviji!



ISSN 1318-010X
9 771318 010005

Zavod Republike Slovenije za šolstvo