PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 4
Strani 203–206

Danijel Bezek:

Z IGRO SPOZNAJMO TELESA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/559-Bezek.pdf

Z IGRO SPOZNAJMO TELESA

Navodilo: Pri sestavljanju teles potrebuješ plastelin in enako dolge paličice. Oboje že dobiš pripravljeno v *"geometrijski zložljivki"*. Če geometrijske zložljivke nimaš, poprosi zanjo učitelja, ki ti jo bo gotovo posodil. Lahko pa si oboje pripraviš tudi sam. Zelo pripravne so plastične paličice, ki jih uporabljajo učenci nižjih razredov osnovne šole. Dobiš jih v vsaki knjigarni in še drage niso.

Iz plastelina oblikuj kroglice. To bodo *oglišča* teles, ki jih boš sestavljal. S paličicami je treba kroglice povezati v telo tako, kot zahtevajo navodila in tabela. Telesa, ki jih boš tako sestavil, so *trikotni enakorobni konveksni poliedri*. To pomeni, da so telesa *izbočena*, da so vsi *robovi* na površju telesa skladni, vendar pa se v vseh ogliščih ne stika vselej enako mnogo robov. Posvetili se bomo le takim telesom, katerih površje pokrivajo *trikotniki*. Odslej bomo takim telesom rekli kar enakorobni poliedri.

Če te matematična utemeljitev enakorobnih poliedrov ne zanima preveč ali pa se ti zdi preveč zahtevna, lahko točko 1. preskočiš in začneš sestavljati telesa po opisu v točki 2. Morda pa te bo sestavljanje navdušilo do te mere, da se boš po uspešnem delu vrnil in prebral tudi točko 1.

1. Kot rečeno, se bomo ukvarjali s takimi enakorobnimi poliedri, katerih površje pokrivajo trikotniki, vendar tako, da se v nekaterih ogliščih stikajo po trije trikotniki (tako oglišče bomo označili o_3), v nekaterih štirje (tako oglišče bomo označili o_4) in v nekaterih ogliščih naj se stika pet trikotnikov (oznaka zanje je o_5).

Naloga: Bralec naj sam ugotovi, zakaj ni oglišč, v katerih bi se stikalo šest (ali več) trikotnikov.

Naloga: Ali je lahko raznostranični trikotnik ploskev enakorobnega poliedra?

Kot za vsako telo, velja tudi za enakorobne poliedre *Eulerjev poliedrski obrazec* (1) :

$$o - r + p = 2 \tag{E}$$

(o je število oglišč, r število robov, p število ploskev na površju poliedra.)

Za enakorobne poliedre, pokrite s trikotniki, sklepamo takole: Naj ima telo r robov. Tedaj ima $2r$ oglišč, vendar pri tem štejemo oglišča o_3 trikrat, oglišča o_4 štirikrat in oglišča o_5 petkrat. Zato velja:

$$3o_3 + 4o_4 + 5o_5 = 2r \tag{1}$$

Podobno teče misel za ploskve. Ob vsakem robu se stikata dve ploskvi, torej ima polieder $2r$ ploskev. Ker so ploskve trikotniki, vsako ploskev štejemo trikrat in je v resnici vseh ploskev $2r/3$. Odtod dobimo:

$$2r = 3p \tag{2}$$

Zvezi (1) in (2) upoštevamo v Eulerjevem obrazcu za poliedre, ki ga najprej pomnožimo s 6 ($6o = 6r - 6p + 12$). Tako dobimo:

$$3o_3 + 2o_4 + o_5 = 12 \tag{3}$$

Ta enačba nam pomaga poiskati enakorobne poliedre. Ti ne morejo imeti manj kot 4 ali več kot 12 oglišč.

Naloga: Pokaži, da ni enakorobnega poliedra, ki bi bil pokrit s trikotniki in bi imel več kot 12 oglišč. Pomagaj si z enačbo (3)!

Za zgled začnimo raziskavo z enakorobnim poliedrom, ki ima štiri oglišča. Dvoje mora veljati zanj: $o_3 + o_4 + o_5 = 4$ in $3o_3 + 2o_4 + o_5 = 12$. Rešitev je ena sama: $o_3 = 4$ in $o_4 = o_5 = 0$. Ta enakorobni polieder ima štiri oglišča, v katerih se stikajo po trije trikotniki.

Iz enačbe (1) lahko izračunamo število robov; teh je 6.

Enačba (2) pa nam pove število ploskev, ki ga pokrivajo; te so v našem primeru 4. Vse, kar smo izvedeli o tem poliedru, podajmo v pregledni tabeli:

(1) J.S.Taylor: Pravilna telesa, Presek 1980-81, št. 3

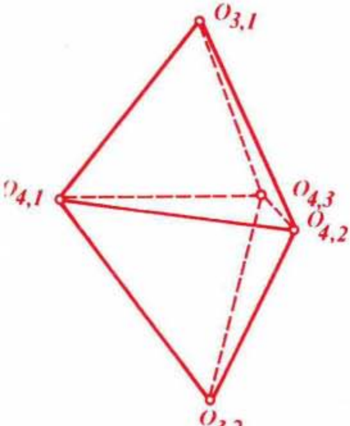
o	o_3	o_4	o_5	r	p
4	4	0	0	6	4

Iz podatkov, ki ga opišejo, spoznamo pravilno telo četverec (tetraeder).

Izbrali smo si lažji primer. Že pri raziskovanju naslednjega predstavnika, za katerega želimo, da ima 5 oglišč, najdemo iz enačb: $o_3 + o_4 + o_5 = 5$ in $3o_3 + 4o_4 + 5o_5 = 12$ dve rešitvi

o	o_3	o_4	o_5	r	p
5	3	1	1	9	6
5	2	3	0	9	6

Toda model enakorobnega poliedra lahko naredimo le za drugi primer (slika 1).



Slika 1

Naloga: Pokaži, da za enakorobne poliedre, ki imajo najmanj 6 in največ 12 oglišč, obstaja 16 možnosti.

Vendar za vse rešitve ne moremo sestaviti modelov. V tabeli so izbrani tisti enakorobni poliedri, za katere boš lahko sestavil modele.

2. Pred seboj imaš tabelo s podatki za enakorobne poliedre.

	o	o_3	o_4	o_5	r	p
1.	4	4	-	-	6	4
2.	5	2	3	-	9	6
3.	6	-	6	-	12	8
4.	7	-	5	2	15	10
5.	8	-	4	4	18	12
6.	9	-	3	6	21	13
7.	10	-	2	8	24	16
8.	12	-	-	12	30	20

o pomeni število vseh oglišč poliedra. Toliko plastelinastih kroglic moraš narediti.

r nam pove število robov, kar pomeni, da moraš vzeti toliko paličic.

Med skupnim številom oglišč o, jih je o_3 takih, v katerih se stikajo trije enakostranični trikotniki in moraš vanje zabosti toliko paličic, da boš z njimi oblikoval tri trikotnike. Podobno velja za oglišča o_4, v katerih se stikajo štirje enakostranični trikotniki, in o_5, v katerih se stika pet enakostraničnih trikotnikov.

Z nekaj domiselnosti in spretnosti moraš vse kroglice in vse paličice povezati v celoto tako, da opis poliedra ustreza zahtevam v tabeli. Lahko si še pomagaš tako, da oblikuješ oglišča o_3, o_4 in o_5 vsaka s plastelinom svoje barve.

Danijel Bezek