Konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Marjan Jerman

Konstrukcije pravilnih večkotnikov

Grški geometri so znali, tako kot bi znal vsak od vas, brez težav samo s pomočjo ravnila in šestila narisati enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik. Precej več dela in premišljevanja so porabili za konstrukcijo pravilnega petkotnika, sedemkotnika pa nikakor niso uspeli narisati.

Da je bil njihov trud zaman, je šele v devetnajstem stoletju uspelo dokazati Pierru Wantzlu (1814–1848). ki je našel potrebne pogoje za konstrukcijo pravilnega n-kotnika. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pa je pokazal, da so ti pogoji tudi zadostni.

Pravilni n-kotnik je mogoče narisati samo s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je število njegovih stranic n oblike

$$n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdots p_m; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

pri čemer so p_i različna Fermatova praštevila. *Fermato praštevilo* je število oblike

$$p = 2^{(2^t)} + 1; \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

ki je hkrati praštevilo. Pierre de Fermat (1601–1655) je domneval, da je vsako število te oblike praštevilo, a tega ni znal dokazati. Leonhard Euler (1707–1783) je njegovo domnevo ovrgel leta 1732, ko je pokazal, da je

$$2^{(2^5)} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Ker število 7 ni oblike (1), pravilnega sedemkotnika ni mogoče konstruirati. Splošen rezultat je posledica izreka iz teorije obsegov, ki pove naslednje: Če je x ničla nerazcepnega polinoma z racionalnimi koeficienti, ki ima stopnjo različno od 2^m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, daljice dolžine x ni mogoče narisati samo z ravnilom in šestilom.

Eden od najbolj pomembnih primerov je starogrški problem podvojitve kocke. Ta sprašuje, ali je mogoče konstruirati stranico kocke s prostornino 2. Število $x = \sqrt[3]{2}$ je ničla polinoma

$$p(x) = x^3 - 2.$$

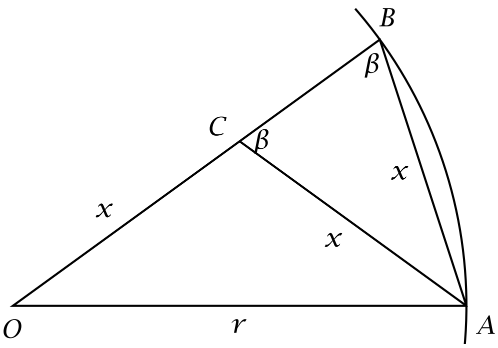
Če bi bilo mogoče polinom p razcepiti na produkt polinomov manjše stopnje z racionalnimi koeficienti, bi bil vsaj eden od faktorjev linearni polinom. Tedaj bi imel polinom p vsaj eno racionalno ničlo. Po znanih kriterijih so kandidati za racionalne ničle polinoma p ulomki, katerih števec deli prosti člen, imenovalec pa vodilni koeficient polinoma p. Ker nobeno od števil ± 1, ± 2 ni ničla polinoma p, smo pokazali, da je x ničla nerazcepnega polinoma stopnje $3 \neq 2^m$, zato problem podvojitve kocke ni rešljiv samo z ravnilom in šestilom.

Ker je vsak pravilni večkotnik včrtan nekemu krogu, lahko problem konstrukcije pravilnega večkotnika prevedemo na iskanje zveze med dolžino stranice večkotnika in polmerom kroga.

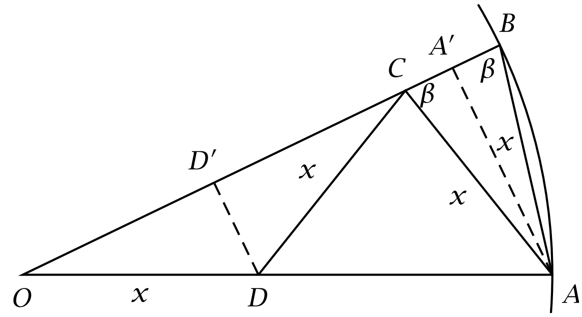
Evklidova ideja za pravilni petkotnik

Idejo za zvezo med stranico pravilnega sedemkotnika in polmerom njegovega očrtanega kroga lahko najdemo v genialnem Evklidovem izračunu dolžine stranice pravilnega desetkotnika, ki ne uporablja trigonometričnih funkcij. Ker je samo s šestilom mogoče podvajati in razpolavljati kote, je pravilni desetkotnik mogoče narisati natanko tedaj, ko je mogoče konstruirati pravilni petkotnik.

Naj bo pravilni desetkotnik s stranico x, včrtan v krog s središčem O in polmerom r. Izberimo enega od desetih enakokrakih trikotnikov, ki imajo za osnovnico AB stranico desetkotnika, njegova kraka AO in BO pa sta polmera očrtanega kroga.



SLIKA 1.
Enakokraki trikotnik v desetkotniku



SLIKA 2.
Enakokraki trikotnik v štirinajstkotniku

Ker je vsota notranjih kotov v desetkotniku enaka $10\pi - 2\pi = 8\pi$, je kot

- $\beta = \angle ABO = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{10} = \frac{2}{5}\pi.$

Na stranici OB (glej sliko 1) izberimo tako točko C, da bo $AC = AB = x$. Tako je tudi $\angle ACB = \beta$. Kot $\angle AOB$ je enak $\frac{1}{10}2\pi = \frac{1}{5}\pi$. Poglejmo si trikotnik OAC. Ker je zunanji kot trikotnika enak vsoti notranjih nepriležnih kotov, je

- $\angle CAO = \angle ACB - \angle AOC = \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{1}{5}\pi.$

Tako je $\angle OAC = \angle AOC$ in trikotnik OAC je enakokrak. Zato je

- $OC = AC = AB = x.$

Manjši trikotnik BCA ima enake kote kot večji trikotnik ABO, zato sta si trikotnika podobna. Za razmerji osnovnice in kraka velja

- $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{r-x}{x}.$

Tako smo našli zvezo med stranico desetkotnika in polmerom njegovega očrtanega kroga:

- $x^2 = r^2 - rx.$

Smiselna je le pozitivna rešitev te kvadratne enačbe

- $x = r\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$

Naj bo, recimo, $r = 1$. Število $\sqrt{5}$ lahko narišemo kot hipotenuzo pravokotnega trikotnika s stranicama 2 in 1. Od tega števila s šestilom odrežemo enoto 1, nato pa daljico razpolovimo. Tako smo narisali stranico pravilnega desetkotnika, ki je včrtan v krog s polmerom 1. Stranico pravilnega petkotnika dobimo tako, da kot AOB s šestilom podvojimo.

Pokazali smo, da lahko le z ravnilom in šestilom narišemo pravilni petkotnik.

Posplošitev ideje na sedemkotnik

Evklidovo idejo lahko uporabimo tudi za izračun dolžine stranice pravilnega štirinajstkotnika.

Enako kot prej izberimo enega od štirinajstih enakokrakih trikotnikov ABO z osnovnico $AB = x$ in krakoma $AO = BO = r$ (glej sliko 2). Na kraku OB izberimo točko C, tako da bo $AC = AB = x$, na kraku OA pa tako točko D, da bo tudi $CD = x$. Tokrat je

- $\beta = \angle ABO = \frac{3}{7}\pi = \angle BCA,$

$\angle CAB = \pi - 2\beta = \frac{1}{7}\pi$ in $\angle ADC = \angle DAC = \beta - \angle CAB = \frac{2}{7}\pi$. Sedaj si poglejmo trikotnik ODC. Ker je zunanji kot enak vsoti notranjih nepriležnih kotov, je

- $\angle OCD = \angle ADC - \angle COD = \frac{1}{7}\pi,$

torej je trikotnik COD enakokrak. Zato je

- $OD = DC = CA = AB = x.$

Ponovno sta podobna manjši trikotnik BCA in večji trikotnik ABO, zato je

- $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{BC}{x} = \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{x}{r}$

in $BC = \frac{x^2}{r}$. Narišimo višini DD' in AA' trikotnikov COD in BCA. Zaradi vzporednosti višin je

$$\frac{OD}{OA} = \frac{x}{r} = \frac{OD'}{OA'} = \frac{\frac{1}{2}(OB - CB)}{OB - \frac{1}{2}CB} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{2(r - \frac{x^2}{2r})} = \frac{r^2 - x^2}{2r^2 - x^2}.$$

Tako smo dobili kubično zvezo med stranico x pravilnega štirinajstkotnika in polmerom r njegovega očrtanega kroga:

$$2r^2x - x^3 = r^3 - rx^2.$$

V primeru, ko je $r = 1$, je treba rešiti kubično enačbo z racionalnimi koeficienti

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Enako kot v premisleku pri problemu o podvojitvi kocke vidimo, da -1 in 1 nista rešitvi te enačbe, zato je polinom p nerazcepen polinom stopnje tri in daljice dolžine x ni mogoče narisati le z ravnilom in šestilom.

Ker je mogoče pravilni sedemkotnik konstruirati natanko tedaj, ko lahko konstruiramo pravilni štirinajstkotnik, smo tako pokazali, da pravilnega sedemkotnika ni mogoče narisati le z ravnilom in šestilom.

Radovednega bralca vabimo, da enak trik z daljšo lomljeno črto z odseki dolžin x uporabi tudi v primeru osemnajstkotnika in pokaže, da sta stranica x in polmer r povezana z enačbo pete stopnje

$$x^5 - rx^4 - 4r^2x^3 + 3r^3x^2 + 3r^4x - r^5 = 0,$$

s pripadajočo nerazcepno enačbo

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

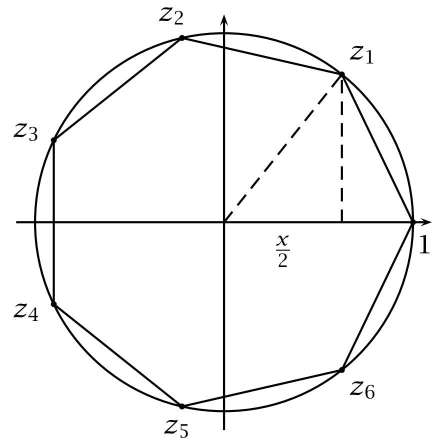
Zato ni mogoča niti konstrukcija pravilnega devetkotnika.

Sedemkotnik v kompleksni ravnini

Kot zanimivost pokažimo, kako bi z modernim poznavanjem kompleksnih števil pokazali, da konstrukcija pravilnega sedemkotnika ni mogoča.

Vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^7 - 1 = 0 \tag{2}$$



SLIKA 3.
Pravilni sedemkotnik kot rešitev enačbe $z^7 = 1$

so števila oblike

$$z_k = \cos(\tfrac{2\pi}{7}k) + i\sin(\tfrac{2\pi}{7}k); \quad k = 0, 1, 2, \ldots 6.$$

V kompleksni ravnini si jih lahko predstavljamo kot oglišča pravilnega sedemkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1, eno od oglišč pa ima v točki $z_0 = 1 + 0i$ (glej sliko 3). Če bi znali narisati pravilni sedemkotnik, bi lahko narisali tudi pravokotno projekcijo števila z_1 na realno os, torej realno točko $\cos(\frac{2\pi}{7}) + 0i$ in njen dvakratnik $x = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$.

Enačbo (2) lahko razstavimo in dobimo

$$(z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Realno rešitev $z_0 = 1$ že poznamo, zato lahko enačbo delimo z $z - 1$. Ostale rešitve so ničle polinoma s simetričnimi koeficienti. Takšnih enačb se lotimo tako, da enačbo delimo s sredinskim členom z^3:

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0. \tag{3}$$

Ker rešitve ležijo na enotski krožnici, za vsako rešitev z velja

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \bar{z},$$

zato je $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Posebej, za prvo oglišče z_1 velja

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = x.$$

Sedaj lahko združimo sorodne simetrične člene in upoštevamo

- $z^2 + \frac{1}{z^2} = (z + \frac{1}{z})^2 - 2$

in

- $z^3 + \frac{1}{z^3} = (z + \frac{1}{z})^3 - 3(z + \frac{1}{z})$.

Tako se enačba (3) v primeru $z = z_1$ glasi

- $x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$ (4)

Enako kot prej vidimo, da -1 in 1 nista rešitvi enačbe (4). Zato je x rešitev nerazcepne enačbe stopnje 3 in daljice dolžine x ni mogoče narisati samo z ravnilom in šestilom.

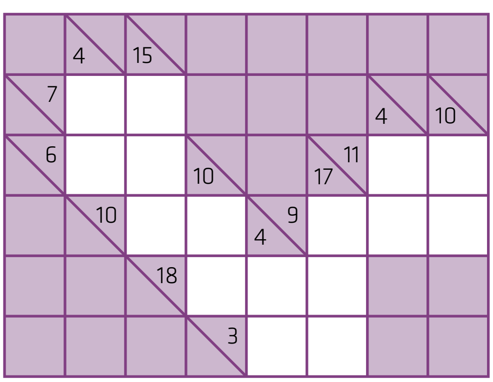
Tako smo še na en način pokazali, da konstrukcija pravilnega sedemkotnika ni mogoča.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Znate rešiti Leonardov problem o tetraedru?

↓↓↓

Jurij Kovič

Opredelitev problema. Leonardo da Vinci je v enem svojih spisov brez dokaza navedel, da se težišče T pravilnega tetraedra $ABCD$ nahaja na eni četrtini razdalje od težišča T' osnovne ploskve do vrha D tetraedra ([2], str. 235). *Je to res? Kako bi to trditev dokazali ali ovrgli?*

Rešitvi. Oglejmo si dve rešitvi tega problema: prva, algebraična, uporablja *vektorje*, ki so univerzalno računsko orodje za reševanje geometrijskih nalog, zelo uporabni pa so tudi v fiziki, kjer z njimi ponazarjajo sile. Druga rešitev, geometrijska, temelji na neposrednem uvidu.

Metoda 1. (povzeta po [1], str. 214–215). Težišče točkastih mas $t_1, \ldots, t_k$ v točkah $A_1, \ldots, A_k$ je definirano takole: Izberimo izhodiščno točko O. Če je $t_1 + \cdots + t_k \neq 0$, potem obstaja točka P, za katero je

- $t_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots t_k\overrightarrow{OA_k} = (t_1 + \cdots + t_k)\overrightarrow{OP}$.

Ta točka P, ki ji pravimo *težišče* mas t_i v točkah A_i, je neodvisna od izbora izhodišča O, kar vidimo, če za neko drugo izhodišče O' dobimo po istem postopku namesto P točko P', ki ustreza enačbi

- $t_1\overrightarrow{O'A_1} + \cdots t_k\overrightarrow{O'A_k} = (t_1 + \cdots + t_k)\overrightarrow{O'P'}$.

Potem z odštetjem druge enačbe od prve, upoštevaje $\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{O'A_i} = \overrightarrow{OO'}$, dobimo

- $(t_1 + \cdots + t_k)\overrightarrow{OO'} = (t_1 + \cdots + t_k)(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P'})$,

od koder po krajšanju s $(t_1 + \cdots + t_k)$ sledi $\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO}$ in zato $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP'} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{OP}$ in $P = P'$.

→