

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 23 (1995/1996)

Številka 5

Strani 302-307

Janez Strnad:

GIBANJE DELCA V PASTI

Ključne besede: fizika, merjenja, pasti, električno polje, magnetno polje, naelektreni delci.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/23/1268-Strnad.pdf>

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

GIBANJE DELCA V PASTI

V prejšnji številki Preseka smo na kratko opisali zanimiva merjenja s pastmi za naelektrene delce. Ali ne bi kazalo nekoliko podrobneje obdelati električnega in magnetnega polja ter gibanja naelektrenega delca v njiju? Tako bi tudi najbolje izpodbili očitek, da je Presek mačehovski do električnih in magentnih poglavij iz fizike.

V pasti je električno polje. Najpreprostejše je homogeno polje med elektrodama ploščatega kondenzatorja dovolj daleč od robov. Kako močno je, pove njegova jakost E . V homogenem polju je jakost povsod enaka in ima isto smer. Zato je tudi sila polja $F = eE$ na delec z nabojem e povsod enaka in kaže v isto smer. Ion se v takem polju giblje podobno kot utež, ki jo spustimo, da pade. Pozitivni ion se enakomerno pospešeno giblje proti negativni elektrodi kondenzatorja (glej članek G. Planinšiča, *Dogodek v ploščatem kondenzatorju*, Presek 16 (1988) 90). Ploščati kondenzator ne deluje kot past.

Ali bi lahko uporabili dva nasprotno obrnjena ploščata kondenzatorja? Srednja, dvojna elektroda bi motila, a misel ni slaba. Pa vseeno raje uporabimo električno polje, ki nad vodoravno srednjo ravnino narašča v eno smer, pod njo pa v drugo. Za jakost električnega polja v smeri osi z , ki jo izberemo pravokotno na to ravnino, velja v tem primeru:

$$E_z = -Kz. \quad (1)$$

Minus opozarja, da električno polje nad srednjo ravnino pri $z = 0$ vleče ion navzdol, pod to ravnino pa navzgor. K je konstanten sorazmernostni koeficient.

Ne moremo pričakovati, da bi ion miroval v ravnini pri $z = 0$, kjer električno polje nanj ne deluje. Kako se giblje ion z majhno hitrostjo v navpični smeri, povprašajmo Newtonov zakon za gibanje v tej smeri: $F_z = ma_z = eE_z = -eKz$. Pospešek je sorazmeren z odmikom od ravnovesne lege in kaže proti tej legi. To je značilno za sinusno nihanje. *Osnova frekvenco* ν_z , s katero niha ion v smeri osi z in ki je enaka obratni vrednosti nihajnega časa t_{z0} , preberemo iz zapisane enačbe $a_z = (2\pi/t_{z0})^2 z$:

$$\nu_z = \frac{1}{t_{z0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eK}{m}}.$$

Ion z dovolj majhno energijo niha v navpični smeri okoli ravnine pri $z = 0$ in se ne oddalji znatno od nje. V smeri osi z past deluje.

Toda električno polje z edino komponento jakosti električnega polja (1) v smeri osi z ne more obstajati. Imeti mora še drugo komponento.

Zanima nas le osno simetrično polje, v katerem so vse smeri v ravnini, pravokotni na os z , enakopravne in je komponenta v tej ravnini odvisna samo od razdalje r od osi z . Električno polje izvira od nabojev. V delu prostora, v katerem se giblje ion, ni drugih nabojev, zato tam ne more biti izvirov polja. V tisti del prostora mora vstopati enak električni pretok, kot iz njega izstopa. Vedeti moramo samo, da je električni pretok skozi določeno ploskev sorazmeren s površino ploskve in pravokotno komponento jakosti električnega polja. Polje si lahko ponazorimo s silnicami: v opazovani del prostora mora teči toliko silnic, kot jih teče iz njega, nobena silnica ne more izvirati iz tega dela prostora ali se v njem končati, saj v tem delu prostora ni naelektrenih delcev.

V homogenem polju v valj, ki ima z elektrodama vzporedni osnovni ploskvi z radijem r , vstopa skozi zgornjo električni pretok, sorazmeren s $\pi r^2 E_z$, in enak pretok skozi spodnjo ploskev izstopa. V polju (1) pa skozi zgornjo osnovno ploskev pri z vstopa pretok, sorazmeren z $2\pi r^2 E_z$, skozi spodnjo osnovno ploskev pri $z = 0$ pa ga nič ne izstopa. Ta pretok mora izstopati skozi plašč. Pretok skozi plašč je sorazmeren z $2\pi r z E_r$, če je E_r radialna komponenta jakosti električnega polja. Iz zahteve, da sta pretoka nasprotno enaka, sledi:

$$E_r = -\frac{rE_z}{2z} = \frac{1}{2}Kr. \quad (2)$$

Radialna komponenta električnega polja na pozitivni ion deluje z radialno silo $F_r = eE_r$ od osi z navzven. Električno polje – zadnjič smo mu rekli *kvadrupolno polje* – sicer zadržuje ione v smeri osi z , a jih v radialni smeri razpršuje. Zaradi tega naprava s samim električnim poljem še ne deluje kot past. Električnemu polju dodamo homogeno magnetno polje v smeri osi z . Kako gosto je polje, določa gostota magnetnega polja $B = B_z$. V homogenem polju je gostota povsod enako velika in kaže v isto smer. Na naelektren delec magnetno polje deluje samo, če se delec giblje, in sicer je sila pravokotna na smer polja in na smer hitrosti. Na ion, ki se giblje v smeri magnetnega polja, to je v smeri osi z , magnetno polje ne deluje. Kar smo ugotovili o nihanju, zato velja kljub magnetnemu polju.

Obravnavajmo zdaj gibanje iona v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje. Na ion s hitrostjo v deluje tako polje s silo evB , ki je vselej pravokotna na smer gibanja. To je značilno za centripetalno silo mv^2/r . Izraza izenačimo in izračunamo hitrost $v = erB/m$, ki jo izrazimo kot produkt poti pri enem obhodu $2\pi r$ in obhodnega časa t_{0c} . Za obratno vrednost tega časa, za frekvenco kroženja dobimo:

$$\nu_c = \frac{1}{t_{0c}} = \frac{eB}{2\pi m}. \quad (3)$$

To je *ciklotronska frekvenca*, ki ni odvisna ne od hitrosti ne od radija tira. Ime ima po krožnem pospeševalniku *ciklotronu*, ki izkorišča tako gibanje ionov.

Z magnetnim poljem smo rešili težavo odbojne radialne komponente električnega polja. Zapišimo Newtonov zakon za ion, ki se v ravnini $z = 0$ s hitrostjo v_m giblje po krogu z radijem r_m : $F_m = ma_m = e(E_r - v_m B)$. Hitrost v_m smo usmerili tako, da ima sila magnetnega polja na ion nasprotno smer kot sila električnega polja. Vse te sile delujejo v radialni smeri in pospešek a_m krožečega iona kaže proti izhodišču in je po velikosti enak v_m^2/r_m . V enačbo $-mv_m^2/r_m = eE_r - ev_mB = \frac{1}{2}eKr_m - ev_mB$ postavimo $v_m = 2\pi r_m/t_{0m} = 2\pi r_m\nu$ in upoštevamo enačbi za ν_z in ν_c . Nastane kvadratna enačba za frekvenco ν :

$$\nu^2 - \nu_c\nu + \frac{1}{2}\nu_z^2 = 0.$$

Radialno električno polje, katerega sila ima nasprotno smer od sile magnetnega polja, zmanjša frekvenco ciklotronskega kroženja na $\nu'_c = \nu_c - \delta$. To je prvi od dveh korenov enačbe. Iz prve Vietove enačbe izhajajo, da je potem drugi koren enak δ . Iz kvadratne enačbe preberemo, da je drugi koren $\nu_m = \delta$ približno enak

$$\nu_m = \frac{\nu_z^2}{2\nu_c},$$

če je frekvenca ν_m veliko manjša kot frekvenca ν_c . Za elektrone je približek zelo dober, za ione pa je nekoliko slabši. Enakomernemu kroženju naelektrenega delca s frekvenco ν_m pravimo *magnetronsko gibanje*. Ime izvira iz besede *magnetron*, elektronke, ki jo uporabljajo na primer pri radarjih in v mikrovalovnih pečicah in v kateri se gruče elektronov gibljejo na opisani način.

Močno homogeno magnetno polje okoli srednje ravnine ustvari superprevodna tuljava. Obliko elektrod, ki dajo polje s komponentama jakosti (1) in (2), ugotovimo tako, da izračunamo delo, ki ga opravimo, ko premaknemo ion zelo počasi iz izhodišča v smeri osi z in v radialni smeri:

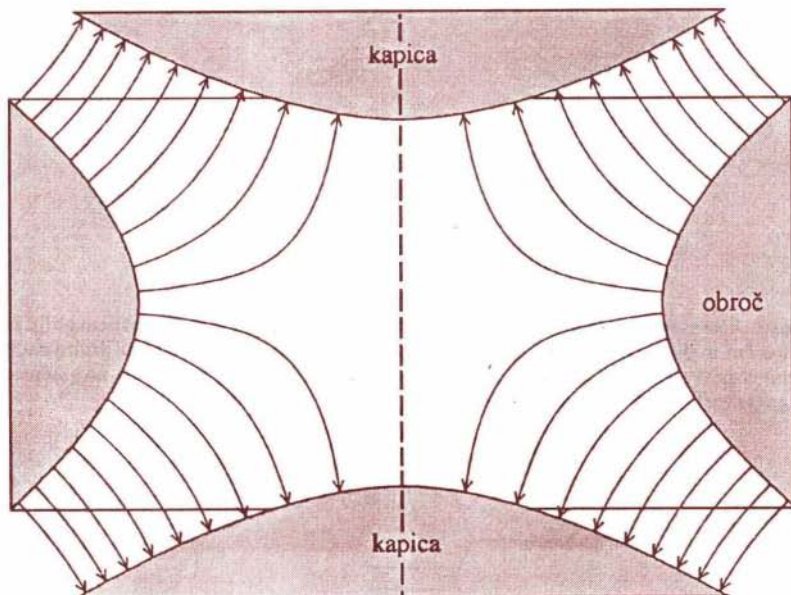
$$e \int_0^z E_z dz + e \int_0^r E_r dr = -eK \cdot \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}eK \cdot \frac{1}{2}r^2 = -\frac{1}{2}eK(z^2 - \frac{1}{2}r^2). \quad (4)$$

Pri premikanju elektrona po površju elektrode ne opravimo nobenega dela, površje elektrode je *ekvipotencialna ploskev*. Zaradi tega je izračunano

delo enako za vse točke na površju določene elektrode. Obstajata dve rešitvi:

$$z^2 - \frac{1}{2}r^2 = z_0^2 \quad \text{in} \quad z^2 - \frac{1}{2}r^2 = -\frac{1}{2}r_0^2.$$

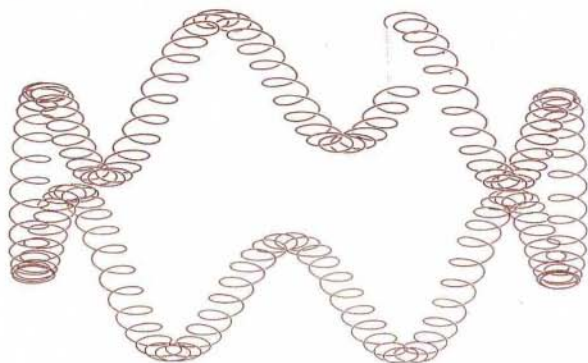
Prva ustreza kopicama rotacijskega hiperboloida z najmanjšo razdaljo med njima $2z_0$ in druga obročastemu rotacijskemu hiperboloidu z notranjim premerom $2r_0 = 2\sqrt{2}z_0$ (slika 1).



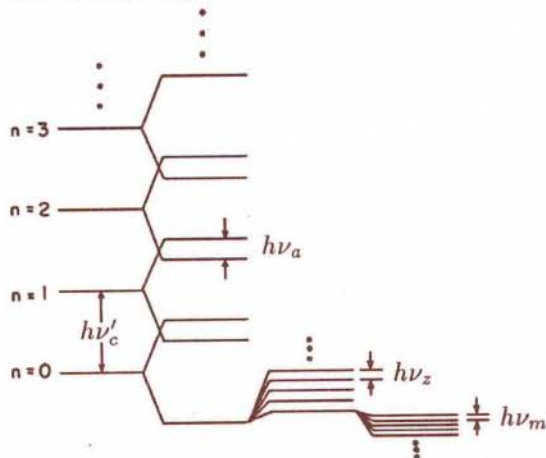
Slika 1. Električne silnice in presek skozi elektrode v pasti. Tangenta na silnico kaže v vsaki točki polja v smeri vektorja jakosti električnega polja s komponentama E_z in E_r : $\operatorname{tg}\varphi = dz/dr = E_z/E_r = -2z/r$. Enačba $dz/z = -2dr/r$ ima rešitev $z = \operatorname{konst}/r^2$. V vsaki točki polja je ekvipotencialna ploskev pravokotna na silnico. Površja elektrod so ekvipotencialne ploskve. Če ne bi bila sila električnega polja pravokotna na površje elektrode, bi povzročala tok elektronov po kovini prečno na površje.

Tako znamo narisati načrt za past. V njej je med kapico in obročem napetost $U_0 = \frac{1}{2}Kz_0^2$. V pasti za pozitivne delce priključimo kapici na negativni priključek enosmernega izvira napetosti in obroč na pozitivni priključek. V pasti za negativne delce pa priključimo kapici na pozitivni priključek in obroč na negativnega. V pasti za vodikove ione, protone, s pozitivnim osnovnim nabojem e_0 so uporabili magnetno polje z gostoto 5,05 T in električno napetost 53,1 V ob razdalji $z_0 = r_0/\sqrt{2} = 1,12$ mm. Magnetronska, osna in ciklotronska frekvenca so bile po vrsti

enake 0,6628 MHz, 10,01 MHz in 76,34 MHz ($1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ s}^{-1}$). V pasti za elektrone so uporabili magnetno polje z gostoto 5,872 T in električno napetost 10,22 V ob razdalji $z_0 = r_0/\sqrt{2} = 3,35 \text{ mm}$. Magnetronska, osna in ciklotronska frekvenca so merile po vrsti 0,01185 MHz, 64,42 MHz in $1,644 \cdot 10^5 \text{ MHz}$.



Slika 2. Sestavljeno gibanje naelektrnega delca v električnem in magnetnem polju pasti v klasični mehaniki. Najhitrejšje je ciklotronsko kroženje po krogu z majhnim radijem v smeri pravokotno na magnetno polje, srednje hitro osno nihanje in najpočasnejše magnetronsko kroženje po velikem krogu.



Slika 3. Stanja geonija. Levi stolpec vsebuje stanja, ki zadevajo ciklotronsko gibanje, če elektron ne bi imel "vrtenja" – fiziki ga opišejo s *spinom*. Drugi stolpec z leve upošteva, da so ciklotronska stanja zaradi delovanja magnetnega polja razcepljena. Nastaneta po dve stanji, katerih frekvenci se razlikujeta za $\nu_a = a\nu_c$, če meri koeficient a okoli 0,001. Tretji stolpec kaže nadaljnjo razcepitev stanj zaradi osnega nihanja in četrti zaradi magnetronskega gibanja. Energijske razlike med stanji niso narisane v merilu.

Gibanje naelektrenega delca v pasti potemtakem sestavljajo počasno magnetronsko kroženje, hitrejše nihanje v smeri osi z in zelo hitro ciklotronsko kroženje (slika 2). Taka predstava je le zasilna, ker moramo gibanje elektrona opisati v kvantni mehaniki. Zdaj lahko povemo nekaj o energijskih stanjih geonija. Energijsko razliko med sosednjima stanjema, to je energijo, ki jo izseva ali absorbira geonij, dobimo, če *klasično frekvenco* – dobimo jo po starem, ne da bi upoštevali kvantno mehaniko – pomnožimo s Planckovo konstanto $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js, značilno za kvantno mehaniko. Prehodom med ciklotronskima stanjema ustreza energija $h\nu_c$, prehodom med nihajnjima stanjema $h\nu_z$ in prehodom med magnetronskima stanjema $h\nu_m$ (slika 3).

Ta prispevek je zahtevnejši, kot je bil prvi prispevek o pasteh za naelektrene delce, ker so v njem trditve izpeljane iz osnovnih zakonov ali druga iz druge. Tako jih fizik razume in si jih laže zapomni. Brez računanja fizik ne pride daleč. Vendar ne smemo misliti, da je to njegova najpomembneša ali celo edina dejavnost.

Janez Strnad