28 T

3238

Naw

Anton
Nüschwitzer.

N.: 19

Anleitung

zum

Rechnen

für die zweyte und dritte Classe der Pfarr- und Hauptschulen

in den k. k. Staaten.

Verfaßt von

Doctor Franz Mozhnik,

Lehrer der vierten Classe an der Hauptschule zu Görz.

Kostet ungebunden 12 Kr. C. M.
Gebunden in ledernen Rücken 16 Kr. C. M.

Wein, 1843.

Im Verlage der k. k. Schulbücher-Verschleiß-Administration bey St. Anna in der Johannisgasse.

In den öffentlichen Schulen sind nur die **vorgeschriebenen**, mit dem Stämpel des Schulbücher-Verlages versehenen Bücher zu verwenden, auch dürfen diese Bücher nicht gegen **höhere als die auf dem Titelblatte angegebenen Preise** verkauft werden.

Vorbegriffe.

§. 1.

Mehrere Dinge von einerley Art nennt man eine **Mehrheit**, jedes einzelne solche Ding heißt **Eins** oder eine **Einheit**. Z. B. drey Kreuzer bilden eine Mehrheit; denn man hat einen Kreuzer und noch einen Kreuzer und wieder einen Kreuzer, also drey Dinge von derselben Art; ein Kreuzer ist eine Einheit. Eben so sind fünf Striche, vier Äpfel, sieben Schüler Mehrheiten; ein Strich, ein Apfel, ein Schüler hingegen sind Einheiten.

Die Einheit sowohl als auch jede beliebige Mehrheit wird eine **Zahl** genannt. Bey jeder Zahl muß eine Einheit gedacht werden, welche darin einmahl oder mehrmahl enthalten ist.

§. 2.

Es gibt **unbenannte** und **benannte** Zahlen.

Wenn bey einer Zahl kein Nahme vorkommt, so heißt sie **unbenannt**; bey einer unbenannten Zahl sieht man nicht auf die Art der Einheiten, welche darin vorkommen, sondern **bloß** auf ihre Menge. Z. B. fünf ist eine unbenannte Zahl, sie drückt nur die Menge der

Einheiten aus, sagt aber nicht, was für Einheiten es sind. Eine unbenannte Zahl kann was immer für Einheiten vorstellen; unter fünf kann man sich fünf Kreuzer, fünf Striche, fünf Schüler, oder was immer für fünf Einheiten denken.

Eine Zahl, bey welcher ein Nahme vorkommt, heißt **benannt**, dabey wird nicht nur die **Menge**, sondern auch die **Art** der Einheiten, welche darin enthalten sind, angezeigt. Z. B. fünf Kreuzer ist eine benannte Zahl, sie drückt aus, wie viel Einheiten da sind, und zugleich, was für Einheiten es sind. — Eine benannte Zahl kann nur **eine** Art von Einheiten vorstellen; so kann die Zahl fünf Kreuzer nur fünf Kreuzer bedeuten.

§. 3.

Jede Zahl kann durch hörbare Wörter und durch sichtbare Schriftzeichen ausgedrückt, d. h. sie kann **ausgesprochen** und **angeschrieben** werden.

Die aufeinander folgenden Zahlen durch Wörter ausdrücken, heißt **zählen**. Die Schriftzeichen der Zahlen nennt man **Ziffern**.

Erstes Hauptstück.

Zahlen unter hundert und ihr Zusammenhang.

§. 4.

Wenn man zu eins wieder eins, und dann noch eins, und immer wieder eins dazusetzt, so bekommt man nach und nach immer neue und größere Zahlen. Weil nun dieses Hinzusetzen von eins zu der schon vorhandenen Zahl ohne Ende fortgesetzt werden kann, so sind **unendlich viele** Zahlen möglich.

Wollte man jede solche Zahl mit einem eigenen Worte und einer eigenen Ziffer bezeichnen, so müßte man unzählig viele Nahmen und Ziffern haben, die man aber alle sich nicht merken könnte. Man suchte daher die Bezeichnung aller möglichen Zahlen sich dadurch zu erleichtern, daß man sie in mehrere Abtheilungen brachte, bey denen die Zahl **zehn** als Ruhepunct dient; wahrscheinlich darum, weil man anfangs Alles an den zehn Fingern der beyden Hände abzuzählen pflegte.

Die Nahmen und Ziffern der ersten neun Zahlen, welche hier durch Striche versinnlichet werden sollen, sind.

|	eins . . .	1,
| |	zwey . . .	2,
| | |	drey . . .	3,
| | | |	vier . . .	4,
| | | | | . . .	fünf . . .	5,
| | | | | | . .	sechs . . .	6,
| | | | | | |	sieben. . .	7,
| | | | | | | |	acht . . .	8,
| | | | | | | | |	neun . . .	9.

Die hier angeführten Ziffern werden gewöhnlich **arabische** genannt.

§. 5.

Auf neun folgt **zehn**. Zehn Einheiten nennt man einen **Zehner**. Wenn man beym Zählen bis zehn kommt, so fängt man wieder von vorn an, indem man sagt:

eins und zehn	oder	eilf,
zwey und zehn	"	zwölf,
drey und zehn	"	dreyzehn,
vier und zehn	"	vierzehn,
fünf und zehn	"	fünfzehn,
sechs und zehn	"	sechzehn,
sieben und zehn	"	siebzehn,
acht und zehn	"	achtzehn,
neun und zehn	"	neunzehn.

Hierauf folgt zehn und zehn, wofür man **zwanzig** sagt. Zwanzig ist also zweymahl zehn, oder es enthält zwey Zehner.

Nach zwanzig fängt man wieder von eins zu zählen an, nähmlich ein und zwanzig, zwey und zwanzig,... neun und zwanzig.

Statt zehn und zwanzig sagt man **dreyßig.** Dreyßig enthält also dreymahl zehn Einheiten oder drey Zehner.

Auf dieselbe Art wird auch das weitere Zählen vorgenommen, nur wird

statt	zehn und dreyßig	. . vierzig,
"	zehn und vierzig	. . fünfzig,
"	zehn und fünfzig	. . sechzig,
"	zehn und sechzig	. . siebenzig,
"	zehn und siebenzig	. . achtzig,
"	zehn und achtzig	. . neunzig

gesagt. Daraus folgt, daß

vierzig . .	viermahl zehn	Einheiten	oder	vier	Zehner,
fünfzig . .	fünfmahl zehn	"	"	fünf	"
sechzig . .	sechsmahl zehn	"	"	sechs	"
siebenzig .	siebenmahl zehn	"	"	sieben	"
achtzig . .	achtmahl zehn	"	"	acht	"
neunzig. .	neunmahl zehn	"	"	neun	"

in sich enthält.

Um die Größe und die Bestandtheile der Zahlen, welche aus Zehnern und Einheiten bestehen, recht anschaulich zu machen, versinnliche man jeden Zehner durch eine Reihe von zehn Strichen, mache so viele solche Reihen unter einander, als Zehner da sind, und unter die letzte Zehnerreihe setze man noch so viele Striche, als Einheiten neben den Zehnern vorkommen; z. B. sieben und zwanzig würde man so versinnlichen:

§. 6.

Um die verschiedenen **Zehner** anzuschreiben, bedient man sich derselben Ziffern, mit denen die Einheiten bezeichnet werden, nur hängt man jeder Ziffer rechts das Zeichen 0, welches die Nulle heißt, an. Man bezeichnet nähmlich:

1 Zehner oder zehn durch 10,
2 Zehner „ zwanzig „ 20,
3 Zehner „ dreyßig „ 30,
. . . .
9 Zehner „ neunzig „ 90.

Kommen in einer Zahl neben den Zehnern auch Einheiten vor, so schreibt man die Einheiten an die Stelle der Nulle, also in die erste Stelle zur Rechten, die Zehner bleiben aber an der zweyten Stelle. Z. B. sieben und vierzig enthält 4 Zehner und 7 Einheiten, man schreibt also 47; zwölf bestehet aus 1 Zehner und 2 Einheiten, es wird daher durch 12 bezeichnet.

Eben so schreibt man

sechs undneunzig . . 96,
neun und achtzig . . 89,

ein und dreyßig . . 31
achtzehn 18

So viele Einheiten eine Ziffer für sich allein bedeutet, eben so viele Zehner bedeutet sie an der zweyten Stelle von der Rechten.

§. 7.

Wenn man umgekehrt eine mit zwey Ziffern angeschriebene Zahl aussprechen will, braucht man nur die beyden Ziffern in ihrer wahren Bedeutung zu nehmen, nähmlich die erste von der Rechten als Einheiten, die zweyte als Zehner.

Z. B. in 48 bedeutet die erste Ziffer rechts 8 Einheiten also acht, die zweyte Ziffer von der Rechten 4 Zehner also vierzig; 48 wird daher gelesen: acht und vierzig.

Beym Anschreiben werden früher die Zehner und dann die Einheiten angesetzt, beym Aussprechen aber nennt man zuerst die Einheiten, dann die Zehner, und verbindet beyde durch das Wörtchen **und.**

In 90 stehet an der rechten Stelle rechts 0, es kommen also keine Einheiten vor, und man spricht nur die neun Zehner aus, also neunzig.

So liest man

29 . . . neun und zwanzig,
51 . . . ein und fünfzig,
66 . . . sechs und sechzig,
40 . . . vierzig,
14 . . . vierzehn.

§. 8.

Die Zahlen unter hundert sind für das ganze Rechnen von der größten Wichtigkeit, so daß Anfänger nicht eher die weitern Zahlen vorzunehmen haben, als bis sie die ersten recht klar überblicken, und damit die verschiedensten Veränderungen fertig auszuführen im Stande sind. Zu diesem Ende sind hier folgende Übungen vorzunehmen.

1. Übungen im **Hinzusetzen** der Zahlen.

Man fange bey irgend einer Zahl an, und zähle nach und nach immer 1 dazu, z. B. 1 und 1 ist 2, 2 und 1 ist 3, 3 und 1 ist 4, u. s. w. Dann setze man eben so wiederhohlt 2, dann 3, 4, 5, ... hinzu.

Die Versinnlichung dabey geschieht am besten dadurch, daß man so viele Striche neben einander hinschreibt, als die betreffenden Zahlen Einheiten enthalten.

Bey diesen Übungen ist stets auf die **Ergänzung der Zehner** besondere Rücksicht zu nehmen. Wenn z. B. zu 36 die Zahl 9 hinzugesetzt werden soll, so wird zu 36 in Gedanken zuerst so viel dazugezählt, daß man die nächsten Zehner, nähmlich 40 bekommt, und dann noch das Übrige dazu gesetzt; man denkt nähmlich: 36 und 4 ist 40, und noch die 5 dazu ist 45; man zerlegt hier 9 in 4 und 5, zählt zuerst 4 und dann 5 dazu.

2. Übungen im **Hinwegnehmen** der Zahlen.

Man beginnt wieder in irgend einer Zahl, und nimmt wiederhohlt 1 hinweg, z. B. 1 von 99 bleibt 98, 1 von 98 bleibt 97, 1 von 97 bleibt 96, u. s. w. Später wird 2, dann 3, 4, 5, . . . wiederhohlt weggenommen.

Auch hier kann die Versinnlichung durch Striche geschehen.

§. 9.

3. Übungen im **Vervielfachen** der Zahlen.

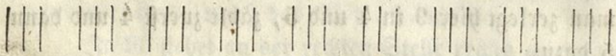
Diese sollen in der Einübung des sogenannten **Einmahleins** bestehen, und zwar nach folgendem Stufengange:

1 Man zähle zu 1 noch 1 dazu, so erhält man 2, 2mahl 1 ist 2; setzt man zu 2 wieder 1, so hat man 3, 3mahl 1 ist also 3, u. s. w.

2. Man setze zu 2 noch 2 hinzu, so hat man 4, 2mahl 2 ist also 4, oder das 2fache von 2 ist 4; wenn man zu 4 noch einmahl 2 setzt, so kommt 6 heraus, und man hat 3mahl 2 ist 6, oder das 3fache von 2 ist 6; zählt man zu 6 wieder 2, so hat man 8, zugleich kommt darin 2 4mahl vor, 4mahl 2 ist also 8, oder das 4fache von 2 ist 8; u. s. w.

3. Auf dieselbe Art können auch die Vielfachen von 3, 4, 5, . . . 9 abgeleitet werden.

Am anschaulichsten geschehen diese Übungen, wenn man so viele Striche anschreibt, als die Zahl Einheiten enthält, deren vielfache man haben will, dann in einiger Entfernung noch einmahl so viel Striche ansetzt, dann wieder so viel Striche u. s. w. Wenn man z. B. die Vielfachen von 3 einüben wollte, so wird man nach und nach folgende Reihe bilden



3 6 9 12 15 18 21 24 27.

So oft man 3 neue Striche macht, wird bemerkt, wie vielmahl 3 Striche man hat, und wie viel Striche es zusammen sind.

Durch Beobachtung dieses Stufenganges wird man in den Stand gesetzt, nachstehende Tabelle nicht nur mechanisch herzusagen, sondern auch von deren Richtigkeit Rechenschaft abzulegen.

Eben so suche man, wie oft 3 in den Zahlen unter 30, 4 in den Zahlen unter 40, . . . 9 in den Zahlen unter 90 enthalten ist.

Sehr zweckmäßig ist es, bey diesen Übungen die Vielfachen der betreffenden Zahl in einer Reihe hinzuschreiben, und unter jeder Zahl auch zu bemerken, das Wievielfache sie von der angenommenen Zahl ist z. B. man will wissen, wie oft 6 in den verschiedenen Zahlen enthalten ist, so schreibt man

6	12	18	24	30	36	42	48	54
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wie oft ist nun 6 in 12 enthalten? 12 ist das 2fache von 6, also ist 6 in 12 2mahl enthalten. — Wie oft ist 6 in 54 enthalten? 54 ist das 9fache von 6, also ist 6 in 54 9mahl enthalten.

Wie oft kommt 6 in 29 vor? 29 ist kein Vielfaches von 6, das nächst kleinere Vielfache ist 24, und zwar das 4fache, also ist 6 in 24 4mahl, daher auch in 29 4mahl enthalten. — Wie oft ist 6 in 52 enthalten? 52 kommt unter den Vielfachen von 6 nicht vor, das nächst kleinere Vielfache ist 48, und zwar das 8fache, in 48 ist also 6 8mahl enthalten, daher kommt es auch in 52 8mahl vor.

Hier kann nicht genug eingeschärft werden, daß Anfänger nicht eher zu einer folgenden Zahl den Übergang machen, als bis sie durch oftmahliges Wiederhohlen und verschiedenseitiges Auffassen das Enthaltenseyn der vorhergehenden Zahlen sich recht gut eigen gemacht haben.

Zweytes Hauptstück.

Zahlen über hundert hinaus.

§. 11.

Zehn Zehner bilden ein **Hundert**.

Wenn man bis hundert zählen kann, so ist das weitere Zählen nichts Neues. Man fängt nähmlich wieder bey eins an, und sagt:

hundert eins, hundert zwey, ... hundert neun- und neunzig.

Statt hundert und hundert sagt man **zweyhundert**, dann zählt man eben so weiter:

zweyhundert eins, zweyhundert zwey, zweyhundert drey, ... und kommt nach und nach auf **dreyhundert, vierhundert**, u. s. w.

§. 12.

Zur Bezeichnung der Hunderte bedient man sich derselben Ziffern, mit denen man die Einheiten bezeichnet, nur werden jeder Ziffer zwey Nullen angehängt, so daß die Ziffer der Hunderte an der dritten Stelle von der Rechten erscheint. Man schreibt nähmlich

für 2 Hunderte	oder	zweyhundert . . .	200,
„ 3 Hunderte	„	dreyhundert . . .	300,
. . . .		. . . .	
„ 9 Hunderte	„	neunhundert . . .	900.

Wenn außer den Hunderten auch Zehner vorkommen, so setzt man diese an die zweyte Stelle; kommen auch Einheiten vor, so werden sie an der ersten Stelle rechts geschrieben; z. B.

vierhundert fünfzig	schreibt	man	450,
dreyhundert vierzig	"	"	340,
siebenhundert acht	"	"	708,
hundert fünf	"	"	105,
fünfhundert drey und achtzig	"	"	583.

Wie schreibt man: zweyhundert neunzig; neunhundert eins; fünfhundert drey und vierzig; sechshundert neun und dreyßig; siebenhundert eilf?

Auf die Hunderte müssen jedesmahl noch zwey Ziffern folgen, die Ziffer der Zehner und die Ziffer der Einheiten.

§. 13.

Um umgekehrt eine mit drey Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen, muß man bedenken, daß die dritte Ziffer, von der Rechten angefangen, Hunderte, die zweyte Zehner, und die erste Einheiten bedeutet. Z. B. in 893 bedeutet 8 so viele Hunderte, also achthundert; 9 bedeutet 9 Zehner also neunzig; 3 bedeutet Einheiten also drey; zusammen achthundert drey und neunzig. Man nennt also zuerst die Hunderte, dann spricht man die Einheiten und zuletzt die Zehner aus.

So liest man

354 . . . dreyhundert vier und fünfzig,
712 . . . siebenhundert zwölf,
830 . . . achthundert dreyßig,
902 . . . neunhundert zwey
700 . . . siebenhundert.

Man soll noch folgende Zahlen aussprechen: 300, 250, 390, 702, 407, 231, 588, 991, 471, 139, 811.

§. 14.

Zehn Hunderte nennt man ein **Tausend.**

Beym Zählen über tausend hinaus fängt man wieder bey eins an; nähmlich

tausend eins, tausend zwey, ... tausend hundert; tausend hundert eins, tausend hundert zwey,... tausend zweyhundert; tausend zweyhundert eins, tausend zweyhundert zwey, u. s. w. bis man auf **zweytausend** kommt.

Dann zählt man wieder von vorne, und kommt nach und nach auf **dreytausend, viertausend,.. zehntausend.**

Auf dieselbe Art wird dann weiter gezählt.

Zehnmahl zehntausend ist **hunderttausend,** zehnmahl hunderttausend ist tausendmahl tausend, was man eine **Million** nennt.

So wie die ursprünglichen Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, Hunderttausende aufeinanderfolgen, so kommen dann die Einheiten der Millionen, Zehner der Millionen, Hunderte der Millionen, Tausende der Millionen, Zehntausende der Millionen und Hunderttausende der Millionen.

Eine Million Millionen heißt eine **Billion,** eine Million Billionen eine **Trillion,** u. s. w. Dabey wird dann ebenfalls nach Einheiten, Zehnern, Hunderten, . . . gezählt.

§. 15.

Die Zahlen **über tausend hinaus** werden nach denselben Grundsätzen angeschrieben, wie die Zahlen unter tausend; man schreibt nähmlich die Einheiten an die erste Stelle zur Rechten, die Zehner an die zweyte, die Hunderte an die dritte, die Tausende setzt man an die vierte Stelle, die Zehntausende an die fünfte, die Hunderttausende an die sechste, die Einheiten der Millionen an die siebente, u. s. w.

Z. B. die Zahl siebentausend fünfhundert acht und dreyßig enthält 7 Tausende, 5 Hunderte, 3 Zehner und 8 Einheiten, wird also durch 7538 ausgedrückt. — Die Zahl achttausend sieben und fünfzig bestehet aus 8 Tausenden, keinen oder 0 Hunderten, 5 Zehnern und 7 Einheiten, daher schreibt man 8057.

Eben so bezeichnet man

dreytausend vierhundert sechs,	durch	3406,
fünftausend zweyhundert neunzig	„	5290,
sechstausend	„	6000,
zwey Millionen fünfhundert drey Tausend und acht	„	2503008.

§. 16.

Will man umgekehrt eine mehrziffrige Zahl aussprechen, so braucht man nur jede Ziffer in ihrer wahren Bedeutung zu nehmen, und alles zusammen zu setzen.

Z. B. 3842 bedeutet drey Tausende, acht Hunderte, vier Zehner und zwey Einheiten; wird also gelesen: dreytausend achthundert zwey und vierzig.

Eben so liest man

5006 . . fünftausend und sechs,

27380 . . sieben und zwanzig Tausend, dreyhundert achtzig.

1350600 . . eine Million, dreyhundert fünfzig Tausend, sechshundert.

§. 17.

Um mehr Fertigkeit im Anschreiben und Lesen mehrziffriger Zahlen zu erlangen, pflegt man sie in **Klassen** einzutheilen. Die ganze Aufeinanderfolge der Zahlenarten enthält nachstehende Tabelle:

1	Einheiten		der Einheiten
2	Zehner		
3	Hunderte		
4	Einheiten	von Tausenden	
5	Zehner		
6	Hunderte		
7	Einheiten		der Millionen
8	Zehner		
9	Hunderte		
10	Einheiten	von Tausenden	
11	Zehner		
12	Hunderte		
13	Einheiten		der Billionen
14	Zehner		
15	Hunderte		
16	Einheiten	von Tausenden	
17	Zehner		
18	Hunderte		
u. s. w.			

Aus dieser Tafel ersieht man, daß immer Einheiten, Zehner und Hunderte; dann wieder Einheiten, Zehner und Hunderte auf einander folgen. Am zweckmäßigsten ist es also, diese Reihe als eine Klasse zu betrachten. Die erste Klasse von der Rechten angefangen hat keinen Beysatz, die zweyte hat den Beysatz Tausende, die dritte Millionen, die vierte Tausende (der Millionen), die fünfte Billionen, die sechste Tausende (der Billionen), u. s. w.

Da jede Zahl aus einer oder mehreren Klassen bestehet, und eine Klasse nur Zahlen unter tausend enthalten kann, so läßt sich das Anschreiben und Lesen jeder noch so großen Zahl auf das Anschreiben und Aussprechen der Zahlen unter tausend zurückführen.

§. 18.

Um **irgend eine ausgesprochene Zahl anzuschreiben**, gebe man Acht, nach welcher Zahl zuerst das Wort **Tausend**, **Million**, . . . gehört wird; diese Zahl, welche ein-, zwey- oder dreyziffrig ist, muß zuerst angesetzt werden. Die übrigen Klassen werden dann eine nach der andern, wie sie ausgesprochen werden, hingeschrieben. Auf das Wort **Million** müssen noch zwey Klassen, auf **Tausend** eine folgen. Werden in einer Klasse nicht alle drey Bestandtheile d. i. Hunderte, Zehner und Einheiten ausgesprochen, so wird das Fehlende durch Nullen ergänzt. Wenn beym Aussprechen der Zahl eine ganze Klasse nicht vorkommt, so werden alle drey Stellen derselben mit Nullen ausgefüllt.

Die Zahl: neun und vierzig Tausend, vierhundert zwölf schreibt man so an: **49412.** Es wird nähmlich zuerst die Zahl bis zum ersten Beysatze Tausend, nähmlich 49 angeschrieben, und dann die folgende Klasse 412, als wenn sie für sich allein vorhanden wäre.

Eilf Tausend, fünf Millionen, dreyhundert vier und zwanzig wird angeschrieben: 11005000324. Hier wird die Klasse der Tausende, welche nach den Millionen vorkommen muß, nicht ausgesprochen, daher besetzt man ihre drey Stellen mit Nullen; eben so schreibt man Nullen an die Stelle der Hunderte und Zehner der Millionen, welche mit Stillschweigen übergangen werden.

Man schreibe noch folgende Zahlen an:

vier und dreyßig Tausend, sechshundert ein und vierzig;
ein Tausend ein und fünfzig;
hundert dreytausend, fünfhundert und dreyßig;
sechs und fünfzig Millionen, achthundert Tausend;
neunzig Tausend, zweyhundert sieben;
acht Millionen, zwey und vierzig Tausend, und drey.

§. 19.

Wenn man **eine vielziffrige Zahl aussprechen** soll, so theile man sie, von der Rechten angefangen, in Klassen zu drey Ziffern ab; die letzte Klasse kann auch weniger als drey Ziffern haben. Hinter der ersten Klasse setze man einen Punct, hinter der zweyten einen Strich, hinter der dritten einen Punct, hinter der vierten zwey Striche u. s. w. Sodann lese man, von der Linken angefangen, jede Klasse für sich, als wenn sie allein da wäre, und setze beym Puncte das Wort Tausend, beym Striche das Wort Million, bey zwey Strichen das Wort Billion u. s. w. dazu.

So z. B. wird 39.043,673.402 gelesen: neun und dreyßig Tausend, drey und vierzig Millionen, sechshundert drey und siebenzig Tausend, vierhundert zwey.

Man spreche folgende Zahlen aus:

52 853,
1 502 316 078,
7503 000 476 321 003,
47 326 030 001 340,
50 080 071,
900 008.

Bey kleineren Zahlen braucht man die Eintheilung in Klassen und das Ansetzen der Puncte und Striche nur in Gedanken zu verrichten.

§. 20.

Die nach einem bestimmten Gesetze geordnete Zusammenstellung der Zahlen nennt man ein **Zahlensystem** oder **Zahlengebäude**.

Das Gesetz unseres Zahlensystems ist aus dem Vorhergehenden leicht zu ersehen. Jede Ziffer bedeutet an der ersten Stelle zur Rechten Einheiten; an der zweyten Stelle bedeutet sie Zehner, ein Zehner aber ist zehnmahl so viel als eine Einheit, also bedeutet eine Ziffer an der zweyten Stelle zehnmahl so viel als an der ersten; an der dritten Stelle bedeutet eine Ziffer Hunderte, ein Hundert aber ist wieder zehnmahl so viel als ein Zehner, an der dritten Stelle ist also der Werth einer Ziffer zehnmahl so groß, als an der zweyten; u. s. w.

Das **Gesetz** unseres Zahlensystems besteht also darin, daß jede Ziffer an der folgenden Stelle gegen die Linke **zehnmahl** so viel bedeutet als an der nächstvorhergehenden. Unser Zahlengebäude wird darum auch das **Zehnersystem** oder das **dekadische Zahlensystem** genannt (vom griechischen **deka**, welches zehn heißt).

Wenn der Anfänger unser Zahlensystem vollkommen aufgefaßt hat, so wird er folgende und ähnliche Fragen ohne Schwierigkeit beantworten können:

Wie viel Zehner hat ein Hundert? — wie viel Einheiten enthält ein Hundert?

Wie viel Hunderte enthält ein Tausend? — wie viel Zehner enthält ein Tausend? — wie viel Einheiten hat ein Tausend?

Wie viel Einheiten enthalten 2 Zehner? — wie viel 5 Hunderte, 7 Tausende?

Wie viel Zehner enthalten 8 Hunderte? — wie viel 3 Tausende, 9 Zehntausende?

Wie viel Einheiten machen 6 Millionen? — wie viel Zehner? — wie viel Hunderte? — wie viel Tausende? — wie viel Zehntausende? — wie viel Hunderttausende?

§. 21.

Zur Bezeichnung der Zahlen werden nicht selten auch die **römischen** Ziffern angewendet.

Die Römer hatten **sieben** Zahlzeichen, nähmlich die Buchstaben

I,	V,	X,	L,	C,	D,
für eins,	fünf,	zehn,	fünfzig,	hundert,	fünfhundert,

M.
tausend.

Die übrigen Zahlen werden durch gehöriges Zusammenstellen der angeführten Buchstaben ausgedrückt, wobey folgende Grundsätze zu beobachten sind:

Stehen mehrere gleiche Buchstaben neben einander, so bedeuten sie so viel, als die Werthe der einzelnen Buchstaben zusammengenommen betragen. So bedeutet **II** zwey, **III** drey, **XXX** drey Zehner oder dreyßig, **CCC** 3 Hunderte oder 300 u. s. w.

Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höhern, so wird das letztere um so viel vermindert als das niedrigere bedeutet. Z. B. **IV** bedeutet 5 weniger 1, also 4; **IX** bedeutet 10 weniger 1, also 9; **XL** ist 50 weniger 10, d. i. 40; **XC** ist 100 weniger 10, d. i. 90; **CM** bedeutet 1000 weniger 100, also 900.

Steht aber ein niedrigeres Zahlzeichen hinter einem höhern, so wird das höhere um so viel vermehrt, als das niedrigere bedeutet. Z. B. **VI** ist 5 mehr 1, also 6; **VII** ist 5 und 2, d. i. 7; **LX** bedeutet 50 und 10, also 60; **CXX** ist 100 und 20, also 120, **DCLX** ist 500 mehr 100 mehr 50 mehr 10, d. i. 660.

Nach den angegebenen Grundsätzen bedeutet:

VIII . . .	8,	**LXXIV** . . .	74,
XII . . .	12,	**XCVII** . . .	97,
XIV . . .	14,	**CCLXXI** . . .	271,
XV . . .	15,	**DCCCIX** . . .	809,
XIX . . .	19,	**CMXXIII** . . .	923,
XXVI . . .	26,	**MCCXC** . . .	1290,
XLIII . . .	43,	**MDCCCXLVIII** . . .	1848.

Drittes Hauptstück.

Die vier Rechnungsarten mit unbenannten und einnahmigen Zahlen.

---

§. 22.

Aus bekannten Zahlen durch bestimmte Verbindungen eine unbekannte Zahl finden, heißt **rechnen**.

Z. B. Wie viel ist 3 und 4? Antwort: 7. — Hier sind zwey Zahlen 3 und 4 als bekannt angegeben, die Zahl 7 aber wird nicht angegeben, sondern muß erst aus den bekannten zwey Zahlen gefunden werden. Das Verfahren, durch welches dieses geschieht, ist eine Rechnung.

Man unterscheidet eine zweyfache Art des Rechnens, das **mündliche** oder **Kopfrechnen**, und das **schriftliche** oder **Zifferrechnen**. Beym **Zifferrechnen** bedient man sich der geschriebenen Zahlen, d. i. der Ziffern, und verfährt nach bestimmten Regeln. Beym **Kopfrechnen** ist man an keine festen Regeln gebunden, man braucht dabey keine Ziffern, und darf sich dieselben auch nicht einmahl vorstellen.

I. Das Addiren.

§. 23.

Um zu erfahren, wie viel zwey oder mehrere Zahlen zusammen genommen betragen, muß man sie zusammenzählen oder **addiren**. **Addiren** heißt demnach nichts anderes, als **eine Zahl suchen, welche**

zwey oder mehreren gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist.

Die gegebenen Zahlen heißen **Posten** oder **Addenden**, und die Zahl, welche beym Addiren herauskommt, die **Summe**. Die Summe zeigt also an, wie viel die Addenden zusammen genommen ausmachen.

Z. B. 2 und 1 ist 3; hier sind 2 und 1 die Posten, 3 ist ihre Summe.

Das **Zeichen** der Addition ist ein stehendes Kreuz + (mehr), welches zwischen die Addenden gesetzt wird. — Hier ist auch das **Gleichheitszeichen** = (gleich) zu merken, wodurch angezeigt wird, daß die Zahlenausdrücke, zwischen welchen es steht, einander gleich sind. Z. B. $2 + 3 = 5$ heißt: 2 mehr 3 ist gleich 5; oder 2 und 3 ist 5.

§. 24.

Kleinere Zahlen lassen sich im **Kopfe** zusammenzählen.

Beyspiele.

1. 5 und 2 ist 7; 8 und 5 ist 13; 25 und 3 ist 28; 48 und 7 ist 55.

2. 40 und 20 ist 60; denn 40 sind 4 Zehner, 20 sind 2 Zehner, 4 Zehner und 2 Zehner sind 6 Zehner d. i. 60. — 30 und 20 ist 50; 50 und 30 ist 80; 70 und 10 ist 80.

3. 24 und 30 ist 54; denn 20 und 30 ist 50, und noch die 4 von 24 ist 54. — 35 und 40 ist 75; 16 und 40 ist 56; 63 und 30 ist 93.

4. 67 und 21 ist 88; denn 60 und 20 ist 80, 7 und 1 ist 8, zusammen 88; oder 67 und 20 ist 87, und noch 1 ist 88. — 45 und 34 ist 79; 26 und 24 ist 50; 74 und 19 ist 93.

5. 432 und 346 ist 778; denn 4 Hunderte und 3 Hunderte sind 7 Hunderte, 3 Zehner und 4 Zehner sind 7 Zehner, 2 Einheiten und 6 Einheiten sind 8 Einheiten, zusammen 7 Hunderte 7 Zehner und 8 Einheiten d. i. 778; oder 432 und 300 ist 732, und 40 ist 772, und 6 ist 778. 328 und 65 ist 393; 718 und 148 ist 866.

§. 25.

Aus dem Zusammenzählen im Kopfe überzeugt man sich, daß nur **gleichnahmige** Zahlen zu einander gefügt werden können, nähmlich Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehnern, Hunderte zu Hunderten.

Dasselbe gilt auch beym **schriftlichen Addiren.** Um dabey die gleichnahmigen Zahlen leicht heraus zu finden und zusammen zu zählen, ist es am zweckmäßigsten, gleich beym Anschreiben die Posten so unter einander zu setzen, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, . . . zu stehen kommen.

1. Man addire 25 und 64. Man schreibt die gleichnahmigen Stellen unter einander, nähmlich

$$\begin{array}{r} 25 \\ 64 \end{array}$$

Nun zählt man zusammen: 4 Einheiten und 5 Einheiten geben 9 Einheiten, welche man unter die Stelle der Einheiten hinschreibt. 6 Zehner und 2 Zehner sind 8 Zehner, diese werden unter die Zehner geschrieben. Die Summe pflegt man durch einen Querstrich von den Posten abzusondern. Die ganze Rechnung wird also so stehen

$$\begin{array}{r} 25 \\ 64 \\ \hline 89 \end{array}$$

Addirt man hier, wie beym Kopfrechnen, zuerst die Zehner und dann die Einheiten, oder addirt man von oben herab, so wird man auch dann noch immer dieselbe Summe erhalten.

Man addire eben so: 257 und 321; 518 und 80; 214, 131 und 424; 3285, 1402 und 4012.

2. Es soll die Summe von 142, 361 und 295 gefunden werden. Man schreibt wieder die gleichnahmigen Stellen unter einander, nähmlich

142
361
295

Man fange zuerst bey den Einheiten an: 5 Einheiten und 1 Einheit sind 6 Einheiten, und 2 Einheiten sind 8 Einheiten; diese schreibt man an die Stelle der Einheiten. 9 Zehner und 6 Zehner sind 15 Zehner, und 4 Zehner sind 19 Zehner; diese geben 9 Zehner und 10 Zehner oder 1 Hundert, es werden daher nur die 9 Zehner unter die addirten Zehner angesetzt, 1 Hundert aber wird zu den Hunderten hinzugezählt. 1 Hundert (welches bey den Zehnern herausgekommen ist) und 2 Hunderte sind 3 Hunderte, und 3 Hunderte sind 6 Hunderte, und 1 Hundert sind 7 Hunderte, welche man unter die Hunderte setzt, die Summe ist also 798, und die Rechnung steht:

142
361
295
―――
798

Würde man hier bey den Hunderten zu addiren anfangen, so erhielte man zuerst 6 Hunderte, welche unter die Hunderte gesetzt werden sollten; dann 19 Zehner, von denen 9 Zehner unter die Zehner zu setzen, 1 Hundert aber zu den bereits erhaltenen 6 Hunderten zu zählen wäre, man müßte also die schon angeschriebenen 6 Hunderte in 7 Hunderte verbessern.— Fängt man in der höchsten Stelle zu addiren an, so würde ein solches Verbessern der in der Summe bereits angeschriebenen Ziffern immer eintreten, so oft die Summe der nächst niedrigern Reihe größer als 9 ist. Um daher das Verändern schon hingeschriebener Ziffern zu vermeiden, beginnt man das schriftliche Addiren jedesmahl bey den Einheiten, und setzt es dann gegen die Linke fort.

Daraus sieht man, daß sich das schriftliche Addiren von jenem im Kopfe nur dadurch unterscheidet, daß man beym schriftlichen zuerst die Einheiten, dann die Zehner, u. s. w. addirt; beym mündlichen aber, wobey keine Ziffer angeschrieben wird, und also auch keine Verbesserung derselben eintreten kann, das Addiren bey der höchsten Stelle beginnt.

Eben so addire man folgende Zahlen: 57 und 26; 144, 735 und 1286; 3208, 5969, 870, 3086 und 97.

Aus allen diesen Beyspielen gehen für das schriftliche Addiren folgende Regeln hervor:

1. Man schreibe die Posten so unter einander, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w., überhaupt gleichnahmige Stellen unter einander zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man addire zuerst die Einheiten, dann die Zehner, Hunderte, u. s. w., und schreibe die jedesmahlige Summe, wenn sie nicht größer als 9 ist, unter die addirten Ziffern. Ist aber die Summe einer Reihe größer als 9, also zweyziffrig, so werden nur die Einheiten unter die addirte Reihe geschrieben, die Zehner aber zählt man zu der nächstfolgenden Reihe.

7521	3085	321508	123456
252	1297	39621	234567
1214	706	57906	345678
8987	5088	890	456789
		419925	1160490

Im ersten Beyspiele spricht man: 4 und 2 ist 6, und 1 ist 7; 1 und 5 ist 6, und 2 ist 8; 2 und 2 ist 4, und 5 ist 9; 1 und 7 ist 8. — Im zweyten Beyspiele sagt man: 6 und 7 ist 13, und 5 ist 18, 8 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 9 ist 10, und 8 ist 18, 8 angeschrieben bleibt 1; 1 und 7 ist 8, und 2 ist 10, 0 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 1 ist 2, und 3 ist 5.

Um die Richtigkeit der Summe zu prüfen, ist es am besten, die Addition noch einmahl zu wiederhohlen, so jedoch, daß man das zweyte Mahl von oben hinunter addirt, wenn man das erste Mahl von unten hinauf addirt hat, und umgekehrt. Erhält man jedesmahl dieselbe Summe, so kann man sie als richtig ansehen, da wegen der veränderten Reihenfolge der Zahlen nicht leicht in beyden Fällen derselbe Fehler möglich ist.

§. 26.

Aufgaben.

1. Ein Bäcker kauft nach und nach 25, 29 und 28 Metzen Mehl; wie viel Mehl hat er zusammen gekauft? — Hier will man erfahren, wie viel die Zahlen 25, 29 und 28 zusammen betragen, man muß sie also addiren; zur Summe bekommt man: 82 Metzen.

2. Jemand nimmt in einem halben Jahre folgendes Geld ein: den ersten Monath 225 fl., den zwey-

ten 194 fl., den dritten 170 fl., den vierten 209 fl., den fünften 310 fl., den sechsten 98 fl.; wie viel nahm er zusammen ein? — 1206 fl.

3. Ein Besitzer hat drey Güter; das erste trägt ihm jährlich 820 fl., das zweyte 540 fl., das dritte 385 fl. ein; wie groß ist sein ganzes jährliches Einkommen? — 1745 fl.

4. Jemand gibt folgende Summen aus: an A 1580 fl., an B 792 fl., an C 2350 fl.; wie viel hat er im Ganzen ausgegeben? — 4722 fl.

5. Ein Flachshändler hat 7 Ballen Flachs, im ersten sind 85 ℔, im zweyten 83, im dritten 90, im vierten 96, im fünften 87, im sechsten 91, im siebenten 102 ℔; wie groß ist der ganze Flachsvorrath? — 634 ℔.

6. Jemand besitzt an barem Gelde 4580 fl., an Kapitalien 8785 fl., und an liegenden Gründen 5084 fl.; wie groß ist sein ganzes Vermögen? — 18449 fl.

7. Jemand ist an A 584 fl. schuldig, an B 1205 fl., an C 750 fl., und an D 1081 fl.; wie viel ist er allen zusammen schuldig? — 3620 fl.

8. Ein Kaufmann kauft um 1245 fl. Zucker; wie viel wird er dafür einnehmen müssen, damit er 148 fl. gewinne? — 1245 fl., die er beym Einkaufe ausgegeben, und noch die 148 fl., die er gewinnen will; zusammen 1393 fl.

9. Die große Kaiserinn Maria Theresia war im Jahre 1717 geboren, und lebte 63 Jahre; in welchem Jahre starb sie? — Als diese berühmte Fürstinn geboren war, zählte man das Jahr 1717; als sie starb zählte man 63 Jahre mehr, also 1717 und 63 d. i. 1780.

10. Eine fünfseitige Fläche läßt sich in drey Dreyecke zerlegen; das erste Dreyeck enthält 2425, das zweyte 748, das dritte 3106 Quadratfuß; wie groß ist der Flächeninhalt des ganzen Fünfeckes? — 6279 Quadratfuß.

11. Jemand hat vier Kapitalien; von dem ersten zieht er jährlich 75, von dem zweyten 128, von dem dritten 340, von dem vierten 36 fl.; wie viel Interessen bekommt er jährlich von allen vier Kapitalien? — 579 fl.

12. Bey einem vorzunehmenden Baue wurden folgende Kosten veranschlagt:

auf die Maurerarbeit	842 fl.
" " Zimmermannsarbeit	126 "
" " Tischlerarbeit	84 "
" " Schlosserarbeit	81 "
" Verschiedenes	25 "
wie viel zusammen?	1158 fl.

13. In Triest sind im Monathe August 1845 geschlachtet und verzehret worden: 1182 Ochsen, 1507 Kälber, 20 Lämmer und 1232 Hammel; wie viel sind es Thiere zusammen? — 3941.

14. Die Seidenerzeugnisse des österreichischen Kaiserstaates im Jahre 1844 hatten im Durchschnitte folgenden Werth: in der Lombardie 29253589, im Venetianischen 17450302, in Tirol 2869583, in Ungarn und der Militärgränze 519487, im Küstenlande 201330 fl.; wie groß war der Gesammtwerth? — 50294291 fl.

II. Das Subtrahiren.

§. 27.

Will man wissen, um wie viel Einheiten eine Zahl größer ist als eine andere, braucht man nur die kleinere von der größern hinwegzunehmen; diese Rechnungsart wird das **Subtrahiren** genannt. **Subtrahiren** oder **abziehen** heißt also **eine Zahl von einer andern wegnehmen.**

Beym Subtrahiren werden immer **zwey** Zahlen angegeben; die größere, von welcher man abzieht, heißt der **Minuend,** die kleinere Zahl, welche man abzieht, der **Subtrahend,** und die Zahl, welche beym Subtrahiren herauskommt, der **Rest**. Der Rest zeigt also an, um wie viel Einheiten der Minuend größer ist als der Subtrahend, darum heißt er auch der **Unterschied.**

Z. B. 4 von 6 bleiben 2; hier ist 6 der Minuend, 4 der Subtrahend, und 2 der Rest oder Unterschied.

Das **Zeichen** der Subtraction ist ein liegender Strich — (weniger); der Minuend wird vor, der Subtrahend nach dem Striche gesetzt. Z. B. $3 - 2 = 1$ bedeutet: 3 weniger 2 ist gleich 1, oder: 2 von 3 bleibt 1.

Wenn man den Unterschied zu der kleinern Zahl hinzuaddirt, so muß natürlich die größere Zahl herauskommen. Der Minuend kann daher immer als die Summe zweyer Zahlen betrachtet werden, der Subtrahend ist eine dieser zwey Zahlen, der Rest die andere.

§. 28.

Kleinere Zahlen können im **Kopfe** abgezogen werden.

B e y s p i e l e.

1. 3 von 8 bleiben 5; 2 von 11 bleiben 9; 4 von 25 bleiben 21; 30 weniger 6 sind 24; 9 von 72 bleiben 63. —

Wie viel bleibt übrig, wenn man 6 von 19; 7 von 38; 3 von 42; 8 von 63 wegnimmt?

2. 30 von 80 bleiben 50; denn 80 sind 8 Zehner, 30 sind 3 Zehner; 8 Zehner weniger 3 Zehner sind 5 Zehner d. i. 50. —

Wie viel bleibt 10 von 60? — 20 von 50? — 30 von 90? — 10 von 80? — 50 von 60?

3. Will man 40 von 75 wegnehmen, so nimmt man 40 von 70 weg, und die 5 bleiben ungeändert, nähmlich 40 von 70 bleiben 30, und die 5 sind 35. — 20 von 24 bleiben 4; 30 von 57 bleiben 27; 70 von 99 bleiben 29.

4. Was bleibt übrig, wenn man 32 von 95 abzieht? Man wird von 95 zuerst 30, und dann 2 abziehen, und sagen: 30 von 95 bleiben 65, 2 von 65 bleiben 63; oder: 9 Zehner weniger 3 Zehner sind 6 Zehner, 5 Einheiten weniger 2 Einheiten sind 3 Einheiten, es bleiben also 6 Zehner und 3 Einheiten d. i. 63. — 83 von 98 bleiben 15; 49 von 269 bleiben 220; 234 von 485 bleiben 251; 127 von 355 bleiben 228; 542 von 800 bleiben 258.

§. 29.

Aus dem Subtrahiren im Kopfe sieht man, daß nur **gleichnahmige** Zahlen von einander weggenommen werden können, nähmlich Einheiten von Einheiten, Zehner von Zehnern, u. s. w.

Dasselbe gilt auch beym **schriftlichen Subtrahiren**. Man setzt darum gleich beym Anschreiben den Subtrahend so unter den Minuend, daß die gleichnahmigen Stellen unter einander zu stehen kommen.

1. Man ziehe 172 von 695 ab. Man schreibt Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, . . . nähmlich

$$\begin{array}{r} 695 \\ 172 \end{array}$$

Nun subtrahirt man: 2 Einheiten von 5 Einheiten bleiben 3 Einheiten, diese schreibt man als Rest in die Stelle der Einheiten; 7 Zehner von 9 Zehnern bleiben 2 Zehner, welche man unter die Zehner schreibt; 1 Hundert von 6 Hunderten bleiben 5 Hunderte, diese setzt man an die dritte Stelle unter die Hunderte; der ganze Rest ist also 523. Der Rest wird von den zwey gegebenen Zahlen durch einen Querstrich getrennt; die ganze Rechnung ist also

$$\begin{array}{r} 695 \\ 172 \\ \hline 523 \end{array}$$

Subtrahirt man hier zuerst die Hunderte, dann die Zehner und zuletzt die Einheiten, so kommt auch da derselbe Rest zum Vorschein.

Man subtrahirt auf gleiche Weise 123 von 566, 213 von 527, 153 von 684, 2510 von 4765, 1304 von 8846, 170 von 4593.

2. Um 169 von 549 abzuziehen, setze man wieder die gleichnahmigen Stellen unter einander, nähmlich

$$\begin{array}{r} 549 \\ 169 \\ \hline \end{array}$$

Man beginnt bey den Einheiten: 9 Einheiten von 9 Einheiten bleiben 0 Einheiten, unter die Einheiten wird daher eine Nulle geschrieben. Nun zieht man die Zehner ab: 6 Zehner können von 4 Zehnern nicht weggenommen werden, man ist daher genöthiget, im Minuend von den 5 Hunderten 1 Hundert zu borgen, dieses geborgte Hundert gibt 10 Zehner, und die schon vorhandenen 4 Zehner dazu gezählt, sind 14 Zehner; von diesen 14 Zehnern lassen sich nun 6 Zehner abziehen, es bleiben nähmlich 8 Zehner. An der Stelle der Hunderte sind dann im Minuend nicht mehr 5 Hunderte, sondern weil einer weggeborgt wurde, nur noch 4 Hunderte; daß dort 1 Hundert weniger ist, wird dadurch angezeigt, daß man der Ziffer 5 rechts oben einen Punct hinzusetzt. Endlich subtrahirt man die Hunderte: 1 Hundert von 4 Hunderten bleiben 3 Hunderte. Der Rest ist also 380, und die Rechnung steht

$\dot{5}49$		4 H. 14 Z. 9 E.
169	was so zu verstehen:	1 „ 6 „ 9 „
380		3 H. 8 Z. 0 E.

Aus diesem Beyspiel ersieht man: Wenn eine Stelle des Subtrahends größer ist als die gleichnahmige Stelle im Minuend, so muß man in der nächst höhern Stelle 1 borgen, welches in der niedrigern Stelle 10 gilt, und die Ziffer, von welcher man geborgt hat, mit einem Puncte bezeichnen.

Würde man in dem frühern Beyspiele das Abziehen bey den Hunderten anfangen, so hätte man: 1 Hundert von 5 Hunderten bleiben 4 Hunderte, welche man anschreibt; 6 Zehner von 4 Zehnern kann man nicht abziehen, man muß von den übrig gebliebenen 4 Hunderten 1 Hundert borgen; an der dritten Stelle bleiben dann nur noch 3 Hunderte, und man müßte die schon angeschriebenen 4 Hunderte in 3 Hunderte verbessern. — Ein solches Verbessern schon hingeschriebener Ziffern würde, wenn man von der höchsten Stelle zu subtrahiren anfängt, immer eintreten, so oft man von einer Stelle borgen muß. Um dieses zu vermeiden, fängt man jedesmahl bey den Einheiten zu subtrahiren an. Eben dadurch unterscheidet sich das schriftliche Abziehen von dem mündlichen, daß man bey jenem in der mindesten, bey diesem in der höchsten Stelle zu subtrahiren beginnt.

Man verrichte noch die Subtraction folgender Zahlen: 315 von 742, 842 von 1626, 925 von 982, 392 von 461, 3156 von 37222.

3. Wie viel bleibt übrig, wenn man 456 von 803 abzieht. Man schreibt

$$\begin{array}{r}803\\ \underline{456}\end{array}$$

und fängt bey den Einheiten zu subtrahiren an: 6 Einheiten kann man von 3 Einheiten nicht wegnehmen, man muß daher 1 Zehner borgen; aber in der Stelle der Zehner ist 0, und man kann davon nichts borgen; man borgt daher in der dritten Stelle 1 Hundert, worauf nur noch 7 Hunderte bleiben, was mit dem Borgepuncte angezeigt wird. Das weggenommene Hundert gibt 10 Zehner, welche an der Stelle der Nulle sind; von diesen 10 Zehnern borgt man nun 1 Zehner, worauf an der Stelle der Nulle noch 9 Zehner bleiben. Der geborgte Zehner gibt 10 Einheiten, und die bereits vorhandenen 3 Einheiten sind 13 Einheiten. Man hat dann: 6 Einheiten von 13 Einheiten bleiben 7 Einheiten; 5 Zehner von 9 Zehnern bleiben 4 Zehner; 4 Hunderte von 7 Hunderten bleiben 3 Hunderte. Diese Rechnung steht

$$\left.\begin{array}{r}8\dot{0}3\\ \underline{456}\\ 347\end{array}\right\}\text{ so viel als }\left\{\begin{array}{l}7\ \mathfrak{H}.\ 9\ \mathfrak{Z}.\ 13\ \mathfrak{E}.\\ \underline{4\ \ ,,\ \ 5\ \ ,,\ \ \ 6\ \ ,,}\\ 3\ \mathfrak{H}.\ 4\ \mathfrak{Z}.\ \ 7\ \mathfrak{E}.\end{array}\right.$$

Die Nulle mit dem Borgepuncte bedeutet also 9.

Auf dieselbe Weise ziehe man ab: 578 von 904, 295 von 1046, 1377 von 3004, 2505 von 3000, 9789 von 40012.

Aus allen Vorhergehenden ergeben sich für das schriftliche Subtrahiren folgende Regeln:

1. Man schreibe den Subtrahend so unter den Minuend, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, . . . zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man subtrahire zuerst die Einheiten, dann die Zehner, Hunderte, u. s. w., und schreibe den Rest jedesmahl unter die Stelle, an welcher subtrahirt wurde. Bleibt in der letzten Stelle kein Rest, so wird die 0 daselbst nicht angeschrieben.

3. Ist eine Ziffer des Subtrahends größer als die darüber stehende Ziffer im Minuend, von welcher abgezogen werden soll, so borgt man von der nächst höhern Stelle 1, welches in der niedrigern Stelle 10 gilt, wozu die schon vorhandene Ziffer addirt wird. Die Ziffer, von welcher geborgt wurde, wird mit einem Puncte bezeichnet, und gilt um 1 weniger.

4. Ist die Ziffer, von welcher man borgen soll, eine Nulle, so muß so lange weiter geborgt werden, bis man auf eine bedeutliche Ziffer kommt. Die Nulle mit dem Borgepuncte gilt dann 9.

B e y s p i e l e.

7498	230165	90089456
2375	183305	8506778
5123	46860	81582678

Im ersten Beyspiele sagt man: 5 von 8 bleiben 3; 7 von 9 bleiben 2; 3 von 4 bleibt 1; 2 von 7 bleiben 5. — Im zweyten Beyspiele spricht man: 5 von 5 bleibt 0; 0 von 6 bleiben 6; 3 von 11 bleiben 8; 3 von 9 bleiben 6; 8 von 12 bleiben 4; 1 von 1 geht auf.

Die Probe für die Richtigkeit des Restes besteht darin, daß man den Rest zu dem Subtrahend addirt; erhält man dadurch den Minuend zur Summe, so ist richtig subtrahirt worden.

§. 30.

Aufgaben.

1. Ein Getreidehändler hat 95 Metzen Weizen vorräthig, und verkauft 38 Metzen; wie viel wird ihm noch bleiben? — 95 Metzen weniger 38 Metzen d. i. 57 Metzen.

2. Jemand nimmt in einem Jahre 1200 fl. ein, und gibt davon nur 745 fl. aus; wie viel erspart er? — Hier muß man die Ausgabe von der Einnahme abziehen, man bekommt 455 fl.

3. Ich habe eine Schuld von 1470 fl. zu fordern; darauf zahlt man mir 785 fl.; wie viel habe ich noch zu fordern? — 1470 fl. weniger 785 fl., man muß also subtrahiren, wodurch man 685 fl. erhält.

4. A sagt: die Länge dieser Brücke beträgt 150 Schritte. Er schreitet sie ab, und findet nur 133 Schritte; um wie viel hat er gefehlt? — Um zu sehen, um wie viel 150 größer als 133 ist, muß man subtrahiren, man bekommt 17 Schritte.

5. Die Ortelsspitze liegt 12351, der Großglockner 11991 Fuß über der Meeresfläche; um wie viel ist die Ortelsspitze höher als der Großglockner? — Um 360 Fuß.

6. Jemand ist im Jahre 1814 geboren, und jetzt schreibt man 1848; wie alt ist er? — 34 Jahre.

7. Jemand kauft 1540 ℔ Zucker, und 995 ℔ Kaffeh; wie viel ℔ macht dieses zusammen, und wie viel ℔ sind mehr vom Zucker als vom Kaffeh? — Man hat zusammen 1540 ℔ und 995 ℔, also 2535 ℔; vom Zucker hat man 1540 weniger 995 d. i. 545 ℔ mehr als vom Kaffeh.

8. Frankreich hatte im Anfange des Jahres 1844 zusammen 13656 Handelsschiffe, England 23024; wie viel Handelsschiffe hatte Frankreich weniger als England? — 9368.

9. Auf den deutschen Eisenbahnen war die Zahl der transportirten Personen im ersten Halbjahre 1845 4809987, und im ersten Halbjahre 1844 4382666; um wie viel ist die erste Zahl größer als die zweyte? — Um 427321.

10. Im Jahre 1844 betrug in Triest die Einfuhr von Kaffeh 210402, und die Ausfuhr 209244 Zentner; um wie viel war die Einfuhr größer als die Ausfuhr? — Um 1158 Zentner.

11. Ein Kaufmann hatte zu Anfange des Jahres 1208 ℔ Öhl vorräthig; dazu bekam er während des Jahres 6 Fässer, enthaltend 824, 785, 806, 820, 805, 798 ℔. Wenn er nun nach und nach 404, 275, 1220, 155, 1300, 430, 342, 528, 92, 785 ℔ verkauft; wie groß war sein Vorrath an Öhl am Schlusse des Jahres? — 515 ℔.

12. In Wien sind im Jahre 1843 17948 Menschen geboren worden, und 15472 gestorben; im Jahre 1844 betrug die Zahl der Gebornen 18524, und die der Verstorbenen 14774; wie viele sind im Jahre 1843 mehr geboren worden, als gestorben, wie viele im Jahre 1844; um wie viel ist im Jahre 1844 die Zahl der Geborenen größer, und die Zahl der Verstorbenen kleiner als im Jahre 1843? — Im Jahre 1843 sind 2476 Menschen, im Jahre 1844 3750 mehr geboren worden, als gestorben; die Zahl der Gebornen war im Jahre 1844 um 576 größer, die der Verstorbenen um 698 kleiner als im Jahre 1843.

III. Das Multipliciren.

§. 31.

Wenn eine und dieselbe Zahl öfters genommen werden soll, so bedient man sich dazu statt des Addirens einer eigenen kürzern Rechnungsart, welche das **Multipliciren** genannt wird; **multipliciren** heißt nähmlich eine Zahl so oftmahl nehmen, als eine andere Einheiten in sich enthält.

Z. B. 8 mit 4 multipliciren heißt 8 so oftmahl nehmen, als 4 Einheiten in sich enthält, also 8 4mahl nehmen, wodurch man 32 erhält.

Die Zahl, welche man mehrmahl nimmt, heißt der **Multiplicand**; die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplicand genommen werden soll, der **Multiplicator**; jede von diesen beyden Zahlen wird auch ein **Factor** genannt. Die Zahl, welche bey der Multiplication herauskommt, heißt das **Product.**

In dem frühern Beyspiele sind 8 und 4 die Factoren, und zwar 8 der Multiplicand, 4 der Multiplicator; 32 ist das Product.

Das Zeichen der Multiplication ist ein schiefes Kreuz $\times$, welches zwischen die Factoren gesetzt wird. Z. B. $8 \times 4 = 32$ wird gelesen: 8 multiplicirt mit 4 ist gleich 32.

§. 32.

Einfache Multiplicationen lassen sich im **Kopfe** verrichten.

Beyspiele.

1. 3mahl 6 ist 18; 5mahl 8 ist 40; 9mahl 6 ist 54.

2. 6mahl 10 ist 60; denn 10 ist 1 Zehner, 6mahl 1 Zehner sind 6 Zehner d. i. 60. — 7mahl 20 ist 140; denn 7mahl 2 Zehner sind 14 Zehner oder 140 Einheiten. — 3mahl 60 sind 3mahl 6 Zehner, also 18 Zehner oder 180.

3. 3mahl 12 ist 36; denn 3mahl 10 ist 30, 3mahl 2 ist 6, zusammen 36. — 5mahl 16 ist 80; 9mahl 32 ist 288; 8mahl 48 ist 384.

4. 10mahl 6 ist 60. — 10mahl 15 ist 150; denn 10mahl 1 Zehner gibt 1 Hundert, und 10mahl 5 Einheiten geben 5 Zehner, 1 Hundert und 5 Zehner sind 150. — 10mahl 80 ist 800. — 30mahl 50 ist 1500; denn 10mahl 5 Zehner sind 50 Zehner oder 5 Hunderte, 30mahl 5 Zehner ist 3mahl so viel, also 3mahl 5 Hunderte d. i. 15 Hunderte, oder 1500.

5. 12mahl 14 ist 168; nähmlich 10mahl 14 ist 140, 2mahl 14 ist 28, 140 und 28 sind 168. — Wie viel ist 15mahl 82? — 18mahl 62? — 32mahl 54?

§. 33.

Beym **schriftlichen Multipliciren** ist vor Allem der Satz zu merken:

Wenn ein Factor 0 ist, so ist auch das Product 0.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet aus dem Begriffe der Multiplication. Denn, ist der Multiplicand 0, so hat man 0 (nichts) öfters zu nehmen, wodurch gewiß auch 0 herauskommt; ist aber der Multiplicator 0, so hat man den Multiplicand 0mahl (keinmahl) zu nehmen, wodurch man sicher auch nichts d. i. 0 erhält.

Es ist also z. B. 3mahl 0 gleich 0; und 0mahl 3 auch gleich 0.

Beym schriftlichen Multipliciren sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn der **Multiplicator einziffrig** ist.

1. Man multiplicire 232 mit 3.

Um 232 3mahl zu nehmen, wird man die Einheiten 3mahl nehmen, die Zehner 3mahl nehmen, und die Hunderte 3mahl nehmen, und die dadurch erhaltenen Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner, und die Hunderte unter die Hunderte schreiben. Man wird also haben: 3mahl 2 Einheiten sind 6 Einheiten, 3mahl 3 Zehner sind 9 Zehner, 3mahl 2 Hunderte sind 6 Hunderte. Die Rechnung steht

$$\begin{array}{r} 232 \\ 3 \\ \hline 696 \end{array}$$

Dasselbe Product erhält man auch, wenn man zuerst die Hunderte, dann die Zehner, und endlich die Einheiten mit 3 multipliciren würde.

Auf dieselbe Art multiplicire man 42 mit 2, 321 mit 3, 2112 mit 4.

2. Wie viel ist 9mahl 345?

Man multiplicire hier: 9mahl 5 Einheiten sind 45 Einheiten, diese geben 4 Zehner und 5 Einheiten; die 5 Einheiten schreibt man unter die Einheiten, die 4 Zehner aber werden zu dem Producte der Zehner gezählt; man behält sie so lange im Gedächtnisse, bis man das Product der Zehner erhalten hat; 9mahl 4 Zehner sind 36 Zehner, und die im Gedächtnisse behaltenen 4 Zehner sind 40 Zehner d. i. 4 Hunderte und 0 Zehner; unter die Zehner wird daher 0 gesetzt, die 4 Hunderte merkt man sich; endlich: 9mahl 3 Hundert sind 27 Hun=

derte, und die aus den Zehnern gezogenen 4 Hunderte sind 31 Hunderte, oder 3 Tausende und 1 Hundert; 1 Hundert kommt in die Stelle der Hunderte, die 3 Tausende aber in die Stelle der Tausende. — Die ganze Rechnung stehet

$$\begin{array}{r} 345 \\ 9 \\ \hline 3105 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 345 \times 9 \\ \hline 3105 \end{array}$$

Weil hier von den niedrigern Stellen in die höhern hinübergezählt wird, so ist es natürlich, daß man die Multiplication bey den Einheiten beginne, und sodann gegen die Linke hin fortsetze.

Eben so multiplicire man 67 mit 5, 283 mit 4, 708 mit 6, 52016 mit 8.

Wenn also der Multiplicator einziffrig ist, so beobachte man beym schriftlichen Multipliciren folgende Regeln:

1. Man schreibe den Multiplicator unter die Einheiten des Multiplicands, und ziehe darunter einen Querstrich.

Oft wird der Multiplicator auch gar nicht unter den Multiplicand geschrieben, sondern sogleich das Product unter den Querstrich hingesetzt.

2. Man multiplicire mit dem einziffrigen Multiplicator zuerst die Einheiten, dann die Zehner, . . . des Multiplicands, und schreibe das jedesmahlige Product, wenn es einziffrig ist, unter diejenige Stelle, welche man multiplicirt hat; ist aber das Product zweyziffrig, so werden nur die Einheiten davon an jene Stelle gesetzt, die Zehner aber zu dem Producte der nächst höhern Stelle hinzugezählt. Das letzte Product wird ganz angeschrieben.

Beyspiele.

1) 8213 oder $\underline{8213 \times 3}$
$\underline{3}$ 24639
24639

2) 370813 oder $\underline{370813 \times 7}$
$\underline{7}$ 2595691
2595691

Im ersten Beyspiele spricht man: 3mahl 3 ist 9; 3mahl 1 ist 3; 3mahl 2 ist 6; 3mahl 8 ist 24. — Im zweyten Beyspiele wird gesagt: 7mahl 3 ist 21, 1 angeschrieben, bleiben 2; 7mahl 1 ist 7, und 2 ist 9; 7mahl 8 ist 56, 6 angeschrieben, bleiben 5; 7mahl 0 ist 0, und 5 ist 5; 7mahl 7 ist 49, 9 angeschrieben, bleiben 4; 7mahl 3 ist 21, und 4 ist 25.

3) $\underline{123456 \times 6}$
740736

4) $\underline{307120 \times 9}$
2764080

5) $\underline{50413207 \times 5}$
252066035

6) $\underline{987654321 \times 4}$
3950617284

§. 34.

b. Wenn der **Multiplicator 10, 100, 1000, . . .** ist.

1. Um eine Zahl z. B. 275 mit 10 zu multipliciren, muß man jede Ziffer derselben 10mahl nehmen, 5 Einheiten 10mahl genommen geben 5 Zehner, 7 Zehner 10mahl genommen geben 7 Hunderte, 2 Hunderte 10mahl genommen geben 2 Tausende. Wenn man also eine Zahl mit 10 multiplicirt, so erscheinen im Producte die frühern Einheiten als Zehner, die frühern Zehner als Hunderte u. s. w., überhaupt rückt jede Ziffer um eine Stelle weiter gegen die Linke; diese ganze Vorrückung wird dadurch erreicht,

wenn man die Ziffern ungeändert läßt, und ihnen rechts eine Nulle anhängt.

2. Es sey z. B. 326 mit 100 zu multipliciren. Ich muß zu diesem Ende jeden Theil 100mahl nehmen; 100mahl 6 Einheiten sind 6 Hunderte, 100mahl 2 Zehner sind 2 Tausende, 100mahl 3 Hunderte sind 3 Zehntausende; es rückt also jede Ziffer um 2 Stellen gegen die Linke; dieses wird erreicht, wenn man der Zahl rechts 2 Nullen anhängt. Eine Zahl wird also mit 100 multiplicirt, wenn man ihr rechts 2 Nullen anhängt.

Auf ähnliche Weise multiplicire man 783 mit 1000, 586 mit 10000.

Man wird durch diese Beyspiele auf folgende Regel geleitet:

Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000, . . . multiplicirt, wenn man jede Ziffer um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter gegen die Linke rückt, was bewirkt wird, indem man der Zahl rechts 1, 2, 3, . . . Nullen anhängt.

Beyspiele.

7243 × 10	85609 × 100	704 × 1000
72430	8560900	704000

§. 35.

c. Wenn der **Multiplicator mehrziffrig** ist.

Man pflegt den Multiplicator so unter den Multiplicand zu setzen, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen.

1. Es sey 567 mit 53 zu multipliciren. Man muß hier 567 sowohl 3mahl als 50mahl nehmen, und beydes zusammensetzen. 567 3mahl genommen oder mit 3 multiplicirt gibt 1701; um die Zahl 567 50mahl zu nehmen, sucht man zuerst das 5fache

davon, indem man sie mit 5 multiplicirt, und nimmt dieses 5fache noch 10mahl, indem man es um eine Stelle gegen die Linke rückt, oder ihm rechts eine Nulle anhängt, man erhält 28350; endlich wird das 3fache und das 50fache zusammengezählt, wodurch man 30051 bekommt. Die Rechnung stehet

$$\begin{array}{r} 567 \\ 53 \\ \hline 1701 \\ 28350 \\ \hline 30051 \end{array}$$

2. Man multiplicire 2347 mit 2305. Hier muß man 2347 zuerst 5mahl, dann 300mahl, endlich 2000mahl nehmen, und alles zusammen zählen. 5mahl 2347 ist 11735; um 300mahl 2347 zu bekommen, multiplicirt man 2347 mit 3, und nimmt das 3fache 100mahl, indem man rechts 2 Nullen anhängt, man bekommt dadurch 704100; endlich wird 2347 noch 2000mahl genommen, indem man mit 2 multiplicirt, und rechts 3 Nullen anhängt, man erhält 4694000; das 5fache, das 300fache, und das 2000fache wird nun addirt, wodurch man 5409835 bekommt. Die ganze Rechnung stehet

$$\begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 11735 \\ 704100 \\ 4694000 \\ \hline 5409835 \end{array}$$

Aus diesem und ähnlichen Beyspielen ersieht man, daß die erste bedeutliche Ziffer eines jeden Theilproductes immer unter die Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, mit welcher man multiplicirt; wenn man auf dieses Rücksicht nimmt, so können dann die Nullen rechts, welche ohnehin beym Addiren nichts ändern, auch gänzlich weggelassen werden; man braucht dann nur den ganzen Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplicators zu multipliciren, und die erste Ziffer eines solchen Productes unter diejenige Ziffer des Multiplicands zu setzen, mit welcher man multiplicirt. Die obigen zwey Beyspiele würden dann so stehen:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 53 \\ \hline 1701 \\ 2835 \\ \hline 30051 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 11735 \\ 7041 \\ 4694 \\ \hline 5409835 \end{array}$$

Aus dem zweyten Beyspiele sieht man, daß, wenn der Multiplicator in der Mitte eine Nulle hat, diese beym Multipliciren ganz übergangen wird.

Es ist gleichviel, in welcher Ordnung mit den Ziffern des Multiplicators multiplicirt wird; das zweyte Beyspiel läßt sich daher auf sechsfache Art ausarbeiten:

$$\begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 11735 \\ 7041 \\ 4694 \\ \hline 5409835 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 4694 \\ 7041 \\ 11735 \\ \hline 5409835 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 7041 \\ 4694 \\ 11735 \\ \hline 5409835 \end{array}$$

$$\text{oder} \quad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 11735 \\ 4694 \\ 7041 \\ \hline 5409835 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 4694 \\ 11735 \\ 7041 \\ \hline 5409835 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 2347 \\ 2305 \\ \hline 7041 \\ 11735 \\ 4694 \\ \hline 5409835 \end{array}$$

Am gewöhnlichsten ist die erste Art, wo man zuerst mit den Einheiten, dann mit den Zehnern, . . . multiplicirt.

Wenn also **der Multiplicator mehrziffrig ist**, so sind beym schriftlichen Multipliciren folgende Regeln zu beobachten:

1. Man schreibe den Multiplicator so unter den Multiplicand, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, . . . zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man multiplicire nun den ganzen Multiplicand zuerst mit den Einheiten, dann mit den Zehnern, Hunderten, . . . des Multiplicators, und fange das jedesmahlige Product unter diejenige Ziffer des Multiplicators zu schreiben an, mit welcher man multiplicirt hat.

Kommt im Multiplicator eine Nulle vor, so wird dieselbe beym Multipliciren übergangen.

3. Man addire die einzelnen Producte, so wie sie angeschrieben sind; die Summe dieser Theilproducte ist das gesuchte Product.

B e y s p i e l e.

1)	2385	2)	72183	3)	603514
	137		806		380
	16695		433098		48281120
	7155		577464		1810542
	2385		58179498		229335320
	326745				

Im dritten Beyspiele hängt man zu dem ersten Theilproducte rechts eine Nulle hinzu, weil die erste bedeutliche Ziffer unter die Zehner kommen muß.

4) $3021958 \times 72 = 217580976$.

5) $238047 \times 322 = 76651134$.

6) $56321 \times 53402 = 3007654042$.

Es ist für das Product gleichgültig, welchen Factor man als Multiplicand annimmt; z. B.

1548	oder	226
226		1548
9288		1808
3096		904
3096		1130
349848		226
		349848

Am Zweckmäßigsten ist es, denjenigen Factor als Multiplicand zu nehmen, welcher mehr bedeutliche und verschiedene Ziffern enthält.

Die beste Probe für die Richtigkeit der Multiplication besteht darin, daß man noch einmahl multiplicirt; bekommt man wieder das nähmliche Product, so darf man es als richtig ansehen, besonders, wenn man bey der zweyten Multiplication die Factoren verwechselt, d. i. denjenigen zum Multiplicand annimmt, der früher Multiplicator war.

§. 36.

d. Wenn in den Factoren **rechts Nullen** vorkommen.

1. Hat der Multiplicand rechts Nullen, so werden diese auch im Producte vorkommen, weil 0 mit was immer für einer Zahl multiplicirt 0 zum Producte gibt. Z. B.

7230	56800	308000
23	12	304
21690	113600	1232000
14460	56800	924000
166290	681600	93632000

2. Hat der Multiplicator rechts Nullen, so wird die erste bedeutliche Ziffer des Productes an jene

Stelle zu stehen kommen, an welcher sich die erste bedeutliche Ziffer im Multiplicator befindet; d. h. es wird auch das Product rechts so viele Nullen erhalten, als ihrer im Multiplicator rechts vorkommen. Z. B.

5824	3245	342156
130	4300	60000
174720	973500	20529360000
5824	12980	
757120	13953500	

3. Haben endlich beyde Factoren rechts Nullen, so werden im Puncte außer den Nullen des Multiplicands auch jene des Multiplicators vorkommen; d. h. im Producte werden rechts so viele Nullen erscheinen, als ihrer beyde Factoren rechts haben. Z. B.

345600	50284000
130	300800
10368000	40227200000
345600	150852000
44928000	15125427200000

Aus allen diesem ergibt sich folgende Regel:

Kommen in einem oder in beyden Factoren rechts Nullen vor, so wird die Multiplication am einfachsten verrichtet, wenn man jene Nullen wegläßt, die dann übriggebliebenen Zahlen mit einander multiplicirt, und dem Producte rechts so viele Nullen anhängt, als ihrer in beyden Factoren weggelassen wurden.

Um z. B. 305200 mit 180 zu multipliciren, sucht man das Produet aus 3052 und 18, und hängt diesem Producte 54936 die in beyden Factoren rechts vorkommenden und während der Rechnung weggelassenen 3 Nullen wieder an. Die Rechnung steht also:

$$\begin{array}{r} 305200 \times 180 \\ 18 \\ \hline 24416 \\ 3052 \\ \hline 54936000 \end{array}$$

Man multiplicire auf gleiche Weise 12345000 mit 87; 53124 mit 2800; 3014200 mit 204000; 3612000 mit 50020.

§. 37.

Aufgaben.

In der Anwendung der Multiplication auf wirkliche Aufgaben wird der Multiplicator während der Rechnung als unbenannt betrachtet, und das Product erhält gleichen Nahmen mit dem Multiplicand.

(1). 1 Ztr. Reis kostet 14 fl.; was kosten 9 Ztr.? — Man folgert: wenn 1 Ztr. 14 fl. kostet, so kosten 2 Ztr. doppelt so viel, also 2mahl 14 fl., 3 Ztr. kosten 3mahl 14 fl., 4 Ztr. 4mahl 14 fl., . . . 9 Ztr. also 9mahl 14 fl. Man muß also 14 fl. mit 9 multipliciren, wodurch man 126 fl. erhält.

(2). Was kosten 25 Ellen Tuch zu 5 fl.? — 25mahl 5 d. i. 125 fl.

(3). Es sind 5 Erben, von denen jeder 2354 fl. erbt; wie groß war das ganze Vermögen? — 11770 fl.

(4). Ein Schüler zahlt monathlich 24 fl. Kost- und Quartiergeld; wie viel beträgt dieses für 10 Monathe? — Für 2 Monathe zahlt er 2mahl 24 fl., für 3 Monathe 3mahl 24 fl., . . . für 10 Monathe also 10mahl 24 fl. d. i. 240 fl.

(5). In einer Fabrik sind 96 Arbeiter, deren jeder monathlich 18 fl. bekommt; wie viel erhalten sie alle zusammen in einem Monathe, wie viel in einem Jahre? — Wenn 1 Arbeiter monathlich 18 fl. erhält, so werden 96 Arbeiter 96mahl 18 fl. bekommen, man muß also 18 fl. mit 96 multipliciren, wodurch man 1728 fl. erhält; in einem Jahre bekommen sie 12mahl so viel als in einem Monathe, also 12mahl 1728 fl. d. i. 20736.

(6). Wie viel Kreuzer machen 25 fl.? — 1 fl. hat 60 Kr., 2 fl. machen 2mahl 60 Kr., 3 fl. 3mahl 60 Kr. . . . 25 fl. also 25mahl 60 Kr. d. i. 1500 Kr.

(7). Wie viel Loth machen 68 ℔? — 1 ℔ hat 32 Loth, 68 ℔ machen also 68mahl 32 = 2176 Loth.

(8). Wie viel wiegen 15 Kisten, jede zu 84 ℔? — 1260 ℔.

(9). Wie viel Maß Wein enthalten 28 Fässer, wenn jedes Faß 360 Maß enthält? — 10080 Maß.

(10). Bey einer öffentlichen Versteigerung wurden 12 Ztr. Zucker zu 24 fl., 8 Ztr. Kaffeh zu 31 fl. und 2 Ztr. Kakao zu 23 fl. hintangegeben; wie groß war der ganze Ertrag? — 12 Ztr. Zucker zu 24 fl. machen 288 fl.; 8 Ztr. Kaffeh zu 31 fl. machen 248 fl.; 2 Ztr. Kakao zu 23 fl. betragen 46 fl.; zusammen 582 fl.

(11). Wie viel betragen 10 Banknoten zu 100 fl., 16 Banknoten zu 10 fl., und 37 zu 5 fl.? — 10 Banknoten zu 100 fl. machen 10mahl 100 d. i. 1000 fl.; 16 Banknoten zu 10 fl. betragen 16mahl 10 fl. d. i. 160 fl.; 37 Banknoten zu 5 fl. machen 37mahl 5 fl. d. i. 185 fl.; diese Werthe zusammen addirt geben 1345 fl.

(12). Nach sehr genauen Versuchen legt der Schall in 1 Secunde 1050 Fuß zurück, wie viel in einer Minute? — 60mahl 1050, also 63000 Fuß.

(13). Jemand ist 500 fl. schuldig, und hat diese in monathlichen Raten zu 40 fl. abzutragen; wenn er nun schon 9 Raten gezahlt hat, wie viel bleibt er noch schuldig? — 9 Raten zu 40 fl. machen

9mahl 40 fl. d. i. 360 fl.; diese muß man nun von 500 fl. abziehen, wornach 140 fl. als noch zu tilgende Schuld übrig bleiben.

(14.) Jemand kauft 3 Fässer Waare, das erste Faß enthält 218 ℔, das zweyte 195 ℔, das dritte 202 ℔. Wenn nun 1 ℔ 2 fl. kostet, wie viel ist die ganze Waare werth? — Hier muß man zuerst die Menge der Waare bestimmen, indem man 218, 195 und 202 ℔ addirt, man bekommt 615 ℔; wenn nun 1 ℔ 2 fl. kostet, so werden 615 ℔ 615mahl 2 fl. d. i. 1230 fl. kosten.

IV. Das Dividiren.

§. 38.

Häufig verlangt man zu wissen, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist; man könnte dieses finden, wenn man die kleinere Zahl so oft von der größern wegnehmen würde, als dieses geschehen kann, also durch wiederhohltes Subtrahiren. Kürzer und geschwinder findet man es durch eine eigene Rechnungsart, welche das **Dividiren** heißt. Eine Zahl durch eine andere **dividiren** heißt nähmlich untersuchen, wie oft die zweyte Zahl in der ersten enthalten ist.

Z. B. 18 durch 3 dividiren heißt untersuchen, wie oft 3 in 18 enthalten ist, 3 läßt sich von 18 6mahl abziehen, oder 3 ist in 18 6mahl enthalten.

Beym Dividiren werden **zwey** Zahlen angegeben; die Zahl, welche dividirt wird, heißt der **Dividend**, und die Zahl, durch welche dividirt wird, der **Divisor**; die Zahl aber, welche beym Dividiren herauskommt, wird der **Quotient** genannt. In dem früheren Beyspiele ist 18 der Dividend, 3 der Divisor, und 6 der Quotient. Der Quotient zeigt also an, **wie oft** der Divisor in dem Dividende enthalten ist. Wenn man nun den Divisor so oftmahl nimmt, als der Quotient anzeigt, d. h. wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so muß wieder der Dividend herauskommen.

Das Dividiren wird auch angewendet, wenn eine Zahl in mehrere gleiche Theile getheilt wird, und wenn man die Größe eines solchen Theiles wissen will. Z. B. wie groß ist der dritte Theil von 18? Diese Frage ist zwar von der Frage: wie oft ist 3 in 18 enthalten? wesentlich verschieden; doch kommen beyde darin überein, daß sie in der Antwort dieselbe Zahl 6 enthalten; auf die erste Frage antwortet man: 6mahl. — Überhaupt läßt sich durch eine einfache Folgerung das Theilen in gleiche Theile leicht auf das Enthaltenseyn zurückführen, nähmlich: um den 3ten Theil von 18 zu erhalten, wird man von 3 immer nur 1 nehmen; man wird also so vielmahl 1 haben, als wie oft 3 in 18 vorkommt, d. h. der 3te Theil von 18 ist so viel, als wie oft 3 in 18 enthalten ist; 3 in 18 ist 6mahl enthalten; der 3te Theil von 18 ist also 6.

Wegen dieses innigen Zusammenhanges zwischen dem Enthaltenseyn und dem Theilen in gleiche Theile wird für beyde Aufgaben nur eine Rechnungsart angewendet. **Dividiren** heißt daher auch: eine Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als der Divisor Einheiten enthält. Der Quotient zeigt dann an, wie groß ein Theil ist.

Z. B. 18 durch 3 dividiren heißt auch 18 in 3 gleiche Theile theilen, wodurch 6 als ein solcher Theil herauskommt. 6 ist also wieder der Quotient.

Die Division kann demnach als **Enthaltenseyn** oder Vergleichung, und als **Theilen** in gleiche Theile angesehen werden. In beyden Fällen ist übrigens das Verfahren dasselbe. Bey der wirklichen Ausführung wird fast immer das Enthaltenseyn zu Grunde gelegt.

Das **Zeichen** der Division bestehet in zwey über einander stehenden Puncten, nähmlich (:), und zeigt an, daß die Zahl vor den Puncten durch die Zahl hinter den Puncten zu dividiren ist. Z. B. 18 : 3 = 6 wird gelesen: 18 dividirt durch 3 ist gleich 6. — In der Ausübung schreibt man gewöhnlich den Dividend zwischen zwey Striche, und setzt links den Divisor; der Quotient kommt dann rechts vom Dividende zu stehen. So würde man obiges Beyspiel schreiben: 3 | 18 | 6. — Oft wird die Division bloß angezeigt, besonders dann, wenn der Dividend kleiner ist als der Divisor; dieses geschieht, indem man den Divisor unter den Dividend, und zwischen beyde einen Strich setzt. Ist z. B. 3 durch 4 zu dividiren, so kann diese Division nicht wirklich verrichtet werden, weil 4 in 3 gar nicht enthalten ist; man zeigt daher die Division nur an, indem man schreibt: $\frac{3}{4}$, welches gelesen wird: 3 dividirt durch 4, oder 3 4tel.

Eine so angezeigte Division oder ein auf diese Art dargestellter Quotient, wird ein **Bruch** genannt.

§. 39.

Wenn der Divisor kleiner als 10 ist, so kann diese Division oft leicht im **Kopfe** geschehen.

Beyspiele.

(1). 4 ist in 12 3mahl enthalten; 3 in 21 geht 7mahl; 7 in 42 geht 6mahl; 5 kommt in 43 8mahl vor, und es bleiben noch 3; 8 in 76 geht 9mahl, bleiben 4

(2). 2 in 46 ist 23mahl enthalten; 3 in 63 geht 21mahl; 5 in 104 geht 20mahl, und es bleiben noch 4; 3 in 157 geht 52mahl, bleibt 1.

(3). 5 in 60 geht 12mahl; 3 in 87 geht 29mahl; 4 in 114 geht 28mahl, bleiben 2; 5 in 284 ist 56mahl enthalten, bleiben 4.

§. 40.

Beym **schriftlichen Dividiren** sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn der **Divisor 10, 100, 1000,...** ist.

(1). Es sey eine Zahl z. B. 486 durch 10 zu dividiren, so muß man die Hunderte, dann die Zehner und endlich die Einheiten durch 10 dividiren. 4 Hunderte durch 10 dividirt geben 4 Zehner, acht Zehner durch 10 dividirt geben 8 Einheiten; die 6 Einheiten aber können durch 10 nicht wirklich dividirt werden, und bleiben als Rest, dessen Division durch 10 nur angezeigt werden kann. Man hat somit

$$10 \mid 486 \mid 48\tfrac{6}{10}.$$

Um daher eine Zahl durch 10 zu dividiren, braucht man nur die Einheiten als Rest zu betrachten, die Zehner als Einheiten, die Hunderte als Zehner u. s. w. anzunehmen. Dieses alles geschieht indem man eine Ziffer rechts abschneidet und deren Division durch 10 bloß anzeigt, die übrigen Ziffern aber als Quotienten ansieht.

(2). Um eine Zahl durch 100 zu dividiren, muß man sie so verändern, daß jede Ziffer nur den 100sten Theil ihres frühern Werthes bedeutet; man muß also die Hunderte zu Einheiten, die Tausende zu Zehnern, die Zehntausende zu Hunderten u. s. w. machen, oder jede Ziffer um 2 Stellen gegen die Rechte rücken; die

Zehner und Einheiten können durch 100 nicht wirklich dividirt werden, man zeigt dieses nur an, indem man 100 darunter schreibt.

Man dividire 23400 durch 100: da braucht man nur die 2 Nullen rechts wegzulassen, weil dadurch jede Ziffer um 2 Stellen gegen die Rechte gerückt wird. Es ist also

100 | 23400 | 234

Wenn statt der 2 Nullen rechts bedeutliche Ziffern vorkommen, so wird ihre Division durch 100 angezeigt. Z. B.

100 | 5638 | $56\frac{38}{100}$; 100 | 39402 | $394\frac{2}{100}$

Auf ähnliche Art dividire man
die Zahlen 34000, 57123, 34037 durch 1000,
" " 560000, 31095, 248134, " 10000.

Man wird daraus die allgemeine Regel aufstellen:
Eine Zahl wird durch 10, 100, 1000, ... dividirt, wenn man ihr rechts 1, 2, 3, . . . Ziffern abschneidet; die übrig gebliebenen Ziffern sind dann der Quotient, die abgeschnittenen aber der Rest, welcher noch durch den Divisor zu dividiren ist, was nur angezeigt wird.

Beyspiele.

10 | 80 | 8; 10 | 2560 | 256; 10 | 389 | $38\frac{9}{10}$;
100 | 5200 | 52; 100 | 3000 | 30; 100 | 2567 | $25\frac{67}{100}$;
1000 | 7000 | 7; 1000 | 51000 | 51; 1000 | 30143 | $30\frac{143}{1000}$;
10000 | 576335 | $57\frac{6335}{10000}$; 100000 | 123456 | $1\frac{23456}{100000}$.

§. 41.

b. Wenn der **Divisor rechts eine bedeutliche Ziffer** enthält.

(1). Es sey 639 durch 3 zu dividiren.

Man theilt zuerst die Hunderte, dann die Zehner und endlich die Einheiten: 6 Hunderte getheilt durch 3 geben 2 Hunderte; 3 Zehner getheilt durch 3 geben 1 Zehner; 9 Einheiten durch 3 dividirt geben 3 Einheiten. Der ganze Quotient ist daher 2 Hunderte, 1 Zehner, 3 Einheiten, d. i. 213; 3 ist also in 639 213mahl enthalten, oder der 3te Theil von 639 ist 213. — Man braucht zu den einzelnen Ziffern des Quotienten ihre Bedeutung gar nicht hinzusetzen, weil sie nach der Ordnung Hunderte, Zehner, Einheiten bedeuten, und weil dieselben, wenn man sie nur nach der Reihe hinschreibt, schon durch diese Anordnung selbst in ihrer wahren Bedeutung erscheinen. Es ist also

3 | 639 | 213

Man dividire eben so 844 durch 4; 6248 durch 2; 9063 durch 3.

(2). Es soll 939 durch 4 dividirt werden.

Hier werden wieder zuerst die Hunderte getheilt, 4 in 9 geht 2mahl, also 2 Hunderte; aber 2mahl 4 ist nur 8, und wenn man diese von den 9 Hunderten abzieht, so bleibt noch 1 Hundert übrig; dieses Hundert kann so lange es als Hundert betrachtet wird, nicht in 4 gleiche Theile so getheilt werden, daß der Quotient Hunderte enthält, man löset es daher in 10 Zehner auf, dazu setzt man die schon vorhandenen 3 Zehner, so hat man 13 Zehner; um dieses vor Augen zu haben, setzt man zu dem bey den Hunderten übrig gebliebenen Reste 1 die Zehner 3 herab. Nun theilt man die Zehner: 4 in 13 ist 3mahl enthalten, also 3 Zehner; 4mahl 3 Zehner sind 12 Zehner, von 13 abgezogen bleibt noch 1 Zehner zurück; dieser Zehner gibt 10 Einheiten, dazu die schon vorhandenen 6 Einheiten sind 16 Einheiten; um diese Zusammensetzung anzuzeigen, schreibt man zu dem letzten Reste 1 die 6 Einheiten herab. Nun dividirt man die

Einheiten: 4 in 16 geht 4mahl, also 4 Einheiten; 4mahl 4 ist gerade 16, es bleibt also nichts übrig. Der Quotient ist 2 Hunderte, 3 Zehner, 4 Einheiten d. i. 234, und die Rechnung stehet

```
4 | 936 | 234
     8
    ---
    13
    12
    ---
     16
     16
    ---
      0
```

Auf gleiche Weise dividire man 725 durch 5; 73224 durch 4; 73416 durch 3; 942375 durch 7.

(3). Man dividire 2465 durch 5.

Hier sind zuerst 2 Tausende durch 5 zu theilen; aber 2 Tausende können nicht in 5 gleiche Theile so getheilt werden, daß der Quotient Tausende enthält; man löset sie daher in Hunderte auf, 2 Tausende geben 20 Hunderte, und die schon vorhandenen 4 Hunderte, sind 24 Hunderte, welche nun durch 5 leicht zu theilen sind; 5 in 24 geht 4mahl; also 4 Hunderte; 4mahl 5 ist 20, von 24 bleiben 4 Hunderte; diese geben 40 Zehner, und die vorhandenen 6 sind 46 Zehner; 5 in 46 ist 9mahl enthalten, also 9 Zehner; 9mahl 5 ist 45, von 46 bleibt 1 Zehner; 1 Zehner gibt 10 Einheiten, und die bereits vorhandenen 5, sind 15 Einheiten; 5 in 15 geht gerade 3mahl, also 3 Einheiten. Der Quotient ist daher 493, und die Rechnung steht

```
5 | 2465 | 493
    20
    ---
     46
     45
     ---
      15
      15
      ---
       0
```

Man verrichte ebenso folgende Divisionen: 35628 durch 4; 1792431 durch 3; 86733 durch 9.

Daraus wird man ersehen:

Wenn der Divisor in der höchsten Stelle des Dividends nicht enthalten ist, so muß man sogleich die beyden höchsten Stellen zusammen nehmen, und sie durch den Divisor theilen.

(4). Es sey 924 durch 3 zu dividiren.

9 Hunderte durch 3 dividirt geben 3 Hunderte; 2 Zehner können durch 3 nicht wirklich dividirt werden, man setzt daher in dem Quotienten an die Stelle der Zehner eine Nulle; die zwey Zehner geben 20 Einheiten, und die 4 schon vorhandenen Einheiten dazu, sind 24 Einheiten, welche durch 3 dividirt, genau 8 Einheiten geben, weil 8mahl 3 24 ist. Die Rechnung steht

```
3 | 924 | 308
     9
   ----
    =24
     24
   ----
      0
```

Auf dieselbe Art dividire man 832 durch 4; 2135 durch 7; 91503 durch 3.

Man wird daraus die Regel ableiten:

Wenn der Divisor größer ist als die Ziffer des Dividends, welche man dividiren will, so schreibt man in den Quotienten eine Nulle, und setzt zu der dividirten Ziffer sogleich die nächstfolgende Ziffer des Dividends hinzu.

(5). Es soll 598 durch 5 dividirt werden.

5 Hundert durch 5 dividirt geben 1 Hundert; 1mahl 5 ist 5, von 5 geht auf; 9 Zehner werden herabgesetzt, 5 in 9 geht 1mahl, also 1 Zehner, 1mahl

5 ist 5, von 9 abgezogen bleiben 4; zu den 4 Zehnern oder 40 Einheiten werden die 8 Einheiten herabgesetzt, worauf man 48 Einheiten hat, diese durch 5 dividirt, geben 9 Einheiten; 9mahl 5 ist 45, von 48 bleiben 3 Einheiten. Die 3 Einheiten können nun weiter durch 5 nicht wirklich getheilt werden; man zeigt also diesen Quotienten nur an, indem man den Divisor unter den letzten Rest in Bruchform schreibt, und dieses dem Quotienten hinzufügt. Die ganze Rechnung steht

$$
\begin{array}{r}
5 \mid 598 \mid 119\tfrac{3}{5} \\
5 \\
\hline
9 \\
5 \\
\hline
48 \\
45 \\
\hline
3
\end{array}
$$

(6). Man dividire 736 durch 23.

Hier sind zuerst die Hunderte zu theilen; aber die 7 Hunderte können, so lange man sie als Hunderte betrachtet, nicht in 23 gleiche Theile so getheilt werden, daß der Quotient Hunderte enthält, man löset sie daher in Zehner auf, 7 Hunderte geben 70 Zehner, und die schon vorhandenen 3 Zehner sind 73 Zehner; diese lassen sich durch 23 theilen, dabey sieht man zunächst wie oft 2 in 7 enthalten ist, und schließt daraus, daß auch 23 in 73 nicht mehr als 3mahl enthalten seyn kann; man erhält also im Quotienten zuerst 3 Zehner. 3mahl 23 ist aber nur 69, also bleiben von 73 Zehnern noch 4 Zehner zurück; zu diesen 4 Zehnern oder 40 Einheiten setzt man die 6 Einheiten dazu, wodurch man 46 Einheiten erhält; diese durch 23 getheilt geben 2 Einheiten, 2mahl 23 ist gerade 46, somit bleibt kein Rest übrig. Die Rechnung steht

23 | 736 | 32
69
46
46
0

Eben so dividire man 83412 durch 12; 1080 durch 45; 54936 durch 18; 326745 durch 137; 32976 durch 916.

Aus allem Vorhergehenden kann man für das schriftliche Dividiren, **wenn der Divisor rechts eine bedeutliche Ziffer hat**, folgende Regeln aufstellen:

1. Man setze den Dividend zwischen zwey aufrechten Strichen, links schreibt man den Divisor, rechts kommt nach und nach der Quotient zu stehen.

2. Die Division beginnt bey der höchsten Stelle. Man nimmt so viele Ziffern des Dividends, daß der Divisor darin enthalten ist, also eben so viele, als der Divisor Stellen hat, oder um eine mehr, wenn jene Ziffern kleiner sind als der Divisor. Diese Ziffern bilden dann den ersten Theildividend; man pflegt ihn manchmahl von den folgenden Ziffern durch einen Punct abzusondern.

3. Man untersucht, wie oft der Divisor in dem ersten Theildividende enthalten ist, und schreibt die Zahl, welche dieses anzeigt, in den Quotienten. Wenn der Divisor mehrziffrig ist, so erleichtert man sich die Arbeit, wenn man versucht, wie oft die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten oder in den zwey höchsten Ziffern des Dividends enthalten ist.

4. Man multiplicire den ganzen Divisor mit der gefundenen Ziffer des Quotienten, schreibe das Product unter den ersten Theildividend, und ziehe es von diesem ab.

Ist jenes Product größer als der erste Theildividend, so daß es sich nicht abziehen läßt, so ist der Quotient zu groß angenommen worden; man muß ihn also kleiner nehmen. Bleibt aber ein Rest, der eben so groß oder größer ist als der Divisor, so ist der Quotient zu klein angenommen worden; man muß ihn größer nehmen.

5. Zum übrig bleibenden Reste wird die nächste Ziffer des Dividends herabgesetzt, und die Zahl, welche dadurch entsteht, ist der neue Theildividend. Man untersucht wieder, wie oft der Divisor in dem neuen Theildividende enthalten ist; die Zahl, welche dieses anzeigt, schreibt man als die zweyte Ziffer in den Quotienten.

6. Mit dieser neuen Ziffer des Quotienten wird nun der Divisor multiplicirt, und das Product von dem letzten Dividende abgezogen. Zu dem Reste wird wieder die nächstfolgende Ziffer des Dividends herabgesetzt, und dieser neue Dividend durch den Divisor dividirt, um die dritte Ziffer des Quotienten zu erhalten.

7. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man nach und nach alle Ziffern des Dividends herabgesetzt hat.

Wenn der Divisor größer ist als irgend ein Theildividend, so daß er in diesem nicht enthalten ist, so schreibt man in dem Quotienten eine Nulle, und setzt sogleich die nächstfolgende Ziffer des Dividends herab.

8. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist der Divisor im Dividende genau enthalten; man schreibt hier das Zeichen an die Stelle des letzten Restes. Bleibt aber ein Rest, so ist dieser noch durch den Divisor zu dividiren, was man dadurch anzeigt, daß unter den Rest der Divisor, und zwischen beyde ein Strich gesetzt wird; dieser Bruch wird mit etwas kleinern Ziffern an den Quotienten angehängt, zum Zeichen, daß der Quotient noch um etwas, was aber kleiner als 1 ist, vermehrt werden muß.

Beyspiele.

(1). Es sey 14070 durch 6 zu dividiren. Man schreibt

```
6 | 14.070 | 2345
    12
    ──
     20
     18
     ──
      27
      24
      ──
       30
       30
       ──
        =
```

und sagt: 6 in 14 geht 2mahl, 2mahl 6 ist 12, von 14 bleiben 2; 0 herab, 6 in 20 geht 3mahl, 3mahl 6 ist 18, von 20 bleiben 2; 7 herab, 6 in 27 geht 4mahl, 4mahl 6 ist 24, von 27 bleiben 3; 0 herab, 6 in 30 ist 5mahl enthalten, 5mahl 6 ist 30, von 30 geht auf.

(2). Man dividire 1650967 durch 8051. Die Rechnung stehet

$$
\begin{array}{r|l|l}
8051 & 16509.67 & 205\frac{512}{8051} \\
 & 16102 & \\
\hline
 & \ \ 40767 & \\
 & \ \ 40255 & \\
\hline
 & \ \ \ \ 512 &
\end{array}
$$

Hier untersucht man zuerst, wie oft 8501 in 16509, oder versuchsweise, wie oft 8 in 16 enthalten ist; es geht 2mahl. Nun multiplicirt man den Divisor 8051 mit 2, und zieht das Product 16102 von 16509 ab. Zu dem Reste 407 setzt man die nächste Ziffer 6 herab; 8051 ist in 4076 0mahl enthalten; in den Quotienten kommt also eine Nulle, und zu dem Dividende 4076 wird sogleich die nächste Ziffer 7 herabgesetzt;

8051 in 40767, oder 8 in 40 ist 5mahl enthalten; 5mahl 8051 ist 40255, was von 40767 abgezogen 512 zurückläßt. Unter den Rest 512 wird der Divisor 8051 gesetzt, und dieses dem Quotienten 205 angehängt.

```
(3).  306 | 992970 | 3245
            918
            ---
             749
             612
             ----
             1377
             1224
             ----
              1530
              1530
              ----
                 =
```

```
(4).  483506 | 3108423562 | 6428 446994/483506
               2901036
               -------
                2073875
                1934024
                -------
                 1398516
                  967012
                 -------
                  4315042
                  3868048
                  -------
                   446994
```

Die Probe für die Richtigkeit der Division bestehet darin, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, wodurch, wenn die Division ohne Rest aufgegangen ist, der Dividend herauskommen muß; ist aber ein Rest übrig geblieben, so muß man zu dem Producte aus dem Quotienten und Divisor noch den Rest addiren; erhält man dadurch den Dividend, so ist richtig dividirt worden.

§. 42.

c. Wenn der **Divisor rechts Nullen** hat, aber von 10, 100, 1000 . . . verschieden ist.

Wenn der Divisor rechts Nullen hat, und man verfährt nach den früher entwickelten Divisionsregeln, so wird auch das Product aus ihm und der jedesmahligen Ziffer des Quotienten rechts so viele Nullen haben, und daher von dem letzten Dividende abgezogen eben so viele rechts stehende Ziffern desselben ungeändert lassen. Die jedesmahlige Ziffer des Quotienten würde daher eben so richtig herauskommen, wenn man im Divisor die Nullen, und in jedem Dividende eben so viele Ziffern rechts unberücksichtiget lassen würde; nur in dem letzten Reste, der nicht mehr dividirt werden kann, müssen auch die letzten Ziffern nothwendig vorkommen.

Daraus folgt:

Wenn im Divisor rechts Nullen vorkommen, so lasse man während der Division diese Nullen, und zugleich auch im Dividende eben so viele Ziffern zur Rechten außer Acht, zum letzten Reste setze man dann diese Ziffern herab; die Zahl, welche dadurch entstehet, ist als Rest der ganzen Division anzusehen.

Beyspiele.

(1). Es sey 3783475 durch 5700 zu dividiren:

mit Nullen	ohne Nullen
5700|3783.475|663$\frac{4375}{5700}$	57,00|378.34,75|663$\frac{4375}{5700}$
34200	342
36347	363
34200	342
21475	214
17100	171
4375	4375

(2). Man dividirt 285630572 durch 3974000.

$$3974000 \mid 285630572 \mid 71\tfrac{3476572}{3974000}$$

$$\begin{array}{r} 27818 \\ \hline 7450 \\ 3974 \\ \hline 3476572 \end{array}$$

(3). 27302400 : 7900 = 3456

(4). 4560840017 : 853000 = $5346\tfrac{702017}{853000}$.

§. 43.

Aufgaben.

Wenn die Division als **Enthaltenseyn** oder **Vergleichung** angewendet wird, so müssen Dividend und Divisor gleichen Nahmen haben; der Quotient erscheint durch die Rechnung selbst als unbenannt, erhält aber dann den Nahmen nach den Umständen der Aufgabe.

Wird aber die Division als **Theilung** angewendet, so betrachtet man den Divisor während der Rechnung als unbenannt, und der Quotient bekommt denselben Nahmen, welchen der Dividend hat.

(1). 8 Ellen Tuch kosten 48 fl., wie hoch kommt 1 Elle? — Wenn 8 Ellen 48 fl. kosten, so kostet die Hälfte von 8 Ellen auch die Hälfte von 48 fl., der 3te Theil von 8 Ellen den 3ten Theil von 48 fl., u. s. w.; 1 Elle ist nun der 8te Theil von 8 Ellen, also wird sie den 8ten Theil von 48 fl. kosten; man muß daher 48 fl. durch 8 dividiren, wodurch man 6 fl. bekommt.

(2). Eine Steuer von 228 fl. ist unter 19 Grundbesitzer zu gleichen Theilen zu vertheilen; wie viel muß jeder Besitzer bezahlen? — 19 Besitzer müssen 228 fl. bezahlen, 1 Besitzer ist nun der 19te Theil von 19 Besitzern, er wird also auch nur den 19ten Theil von 228 fl. zahlen; 228 fl. dividirt durch 19 geben aber 12 fl., also werden auf jeden Grundbesitzer 12 fl. zu zahlen kommen.

(3). Ein Beamter hat eine jährliche Besoldung von 600 fl.; wie viel bezieht er monathlich? — Wenn auf 1 Jahr 600 fl. kommen, so kommt auf die Hälfte von 1 Jahr auch nur die Hälfte von 600 fl.; auf den 3ten Theil von 1 Jahr kommt der 3te Theil von 600 fl., u. s. w.; 1 Monath ist nun der 12te Theil von 1 Jahr, also wird man den 12ten Theil von 600 fl. nehmen, d. i. man wird 600 fl. durch 12 dividiren, wodurch man 50 fl. erhält.

(4). Eine Handlungsgesellschaft gewinnt 8000 fl.; wenn nun davon auf jeden Theilnehmer 500 fl. entfallen, wie viele Personen waren wohl in der Gesellschaft? — Wenn 8000 fl. unter mehrere Theilnehmer so vertheilt werden, daß jeder Theilnehmer 500 fl. bekommt, so sind gewiß so viele Theilnehmer da, als wie oft 500 fl. in 8000 fl. enthalten sind; dieses findet man, wenn man 8000 durch 500 dividirt; man bekommt zur Antwort: 16 Personen.

(5). Für ein Unternehmen müssen 1204 fl. ausgelegt werden; wie viel Personen müssen daran Theil nehmen, damit auf eine Person die Auslage von 14 fl. kommt? — 86 Personen.

(6). Wie viel Gulden geben 720 Kreuzer? — 60 Kr. machen 1 fl.; 720 Kr. werden daher so viele Gulden geben, als wie oft 60 in 720 enthalten ist; man muß also 720 durch 60 dividiren, wodurch man 12 erhält; also 12 fl.

(7). Wie viel Pfund geben 2080 Loth? — 32 Loth geben 1 ℔, man muß also sehen, wie oft 32 in 2080 enthalten ist; 2080 dividirt durch 32 gibt 65; also 65 ℔.

(8). Es soll eine 5640 Fuß lange Wasserleitung mittelst Röhren von Bley ausgeführt werden; wie viel solche Röhren werden dazu erfordert, wenn eine jede derselben 8 Fuß lang ist? — 8 in 5640 ist 705mahl enthalten, also 705 Röhren.

(9). 65 Eimer Wein kosten 325 fl.; wie hoch kommt davon 1 Eimer? — Auf 5 fl.

(10). Jemand gibt in 24 Tagen 96 fl. aus; wie viel kommt auf 1 Tag? — 4 fl.

(11). Ein Taglöhner, welcher täglich 35 Kreuzer verdient, bezieht am Ende der Arbeit 7 Gulden; wie viel Tage hat er wohl gearbeitet? — 1 fl. hat 60 Kr., 7 fl. also 7mahl 60 d. i. 420 Kr.; 35 Kr. sind aber in 420 Kr. 12mahl enthalten; 7 fl. waren also der Lohn für 12 Arbeitstage.

(12). In einer Mühle werden in 26 Tagen 849 Ztr. Mehl gemahlen; wie viel in 1 Tage? — $32\frac{17}{26}$ Ztr.

(13). Im Jahre 1844 zählte Wien 8690 Häuser, welche von 375834 Einwohnern bewohnt wurden, und einen Zinsertrag von 13062743 fl. Metallmünze abwarfen; wie viel Einwohner und wie viel Zins kann man im Durchschnitte auf ein Haus rechnen? — $43\frac{2164}{8690}$, also beynahe 43 Einwohner, und $1503\frac{1673}{8690}$ fl. Zinsertrag.

Viertes Hauptstück.

Das Rechnen mit mehrnahmigen Zahlen.

---

1. Die verschiedenen mehrnahmigen Zahlen und ihre Verwandler.

§. 44.

Bey unbenannten Zahlen werden immer 10 niedrigere Einheiten zusammen als eine höhere betrachtet; 10 Einheiten nennt man einen Zehner, 10 Zehner nennt man ein Hundert, u. s. w. Dasselbe geschieht, um das Zählen und Auffassen zu erleichtern, auch bey benannten Zahlen. Man pflegt nähmlich, wenn beym Zählen bestimmter Dinge eine Einheit zu Grunde gelegt wird, irgend eine Anzahl jener Einheiten als eine höhere Einheit zu betrachten, und mit einem besondern Nahmen zu bezeichnen; eine gewisse Anzahl dieser neuen Einheiten kann wieder als nächst höhere Einheit angenommen und eigenthümlich benannt werden. So nimmt man beym Gelde z. B. den Pfennig als die niedrigste Einheit an, 4 Pfennige zusammen betrachtet man als eine höhere Einheit, und nennet sie einen Kreuzer; 60 Kreuzer machen wieder eine nächst höhere Einheit aus, welche den Nahmen Gulden erhält.

Die größern Einheiten nennt man **Einheiten von höherer Benennung**, die kleineren **Einheiten von niedrigerer Benennung**. So sind z. B. die

Kreuzer eine höhere Benennung als die Pfennige, zugleich aber auch eine niedrigere als die Gulden.

Jede Einheit einer höhern Benennung enthält eine gewisse Menge Einheiten der niedrigern Benennung; z. B. 1 Gulden enthält 60 Kreuzer; 1 Zentner 100 Pfund, 1 Jahr 12 Monathe, u. s. w. Diejenige Zahl nun, welche anzeigt, wie viele Einheiten der niedrigern Benennung auf eine Einheit der höhern Benennung gehen, heißt der **Verwandler** zwischen jenen beyden Benennungen. So ist zwischen Gulden und Kreuzern 60, zwischen Zentnern und Pfunden 100, zwischen Jahren und Monathen 12 der Verwandler.

Eine benannte Zahl, welche nur **einen** Nahmen führt, heißt **einnahmig,** z. B. 5 Gulden; 27 Pfunde.

Eine benannte Zahl, deren Bestandtheile verschiedene Nahmen haben, heißt eine **mehrnahmige** Zahl. 4 Gulden 25 Kreuzer sind eine mehrnahmige Zahl; eben so 17 Pfunde 28 Loth.

§. 45.

Da bey Rechnungen mit mehrnahmigen Zahlen die Kenntniß der Verwandler zwischen den verschiedenen Einheiten derselben Art unentbehrlich ist, so soll hier das Vorzüglichste darüber angeführt werden.

A. Bestimmung der Zeit.

Die Zeit wird nach Jahren, Monathen, Tagen u. s. w. und zwar nach folgender Tafel berechnet:

1 Jahr	hat	12 Monathe,
1 Monath	„	30 Tage (in der Zinsenrechnung)
1 Tag	„	24 Stunden,
1 Stunde	„	60 Minuten,
1 Minute	„	60 Secunden.

In der Rechnung wird zwar gewöhnlich der Monath zu 30 Tagen, und somit das Jahr zu 12mahl 30 d. i. 360 Tagen angenommen; in der Wirklichkeit aber hat ein gemeines Jahr 365, ein Schaltjahr 366 Tage; eben so haben die Monathe eine ungleiche Anzahl Tage, und zwar:

Jänner	. . . 31 Tage	Juli	. . . 31 Tage
Februar	. . . 28 "	August	. . . 31 "
im Schaltjahr	29 "	September	. . . 30 "
März	. . . 31 "	Oktober	. . . 31 "
April	. . . 30 "	November	. . . 30 "
Mai	. . . 31 "	Dezember	. . . 31 "
Juni	. . . 30 "		

§. 46.

B. Bestimmung der räumlichen Größen.

Hier sollen nur die in den **österreichischen Staaten** üblichen Münzen, Gewichte und Maße angeführt werden.

1. Münzen.

Für die Rechnung merke man:

1 Gulden (fl.) gilt 60 Kreuzer (Kr.)

1 Kreuzer " 4 Pfennige (℔)

Im lombardisch-venezianischen Königreiche rechnet man nach Lire und Centesimi, und zwar hat 1 Lire 100 Centesimi. 3 österreichische Lire machen 1 fl.

Der kaiserliche Dukaten (♯) wird zu 4 fl. 30 Kr., oder 270 Kr. gerechnet.

Im Allgemeinen wird nach Gulden Conventions-Münze gerechnet. Es werden aber auch noch öfters Rechnungen nach Gulden in Scheinen oder Gulden

Wiener-Währung gemacht, von welchen 5 fl. gleich 2 fl. Conventions-Münze angenommen werden.

Die wirklich geprägten Münzen sind aus Gold, Silber oder Kupfer.

Goldmünzen gibt es folgende:

Souveraind'or	zu	13	fl.	20	Kr.
halbe Souveraind'or	"	6	"	40	"
kaiserliche Dukaten	"	4	"	30	"
Doppeldukaten	"	9	"	—	"

Silbermünzen:

Ein Kronthaler	gilt	2	fl.	12	Kr.
" halber Kronthaler	"	1	"	6	"
" Viertel "	"	—	"	33	"
" Speziesthaler	"	2	"	—	"

Dann gibt es Guldenstücke, und zwar ganze, halbe und Viertel, ferner Zwanziger, Zehner, Fünfer und Groschen zu 3 Kr. Endlich sind die österreichischen Lire zu 20 Kr., und zwar ganze, halbe und Viertel.

Kupfermünzen:

Kreuzer, halbe und Viertel-Kreuzer; Stücke zu 5, 3 und 1 Centesimi.

2. Gewichte.

Die meisten Waaren werden nach dem Handelsgewichte gewogen. Nach diesem gilt

1 Zentner	. . .	100 Pfunde (℔),
1 Pfund	. . .	32 Loth (Lth.),
1 Loth	. . .	4 Quentchen (Qtch).

§. 47.

3. Maße.

Die Maße unterscheidet man a) in **Längen-**, b) **Flächen-** und c) in **Körpermaße.**

a. Längenmaße.

Größere Längen werden nach Meilen, kleinere nach Klaftern (°), Schuh ('), Zoll (''), Linien (''') bestimmt, und zwar nach folgendem Verhältnisse:

1 Meile enthält 4000 Klafter,
1 Klafter „ 6 Schuh oder Fuß,
1 Fuß „ 12 Zoll,
1 Zoll „ 12 Linien.

Zum Messen der Tücher, Zeuge und anderer Schnittwaaren braucht man die Elle. 2 Ellen sind etwas kleiner als 5 Fuß.

b. Flächenmaße.

Die Größe der Flächen wird durch Vierecke gemessen, welche gleich große und gegen einander gleich geneigte Seiten haben (□) und **Quadrate** heißen. Je nachdem eine Seite eines solchen Quadrates eine Meile, eine Klafter, ein Fuß, . . . ist, wird es eine Quadratmeile, eine Quadratklafter, ein Quadratfuß, . . . genannt.

Die Eintheilung dabey ist folgende:

1 Quadratmeile (□ Meile) hat 16000000 Quadratklafter (□°),
1 Quadratklafter hat 36 Quadratfuß (□'),
1 Quadratfuß „ 144 Quadratzolle (□''),
1 Quadratzoll „ 144 Quadratlinien (□''').

Ein Joch hat 1600 Quadratklafter.

c. Körpermaße.

Die Größe der Körper wird im Allgemeinen durch einen Würfel oder **Kubus** gemessen, welcher eine Kubikklafter, ein Kubikfuß genannt wird, je nachdem eine Seite desselben eine Klafter, einen Fuß, . . . beträgt.

Die Verwandler ersieht man aus folgendem:

1 Kubikklafter hat 216 Kubikfuß,
1 Kubikfuß " 1728 Kubikzoll,
1 Kubikzoll " 1728 Kubiklinien.

Zum Körpermaße gehöret auch das sogenannte **Hohlmaß**, womit das Getreide und die Flüssigkeiten gemessen werden.

Die Eintheilung des Getreide- oder **Fruchtmaßes** stellt folgende Tafel dar:

1 Muth	hat	30 Metzen,
1 Metzen	"	8 Achtel,
1 Achtel	"	4 große Maßel
1 großes Maßel	"	2 kleine Maßel,
1 kleines Maßel	"	2 Becher.

Flüssigkeiten, als Wein, Bier, . . . werden nach Faß, Eimer, Maß, u. s. w. gemessen, und zwar:

1 Eimer hat 40 Maß (in der Rechnung),
1 Maß " 4 Seidel,
1 Seidel " 2 Pfiffe.

In der Wirklichkeit enthält der Weineimer 41, der Biereimer 42 und 1 halbe Maß.

Beym Weine enthält das Faß 10, beym Bier 2 Eimer.

Viele Gegenstände können nicht anders gemessen werden, als durch das Abzählen von Stück für Stück. Sie werden daher zählende Güter genannt.

Die hierbey vorkommenden Benennungen sind folgende:

4. Zählbare Dinge.

1 Schock enthält 60 Stück
1 Schilling " 30 "

Ein Mandel	enthält	15	Stück
Ein Duzend	"	12	"
Ein Bund Federn	sind	25	"
1 Ballen Papier	hat	10	Rieß
1 Rieß "	"	20	Buch
1 Buch Schreibpapier	"	24	Bogen
1 " Druckpapier	"	25	"

2. Das Resolviren und Reduciren.

§. 48.

Häufig tritt der Fall ein, daß man eine höhere Benennung in eine niedrigere, und umgekehrt eine niedrigere Benennung in eine höhere verwandeln muß.

Das erste heißt das **Auflösen** der höhern Benennung in die niedrigere, oder das **Resolviren**; das zweyte das **Zurückführen** der niedrigern Benennung auf die höhere, oder das **Reduciren**.

a. Es sey zuerst eine einnahmige Zahl in eine niedrigere Benennung zu resolviren, z. B. 9 Gulden in Kreuzer. Da 1 fl. 60 Kr. hat, so machen 2 fl. 2mahl 60, 3 fl. 3mahl 60, . . . also 9 fl. 9mahl 60 Kr.; man muß also 60 mit 9, oder was gleichviel ist, 9 mit 60 multipliciren, wodurch man 540 Kr. erhält. Hier ist also die Zahl der Gulden, nähmlich 9, mit 60 d. i. mit dem Verwandler zwischen Gulden und Kreuzer multiplicirt worden.

Um daher eine einnahmige Zahl in eine niedrigere Benennung aufzulösen, muß man die Einheiten der höhern Benennung mit dem betreffenden Verwandler multipliciren.

B e y s p i e l e.

(1). Wie viel Bogen enthalten 45 Buch Schreibpapier?

$$\begin{array}{r} 45 \text{ Buch} \\ 24 \\ \hline 180 \\ 90 \\ \hline 1080 \end{array}$$

(2). Wie viel Zoll betragen 28 Klafter?

Hier wird man die Klafter zuerst in Fuß, und dann diese in Zoll verwandeln.

$$\begin{array}{r} 28^{\circ} \\ 6 \\ \hline 168' \\ 12 \\ \hline 336 \\ 168 \\ \hline 2016 \end{array}$$

b. Hat man eine mehrnahmige Zahl z. B. 8 fl. 25 Kreuzer in die niedrigste Benennung (Kreuzer) zu verwandeln, so resolvirt man zuerst 8 fl. in Kreuzer, indem man 8 mit dem Verwandler 60 multiplicirt; man bekommt dadurch 480 Kr., wozu noch die bereits vorhandenen 25 Kreuzer addirt werden; man hat also zusammen 505 Kr. Die Rechnung stehet

$$\begin{array}{r} 8 \text{ fl. } 25 \text{ Kr.} \\ 60 \\ \hline 480 \text{ Kr.} \\ +\ 25 \\ \hline 505 \text{ Kr.} \end{array}$$

Um daher eine mehrnahmige Zahl in die niedrigste Benennung zu resolviren, so multiplicire man die Einheiten der höchsten Benennung mit dem Verwandler für die nächst niedrigere, und addire zu dem Producte die bereits vorhandenen Einheiten jener Benennung. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man auf die niedrigste Benennung kommt.

Beyspiele.

(1). Wie viel Pfennige betragen 248 fl. 38 Kr. 3 ₰?

```
248  fl. 38 Kr. 3 ₰
    60
 ------
 14880 Kr.
   +38
 ------
 14918 Kr.
     4
 ------
 59672 ₰
    +3
 ------
 59675 ₰
```

(2). Man verwandle 23 Jahre 4 Monathe 25 Tage in Tage:

```
  23 J. 4. M. 25 T.
  12
 ----
  46
  23
 ----
 276 M.
  +4
 ----
 280 M.
  30
 ----
 8400 T.
  +25
 ----
 8425 Tage.
```

(3). 25 Zentner 63 ℔ 25 Lth. 3 Qtch. = 328167 Qtch.

(4). $2^\circ\ 5'\ 8''\ 11''' = 2555'''$.

§. 49.

Wenn umgekehrt Einheiten einer niedrigern Benennung z. B. 2400 Loth auf die höhere Benennung Pfund zu **reduciren** sind, so bedenke man zuerst, wie viel Loth auf 1 Pfund gehen; 1 ℔ hat 32 Loth; es werden also in 2400 Loth so viel ℔ enthalten seyn, als wie oft 32 Loth darin vorkommen; man muß also 2400 d. i. die Einheiten der niedrigern Benennung durch 32 d. i. durch den Verwandler zwischen Loth und Pfund dividiren; man hat

32 | 2400 | 75 ℔
224
160
160
=

Wären z. B. 924 Kreuzer auf Gulden zurückzuführen, so muß man 924 durch 60 dividiren; es werden nähmlich in 924 Kr. so viel fl. enthalten seyn, als wie oft 60 Kr. darin vorkommen; 60 in 924 ist 15mahl enthalten, und es bleiben noch 24 Kr.; also hat man 15 fl. 24 Kr. Aus diesen Beyspielen ergibt sich folgende Regel:

Sind die Einheiten einer niedrigern Benennung in eine mehrnahmige Zahl, worin auch höhere Benennungen vorkommen, zu reduciren, so dividire man die gegebenen Einheiten durch den Verwandler für die nächst höhere Benennung. Der Quotient bedeutet Einheiten der nächst höhern, der Rest aber die noch übriggebliebenen Einheiten der niedrigern Benennung. Der Quotient wird, wenn es angehet, auf die nähmliche Art auf die nächst höhere Benennung reducirt.

B e y s p i e l e.

(1). Man reducire 2325 Pfennige auf die höhern Benennungen.

4 | 2325 | 581 Kr. 1 ₰
20
32
32
5
4
1 ₰

6,0 | 58.1 | 9 fl. 41 Kr.
54
41 Kr.

2325 ₰ betragen also 9 fl. 41 Kr. 1 ₰

(2). Wie viel Klafter, Fuß, Zoll, Linien machen 45233 Linien aus?

```
12 | 45233 | 3769'' 5'''
     36
     --
     92       12 | 3769 | 314' 1''
     84            36
     --            --
      83           16        6 | 314 | 52° 2'
      72           12             30
      --           --             --
     113           49             14
     108           48             12
     ---           --             --
       5'''         1''            2'
```

Antwort: 52° 2' 1'' 5'''.

(3). Wie viel Zeit braucht man, um eine Million zu zählen, wenn man in jeder Secunde eins zählt? — 1000000 Secunden = 11 Tage 13 Stunden 46 Minuten 30 Secunden.

(4). Wie viel Zeit würde man brauchen, um eine Billion zu zählen, wenn man ebenfalls in jeder Secunde 1 zählen möchte? — 1000000000000 Secunden = 31709 Jahre 289 Tage 1 Stunde 46 Minuten 40 Secunden.

Das Jahr zu 365 Tagen gerechnet.

3. Das Addiren.

§. 50.

a. Man zähle 20 fl. 40 Kr. und 15 fl. 18 Kr. zusammen. — Im **Kopfe** würde man so rechnen: 20 fl. und 15 fl. sind 35 fl.; 40 Kr. und 18 Kr. sind 58 Kr.; zusammen 35 fl. 58 Kr. — Eben so zählt man auch beym **schriftlichen Addiren** nur die gleichnahmigen Zahlen zusammen, und schreibt sie wegen der leichtern Übersicht gleich beym Ansatze unter einander; das ganze Beyspiel würde so stehen:

20 fl. 40 Kr.
15 „ 18 „
35 fl. 58 Kr.

Hier ist es gleichgültig, ob man die Gulden, oder die Kreuzer früher zusammenzählt.

b. Man addire folgende Posten:

12 ℔ 18 Lth.
25 „ 30 „
12 „ 27 „

Beym mündlichen Addiren würde man zuerst die ℔ zusammenzählen, und dann die Loth, nähmlich: 12 ℔ und 25 ℔ sind 37 ℔, und 12 ℔ sind 49 ℔; 18 Lth. und 30 Lth. sind 48 Lth., und 27 Lth. sind 75 Lth.; in 75 Loth sind 2 ℔ enthalten, weil 32 in 75 2mahl vorkommt, und es bleiben noch 11 Loth darüber; man hat also bey den Pfunden 49 ℔, und bey den Lothen 2 ℔ 11 Lth. erhalten, zusammen 51 ℔ 11 Lth. — Beym schriftlichen Addiren wird man dagegen, um die schon angeschriebenen ℔ nicht verbessern zu müssen, bey der niedrigern Benennung, nähmlich bey Loth, anfangen, aus der Summe 75 Loth die Pfunde herausziehen, indem man durch 32 dividirt, den Rest 11 als zurückgebliebene Loth unter die Loth setzen, den Quotienten 2 aber als erhaltene ℔ zu den Pfunden weiter zählen. Die Rechnung stehet

12 ℔ 18 Lth.	32 | 75 | 2 ℔
25 „ 30 „	64
12 „ 27 „	11 Lth.
51 ℔ 11 Lth.	

Daraus ergeben sich für das **schriftliche Addiren mehrnahmiger Zahlen** folgende Regeln:

1. Man schreibe die Posten so unter einander,

daß Zahlen derselben Benennung unter einander zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man beginnt bey der niedrigsten Benennung zu addiren, und geht dann immer zu der nächst höhern über; die jedesmahlige Summe wird unter die addirten Zahlen gesetzt.

3. Wenn eine Summe so groß ist, daß sie Einheiten der nächst höhern Benennung enthält, so reducirt man sie durch Division mit dem Verwandler auf diese höhere Benennung; die übrig gebliebenen Einheiten werden an die gehörige Stelle der Summe geschrieben, die erhaltenen höhern Einheiten aber zu ihrer Benennung weiter gezählt.

In die Stelle, wo eine Benennung fehlt, kommt ein Strich.

B e y s p i e l e.

(1). Man addire folgende Zahlen:

523 fl.	15 Kr.	1 Pf.	4	6	1 Kr.	60	88	1 fl.
87 „	48 „	3 „		4			6	
120 „	3 „	— „		2 Pf.			28 Kr.	
14 „	21 „	2 „						
745 fl.	28 Kr.	2 Pf.						

In diesem Beyspiele erhält man bey den Pfennigen 6 zur Summe; diese wird, da sie auch Kreuzer enthält, auf Kreuzer reducirt, indem man sie durch 4 dividirt; der Rest 2 Pf. wird angeschrieben, der Quotient 1 Kr. aber zu den Kreuzern weiter gezählt. Bey den Kreuzern erhält man dann 88 zur Summe, diese dividirt man, weil darin Gulden vorkommen, durch 60, schreibt den Rest 28 Kr. unter die Kreuzer, den Quotienten 1 fl. aber zählt man zu den Gulden.

Man addire folgende Zahlen:

25 Ztr.	27 ℔	21 Lth.	3 Qntch.
17 "	85 "	15 "	— "
91 "	7 "	— "	2 "
9 "	93 "	28 "	1 "
144 Ztr.	14 ℔	1 Lth.	2 Qtch.

4 | 6 | 1 Lth.
4
2 Qtch.

32 | 65 | 2 ℔
64
1 Lth.

100 | 214 | 2 Ztr.
2
14 ℔

§. 51.

Aufgaben.

(1). Ein Kaufmann nahm auf einem Markte am ersten Tage 452 fl. 18 Kr., am zweyten 340 fl. 45 Kr., am dritten 97 fl. 48 Kr., am vierten 389 fl. 50 Kr. ein; wie viel beträgt seine ganze Einnahme? — 1280 fl. 41 Kr.

(2). Jemand leihet folgendes Geld aus: an A 420 fl., an B 234 fl. 30 Kr., und an C 745 fl. 20 Kr.; wie viel hat er zusammen ausgeliehen? — 1399 fl. 50 Kr.

(3). Ein Wirth kauft von A 5 Eimer 25 Maß, von B 6 Eimer 15 Maß, von C 15 Eimer 10 Maß Wein; wie viel Wein hat er zusammen gekauft? — 27 Eimer 10 Maß.

(4). Ein Tabakverleger verschleißt im ersten Monathe 35 Ztr. 72 ℔, im zweyten 29 Ztr. 54 ℔ 17 Lth., im dritten 36 Ztr. 27 ℔ 23 Lth. Tabak; wie groß ist der Verschleiß während des ganzen Quartals? — 101 Ztr. 54 ℔ 8 Lth.

(5). Ein Wirth hat einem Kaufmanne für Zucker 8 fl. 24 Kr., für Kaffeh 5 fl. 20 Kr., für Öhl 4 fl. 25 Kr., und für andere kleinere Artikel 1 fl. 47 Kr.

zu bezahlen; wie viel ist er dem Kaufmanne im Ganzen schuldig? — 19 fl. 56 Kr.

(6). Ein Landmann hat 9 Joch 588 □° Ackergrund, 1244 □° Garten, 3 Joch 58 □° Wiesen, 8 Joch 1007 □° Waldungen, und 1 Joch 840 □° Hutweiden; wie viel Boden hat er zusammen? — 23 Joch 537 □°.

(7). Jemand wurde am 5. August 1795 geboren, und starb 49 Jahre 6 Monathe 15 Tage alt; wann ist er gestorben? — Am 5. August 1795 waren seit der Geburt Christi 1794 Jahre 7 Monathe und 4 Tage verflossen, dazu 49 Jahre, 6 Monathe und 15 Tage, so hat man: 1844 Jahre, 1 Monath und 19 Tage, welche zur Zeit des Todes seit Christus verflossen waren; der Sterbetag war also der 20. Februar 1845.

(8). Für einen Rock kostet das Tuch 16 fl. 42 Kr., das Futter 54 Kr., das übrige Zugehör 1 fl. 25 Kr., Macherlohn ist 4 fl. 20 Kr.; was kostet der Rock? — 23 fl. 21 Kr.

(9). Ein Buchdrucker verbraucht 280 Ballen Druckpapier, 2 Ballen 9 Rieß 15 Buch Velinpapier, und 56 Ballen 3 Rieß 10 Buch Schreibpapier; wie viel macht dieses Papier zusammen? — 339 Ballen 3 Rieß 5 Buch.

(10). Bey einem Kostenüberschlage beträgt die Maurerarbeit 231 fl. 47 Kr., die Zimmermannsarbeit 72 fl. 5 Kr., die Schlosserarbeit 24 fl. 32 Kr., die Tischlerarbeit 11 fl. 42 Kr., die Hafnerarbeit 27 fl., die Spenglerarbeit 42 fl. 40 Kr., die Glaserarbeit 7 fl. 32 Kr., und die Anstreicherarbeit 3 fl. 20 Kr.; wie groß ist der ganze Betrag? — 420 fl. 38 Kr.

4. Das Subtrahiren.

§. 52.

a. Man ziehe 23 fl. 31 Kr. von 65 fl. 47 Kr. ab. —

Im Kopfe wird dieses so geschehen: 23 fl. von 65 fl. bleiben 42 fl.; 31 Kr. von 47 Kr. bleiben 16 Kr.; zusammen 42 fl. 16 Kr. — Dasselbe Verfahren wird auch beym **schriftlichen Subtrahiren** beobachtet, man zieht nähmlich die gleichnahmigen Zahlen einzeln von einander ab; die Rechnung würde stehen

65	fl.	47	Kr.
23	"	31	"
42	fl.	16	Kr.

Man kann hier das Subtrahiren bey den Gulden oder bey den Kreuzern anfangen; in beyden Fällen erhält man denselben Rest.

b. Es sollen 35 fl. 50 Kr. von 60 fl. 24 Kr. abgezogen werden.

Mündlich. 35 fl. von 60 fl. bleiben 25 fl.; 50 Kr. kann man von 24 Kr. nicht wegnehmen, man borge daher von dem Guldenreste 1 fl. oder 60 Kr., wo sodann noch 24 fl. bleiben, 60 Kr. und 24 Kr. sind 84 Kr., davon 50 Kr. abgezogen, bleiben 34 Kr.; es bleiben also im Ganzen 24 fl. 34 Kr.

Beym **schriftlichen Subtrahiren** muß man hier zuerst die Kreuzer und dann die Gulden abziehen, weil man sonst die schon angeschriebenen 25 fl. in 24 fl. verbessern müßte. Da 50 Kr. von 24 Kr. nicht abgezogen werden können, so borgt man 1 fl.; bey den Gulden bleiben dann im Minuend nur 59, was durch den Borgepunct angezeigt wird; bey den Kreuzern bekommt man 60 und 24 d. i. 84. Nun zieht man ab: 0 von 4 bleiben 4, 5 von 8 bleiben 3, also 34 Kr.; ferner: 5 von 9 bleiben 4, 3 von 5 bleiben 2, also 24 fl.; zusammen 24 fl. 34 Kr. Die Rechnung stehet

$\dot{6}0$ fl.	$\overset{60}{24}$ Kr.
35 „	50 „
24 fl.	34 Kr.

Aus diesen und ähnlichen Beyspielen lassen sich für das **schriftliche Verfahren mehrnahmiger Zahlen** folgende Regeln ableiten:

1. Man schreibt den Subtrahend so unter den Minuend, daß die gleichnahmigen Zahlen unter einander zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man fange bey der niedrigsten Benennung zu subtrahiren an, subtrahire Benennung für Benennung, bis man zur höchsten kommt, und schreibe den jedesmahligen Rest unter die subtrahirten Zahlen.

3. Ist bey einer Benennung die untere Zahl größer als die darüberstehende, so borge man bey der nächst höhern Benennung eine Einheit, löse sie in die niedrige Benennung auf, und zähle die schon vorhandenen Einheiten dieser Benennung dazu, dann kann man abziehen. Die Zahl der höhern Benennung, bey welcher 1 geborgt wurde, wird mit dem Borgepuncte bezeichnet.

Wenn bey einer Benennung nichts übrig bleibt, so wird unter dieselbe ein Querstrich gesetzt.

B e y s p i e l e.

(1). Man subtrahire 385 fl. 12 Kr. 2 ℋ von 573 fl. 31 Kr. 2 ℋ.

573 fl.	31 Kr.	2 H
385 „	12 „	2 „
188 fl.	19 Kr.	— H

(2). Man subtrahire 5 Ztr. 27 ℔ 12 Lth. von 12 Ztrn. 17 ℔ 4 Lth.

$\dot{1}2$ Ztr.	$\overset{100.}{17}$ ℔	$\overset{32}{4}$ Lth.	32	100
5 „	27 „	12 „	+4	+16
6 Ztr.	89 ℔	24 Lth.	36	116
			−12	−27
			24 Lth.	89 ℔

Hier können 12 Loth von 4 Loth nicht abgezogen werden, man borgt daher 1 ℔, welches 32 Lth. gibt; die 4 Lth. dazu, sind 36 Lth.; nun kann man abziehen: 12 von 36 bleiben 24 Lth. Von 16 ℔ können 27 ℔ wieder nicht abgezogen werden, man borgt 1 Ztr., welcher 100 ℔ gibt; dazu die schon vorhandenen 16 ℔, sind 116 ℔; 27 ℔ davon abgezogen, bleiben 89 ℔. Nun zieht man noch 5 Ztr. von 11 Ztr. ab.

(3). Es sollen 4 Jahre 7 Monathe 25 Tage von 8 Jahren abgezogen werden.

$\dot{8}$ J.	$\overset{11}{—}$ M.	$\overset{30}{—}$ T.
4 „	7 „	25 „
3 J.	4 M.	5 T.

Hier borgt man, da weder Tag noch Monathe vorkommen, sogleich bey den Jahren; 1 Jahr gibt 12 Monathe, davon 1 geborgt, bleiben 11; der geborgte Monath gibt 30 Tage. Sodann wird subtrahirt.

§. 53.

Aufgaben.

(1). Ein Beamter bezieht durch 1 Quartal 237 fl. 36 Kr.; wie viel bleibt ihm davon übrig, wenn er 185 fl. 52 Kr. ausgegeben hat? — 51 fl. 44 Kr.

(2). Ein Kaufmann hatte 1 Ballen und 8 Rieß Papier vorräthig; wenn er nun davon bereits 8 Rieß 17 Buch verkauft hat, wie groß ist noch sein Papiervorrath? — 9 Rieß 3 Buch.

(3). Jemand zahlt an Hauszins jährlich 140 fl.; wie viel ist er noch schuldig, wenn er auf die dießjährige Rechnung schon 85 fl. 45 Kr. berichtiget hat? — 54 fl. 15 Kr.

(4). A ist dem B 586 fl. 35 Kr. schuldig; darauf zahlt er einmahl 240 fl. 20 Kr., ein anderes Mahl 183 fl. 32 Kr.; wie viel hat er schon gezahlt, und wie viel bleibt er noch schuldig? — Er zahlte bereits 423 fl. 52 Kr., und bleibt noch 162 fl. 43 Kr. schuldig.

(5). Ein Landmann besitzt 8 Joch 548 Quadratklafter Ackergrund; wenn er nun 1 Joch 895 Quadratklafter verkauft, wie viel bleibt ihm noch? — 6 Joch 1253 Quadratklafter.

(6). Aus einem Fasse, welches 15 Eimer 18 Maß enthält, werden 6 Eimer 24 Maß herausgenommen; wie viel Wein bleibt noch darin? — 8 Eimer 34 Maß.

(7). Jemand hatte 26 Ztr. 75 ℔ Kaffeh vorräthig. Davon verkauft er nach und nach 1 Ztr. 68 ℔, 3 Ztr. 15 ℔, 88 ℔, 6 Ztr. 45 ℔, 5 Ztr.; wie groß ist noch sein Vorrath? — 9 Ztr. 59 ℔.

(8). Jemand ist am 2. April 1787 geboren, und starb am 3. October 1835, wie alt ist er geworden? — 48 Jahre 6 Monathe 1 Tag.

Beym Tode waren 1834 J. 9 Mon. 2 Tage
bey der Geburt " 1786 " 3 " 1 " seit
Christo verfl.; also ist die Zeit 48 J. 6 Mon. 1 Tag das gesuchte Lebensalter.

(9). Jemand ist am 24. Juni 1831 geboren; wie alt ist er, wenn man heute den 20. Februar 1845 schreibt? — 13 Jahre 7 Monathe 26 Tage.

Heute sind	1844 J.	$\overset{12}{1}$ M.	$\overset{30}{19}$ Tage,	
am Geburtstage	1830 „	5 „	23 „	nach Chr. G.
versl. d. Zwischenzt.	13 J.	7 M.	26 Tage	ist das Alter.

5. Das Multipliciren.

§. 54.

Bey der Multiplication muß der Multiplicator während der Rechnung immer als eine unbenannte Zahl betrachtet werden.

(a). Man multiplicire 28 Ztr. 25 ℔ mit 2.

Hier muß jeder Bestandtheil 2mahl genommen werden.

Im **Kopfe** 2mahl 28 Ztr. sind 56 Ztr.; 2mahl 25 ℔ sind 50 ℔; zusammen 56 Ztr. 50 ℔.

Schriftlich: 28 Ztr. 25 ℔
2
56 Ztr. 50 ℔

Beym **schriftlichen** Multipliciren wird also das Product der Pfunde unter die Pfunde, das Product der Zentner unter die Zentner gesetzt.

(b). Es sollen 208 fl. 35 Kr. mit 9 multiplicirt werden.

Im **Kopfe**: 9mahl 208 (9mahl 200 ist 1800, 9mahl 8 ist 72, und 1800) ist 1872, also hat man erstlich 1872 fl.; 9mahl 35 Kr. sind (9mahl 30 sind 270, 9mahl 5 sind 45, zusammen) 315 Kr.; 300 Kr. geben 30 Zehner oder 5 fl., 315 Kr. sind also 5 fl. 15 Kr.; und die frühern 1872 fl. sind 1877 fl. 15 Kr.

Beym **schriftlichen Multipliciren** muß man, weil in dem Kreuzerproducte Gulden enthalten sind, und diese zu dem Guldenproducte gezählt werden müssen, bey den Kreuzern zu rechnen anfangen, damit man nicht nöthig habe, die im Producte schon angeschriebene Zahl der Gulden wieder auszubessern. Man nimmt also erstlich 35 Kr. 9mahl, was 315 Kr. gibt; diese durch die Division mit 60 in Gulden verwandelt, machen 5 fl., und es bleiben noch 15 Kr., welche man im Producte unter die Kreuzer schreibt; die 5 fl. werden zu dem Producte der Gulden weiter gezählt: 9mahl 8 sind 72, und die übertragenen 5 sind 77 fl., (7 wird angeschrieben) bleiben 7; 9mahl 0 ist 0, und 7 ist 7; 9mahl 2 ist 18. Die Rechnung steht

208 fl. 35 Kr.	6,0 | 31,5 | 5 fl.
9	30
1877 fl. 15 Kr.	15 Kr.

Ist also eine mehrnahmige Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren, so beobachte man Folgendes:

1. Man schreibe den Multiplicator unter die niedrigste Benennung des Multiplicands, und ziehe darunter einen Querstrich.

2. Man fange bey der niedrigsten Benennung zu multipliciren an, multiplicire Benennung für Benennung, bis man zur höchsten kommt, und schreibe das jedesmahlige Product unter die multiplicirte Stelle.

3. Ist bey einer Benennung das erhaltene Product so groß, daß es Einheiten der nächst höhern Benennung enthält, so reducirt man es durch Division mit dem Verwandler auf diese höhere Benennung; die übrig gebliebenen Einheiten der niedrigern Benennung werden an die gehörige Stelle geschrieben, die

erhaltenen höhern Einheiten aber zu dem Producte dieser letztern weiter gezählt.

B e y s p i e l e.

1. Man multiplicire 5 fl. 24 Kr. 3 ₰ mit 7.

5 fl. 24 Kr. 3 ₰	3 ₰	24 Kr.
7	7	7
37 fl. 53 Kr. 1 ₰	4 | 21 | 5 Kr.	6,0 | 17,3 | 2 fl.
	20	12
	1 ₰	53 Kr.

Hier erhält man: 7mahl 3 sind 21 ₰, welche auf Kreuzer reducirt 5 Kr. 1 ₰ geben, man setze 1 ₰ an die Stelle der Pfennige, die 5 Kr. werden weiter gezählt; ferner: 7mahl 4 ist 28, und 5 ist 33, (3 angeschrieben) bleiben 3; 7mahl 2 ist 14, und 3 ist 17, die 173 Kr. geben 2 fl. 53 Kr.; man setze die 53 Kr. an die Stelle der Kreuzer, die 2 fl. werden weiter gezählt; 7mahl 5 ist 35, und 2 sind 37 fl.

2. Man multiplicire 14° 4′ 9″ 5‴ mit 27.

$$
\begin{array}{r}
14^\circ \;\; 4' \;\; 9'' \;\; 5''' \\
27 \\
\hline
399^\circ \;\; 3' \;\; 2'' \;\; 3'''
\end{array}
$$

27	27	27	27
5	9	4	14
12 | 135 | 11″,	12 | 254 | 21′,	6 | 129 | 21°,	108
12	24	12	27
15	14	9	378
12	12	6	+21
3‴	2″	3′	399°

Das Multipliciren mehrnahmiger Zahlen kann auch dadurch verrichtet werden, daß man dieselbe auf die niedrigste Benennung bringt, und dann die Multiplication verrichtet; das Product enthält Einheiten derselben niedrigsten Benennung, welche dann wieder auf die höhern Benennungen reducirt werden.

Beyspiel.

Man multiplicire 3 Ztr. 64 ℔ 18 Lth. 3 Qtch. mit 18.

3 Ztr. 64 ℔ 18 Lth. 3 Qtch.

```
  3
100
---------
300 ℔
+64
---------
364 ℔
 32
---------
 728
1092
---------
11648 Lth.
  +18
---------
11666 Lth.
    4
---------
46664 Qtch.
   +3
---------
46667 Qtch.
```

```
 46667 Qtch.
    18
---------
373336
46667
---------
4 | 840006 Qtch. | 210001 Lth.
    8
    --
    4
    4
    --
    0006
       4
    ----
       2 Qtch.
```

```
32 | 210001 Lth. | 6562 ℔
     192
     ---
      180
      160
      ---
       200
       192
       ---
         81
         64
         --
         17 Lth.
```

```
1,00 | 65,62 ℔ | 65 Ztnr.
                 62 ℔
```

Das Product ist also:

65 Ztr. 62 ℔ 17 Lth. 2 Qtch.

§. 55.

Aufgaben.

(1). Ein Taglöhner verdient täglich 48 Kr.; wie viel macht dieses in 27 Tagen? — 21 fl. 36 Kr.

(2) In einer Haushaltung gibt man im Durchschnitte monathlich 88 fl. 45 Kr. aus; wie hoch beläuft sich die Ausgabe für 11 Monathe? — Auf 976 fl. 15 Kr.

(3). 1 Zentner Heu wird mit 1 fl. 12 Kr. bezahlt; was kosten 92 Zentner? — 110 fl. 24 Kr.

(4). Wie viel kosten 25 Metzen Weizen; wenn der Metzen 2 fl. 20 Kr. kostet? — 58 fl. 20 Kr.

(5). Wenn 1 Zentner Eisen 12 fl. 18 Kr. kostet; wie hoch kommen 56 Zentner? — Auf 688 fl. 48 Kr.

(6). Bey einem Mittagmahle waren 14 Personen; wie groß war wohl die Rechnung, wenn jede Person 1 fl. 36 Kr. zahlen muß? — 22 fl. 24 Kr.

(7). Ein Tagsschreiber bezieht täglich 1 fl. 36 Kr.; wie viel in einem Jahre (365 Tagen)? — 584 fl.

(8). Wie viel Öhl enthalten 12 Fässer, jedes zu 6 Zentnern 28 ℔ 8 Loth? — 75 Zentner 39 ℔.

(9). Wie viel wiegen 8 Zuckerhüte zu 12 ℔ 12 Lth., und wie viel sind sie werth, wenn 1 ℔ mit 24 Kr. bezahlt wird? — 8 Zuckerhüte zu 12 ℔ 12 Lth. enthalten 99 ℔, und diese betragen zu 24 Kr. 99mahl 24 Kr., was 39 fl. 36 Kr. macht.

(10). Jemand ist 800 fl. schuldig; darauf gibt er 320 fl. 40 Kr. im Gelde, dann 32 Eimer Wein zu 8 fl. 36 Kr., und 48 Metzen Hafer zu 48 Kr.; wie viel hat er im Ganzen schon abgezahlt, und wie viel bleibt er noch schuldig? — Mit barem Gelde wurden 320 fl. 40 Kr., mit Wein 275 fl. 12 Kr., und mit Hafer 38 fl. 24 Kr., zusammen 634 fl. 16 Kr. berichtiget; die Schuld beträgt also noch 165 fl. 44 Kr.

(11). In einer Erziehungsanstalt sind 65 Zöglinge, jeder kostet täglich 35 Kr.; wie viel wird für alle täglich, wie viel monathlich, und wie viel in 10 Monathen ausgegeben? — Die tägliche Ausgabe ist 37 fl. 55 Kr.; die monathliche 30mahl so groß, also 1137 fl. 30 Kr.; in 10 Monathen also 11375 fl.

(12). Ein Beamter hat jährlich 800 fl. Gehalt; er gibt täglich 48 Kr. auf Kost; monathlich 12 fl. auf Wohnung und Bedienung, und jährlich 250 fl. auf die übrigen Bedürfnisse aus; wie viel erspart er im ganzen Jahre? — Für die Kost gibt er 365mahl 48 Kr. d. i. 292 fl., für Wohnung und Bedienung 12mahl 12 = 144 fl., und für die übrigen Bedürfnisse 250 fl., zusammen 686 fl. aus; diese von 800 fl. abgezogen geben 114 fl. als jährliches Ersparniß.

6. Das Dividiren.

§. 56.

Beym Dividiren mehrnahmiger Zahlen sind zwey Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn die Division als **Enthaltenseyn** oder **Vergleichung** angewendet wird.

In diesem Falle müssen Dividend und Divisor gleichnahmig seyn. Man verwandelt daher die beyden mehrnahmigen Zahlen in eine gleiche, und zwar die niedrigste Benennung; dann dividirt man die zwey einnahmigen Zahlen durch einander.

B e y s p i e l e.

(1). Wie oft sind 12 fl. 23 Kr. in 185 fl. 45 Kr. enthalten?

12 fl. 23 Kr.	185 fl. 45 Kr.	743	11145	15
60	60		743	
720 Kr.	11100 Kr.		3715	
23	45		3715	
743 Kr.	11145		=	

12 fl. 23 Kr. sind also in 185 fl. 45 Kr. 15mahl enthalten.

(2). Wie oft sind 15 Stunden 16 Minuten in 22 Tagen 21 Stunden 36 Minuten enthalten.

15 St. 16 M.	22 T. 21 St. 36 M.			
60	24			
900 M.	88			
16	44			
916 M.	528 St.	916	32976	36
	21		2748	
	549 St.		5496	
	60		5496	
	31940 M.		=	
	36			
	32976 M.			

Antwort: 36mahl.

§. 57.

b. Wenn die Division als **Theilung** angewendet wird.

In diesem Falle ist nur der Dividend benannt, der Divisor aber muß während der Rechnung als unbenannt angesehen werden; der Quotient erhält dann mit dem Dividende einerley Nahmen.

(1). Es sey 48 fl. 16 Kr. durch 8 zu dividiren.

Man muß hier offenbar sowohl von den Gulden als von den Kreuzern den 8ten Theil nehmen.

Im **Kopfe**: 48 fl. durch 8 getheilt geben 6 fl., 16 Kr. durch 8 getheilt geben 2 Kr.; zusammen 6 fl. 2 Kr.

Ganz auf dieselbe Art verfährt man auch beym **schriftlichen Dividiren**, und schreibt

8 | 48 fl. 16 Kr. | 6 fl. 2 Kr.

(2). Man theile 345 fl. 6 Kr. in 14 gleiche Theile.

Wenn man hier 345 fl. in 14 gleiche Theile theilt, so bekommt man 24 fl., und es bleiben noch 9 fl., welche durch 14 nicht mehr getheilt werden können; man löst daher die 9 fl. durch Multiplication mit 60 in Kreuzer auf, sie geben 540 Kr., und die bereits vorhandenen 6 Kr. dazu, sind 546 Kr.; diese werden nun durch 14 dividirt, wodurch man 39 Kr. bekommt. Der Quotient ist also 24 fl. 39 Kr., und die Rechnung stehet

```
14 | 345 fl. 6 Kr. | 24 fl. 39 Kr.
     28
     ---
      65
      56
      ---
       9 fl.
      60
     540 Kr.
       6
     ------
     546 Kr.
      42
     ---
     126
     126
     ---
       =
```

Wenn also eine mehrnahmige Zahl durch eine unbenannte zu dividiren ist, wo nähmlich die Division als Theilung angewendet wird, so beobachte man folgende Regeln:

1. Man schreibe den Dividend zwischen zwey aufrechten Strichen, und links vor demselben den Divisor; der Quotient kommt nach und nach rechts nach dem Dividende zu stehen.

2. Man fange bey der höchsten Benennung zu dividiren an, dividire Benennung für Benennung, bis man zur niedrigsten kommt, und gebe dem jedesmahligen Quotienten jenen Nahmen, den die dividirte Zahl hat.

3. Bleibt bey der Division einer Benennung ein Rest, so verwandle man ihn durch Multiplication mit dem Verwandler in die nächst niedrigere Benennung, und addire dazu die im Dividende bereits vorhandenen Einheiten dieser Benennung. Dann wird weiter dividirt.

B e y s p i e l e.

(1). Man dividire 214 Zentner 13 ℔ 8 Lth. durch 8.

8 | 214 Ztr. 13 ℔ 8 Lth. | 26 Ztr. 76 ℔ 21 Lth.
16
54
48
6 Ztr.
100
600 ℔
13
613 ℔
56
53
48
5 ℔
32
160 Lth.
8
168 Lth.
16
8
8

(2). Man suche den 24sten Theil von 158 fl. 42 Kr.

24 | 158 fl. 42 Kr. | 6 fl. 36 Kr. 3 ℋ
144
14 fl.
60
840 Kr.
42
882 Kr.
72
162
144
18 Kr.
4
72 ℋ
72
=

Die Division einer mehrnahmigen Zahl durch eine unbenannte kann auch dadurch ausgeführt werden, daß man die mehrnahmige Zahl in die niedrigste Benennung auflöset, dann die Division verrichtet, und endlich den Quotienten wieder auf die höhere Benennung reducirt.

Beyspiel.

Wie groß ist der 15te Theil von 19 Ztr. 93 ℔ 4 Lth.

19 Zt.	
100	
1900 ℔	15 | 63780 | 4252 Lth.
93	60
1993 ℔	37
32	30
3986	78
5979	75
63776 Lth.	30
4	30
63780 Lth.	=

32 | 4252 Lth. | 132 ℔
  32
  105 1,00 | 1,32 | 1 Ztr.
  96   32 ℔
  92
  64
  28 Lth.

Der Quotient ist also:

1 Ztr. 32 ℔ 28 Lth.

§. 58.

Aufgaben.

(1). 1 ℔ Kerzen kostet 16 Kr.; wie viel ℔ bekommt man um 4 fl. 48 Kr.? — 18 ℔.

(2). Ein Knecht hat monathlich 7 fl. 30 Kr.; wie lang wird er dienen müssen, um 37 fl. 30 Kr. zu verdienen? — 5 Monathe.

(3). Ein Beamter bezieht monathlich 37 fl. 30 Kr.; wie viel kommt auf einen Tag? — 1 fl. 15 Kr.

(4.) Ein Gärtner gibt 65 Stück junge Bäumchen um 19 fl. 30 Kr.; wie theuer hat er das Stück verkauft? — Um 18 Kr.

(5). Ein Kaufmann verkauft um 90 fl. Tuch, die Elle zu 3 fl. 20 Kr.; wie viel Ellen hat er verkauft? — 27 Ellen.

(6). Unter 52 durch Feuer verunglückte Familien sind 925 fl. 36. Kr. zu gleichen Theilen vertheilt worden; wie viel bekam eine jede Familie? — 17 fl. 48 Kr.

(7). Jemand kauft 27 ℔ Wolle um 10 fl. 48 Kr.; wie theuer bezahlte er das ℔ davon? — Zu 24 Kr.

(8). Wie viel Balken braucht man zu einem 35° 2′ 6″ langen Geländer; wenn jeder Balken 8′ 6″ lang ist? — 25 Balken.

(9). 12 Wirthe kaufen zusammen 69 Eimer Wein; wenn nun jeder gleichviel zahlt, wie viel Wein bekommt jeder Wirth? — 5 Eimer 30 Maß.

(10). Ein Schafzüchtler hat 1038 Schafe, und verkauft die Hälfte davon, jedes zu 2 fl. 42 Kr., unter der Bedingung, daß das Geld innerhalb eines Jahres in vierteljährigen Terminen bezahlt werden müsse; wie viel Schafe verkauft er, wie viel Geld hat er dafür im Ganzen zu bekommen, und wie viel muß vierteljährig gezahlt werden? — Es werden 519 Schafe um 1401 fl. 18 Kr. verkauft, daher muß vierteljährig der 4te Theil davon, nähmlich 350 fl. 19½ Kr., gezahlt werden.

(11). Auf einem Wochenmarkte werden 12 Metzen Weizen zu 2 fl. 36 Kr., 26 Metzen zu 2 fl. 30 Kr., und 38 Metzen zu 2 fl. 20 Kr. verkauft. Wie viel Metzen Weizen sind im Ganzen verkauft worden, wie viel kosten sie alle zusammen, und wie hoch kommt im Durchschnitte 1 Metzen? — Es sind zusammen 76 Metzen; 12 Metzen zu 2 fl. 36 Kr. machen 31 fl. 12 Kr., 26 Metzen zu 2 fl. 30 Kr. machen 65 fl., und 38 Metzen zu 2 fl. 20 Kr. betragen 88 fl. 40 Kr.; also sind alle 76 Metzen um 184 fl. 52 Kr. verkauft worden; daher kommt auf 1 Metzen im Durchschnitte 2 fl. 25 Kr. 3 ℋ.

(12). Für einen Brückenbau haben 4 Gemeinden 742 fl. 12 Kr. zu gleichen Theilen beyzutragen; die Gemeinde A zahlte auf Rechnung 120 fl., die Gemeinde B 134 fl. 25 Kr., C 92 fl. 50 Kr., D 148 fl. 8 Kr. Wie groß ist der Betrag, der auf jede Gemeinde entfällt, und wie viel hat jede einzelne Gemeinde noch nachzuzahlen? — Auf jede Gemeinde kommen 185 fl. 33 Kr. zu zahlen; davon hat A noch 65 fl. 33 Kr., B 51 fl. 8 Kr., C 92 fl. 43 Kr., D 37 fl. 25 Kr. zu berichtigen.

Fünftes Hauptstück.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 59.

Eine Zahl heißt durch eine andere **theilbar**, wenn sie durch dieselbe dividirt keinen Rest zurückläßt. Z. B. 32 ist durch 8 theilbar, weil 8 in 32 gerade 4mahl enthalten ist und kein Rest übrig bleibt; 36 aber ist durch 8 nicht theilbar, weil da ein Rest übrig bleibt.

Jede Zahl ist durch sich selbst und durch 1 theilbar. So ist z. B.

$$8 : 8 = 1, \text{ und } 8 : 1 = 8.$$
$$17 : 17 = 1, \text{ und } 17 : 1 = 17.$$

Jene Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind, heißen **einfache** oder **Primzahlen**; z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, u. s. w.

Welche sind die Primzahlen von 1 bis 100?

Jene Zahlen, welche nicht nur durch sich selbst und 1, sondern auch noch durch eine andere Zahl theilbar sind, heißen **zusammengesetzte Zahlen**; z. B. 8 läßt sich durch 8 und 1, aber auch durch 2 und 4 ohne Rest dividiren; 8 ist also eine zusammengesetzte Zahl.

§. 60.

Regeln für die Theilbarkeit der Zahlen:

1. Durch 1 ist jede Zahl theilbar. Allein, da die Division durch 1 nichts ändert, wird durch 1 nie dividirt.

2. Durch 2 sind alle geraden Zahlen theilbar, d. i. jene Zahlen, welche in der Stelle der Einheiten 0, 2, 4, 6 oder 8 haben; z. B. 50, 92, 774, 86, 2218.

Der Grund dieser Regel läßt sich leicht einsehen. Alle Zehner, Hunderte, Tausende, . . . sind einmahl durch 2 theilbar; kommen nun gar keine Einheiten vor, oder stehet in der Stelle der Einheiten eine durch 2 theilbare Zahl, nähmlich 2, 4, 6, 8, so muß auch die ganze Zahl durch 2 theilbar seyn.

Jene Zahlen, welche in der Stelle der Einheiten 1, 3, 5, 7, 9 haben, heißen **ungerade Zahlen**, und sind durch 2 nicht theilbar; z. B. 21, 73, 45, 2187, 559.

3. Durch 3 sind alle Zahlen theilbar, deren Ziffernsumme durch 3 theilbar ist; z. B. 735 ist durch 3 theilbar, weil die Ziffernsumme $7 + 3 + 5 = 15$ durch 3 theilbar ist; eben so sind 54, 87, 1437, 51294 durch 3 theilbar.

Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich auf folgende Art überzeugen. $10 : 3 = 3$, und es bleibt 1 zum Reste; $20 : 3 = 6$, und es bleibt 2 zum Reste; $30 : 3 = 10$, und es bleibt kein Rest, oder $30 : 3 = 9$, und es bleibt der Rest 3; eben so kann man $40 : 3 = 12$ setzen und 4 als Rest annehmen . . .; wenn man also 1 Zehner durch 3 theilt, so bleibt 1 zum Reste; dividirt man 2 Zehner durch 3, so erhält man 2 zum Reste; überhaupt so viele Zehner durch 3 dividirt werden, eben so viele Einheiten kann man als Rest annehmen. Ferner: wenn man 1 Hundert durch 3 dividirt, so bleibt auch 1 zum Reste; werden 2, 3, 4, . . Hunderte durch 3 dividirt, so kann man 2, 3, 4,... als Reste annehmen. Dasselbe gilt von den Tausenden, Zehntausenden, u. s. w. Wenn man daher die Zehner, Hunderte, Tausende,... durch 3 dividirt, so kann man die Ziffern selbst, welche in der Stelle der Zehner, Hunderte, Tausende, . . . stehen, als Reste der Division ansehen; sind nun alle diese Reste und dazu noch die Einheiten zusammengenommen durch 3 theilbar; so ist es auch die ganze Zahl; wenn aber jene Reste und die Einheiten durch 3 nicht theilbar sind, so ist es auch die ganze Zahl nicht. Jene Reste aber und die Einheiten zusammengenommen bilden eben die Ziffernsumme. Eine Zahl ist also durch 3 theilbar, wenn sich ihre Ziffernsumme durch 3 theilen läßt.

4. Durch 4 sind alle Zahlen theilbar, deren zwey niedrigste Stellen rechts durch 4 theilbar sind. Z. B. 732 ist durch 4 theilbar, weil die ersten zwey Stellen rechts, nähmlich 32 durch 4 theilbar sind; eben so sind 124, 2912, 5004, 2980 durch 4 theilbar.

Alle Hunderte sind durch 4 theilbar, eben so alle Tausende, Zehntausende, u. s. w. Sind nun auch die Zehner und die Einheiten d. i. die zwey niedrigsten Ziffern durch 4 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

5. Durch 5 sind alle Zahlen theilbar, welche in der Stelle der Einheiten 0 oder 5 haben; z. B. 10, 35, 80, 325, 7105, 129300.

Denn die Zehner, Hunderte, Tausende, . . . sind einmahl durch 5 theilbar; es kommt also nur auf die Einheiten an; sind entweder gar keine Einheiten da, oder gerade 5 Einheiten, so ist die ganze Zahl durch 5 theilbar; sonst nicht.

6. Durch 10, 100, 1000, . . . sind alle Zahlen theilbar, welche rechts 1, 2, 3, . . . Nullen haben. So ist 450, 19200 durch 10; 3400, 5710000 durch 100; 3000, 5920000 durch 1000 theilbar.

Für die Ausübung ist es hinreichend, wenn man die Kennzeichen der Theilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000 weiß; die Kennzeichen für die Theilbarkeit durch andere Zahlen sind viel zusammengesetzter, und daher minder brauchbar.

Aufgaben.

(1). Durch welche Zahlen ist 103740 theilbar?

(2). Man gebe von allen Zahlen unter 100 an, durch welche kleinere Zahlen sie theilbar sind.

(3). Es soll bey nachstehenden Zahlen:

360, 2268, 1080, 4725, 75600, 96000

angegeben werden, durch welche andere Zahlen sie ohne Rest getheilt werden können.

Sechstes Hauptstück.

Lehre von den Brüchen.

§. 61.

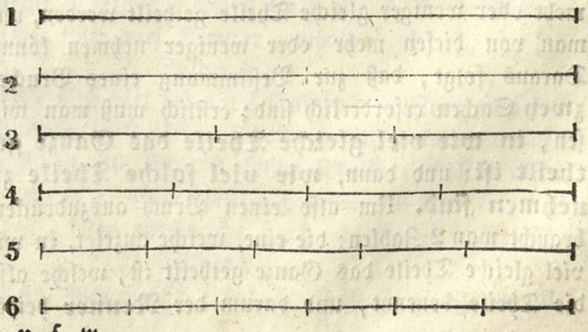
Wenn man eine Einheit ein- oder mehrmahl nimmt, so erhält man eine **ganze Zahl**; z. B. eine Elle, fünf Ellen; die erste Zahl enthält die Einheit, nähmlich eine Elle einmahl, die zweyte fünfmahl.

Man kann aber auch die Einheit in mehrere gleiche Theile theilen, und dann einen oder mehrere solche Theile nehmen. Eine Zahl, welche dadurch entstehet, heißt ein **Bruch.** Wenn man z. B. eine Elle in vier gleiche Theile theilt, so ist jeder solche Theil ein Viertel-Elle; ein Viertel-Elle, zwey Viertel-Ellen, drey Viertel-Ellen sind daher Brüche, weil man sich darunter nur einen Theil der Einheit, nähmlich den vierten Theil einer Elle vorstellt, und zwar unter der ersten Zahl einmahl, unter der zweyten zweymahl, unter der dritten dreymahl.

Ein **Bruch** ist demnach nichts anderes als eine Zahl, welche einen oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält.

Wenn man ein Ganzes in 2, 3, 4, 5, . . . gleiche Theile theilt, so heißt ein solcher Theil der **zweyte, dritte, vierte, fünfte** . . . Theil, oder die **Hälfte,** das **Drittel, Viertel, Fünftel,** . . . des Ganzen.

Um sich das Entstehen der Brüche recht anschaulich zu machen, ziehe man unter einander mehrere gleich lange Linien, lasse die erste ganz ungetheilt, die zweyte theile man in 2, die dritte in 3, . . . gleiche Theile, wie folgende Darstellung zeigt.



u. s. w.

Die erste Linie stellt die Einheit, das ungetheilte Ganze vor. — Die zweyte Linie ist in 2 gleiche Theile getheilt worden, ein solcher Theil heißt die **Hälfte** des Ganzen, oder ein Halbes; zwey solche Theile sind zwey Halbe, und machen wieder die ganze Linie, ein Ganzes aus. — Die dritte Linie enthält 3 gleiche Theile; ein solcher Theil heißt ein **Drittel** der ganzen Linie; zwey solche Theile bilden zwey Drittel; drey solche Theile oder drey Drittel geben wieder die ganze Linie u. s. w.

Der Begriff der Brüche kann auch durch Guldentheile sehr vortheilhaft versinnlichet werden. — Ein Gulden enthält 60 Kr., wenn man einen Gulden in 2 gleiche Theile theilt, so enthält jeder solche Theil 30 Kr.; ein halber Gulden oder die Hälfte eines Guldens sind also 30 Kr.; zwey halbe Gulden machen 2mahl 30 d. i. 60 Kr., also einen ganzen Gulden. — Theilt man einen Gulden in 3 gleiche Theile, so enthält ein solcher Theil 20 Kr.; der dritte Theil oder das Drittel eines Guldens sind also 20 Kr., 2 Drittel betragen 2mahl 20 d. i. 40 Kr.; 3 Drittel 3mahl 20 d. i. 60 Kr. oder einen ganzen Gulden u. s. w.

An den getheilten Linien, so wie an den verschiedenen Guldentheilen ersieht man, daß ein Ganzes in mehr oder weniger gleiche Theile getheilt werden, und man von diesen mehr oder weniger nehmen könne. Daraus folgt, daß zur Bestimmung eines Bruches zwey Sachen erforderlich sind; erstlich muß man wissen, **in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt ist**; und dann, **wie viel solche Theile zu nehmen sind.** Um also einen Bruch auszudrücken, braucht man 2 Zahlen; die eine, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt ist, welche also die Theile benennt, und darum der **Nenner** heißt;

die andere, welche anzeigt, wie viel solche Theile man nehmen müsse, welche also die Theile zählt, und darum der **Zähler** genannt wird. Z. B. in dem Bruche drey Viertel ist die Zahl 4 der Nenner, und zeigt an, daß das Ganze in 4 gleiche Theile getheilt wurde; 3 ist der Zähler, und gibt an, daß man von solchen Theilen 3 genommen habe.

Wie wohl man sich bey Entstehung eines Bruches früher vorstellen muß, was für Theile er enthält, und dann erst, wie viel solche Theile er hat, also früher auf den Nenner, und dann erst auf den Zähler denkt, so wird doch beym Aussprechen und Anschreiben der Brüche die umgekehrte Ordnung beobachtet.

Beym **Aussprechen** der Brüche wird zuerst der Zähler und dann der Nenner genannt; z. B. drey Viertel, sieben Zehntel.

Eben so setzt man beym **Anschreiben** zuerst den Zähler an, zieht einen Strich, und schreibt den Nenner darunter; z. B. $\frac{3}{4}$ oder $^3/_4$, $\frac{7}{10}$ oder $^7/_{10}$.

Aufgaben.

(1). Wie viel ist $\frac{1}{10}$ Gulden? — Wenn man einen Gulden oder 60 Kreuzer in 10 gleiche Theile theilt, so enthält 1 solcher Theil 6 Kr.; also $\frac{1}{10}$ fl. = 6 Kr.

(2). Wie viel Kreuzer enthält $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{60}$ Gulden?

(3). Wie viel beträgt $\frac{2}{3}$ Gulden? — Wenn man einen Gulden in 3 gleiche Theile theilt, so kommen auf einen Theil 20 Kr.; 2 solche Theile enthalten also 2mahl 20 d. i. 40 Kr.; also $\frac{2}{3}$ fl. = 40 Kr.

(4). Was macht $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{53}{60}$ Gulden?

(5). Wie viel ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ Zentner?

(6). Wie viel Pfund machen $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{31}{50}$ Zentner?

(7). Wie viel Loth macht $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{16}$ Pfund?

(8). Wie viel Monathe beträgt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$ Jahr?

§. 62.

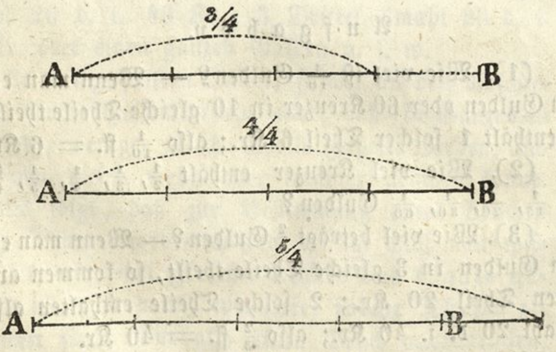
Man theilt die Brüche in **echte** und **unechte** ein.

Ein **echter** Bruch ist derjenige, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner; jeder andere Bruch, dessen Zähler entweder gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt ein **unechter** Bruch. Z. B.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{124}{273}$ sind echte Brüche.

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{388}{273}$ sind unechte Brüche.

Der Unterschied läßt sich recht gut durch Linien versinnlichen.



Es stelle die Linie AB die Einheit vor, welche in 4 gleiche Theile oder Viertel eingetheilt wird. An der ersten Linie nimmt man nur 3 solche Theile, an der zweyten 4, an der dritten 5. Im ersten Falle ist also der Zähler kleiner als der Nenner, im zweyten eben so groß, im dritten größer. Die erste Linie stellt also einen echten Bruch, die zweyte und dritte stellen unechte Brüche vor.

An diesen Linien ersieht man auch, daß ein echter Bruch kleiner, ein unechter aber gleich oder größer ist als die Einheit. Davon kann man sich auch überzeugen, wenn man echte und unechte Guldenbrüche betrachtet, und untersucht, ob sie kleiner, gleich oder größer als ein ganzer Gulden sind. Z. B. $\frac{3}{4}$ fl. = 45 Kr.; $\frac{4}{4}$ fl. = 60 Kr.; $\frac{5}{4}$ fl. = 75 Kr.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und aus einem angehängten Bruche besteht, heißt eine **gemischte Zahl**; z. B. $2\frac{3}{4}$, $25\frac{2}{9}$, $348\frac{15}{16}$.

Wenn bey der Division ganzer Zahlen ein Re übrig bleibt, so ist der Quotient immer eine gemischte Zahl.

§. 63.

Jeder unechte Bruch läßt sich in eine ganze oder gemischte Zahl verwandeln.

Es sey z. B. $\frac{8}{4}$; 4 Viertel machen ein Ganzes, 4 ist aber in 8 2mahl enthalten, also machen 8 Viertel 2 Ganze, oder $\frac{8}{4} = 2$. — Es sey ferner $\frac{14}{3}$; 3 Drittel machen 1 Ganzes, 14 Drittel also machen so viel Ganze, als wie oft 3 in 14 enthalten ist; 3 ist in 14 4mahl enthalten, und es bleiben noch 2; also betragen 14 Drittel 4 Ganze und noch 2 Drittel, oder $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Eben so ziehe man aus folgenden Brüchen die Ganzen heraus: $\frac{5}{5}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{63}{9}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{18}{7}$, $\frac{67}{8}$, $\frac{125}{9}$.

Daraus ersieht man:

Um aus einem unechten Bruche die Ganzen heraus zu ziehen, muß man untersuchen, wie oft der Nenner in dem Zähler enthalten ist, d. h. man muß den Zähler durch den Nenner dividiren; der Quotient gibt die Anzahl Ganze, bleibt ein Rest, so ist er der Zähler des noch anzuhängenden Bruches, dessen Nenner dem frühern Nenner gleich ist.

Beyspiele.

(1). Man ziehe aus $\frac{45}{9}$ die Ganzen heraus. 9 ist in 45 5mahl enthalten; also $\frac{45}{9} = 5$.

(2). $\frac{68}{8}$ soll in Ganze verwandelt werden. 8 ist in 68 8mahl enthalten, mit dem Reste 4; also $\frac{68}{8} = 8\frac{4}{8}$.

(3). $\frac{578}{21} = 27\frac{11}{21}$, denn 21 | 578 | $27\frac{11}{21}$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \hline 158 \\ 147 \\ \hline 11 \end{array}$$

(4). $\frac{8770}{23} = 381\frac{7}{23}$.

(5). $\frac{665}{16} = 41\frac{9}{16}$.

(6). $\frac{12345}{678} = 18\frac{141}{678}$.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, daß ein Bruch als eine angezeigte Division betrachtet werden kann; der Zähler stellt den Dividend, der Nenner den Divisor vor. Es ist also

$$\frac{8}{4} = 8 : 4;\ \frac{17}{5} = 17 : 5;\ \frac{5}{8} = 5 : 8$$

§. 64.

Wie jeder unechte Bruch auf eine ganze oder gemischte Zahl gebracht werden kann, so läßt sich auch umgekehrt **jede ganze oder gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln.**

1. Es soll z. B. 4 in einen Bruch, dessen Nenner 6 ist, also in Sechstel verwandelt werden. 1 Ganzes hat 6 Sechstel, also 4 Ganze 4mahl 6 Sechstel d. i. 24 Sechstel; daher $4 = \frac{24}{6}$. — Man bringe eben so 5 auf Viertel, 7 auf Achtel; 12 auf Zehntel.

Man wird daraus ersehen:

Um eine ganze Zahl in einen Bruch, dessen Nenner gegeben ist, **zu verwandeln,** multiplicirt man die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner; dieses Product setzt man als Zähler, und den gegebenen Nenner als Nenner des unechten Bruches.

B e y s p i e l e.

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{10}{10} = \frac{56}{56};$$

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{25}{5} = \frac{30}{6} = \frac{35}{7} = \frac{50}{10};$$

$$12 = \frac{72}{6}; \quad 20 = \frac{100}{5}; \quad 47 = \frac{470}{10}.$$

2. Man verwandle die gemischte Zahl $5\frac{3}{4}$ in einen unechten Bruch. Zuerst bringt man 5 auf Viertel, 1 Ganzes gibt 4 Viertel, 5 Ganze also 5×4 d. i. 20 Viertel; nun addirt man noch die 3 Viertel dazu, so hat man 23 Viertel; also $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$. — Auf dieselbe Art sollen die gemischten Zahlen $3\frac{1}{2}$, $7\frac{4}{5}$, $12\frac{3}{5}$, $7\frac{9}{12}$ in unechte Brüche verwandelt werden.

Eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, heißt **die gemischte Zahl einrichten.**

Aus den früheren Beyspielen entnimmt man die Regel:

Eine gemischte Zahl wird eingerichtet, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, und zu diesem Producte den Zähler addirt; dieses ist dann der Zähler, worunter als Nenner der frühere Nenner gesetzt wird.

Beyspiele.

$$4\tfrac{2}{5} = \tfrac{22}{5}; \quad 8\tfrac{4}{7} = \tfrac{60}{7}; \quad 9\tfrac{3}{10} = \tfrac{93}{10};$$

$$10\tfrac{5}{8} = \tfrac{85}{8}; \quad 27\tfrac{2}{3} = \tfrac{83}{3}; \quad 144\tfrac{5}{6} = \tfrac{869}{6};$$

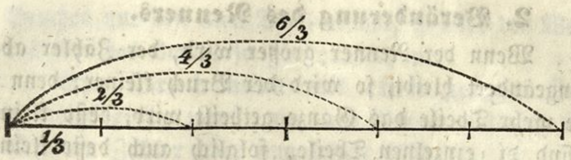
$$2914\tfrac{5}{12} = \tfrac{34973}{12}; \quad 805\tfrac{13}{102} = \tfrac{82123}{102}; \quad 7\tfrac{217}{348} = \tfrac{2653}{348}.$$

§. 65.

Nun soll untersucht werden, was mit dem Werthe eines Bruches geschieht, wenn man den Zähler desselben, oder den Nenner, oder Zähler und Nenner zugleich, durch die Multiplication oder Division verändert.

1. Veränderung des Zählers.

Je größer der Zähler wird, indessen der Nenner ungeändert bleibt, desto größer ist der Bruch; denn je mehr gleich große Theile man nimmt, desto mehr hat man zusammen. Z. B. 4 Drittel sind 2mahl so viel als 2 Drittel, 6 Drittel sind 3mahl so viel als 2 Drittel, u. s. w.; wovon man sich auch durch Bestimmung der Guldentheile überzeugen kann; $\frac{2}{3}$ fl. = 40 Kr.; $\frac{4}{3}$ fl. = 80 Kr.; $\frac{6}{3}$ fl. = 120 Kr.; oder durch die Eintheilung einer Linie:



Daraus ersieht man, daß man, um den Werth eines Bruches 2mahl, 3mahl, 4mahl, . . so groß zu erhalten, nur den Zähler 2, 3, 4mahl so groß zu nehmen habe; oder:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler damit multiplicirt, den Nenner aber ungeändert läßt.

B e y s p i e l e.

$\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2} = 3$; $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{36}{4} = 9$;

$\frac{5}{9} \times 8 = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$; $\frac{7}{10} \times 9 = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}$;

$\frac{25}{32} \times 36 = \frac{900}{32} = 28\frac{4}{32}$; $\frac{115}{344} \times 222 = \frac{25530}{344} = 74\frac{74}{344}$.

Aus dem Vorigen folgt auch, daß 2 Drittel die Hälfte von 4 Dritteln, der dritte Theil von 6 Dritteln ist, u. s. w. Um daher von einem Bruche den 2ten, 3ten, 4ten Theil zu erhalten, darf man nur von dem Zähler den 2ten, 3ten, 4ten Theil nehmen; oder:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Zähler dadurch dividirt, den Nenner aber ungeändert läßt.

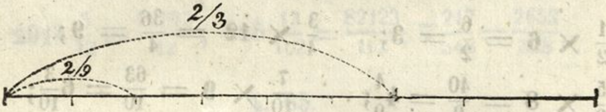
B e y s p i e l e.

$\frac{6}{25} : 3 = \frac{2}{25}$; $\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$; $\frac{30}{7} : 5 = \frac{6}{7}$;

$\frac{25}{64} : 5 = \frac{5}{64}$; $\frac{144}{625} : 12 = \frac{12}{625}$; $\frac{729}{500} : 27 = \frac{27}{500}$.

2. Veränderung des Nenners.

Wenn der Nenner größer wird, der Zähler aber ungeändert bleibt, so wird der Bruch kleiner; denn in je mehr Theile das Ganze getheilt wird, desto kleiner sind di einzelnen Theile, folglich auch desto kleiner eben so viele solche Theile zusammen. Nimmt man z. B. den Bruch $\frac{2}{3}$, und multiplicirt den Nenner mit 3, so erhält man $\frac{2}{9}$; in beyden Fällen hat man 2 Bruchtheile, im ersten Falle sind es 2 Drittel, im zweyten 2 Neuntel; nun ist 1 Neuntel der 3te Theil von 1 Drittel, also sind auch 2 Neuntel nur der 3te Theil von 2 Dritteln; wovon man sich auch an einer eingetheilten Linie überzeugen kann.



Wenn man also den Nenner eines Bruches 2, 3, 4mahl so groß nimmt, so erhält man dadurch nur den 2ten, 3ten, 4ten Theil des frühern Bruches; oder: **Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt,** wenn man den Nenner damit multiplicirt, den Zähler aber ungeändert läßt.

Beyspiele.

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6};\ \frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{24};\ \frac{9}{10} : 8 = \frac{9}{80};$$

$$\frac{12}{25} : 5 = \frac{12}{125};\ \frac{2}{27} : 10 = \frac{2}{270};\ \frac{111}{16} : 12 = \frac{111}{192}.$$

Aus dem Vorigen folgt auch umgekehrt, daß $\frac{2}{3}$ das 3fache von $\frac{2}{9}$ ist. Wenn man also von dem Nenner eines

Bruches nur den 3ten Theil nimmt, so wird der Werth des Bruches 3mahl so groß; überhaupt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner dadurch dividirt, den Zähler aber ungeändert läßt.

Beyspiele.

$\frac{3}{25} \times 5 = \frac{3}{5}$; $\frac{7}{30} \times 6 = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$; $\frac{5}{81} \times 9 = \frac{5}{9}$;
$\frac{1}{20} \times 4 = \frac{1}{5}$; $\frac{103}{125} \times 25 = \frac{103}{5} = 20\frac{3}{5}$; $\frac{33}{128} \times 2 = \frac{33}{64}$

Es gibt also eine zweyfache Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, entweder indem man den Zähler damit multiplicirt, oder wenn man den Nenner dadurch dividirt. Letzteres kann nur dann geschehen, wenn der Nenner durch die ganze Zahl theilbar ist.

Ebenso gibt es ein doppeltes Verfahren, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren; entweder wird der Zähler dadurch dividirt, oder der Nenner damit multiplicirt. Ersteres kann nur dann geschehen, wenn der Zähler durch die ganze Zahl theilbar ist.

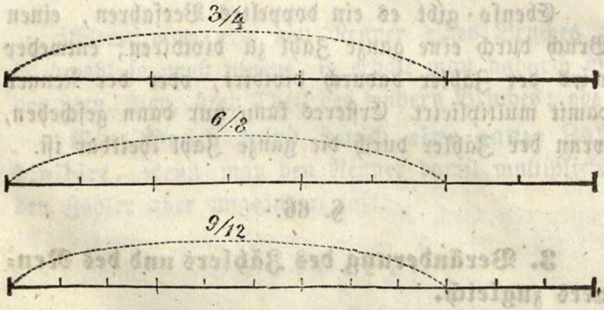
§. 66.

3. Veränderung des Zählers und des Nenners zugleich.

a. **Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplicirt, so wird der Werth des Bruches nicht geändert.** — Denn, wird der Nenner z. B. mit 3 multiplicirt, so ist das Ganze in 3mahl so viel Theile getheilt, also sind die einzelnen Theile 3mahl so klein als früher;

wird nun zugleich auch der Zähler mit derselben Zahl 3 multiplicirt, so erhält man dadurch 3mahl so viel Theile, aber jeder Theil ist nur ein Drittel eines frühern Theils; man erhält also dadurch eben so viel, als man früher hatte; d. h. der Werth eines Bruches wird nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt. — Die Richtigkeit dieses Satzes könnte man auch so nachweisen: wenn man den Zähler mit 3 multiplicirt, so wird auch der Bruch mit 3 multiplicirt, man erhält also 3mahl so viel; wird der Nenner mit 3 multiplicirt, so wird der Bruch durch 3 dividirt, man erhält also nur das Drittel des frühern; wird aber eine Zahl 3mahl, und davon wieder das Drittel genommen, so bleibt die ursprüngliche Zahl ungeändert.

Auch durch Linien kann hier die Versinnlichung geschehen.



Man theile eine gerade Linie in 4 gleiche Theile, und nehme 3 solche Theile, so hat man den Bruch $\frac{3}{4}$. — Nun ziehe man eine eben so lange Linie, theile sie in 2mahl so viel, also in 8 Theile, und nehme deren 2mahl so viel als früher, also 6, so hat man den Bruch $\frac{6}{8}$. Man sieht, daß er denselben Werth hat, als der

Bruch $\frac{3}{4}$. — Zieht man ferner eine dritte eben so lange Linie, theilt sie in 3mahl so viel, also in 12 gleiche Theile, und nimmt von solchen Theilen 3mahl so viel als das erste Mahl, also 9, so hat man den Bruch $\frac{9}{12}$, welcher, wie man sieht, mit $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ einerley Werth hat.

Zur noch größern Überzeugung kann man folgende Guldenbrüche

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{5}{10}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{10}{20}, \quad \frac{15}{30}, \quad \frac{30}{60}$$

betrachten, die alle aus dem ersten entstehen, wenn man darin Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt. Drückt man jeden dieser Brüche in Kreuzern aus, so findet man, daß alle gleichviel bedeuten.

b. **Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches durch die nähmliche Zahl dividirt, so bleibt der Werth eines Bruches unverändert.** — Denn: wird der Nenner z. B. durch 3 dividirt, so wird dadurch das Ganze in 3mahl weniger Theile getheilt, also werden die einzelnen Theile 3mahl so groß seyn als Anfangs; wird nun zugleich der Zähler durch die nähmliche Zahl 3 dividirt, so erhält man dadurch 3mahl weniger Theile, aber jeder einzelne Theil ist 3mahl so groß als früher; also hat man zusammen eben so viel, als Anfangs da war d. h. der Werth des Bruches ist ungeändert geblieben. — Oder: wird der Zähler durch 3 dividirt, so wird auch der Bruch durch 3 dividirt, man erhält also nur ein Drittel des frühern Bruches; wird der Nenner durch 3 dividirt, so wird dadurch der Bruch mit 3 multiplicirt, also 3mahl genommen; wenn man aber von einer Zahl zuerst ein Drittel nimmt, und dieses wieder 3mahl setzt, so erhält man die ursprüngliche Zahl.

Dasselbe ersieht man auch aus den oben eingetheilten Linien; es ist nähmlich

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \text{ und } \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Auch findet man, daß

$$\frac{24}{60} \text{ fl.} = \frac{12}{30} \text{ fl.} = \frac{6}{15} \text{ fl.} = \frac{2}{5} \text{ fl.} = 24 \text{ Kr. ist.}$$

Man kann also die Form eines Bruches ohne Veränderung des Werthes auf zweyfache Art ändern, entweder indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt, oder indem man beyde durch dieselbe Zahl dividirt.

§. 67.

Um zwey oder mehrere Brüche hinsichtlich ihrer Größe mit einander vergleichen zu können, müssen sie einerley Nenner haben. Von den zwey Brüchen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$ ist der zweyte größer als der erste, weil 3 Fünftel gewiß mehr betragen als 2 Fünftel.

Von Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist also derjenige größer, welcher den größern Zähler hat.

Nimmt man aber zwey Brüche, welche ungleiche Nenner haben, z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, so kann man ihre gegenseitige Größe nicht leicht unmittelbar abschätzen; man muß sie erst in solche verwandeln, welche einen gemeinschaftlichen Nenner haben. Es ist, wenn man durch die Multiplication die Form verändert,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

Statt der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ hat man also zwey andere Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, welche einerley Nenner haben, und den vorigen am Werthe gleich sind. Nun ist offenbar $\frac{9}{12}$ größer als $\frac{3}{12}$, also ist auch $\frac{3}{4}$ größer als $\frac{2}{3}$. — Man kann sehr leicht finden, wie die neuen Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ aus den gegebenen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ entstanden sind. Betrachtet man den neuen Nenner 12, so sieht man, daß er das Product aus den beyden andern 3 und 4 ist. Der Nenner des Bruches $\frac{2}{3}$ ist in 12 4mahl enthalten, es ist also der Nenner mit 4 multiplicirt worden, daher muß man auch den Zähler mit 4 multipliciren, 2mahl 4 ist 8, welches der neue Zähler ist; der Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ ist in 12 3mahl enthalten, dieser Nenner ist also mit 3 multiplicirt worden, daher muß auch der Zähler mit 3 multiplicirt werden, 3mahl 3 ist 9, also der neue Bruch $\frac{9}{12}$. — Daraus sieht man auch, daß der neue gemeinschaftliche Nenner durch jeden gegebenen Nenner theilbar seyn müsse.

Auf gleiche Weise verfährt man auch, wenn mehr als zwey Brüche auf gleichen Nenner zu bringen sind. Es seyen die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen. Man wird zuerst eine Zahl suchen, welche durch alle vier Nenner theilbar ist; diese findet man sicher, wenn man alle Nenner mit einander multiplicirt; es wird also $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$ der gemeinschaftliche Nenner aller Brüche seyn. Um den neuen Zähler eines jeden Bruches zu finden, muß man untersuchen, mit welcher Zahl jeder Nenner multiplicirt werden muß, um den neuen Nenner zu bekommen, d. i. wie oft jeder Nenner in dem neuen enthalten ist; mit der nähmlichen Zahl muß dann auch jeder Zähler multiplicirt werden. Man hat also

$420 : 3 = 140$; $2 \times 140 = 280$; also $\frac{2}{3} = \frac{280}{420}$;
$420 : 4 = 105$; $3 \times 105 = 315$; " $\frac{3}{4} = \frac{315}{420}$;
$420 : 5 = 84$; $4 \times 84 = 336$; " $\frac{4}{5} = \frac{336}{420}$;
$420 : 7 = 60$; $6 \times 60 = 360$; " $\frac{6}{7} = \frac{360}{420}$;

Wenn man die Nenner aller Brüche mit einander multiplicirt, so ist das Product gewiß durch jeden dieser Nenner theilbar. Allein oft gibt es noch kleinere Zahlen, welche ebenfalls durch alle jene Nenner theilbar sind, und zwar da, wo einige Nenner in den größern ohne Rest enthalten, oder wo mehrere Nenner durch die nähmliche Zahl theilbar sind. Wären z. B. die Nenner 2, 3, 4, 12 angegeben, so ist sicher ihr Product $2 \times 3 \times 4 \times 12 = 288$ durch sie alle theilbar, allein es haben auch die kleinern Zahlen 276, 264, 252, 240, . . . 60, 48, 36, 24, 12 die Eigenschaft, daß sie sich durch alle obigen Nenner ohne Rest theilen lassen. Die kleinste Zahl, welche durch jene Nenner theilbar ist, ist 12; diese Zahl ist also der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Da es bequemer ist, mit kleinern Zahlen zu rechnen, so pflegt man die Brüche gewöhnlich auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Den **kleinsten gemeinschaftlichen Nenner** mehrerer Brüche findet man durch folgendes Verfahren:

1. Man schreibt alle Nenner in eine Reihe neben einander, und streicht die kleinern Nenner, welche in den größern ohne Rest enthalten sind, durch.

2. Nun sieht man, ob nicht von den übriggebliebenen Nennern zwey oder mehrere durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind. Ist dieses der Fall, so zieht man darunter eine Linie, setzt links die Zahl, durch welche jene Nenner theilbar sind, und dividirt durch dieselbe die hierdurch theilbaren Nenner; jene Nenner, welche da-

durch nicht theilbar sind, werden unverändert herunterge- setzt, von den übrigen kommen nur die Quotienten herab; der Quotient 1 wird nicht angeschrieben.

3. Die erhaltenen neuen Zahlen kürzt man, wenn es möglich ist, auf dieselbe Weise ab, und wiederhohlt dieses Verfahren so lange, bis kein Paar der unter der Linie erhaltenen Zahlen durch eine gemeinschaftliche Zahl mehr theilbar ist.

4. Endlich multiplicirt man die Zahlen unter der letzten Querlinie und die links stehenden Zahlen, durch welche man dividirt hat, mit einander. Das Product ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Wäre z. B. zu den Nennern 2, 3, 4, 5, 8, 12, 15, 18 der kleinste Hauptnenner zu suchen, so würde die Rechnung so stehen:

	2,	3,	4,	5,	8,	12,	15,	18
2					4,	6,	15,	9
2					2,	3,	15,	9
3					2,		5,	3.

Der kleinste Hauptnenner ist also:

$2 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 360.$

Nach allem Vorhergehenden muß man, **um meh- rere Brüche auf den kleinsten gemeinschaft- lichen Nenner** zu bringen, folgende Regeln beobachten:

1. Man suche den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

2. Der gefundene gemeinschaftliche Nenner wird durch jeden gegebenen Nenner dividirt, und mit dem Quotienten der dazu gehörige Zähler multiplicirt; dieses Product ist der neue Zähler.

Man zieht gewöhnlich neben den gegebenen Brüchen eine aufrechte Linie, schreibt obenan den Hauptnenner; rechts setzt man dann die erhaltenen Quotienten, und noch weiter, nachdem man eine zweyte aufrechte Linie gezogen hat, die Producte, welche die neuen Zähler bilden.

Beyspiele.

(1). Man bringe die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Zuerst sucht man diesen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Da 5 und 7 durch keine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind, so ist ihr Product selbst, nähmlich 35, der kleinste Hauptnenner; und man hat

35		
$\frac{3}{5}$	7	21
$\frac{4}{7}$	5	20

also $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$

Eben so bringe man $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{12}$ und $\frac{16}{25}$; ferner $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{16}$; endlich $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{9}$ und $\frac{9}{11}$ auf den kleinsten Hauptnenner.

(2). Man bringe die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Man hat

2, 3, 4, 6, 12.

Hier sind also alle kleinern Nenner in dem größten 12 ohne Rest enthalten, daher ist 12 der kleinste Hauptnenner. Die weitere Rechnung stehet:

12		
$\frac{1}{2}$	6	6
$\frac{1}{3}$	4	4
$\frac{1}{4}$	3	3
$\frac{5}{6}$	2	10
$\frac{7}{12}$	1	7

folglich $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$,

$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, $\frac{7}{12} = \frac{7}{12}$.

Auf dieselbe Art sollen die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$; ferner $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{53}{60}$ auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden.

(3). Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ sollen auf gleiche Benennung gebracht werden.

Die ganze Rechnung stehet

$$\begin{array}{r|l} & 3,\ 5,\ 6,\ 10 \\ 2 & \\ \hline & 3,\ 5 \end{array}$$

also $3 \times 5 \times 2 = 30$ der Hauptnenner;

$$\begin{array}{c|r|l} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{30}} \\ \frac{2}{3} & 10 & 20 \\ \frac{3}{5} & 6 & 18 \\ \frac{5}{6} & 5 & 25 \\ \frac{7}{10} & 3 & 21 \end{array}$$

also $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$, $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$, $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$, $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

Eben so soll man die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{15}$ und $\frac{13}{18}$; endlich $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{8}{21}$ gleichnahmig machen.

§. 68.

So wie die Formveränderung der Brüche durch die Multiplication dazu dient, um mehrere Brüche auf gleichen Nenner zu bringen; so wird auch die Formveränderung durch die Division angewendet, um die Brüche abzukürzen. Es heißt aber **einen Bruch abkürzen**, denselben ohne Änderung des Werthes mit kleineren Zahlen darstellen. Dieses kann in allen Fällen geschehen, wo Zähler und Nenner durch die nähmliche Zahl theilbar sind; man braucht sie nur beyde durch jene Zahl zu dividiren.

So kann man z. B. in dem Bruche $\frac{6}{9}$ Zähler und Nenner durch 3 dividiren, weil beyde dadurch theilbar sind; nach verrichteter Division erhält man $\frac{2}{3}$, welcher Bruch in kleinern Zahlen dargestellt ist als $\frac{6}{9}$, aber damit gleichen Werth hat, weil der Werth eines Bruches nicht geändert wird, wenn man Zähler und Nenner durch einerley Zahl dividirt.

Beyspiele.

$$\frac{10}{18} \overset{2}{=} \frac{5}{9}, \quad \frac{15}{24} \overset{3}{=} \frac{5}{8}, \quad 6\frac{20}{28} \overset{4}{=} 6\frac{5}{7}$$

$$\frac{45}{95} \overset{5}{=} \frac{9}{19}, \quad \frac{500}{1250} \overset{10}{=} \frac{50}{125} \overset{5}{=} \frac{10}{25} \overset{5}{=} \frac{2}{5}$$

I. Das Addiren der Brüche.

§. 69.

Beym **Addiren der Brüche** sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn die Brüche **gleiche Nenner** haben.

Es seyen die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ zu addiren. 3 Fünftel und 4 Fünftel geben gewiß 7 Fünftel, oder 1 Ganzes und 2 Fünftel; also $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

Brüche von gleichen Nennern werden also addirt, wenn man ihre Zähler addirt, und als Nenner den gemeinschaftlichen Nenner beybehält.

Beyspiele.

(1). $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(2). $\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1$

(3). $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{13}{15} = \frac{34}{15} = 2\frac{4}{15}$.

(4). $\frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{11}{24} + \frac{19}{24} + \frac{23}{24} = \frac{59}{24} = 2\frac{11}{24}$.

b. Wenn die Brüche **ungleiche Nenner** haben.

Es seyen z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ zu addiren. So wie 2 Kr. und 3 fl. weder 5 Kr. noch 5 fl. geben, eben so machen 2 Drittel und 3 Viertel zusammen weder 5 Drittel noch 5 Viertel aus; man muß die zwey Brüche zuerst auf eine gemeinschaftliche Benennung bringen. Der kleinste Hauptnenner ist 12, und die neuen Brüche heißen $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$; da sie nun gleiche Nenner haben, so kann man sie addiren, wenn man die Zähler addirt; man erhält $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$. Die ganze Rechnung stehet

$$\begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{12}} \\ \frac{2}{3} & 4 & 8 \\ \frac{3}{4} & 3 & 9 \\ \hline & & \frac{17}{12} = 1\frac{}{12} \end{array}$$

Um also **Brüche zu addiren, welche ungleiche Nenner haben,** bringe man sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner, addire dann die Zähler und setze den gemeinschaftlichen Nenner darunter.

B e y s p i e l e.

$$(1).\ \begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{4}} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{4} & 1 & 3 \\ \hline & & \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \end{array} \qquad (2).\ \begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{30}} \\ \frac{2}{3} & 10 & 20 \\ \frac{4}{5} & 6 & 24 \\ \frac{9}{10} & 3 & 27 \\ \hline & & \frac{71}{30} = 2\frac{11}{30} \end{array} \qquad (3).\ \begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{16}} \\ \frac{1}{2} & 8 & 8 \\ \frac{1}{4} & 4 & 4 \\ \frac{1}{8} & 2 & 2 \\ \frac{1}{16} & 1 & 1 \\ \hline & & \frac{15}{16} \end{array}$$

(4). $\frac{8}{9} + \frac{11}{12} + \frac{29}{30} = 2\frac{139}{180}$.

(5). $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{7} + \frac{3}{8} = 2\frac{467.}{840}$

(6). $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9} = 3\frac{53.}{504}$

c. Wenn unter den Addenden **ganze oder gemischte Zahlen** vorkommen.

In diesem Falle werden die Ganzen für sich, und die Brüche für sich addirt, und wenn in den Brüchen auch Ganze vorkommen, diese zu den Ganzen hinzugezählt.

Beym Kopfrechnen werden früher die Ganzen und dann die Brüche, beym schriftlichen Rechnen aber früher die Brüche und dann die Ganzen addirt. Der Grund dieser Abweichung liegt darin, weil man sonst beym Zifferrechnen häufig die in den Ganzen schon angeschriebenen Ziffern ändern müßte.

Es seyen z. B. $3\frac{5}{6}$ und $5\frac{7}{12}$ zu addiren.

Im Kopfe: 3 und 5 sind 8 Ganze; 5 Sechstel geben 10 Zwölftel, und 7 Zwölftel sind 17 Zwölftel, diese machen 1 Ganzes und 5 Zwölftel, also zusammen 9 Ganze und 5 Zwölftel. Schriftlich:

$$\begin{array}{r|c|r} & \underbrace{}_{} 12 & \\ 3\frac{5}{6} & 2 & 10 \\ 5\frac{7}{12} & 1 & 7 \\ \hline 9\frac{5}{12} & & \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}. \end{array}$$

Aus der Summe der Brüche erhält man $1\frac{5}{12}$; der Bruch $\frac{5}{13}$ wird angeschrieben, 1 Ganzes aber wird zu den Ganzen weiter gezählt.

B e y s p i e l e.

$$\begin{array}{r} (1).\; 35\frac{1}{5} \\ 127\frac{3}{5} \\ 74 \\ \hline 236\frac{4}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r|c|l} & 9 & \\ (2).\; 7\frac{1}{3} & 3 & 3 \\ 52 & & \\ 19\frac{5}{9} & 1 & 5 \\ \hline 51\frac{8}{9} & & \frac{8}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} & 60 & \\ (3).\; 104\frac{2}{3} & 20 & 40 \\ 375\frac{7}{12} & 5 & 35 \\ \frac{11}{15} & 4 & 44 \\ \hline 480\frac{59}{60} & & \frac{119}{60} = 1\frac{59}{60}. \end{array}$$

(4). $2\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8} + 12\frac{5}{8} + \frac{7}{8} + 24 = 43.$

(5). $3\frac{3}{4} + 7\frac{2}{3} + 24\frac{7}{9} + \frac{11}{14} + 13\frac{7}{18} = 50\frac{31}{84}.$

(6). $52\frac{5}{9} + 8\frac{31}{48} + 72\frac{2}{3} + 100\frac{5}{8} + 11\frac{3}{5} = 246\frac{671}{720}.$

§. 70.

Aufgaben.

(1). Ein Tuchhändler verkauft von einem Stücke Tuch nach und nach $4\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$ Ellen; wie viel Ellen zusammen? — $12\frac{7}{12}$ Ellen?

(2). Jemand gab für verschiedene Bedürfnisse nachstehende Summen aus, $45\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{10}$, $27\frac{1}{6}$, und 26 fl.; wie viel beträgt die ganze Ausgabe? — $103\frac{29}{30}$ fl.

(3). Ein Kaufmann kauft den Zentner Kaffeh zu $32\frac{1}{2}$ fl.; wie theuer wird er einen Zentner verkaufen müssen, um dabey $5\frac{1}{3}$ fl. zu gewinnen? — Um $32\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3}$ d. i. um $37\frac{5}{6}$ fl.

(4). Die Auslagen für einen Bau betragen für die Maurer $984\frac{1}{2}$ fl., für die Zimmerleute $228\frac{3}{4}$ fl., für den Schlosser $108\frac{3}{5}$ fl., für Baumaterialien 548 fl., und für Verschiedenes $314\frac{1}{6}$ fl.; wie hoch kommt der ganze Bau zu stehen? — Auf $2184\frac{1}{60}$ fl.

(5). Jemand erhält 5 Kisten Waaren, die erste wiegt $108\frac{3}{4}$ ℔, die zweyte $136\frac{1}{8}$ ℔, die dritte 115 ℔, die vierte $110\frac{1}{2}$ ℔, die fünfte $98\frac{5}{8}$ ℔; wie viel wiegen alle 5 Kisten? — 569 ℔.

(6). Bey einem Thurme beträgt die Höhe bis zu den Glocken $18^\circ\ 3\frac{1}{2}'$, und von da bis zur Spitze $10^\circ\ 5\frac{3}{4}'$; wie groß ist die ganze Höhe des Thurmes? — $29^\circ\ 3\frac{1}{4}'$.

(7). Jemand hat an Zinsen zu zahlen:

137 fl. $24\frac{1}{2}$ Kr., 205 fl. $15\frac{1}{4}$ Kr., 308 fl. 48 Kr., 75 fl. $27\frac{3}{4}$ Kr., wie viel macht dieses zusammen? — 726 fl. $55\frac{1}{2}$ Kr.

II. Das Subtrahiren der Brüche.

§. 71.

a. Wenn die Brüche **gleiche Nenner** haben.

Nimmt man 2 Fünftel von 4 Fünftel weg, so bleiben natürlich noch 2 Fünftel übrig; oder
$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.

Brüche, welche gleiche Nenner haben, werden also **subtrahirt,** wenn man ihre Zähler von einander subtrahirt, und unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner schreibt.

Beyspiele.

(1). $\frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8-1}{9} = \frac{7}{9}$.

(2). $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

(3). $\frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

b. Wenn die Brüche **verschiedene Nenner** haben.

Da nur gleichnahmige Zahlen von einander abgezogen werden können, so muß man Brüche, welche ungleiche Nenner haben, zuerst auf gleiche Benennung bringen, dann zieht man die neuen Zähler von einander ab, und nimmt als Nenner den gemeinschaftlichen Nenner beyder Brüche an.

B e y s p i e l e.

$$(1).\quad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hphantom{00}}_{}\;8} & \\ \frac{7}{8} & 1 & 7 \\ \frac{3}{4} & 2 & 6 \\ \hline & & \frac{1}{8} \end{array} \qquad (2).\quad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c}{60} & \\ \frac{5}{12} & 5 & 25 \\ \frac{1}{5} & 12 & 12 \\ \hline & & \frac{13}{60} \end{array} \qquad (3).\quad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c}{60} & \\ \frac{17}{30} & 2 & 34 \\ \frac{5}{12} & 5 & 25 \\ \hline & & \frac{9}{60}=\frac{3}{20} \end{array}$$

$(4).\ \frac{7}{9}-\frac{3}{4}=\frac{1}{36}.$

$(5).\ \frac{11}{12}-\frac{4}{9}=\frac{17}{36}.$

$(6).\ \frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{11}{35}.$

c. Wenn **ein Bruch von einer ganzen Zahl** abzuziehen ist.

Es soll $\frac{3}{8}$ von 12 weggenommen werden. — Man borgt bey 12 1 Ganzes, wo sodann noch 11 Ganze übrig bleiben; 1 Ganzes gibt $\frac{8}{8}$, davon $\frac{3}{8}$ weggenommen, bleiben $\frac{5}{8}$, und die 11 Ganzen sind $11\frac{5}{8}$.

Wenn also **ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren ist,** so borgt man bey der ganzen Zahl 1 Ganzes, löset dieses in solche Bruchtheile auf, wie sie der abzuziehende Bruch enthält, und subtrahirt die Brüche; wird der übriggebliebene Bruch zu der um 1 verminderten ganzen Zahl hinzugesetzt, so hat man den gesuchten Rest.

B e y s p i e l e.

$$\begin{array}{c} 8 \\ \frac{1}{3} \\ \hline 7\frac{2}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 100 \\ \frac{7}{10} \\ \hline 99\frac{3}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 555 \\ \frac{16}{25} \\ \hline 554\frac{9}{25} \end{array}$$

d. Wenn **eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl** abzuziehen ist.

Man soll $2\frac{3}{4}$ von 8 subtrahiren.

Im Kopfe: 2 von 8 bleiben 6, und von dem Reste 6 noch $\frac{3}{4}$ weggenommen, bleiben $5\frac{1}{4}$.

Beym schriftlichen Rechnen aber wird früher der Bruch und dann erst die ganze Zahl abgezogen. Man borgt nähmlich bey 8, 1 Ganzes, löset dieses in $\frac{4}{4}$ auf und subtrahirt davon noch $\frac{3}{4}$, wovon $\frac{1}{4}$ übrig bleibt; nun zieht man die Ganzen ab; im Minuend sind nur noch 7 Ganze, weil ein Ganzes weggeborgt wurde, 2 von 7 bleiben 5; der ganze Rest ist $5\frac{1}{4}$.

Wenn also **eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll,** so borgt man bey der ganzen Zahl 1 Ganzes, verwandelt dieses in solche Bruchtheile, wie sie der abzuziehende Bruch enthält, und subtrahirt diese Brüche; dann subtrahirt man die Ganzen des Subtrahends von der um 1 verminderten ganzen Zahl im Minuend, und setzt die beyden Reste zusammen.

Beyspiele.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 5\frac{3}{8} \\ \hline 4\frac{5}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 214 \\ 81\frac{7}{10} \\ \hline 132\frac{3}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 \\ 499\frac{99}{100} \\ \hline \frac{1}{100} \end{array}$$

Ist eine ganze Zahl von einer gemischten abzuziehen, so setzt man den Bruch des Minuends sogleich in den Rest, und subtrahirt nur die Ganzen; z. B.

$$\begin{array}{r} 17\frac{5}{16} \\ 6 \\ \hline 11\frac{5}{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 324\frac{1}{4} \\ 128 \\ \hline 196\frac{1}{4} \end{array}$$

e. Wenn **ein Bruch oder eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl** abzuziehen ist.

In diesem Falle ist es am besten, zuerst die gemischten Zahlen einzurichten, und dann erst zu subtrahiren.

Beyspiele.

(1). $10\frac{1}{4}=\frac{41}{4}$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$\frac{38}{4}=9\frac{2}{4}=9\frac{1}{2}$

(2). $17\frac{3}{8}=\frac{139}{8} \; \Big| \; 3 \; \Big| \; 417$ (24)

$9\frac{7}{12}=\frac{115}{12} \; \Big| \; 2 \; \Big| \; 230$

$\frac{187}{24}=7\frac{19}{24}$

(3). $5\frac{2}{9}-3\frac{4}{5}=1\frac{19}{45}$

(4). $17\frac{8}{9}-2\frac{2}{3}=15\frac{2}{9}$

(5). $29\frac{7}{20}-3\frac{4}{5}=25\frac{11}{20}$

(6). $21\frac{7}{45}-9\frac{13}{18}=11\frac{13}{30}$

§. 72.

Aufgaben.

(1). Von einem 54 Ellen langen Stücke Leinwand werden $25\frac{1}{2}$ Ellen verkauft; wie viel Ellen bleiben noch? — $28\frac{1}{2}$ Ellen.

(2). Jemand kauft eine Waare um $65\frac{1}{4}$ fl., und verkauft sie dann um $81\frac{1}{2}$ fl.; wie viel gewinnt er dabey? — $16\frac{1}{4}$ fl.

(3). Jemand ist 100 fl. schuldig, und zahlt nach und nach 25, $8\frac{2}{5}$, $12\frac{1}{3}$, $42\frac{5}{6}$ fl.; wie viel hat er schon abgezahlt, und wie viel bleibt er noch schuldig? — $88\frac{17}{30}$ fl. hat er bereits abgezahlt, also bleibt er noch $11\frac{13}{30}$ fl. schuldig.

(4). Ein Gut trägt nach einem zehnjährigen Durchschnitte im Ganzen jährlich 2544 fl. $18\frac{1}{2}$ Kr. ein; die jährliche Ausgabe beträgt 904 fl. $35\frac{3}{4}$ Kr.; wie groß ist im Durchschnitte der reine Ertrag eines Jahres? — 1639 fl. $42\frac{3}{4}$ Kr.

(5). Ein Faß enthält $10\frac{1}{5}$ Eimer; wie viel bleibt noch darin, wenn $2\frac{3}{4}$ Eimer herausgenommen werden? — $7\frac{9}{20}$ Eimer.

(6). Eine Glocke, welche 12 Ztr. 14 ℔ $\frac{3}{8}$ Lth. wog, wurde umgegossen, und wiegt jetzt noch 11 Ztr. 39 ℔ $16\frac{7}{9}$ Lth.; um wie viel wiegt sie weniger als vorher? — Um 74 ℔ $15\frac{43}{72}$ Lth.

(7). Von 14 Ballen $8\frac{3}{4}$ Rieß werden 2 Ballen $9\frac{4}{5}$ Rieß verkauft; wie viel Papier bleibt noch übrig? — 11 Ballen $8\frac{19}{20}$ Rieß.

(8). Jemand bekommt 3 Ballen Flachs, der erste enthält 5 Ztr. $28\frac{1}{2}$ ℔, der zweyte 4 Ztr. 95 ℔, der dritte 4 Ztr. $88\frac{3}{4}$ ℔; davon werden nach und nach $29\frac{1}{4}$, 75, $8\frac{1}{2}$, $51\frac{1}{4}$, 87 ℔ verkauft. Wie groß ist noch der Vorrath an Flachs? — Der Vorrath nach dem Einkaufe war 15 Ztr. $12\frac{1}{4}$ ℔, verkauft wurden 2 Ztr. 51 ℔, also waren zuletzt noch 12 Ztr. $61\frac{1}{4}$ ℔ vorräthig.

III. Das Multipliciren der Brüche.

§. 73.

Auch beym **Multipliciren der Brüche** sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn **ein Bruch mit einer ganzen Zahl** zu multipliciren ist.

Dieses kann, wie schon oben abgeleitet wurde, auf zweyfache Art geschehen: entweder, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt und den Nenner ungeändert läßt; oder, indem man den Zähler ungeändert läßt, und den Nenner durch die ganze Zahl dividirt. Die zweyte Art ist nicht immer anwendbar. Z. B.

$$\frac{5}{8} \times 4 = \frac{5 \times 4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2},$$

oder $\frac{5}{8} \times 4 = \frac{5}{8:4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b. Wenn **eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl** zu multipliciren ist.

Man multiplicire z. B. $8\frac{3}{4}$ mit 7.

Im Kopfe: 7mahl 8 Ganze sind 56 Ganze; 7mahl 3 Viertel sind 21 Viertel; diese geben 5 Ganze und 1 Viertel; zusammen 61 Ganze und 1 Viertel.

Beym schriftlichen Rechnen wird früher der Bruch und dann die ganze Zahl multiplicirt. 7mahl $\frac{3}{4}$ ist $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$; der Bruch $\frac{1}{4}$ wird angeschrieben, 5 Ganze aber werden zu dem Producte der Ganzen weiter gezählt; 7mahl 8 ist 56, und 5 ist 61; das Product ist also $61\frac{1}{4}$.

Um daher **eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multipliciren,** so multiplicirt man mit der ganzen Zahl zuerst den Bruch, dann die Ganzen der gemischten Zahl; kommen bey der Multiplication des Bruches auch Ganze heraus, so werden sie zu dem Producte der Ganzen addirt.

Beyspiele.

(1). Man multiplicire $78\frac{3}{5}$ mit 9

$$\begin{array}{r} 78\frac{3}{5} \times 9 \\ \hline 707\frac{2}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \times 9 \\ \hline \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5} \end{array}$$

Hier sagt man: 9mahl 3 ist 27, also hat man $\frac{27}{5}$ diese geben $5\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$ schreibt man an, 5 wird zu den Ganzen gezählt; 9mahl 8 ist 72, und 5 ist 77, 7 angeschrieben, bleiben 7; 9mahl 7 ist 63, und 7 ist 70; das Product ist also $707\frac{2}{5}$.

(2). Es soll $334\frac{7}{16}$ mit 25 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r} 334\frac{7}{16} \\ 25 \\ \hline 1670 \\ 668 \\ \hline 8350 \\ +10\frac{15}{16} \\ \hline 8360\frac{15}{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} & 7 \times 25 & \\ 16 & 175 & 10\frac{15}{16} \\ & 16 & \\ \hline & 15 & \end{array}$$

Man könnte die Multiplication auch verrichten, wenn man die gemischte Zahl zu einem unechten Bruche einrichtet, dann den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, und das Product durch den Nenner dividirt.

$$\begin{array}{r} 334\frac{7}{16} \\ 16 \\ \hline 2004 \\ 334 \\ \hline \frac{5351}{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5351 \\ 25 \\ \hline 26755 \\ 10702 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 16 & 133775 & 8360\frac{15}{16} \\ & 128 & \\ \hline & 57 & \\ & 48 & \\ \hline & 97 & \\ & 96 & \\ \hline & 15 & \end{array}$$

(3). $19\frac{2}{3} \times 8 = 157\frac{1}{3}$

(4). $37\frac{3}{4} \times 24 = 906$

(5). $19\frac{13}{22} \times 11 = 215\frac{1}{2}$

(6). $315\frac{54}{67} \times 35 = 11053\frac{14}{67}$

c. **Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren ist.**

Es sey z. B. 5 mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, d. i. 5 $\frac{3}{4}$mahl zu nehmen. 5 1mahl genommen gibt 5; $\frac{1}{4}$mahl genommen, also nur den vierten Theil von 5, nähmlich $\frac{5}{4}$; und $\frac{3}{4}$mahl genommen 3mahl den 4ten Theil von 5, also 3mahl $\frac{5}{4}$ d. i. $\frac{15}{4}$. Man muß also 5 durch 4 dividiren und den 4ten Theil von 5 3mahl nehmen d. i. mit 3 multipliciren. — Oder: 5 mit 3 multiplicirt gibt 3mahl 5 d. i. 15; nun ist aber 5 nicht mit 3, sondern mit dem 4ten Theile von 3 zu multipliciren, daher wird man auch nur den 4ten Theil von 3mahl 5 oder 15, also $\frac{15}{4}$ erhalten.

Es muß also 5 mit 3 multiplicirt, und das Product durch 4 dividirt werden.

Auf gleiche Art multiplicire man 8 mit $\frac{2}{3}$, 10 mit $\frac{2}{9}$, 25 mit $\frac{5}{8}$, 2 mit $\frac{3}{5}$.

Man wird daraus folgende Regel ableiten:

Um eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, wird dieselbe entweder durch den Nenner dividirt, und der Quotient mit dem Zähler multiplicirt; oder sie werden mit dem Zähler multiplicirt, und dann das Product durch den Nenner dividirt.

Beym Kopfrechnen ist es meistens vortheilhafter, früher zu dividiren, und dann zu multipliciren, weil man dadurch in kleinern Zahlen arbeitet; beym Zifferrechnen ist das Multipliciren vor dem Dividiren vorzunehmen.

Beyspiele.

$$5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7};\ 20 \times \frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$16 \times \frac{2}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5};\ 135 \times \frac{7}{10} = \frac{945}{10} = \frac{189}{2} = 94\frac{1}{2}$$

Anfängern, die sich unter Multipliciren immer ein Vermehren vorstellen, kommt es befremdend vor, daß eine Zahl durch das Multipliciren mit einem echten Bruche verkleinert wird. Der Grund davon ist sehr einfach: wenn man eine Zahl 1mahl nimmt, so bekommt man die Zahl selbst zum Producte; multiplicirt man aber eine Zahl mit einem echten Bruche, der natürlich kleiner als 1 ist, d. h. nimmt man eine Zahl weniger als 1mahl, so wird man gewiß auch weniger als die Zahl selbst zum Producte erhalten.

Wenn eine ganze Zahl mit einer gemischten Zahl zu multipliciren ist, so wird die ganze Zahl sowohl mit dem Bruche als mit den Ganzen der gemischten Zahl multiplicirt; kommen bey der Multiplication mit dem Bruche auch Ganze heraus, so werden diese zu dem Producte mit den Ganzen hinzugezählt. Z. B.

$9 \times 2\frac{3}{5} = 23\frac{2}{5}$; weil $9 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ ist.

Auch hier kann man früher die gemischte Zahl einrichten, und dann die Multiplication ausführen; nähmlich:

$$9 \times 2\frac{3}{5} = 9 \times \frac{13}{5} = \frac{117}{5} = 23\frac{2}{5}$$

B e y s p i e l e.

(1). $12 \times 2\frac{1}{2} = 12 \times \frac{5}{2} = \frac{60}{2} = 30$

(2). $19 \times 18\frac{1}{2} = 351\frac{1}{2}$

(3). $37 \times 24\frac{15}{16} = 922\frac{11}{16}$

d. Wenn **ein Bruch mit einem Bruche** zu multipliciren ist.

Man multiplicire z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{8}$. Wird $\frac{3}{4}$ 5mahl genommen, so erhält man $\frac{15}{4}$; aber $\frac{3}{4}$ ist nicht mit 5, sondern nur mit dem 8ten Theile von 5 zu multipliciren, daher wird auch das Product nur den 8ten Theil von $\frac{15}{4}$ betragen, man muß also $\frac{15}{4}$ noch durch 8 dividiren, welches geschieht, wenn man den Nenner 4 mit 8 multiplicirt; dadurch erhält man $\frac{15}{32}$. Vergleicht man dieses Product mit den beyden gegebenen Brüchen, so sieht man, daß der Zähler des ersten mit dem Zähler des zweyten multiplicirt wurde, und dieses Product als Zähler des Productes erscheint; eben so wurde der Nenner des ersten Bruches mit dem Nenner des zweyten Bruches multiplicirt, ihr Product gibt den Nenner des neuen Bruches (des Productes).

Eben so soll $\frac{7}{8}$ mit $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ mit $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{25}$ mit $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$ mit $\frac{2}{12}$ multiplicirt werden.

Dadurch kommt man auf die Regel:

Ein Bruch wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt; das Product der Zähler wird als Zähler, das Product der Nenner als Nenner angenommen.

Beyspiele.

$\frac{5}{6} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{72}$; $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;

$\frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$; $\frac{12}{25} \times \frac{15}{32} = \frac{180}{800} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40}$.

e. Wenn **eine gemischte Zahl und ein Bruch** oder **zwey gemischte Zahlen** mit einander zu multipliciren sind.

In diesem Falle richte man die gemischten Zahlen ein, und multiplicire dann die beyden Brüche mit einander.

Beyspiele.

(1). $12\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{103}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{309}{40} = 7\frac{29}{40}$.

(2). $\frac{7}{10} \times 5\frac{3}{11} = \frac{7}{10} \times \frac{58}{11} = \frac{406}{110} = \frac{203}{55} = 3\frac{38}{55}$.

(3). $4\frac{2}{3} \times 1\frac{7}{12} = \frac{14}{3} \times \frac{19}{12} = \frac{266}{36} = \frac{133}{18} = 7\frac{7}{18}$.

(4). $\frac{8}{9} \times 6\frac{3}{4} = 6$.

(5). $6\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = 4\frac{11}{21}$.

(6). $6\frac{2}{9} \times 24\frac{3}{8} = 151\frac{2}{3}$.

(7). $186\frac{2}{3} \times 7\frac{1}{2} = 1400$.

(8). $13\frac{13}{15} \times 9\frac{7}{12} = 132\frac{8}{9}$.

§. 74.

Aufgaben.

(1). Wie viel Kreuzer machen $\frac{7}{15}$ Gulden? — 1 fl. beträgt 60 Kr., $\frac{7}{15}$ fl. also $\frac{7}{15}$mahl 60 Kr., d. i. $\frac{420}{15}$ = 28 Kr.

(2). Wie viel Loth betragen $\frac{11}{16}$ ℔? — 1 ℔ hat 32 Loth, $\frac{11}{16}$ Loth machen also $\frac{11}{16} \times 32 = \frac{352}{16} = 22$ Lth.

(3). Wie viele Monathe sind $\frac{3}{4}$ Jahr? — 9 Monathe.

(4). Wie viel Pfund machen $\frac{6}{25}$ Ztr.? — 24 ℔.

(5). Wie viel Gulden machen 36 Kr.? — 1 Kr. ist $\frac{1}{60}$ fl., 36 Kr. also $\frac{1}{60} \times 36 = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ fl.

(6). Wie viel in Jahren ausgedrückt geben 8 Mo-

nathe? — 1 Monath ist $\frac{1}{12}$ Jahr, 8 Monathe also 8mahl $\frac{1}{12}$ d. i. $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Jahr.

(7). Ein Beamter hat täglich $1\frac{1}{4}$ fl., wie viel in einem Monathe? — 30mahl $1\frac{1}{4}$ d. i. $37\frac{1}{2}$ fl.

(8). Was kosten 58 Eimer Wein zu $8\frac{3}{5}$ fl.? — $498\frac{4}{5}$ fl.

(9). Für eine gewisse Strecke der Eisenbahn zahlt man von jedem Zentner $28\frac{3}{4}$ Kr.; wie viel von 64 Ztrn.? — 30 fl. 40 Kr.

(10). Ein Kubikfuß Wasser wiegt $56\frac{1}{2}$ ℔; was wiegen 13 Kubikfuß? — $734\frac{1}{2}$ ℔.

(11). Was kosten 69 ℔ zu $8\frac{1}{2}$ Kr.? — 9 fl. $46\frac{1}{2}$ Kr.

(12). 1 Elle Tuch kostet $4\frac{1}{3}$ fl.; was kosten $2\frac{3}{4}$ Ellen? — $11\frac{11}{12}$ fl., oder 11 fl. 55 Kr.

(13). Eine Hausfrau kauft $48\frac{1}{2}$ Ellen Leinwand zu $25\frac{3}{4}$ Kr., 25 ℔ Roßhaar zu $24\frac{1}{2}$ Kr., $7\frac{1}{4}$ ℔ Eisendraht zu $8\frac{1}{2}$ Kr., und $16\frac{1}{2}$ Ellen Kattun zu 36 Kr.; wie viel hat sie im Ganzen ausgegeben? — 41 fl. 57 Kr.

(14). Jemand ist 85 fl. 40 Kr. schuldig; darauf gibt er 4 Eimer Wein zu $8\frac{2}{3}$ fl., $3\frac{1}{2}$ Metzen Weizen zu $2\frac{1}{5}$ fl. und 4 Schinken, wovon der erste $7\frac{1}{4}$ ℔, der zweyte $8\frac{3}{8}$ ℔, der dritte 8 ℔ 18 Loth, und der vierte 9 ℔ 10 Loth wiegt, das Pfund zu 14 Kr. Wie viel hat er bereits abgezahlt, und wie viel bleibt er noch schuldig? — 50 fl. 11 Kr. hat er bereits gezahlt, 35 fl. 19 Kr. bleibt er noch schuldig.

(15). Im Jahre 1843 wurden in den österreichischen Staaten 878 Ztr. gemeines Papier, 1312 Ztr. feines Papier, und 742 Ztr. Pappdeckel eingeführt. Wenn nun für jeden Ztr. gemeines Papier $3\frac{1}{3}$ fl., für 1 Ztr. feines Papier 10 fl., und von 1 Ztr. Pappdeckel $\frac{5}{6}$ fl. Einfuhrzoll gezahlt werden muß; wie hoch belief sich der ganze Zoll für das eingeführte Papier? — Das gemeine Papier gab $2926\frac{2}{3}$ fl., das feine Papier 13120 fl.; der Pappdeckel $618\frac{1}{3}$ fl. Einfuhrzoll, zusammen 16665 fl.

IV. Das Dividiren der Brüche.

§. 75.

a. Wenn **ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren ist.**

Dieses kann, wie schon oben gezeigt wurde, auf zweyfache Art geschehen: entweder indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividirt; oder, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multiplicirt. Das erstere Verfahren kann nur in einigen Fällen angewendet werden. Z. B.

$$\frac{8}{9} : 2 = \frac{8:2}{9} = \frac{4}{9}.$$

oder $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9 \times 2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$

b. Wenn **eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl** zu dividiren ist.

Dabey werden sowohl die Ganzen als der Bruch der gemischten Zahl dividirt; bleibt bey der Division der Ganzen ein Rest, so wird er in solche Bruchtheile verwandelt, wie sie der angehängte Bruch enthält, dazu dieser Bruch addirt, und die Summe weiter dividirt; — oder man richtet die gemischte Zahl ein, worauf man einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren hat.

Beyspiele.

(1). $8\frac{4}{9} : 2 = 4\frac{2}{9}$; oder $8\frac{4}{9} : 2 = \frac{76}{9} : 2 = \frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}.$

(2). $16\frac{1}{3}:4=4\frac{1}{12}$; oder $16\frac{1}{3}:4=\frac{49}{3}:4=\frac{49}{12}=4\frac{1}{12}$.

(3). $5\frac{3}{7}:2=2\frac{5}{7}$; oder $5\frac{3}{7}:2=\frac{38}{7}:2=\frac{19}{7}=2\frac{5}{7}$.

(4). $128\frac{3}{4} : 50 = 2\frac{115}{200} = 2\frac{23}{40}$,

oder $128\frac{3}{4} : 50 = \frac{515}{4} : 50 = 2\frac{23}{40}$.

Im ersten Beyspiele ist $8 : 2 = 4$, und $\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$; daher der ganze Quotient $4\frac{2}{9}$. — Im dritten Beyspiele hat man $5 : 2 = 2$, und es bleibt noch 1 Ganzes, dieses gibt $\frac{7}{7}$, und $\frac{3}{7}$ sind $\frac{10}{7}$; $\frac{10}{7} : 2 = \frac{5}{7}$; der gesuchte Quotient ist also $2\frac{5}{7}$.

c. **Wenn der Divisor ein Bruch** ist.

Ist der Divisor eine ganze Zahl, so kann die Division als Theilung oder als Enthaltenseyn betrachtet werden; z. B. 8 durch 2 dividiren heißt entweder, 8 in 2 gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil nehmen, oder untersuchen, wie vielmahl 2 in 8 enthalten ist. Anders ist es, wenn man durch einen Bruch zu dividiren hat; da kann die Division nur das Enthaltenseyn bedeuten, z. B. 8 durch $\frac{2}{3}$ dividiren, kann nur heißen: untersuchen, wie oft $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten ist; denn die Forderung, 8 in $\frac{2}{3}$ gleiche Theile zu theilen, hat gar keinen Sinn.

Es sey nun erstlich eine ganze Zahl 8 durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, d. i. zu finden, wie oft $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten ist. 1 ist in 8 8mahl enthalten, $\frac{1}{3}$ ist 3mahl so klein, also in 8 3mahl so oft enthalten als 1, folglich 3mahl $8 = 24$mahl; $\frac{2}{3}$ ist nun doppelt so groß als $\frac{1}{3}$, also kommt es in 8 nur halb so oft vor als $\frac{1}{3}$, also $\frac{24}{2} =$ 12mahl; der gesuchte Quotient ist also 12, oder $\frac{24}{2}$, oder $\frac{8 \times 3}{2}$. Hier ist die ganze Zahl 8 mit dem Nenner

3 des Bruches multiplicirt, und das gefundene Product 24 durch den Zähler 2 dividirt worden.

Man hätte auch so verfahren können. Um zu finden, wie oft $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten ist, macht man beyde Zahlen gleichnahmig, man bringt nähmlich die 8 Ganzen auf Drittel, indem man 8 mit 3 multiplicirt, dadurch erhält man $\frac{24}{3}$; dann untersucht man, wie oft 2 Drittel in 24 Dritteln enthalten sind, indem man 24 durch 2 dividirt; denn 2 Gulden kommen in 24 Gulden, 2 Drittel in 24 Dritteln gewiß so oft vor, als 2 in 24 enthalten ist. Man erhält dadurch 12, wie früher. Hier ist also wieder die ganze Zahl 8 mit dem Nenner 3 des Bruches multiplicirt, und das Product 24 durch den Nenner 2 dividirt worden.

Auf dieselbe doppelte Weise führe man noch folgende Divisionen durch: 25 durch $\frac{5}{8}$, 104 durch $\frac{4}{5}$, 84 durch $\frac{5}{6}$, 222 durch $\frac{9}{10}$.

Man wird dadurch auf folgende Regel geleitet.

Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, und das erhaltene Product durch den Zähler dividirt.

Nach der nähmlichen Schlußfolge, nach welcher hier eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt wurde, läßt sich auch der Quotient bestimmen, wenn ein Bruch oder eine gemischte Zahl durch einen Bruch zu dividiren ist. Man führe auf diese Art folgende Divisionen durch: $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$ durch $\frac{3}{4}$, $5\frac{3}{5}$ durch $\frac{5}{8}$, $9\frac{1}{2}$ durch $\frac{2}{7}$.

Dadurch wird man einsehen:

Um irgend eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, braucht man sie nur mit dem Nenner zu multipliciren, und das Product durch den Zähler zu dividiren.

Diese allgemeine Regel läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. Es ist nähmlich

$$5 : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{3}; \ \frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4}; \ 3\frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{7}{2} : \frac{5}{8} = \frac{7 \times 8}{2 \times 5}.$$

Nach den Regeln für die Multiplication der Brüche findet man aber auch

$$5 \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{3}; \ \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4}; \ 3\frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{7 \times 8}{2 \times 5}.$$

Vergleicht man diese Producte mit den früheren Quotienten, so sieht man, daß gleichviel herauskommt, ob man 5 durch $\frac{3}{4}$ dividirt, oder mit $\frac{4}{3}$ multiplicirt; ob man $\frac{3}{5}$ durch $\frac{4}{7}$ dividirt, oder mit dem umgekehrten Bruche $\frac{7}{4}$ multiplicirt; ob man $3\frac{1}{2}$ durch $\frac{5}{8}$ dividirt, oder mit $\frac{8}{5}$ multiplicirt. Die Division durch einen Bruch kann also in eine Multiplication mit dem umgekehrten Divisor verwandelt werden, und es besteht die Regel:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

B e y s p i e l e.

(1). $10 : \frac{2}{5} = 10 \times \frac{5}{2} = \frac{50}{2} = 25.$

(2). $38 : \frac{3}{8} = 38 \times \frac{8}{3} = \frac{304}{3} = 101\frac{1}{3}.$

(3). $\frac{4}{7} : \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{14} = 1\frac{6}{14} = 1\frac{3}{7}.$

(4). $\frac{9}{10} : \frac{5}{8} = \frac{9}{10} \times \frac{8}{5} = \frac{72}{50} = 1\frac{22}{50} = 1\frac{11}{25}.$

(5). $2\frac{1}{5} : \frac{3}{10} = \frac{11}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{110}{15} = 7\frac{5}{15} = 7\frac{1}{3}$.

(6). $15\frac{3}{10} : \frac{7}{12} = \frac{153}{10} \times \frac{12}{7} = \frac{1836}{70} = 26\frac{16}{70} = 26\frac{8}{35}$.

(7). $35 : \frac{5}{11} = 77$.

(8). $\frac{5}{6} : \frac{7}{18} = 2\frac{1}{7}$.

(9). $19\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = 26\frac{1}{2}$.

(10). $204\frac{1}{2} : \frac{9}{16} = 363\frac{5}{9}$.

Da man sich unter Dividiren gewöhnlich ein Verkleinern denkt, so ist es auch hier auffallend, daß eine Zahl durch einen echten Bruch dividirt, immer vergrößert wird. Dieses ist übrigens ganz klar: eine Zahl durch einen Bruch dividiren, heißt untersuchen, wie oft der Bruch in jener Zahl enthalten ist; 1 ist in jeder Zahl so oft enthalten, als die Zahl selbst es anzeigt; ein echter Bruch ist aber kleiner als 1, also wird er auch in der Zahl öfters enthalten seyn als 1, also öfters, als die Zahl es anzeigt; durch das Dividiren mit einem echten Bruche wird also eine Zahl vergrößert.

d. Wenn der **Divisor eine gemischte Zahl** ist.

In diesem Falle braucht man nur die gemischte Zahl einzurichten, und dann durch den unechten Bruch zu dividiren.

Beyspiele.

(1). $8 : 2\frac{1}{3} = : \frac{7}{3} = 8 \times \frac{3}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$.

(2). $\frac{3}{5} : 10\frac{1}{2} = \frac{3}{5} : \frac{21}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{21} = \frac{6}{105} = \frac{2}{35}$.

(3). $214\frac{2}{3} : 6\frac{3}{5} = \frac{644}{3} : \frac{33}{5} = \frac{644}{3} \times \frac{5}{33} = \frac{3220}{99} = 32\frac{52}{99}$

(4). $81 : 4\frac{1}{2} = 18$

(5). $\frac{12}{19} : 1\frac{5}{19} = \frac{1}{2}$

(6). $11\frac{1}{2} : 5\frac{1}{3} = 2\frac{5}{32}$

§. 76.

Aufgaben.

(1). 1 Elle Tuch kostet 3 fl.; wie viel Ellen erhält man um $25\frac{1}{2}$ fl.? — $8\frac{1}{2}$ Ellen.

(2). Es sollen $40\frac{5}{12}$ fl. unter 5 Personen zu gleichen Theilen vertheilt werden; wie viel kommt auf 1 Person? — $8\frac{1}{12}$ fl.

(3). Ein Taglöhner bekommt für 26 Tage $15\frac{1}{6}$ fl. Arbeitslohn; wie viel kommt auf 1 Tag? — $\frac{7}{12}$ fl. oder 35 Kr.

(4). Jemand braucht für alle seine Bedürfnisse täglich $\frac{5}{6}$ fl.; wie viel Tage wird er mit 15 fl. auskommen? — Durch 18 Tage.

(5). Wie theuer ist ein Pfund, wenn der Zentner $37\frac{1}{2}$ fl. kostet? — $\frac{3}{8}$ fl. oder $22\frac{1}{2}$ Kr.

(6). Wie viel ℔ bekommt man um $15\frac{1}{12}$ fl., wenn 1 ℔ $\frac{5}{6}$ fl. kostet? — $18\frac{1}{10}$ ℔

(7). Jemand kauft 12 Eimer Wein um $82\frac{1}{2}$ fl.; wie hoch kommt 1 Eimer? — Auf $6\frac{7}{8}$ fl.

(8). Wie viel Hemden können aus 60 Ellen Leinwand verfertiget werden, wenn man zu 1 Hemde $3\frac{3}{4}$ Ellen braucht? — 16 Hemden.

(9). Wie viel in Gulden geben $22\frac{1}{2}$ Kr.? — Den 60sten Theil von $22\frac{1}{2}$, also $\frac{3}{8}$ fl.

(10). Welchen Guldenbruch machen $37\frac{3}{4}$ Kr.? — $\frac{151}{240}$ fl.

(11). Welchen Bruch in Zentnern geben 2 ℔ $4\frac{1}{2}$ Lth.? — $4\frac{1}{2}$ Lth. sind $\frac{9}{64}$ ℔, also hat man $2\frac{9}{64}$ ℔; diese geben $\frac{137}{6400}$ Ztr.

(12). Eine Hausfrau kauft ein Stück Leinwand von $48\frac{3}{4}$ Ellen um 22 fl. 45 Kr.; wie theuer bezahlte sie die Elle? — Mit $\frac{7}{15}$ fl. oder 28 Kr.

(13). Jemand war durch 48 Tage auf der Reise, und gab im Ganzen $136\frac{1}{2}$ fl. aus; wie viel kommt im Durchschnitte auf 1 Tag? — $2\frac{27}{32}$ fl.

(14). Ein Taglöhner ist 45 fl. schuldig, er zahlt darauf seinem Gläubiger 9 fl. 48 Kr., den Rest will er durch Arbeitslohn abtragen; wie viel Tage wird er arbeiten müssen, um seine ganze Schuld getilgt zu haben, wenn der tägliche Lohn $\frac{4}{5}$ fl. beträgt? — Nach Abschlag der 9 fl. 48 Kr. bleibt er noch 35 fl. 12 Kr., oder $35\frac{1}{5}$ fl. schuldig, und um diese zu verdienen, muß er 44 Tage arbeiten.

(15). Jemand ist 345 fl. schuldig, wenn er nun die Schuld, so weit es möglich ist, in Ducaten zu $4\frac{1}{2}$ fl. zahlen will; wie viel Ducaten wird er dazu brauchen, und wie viel muß er noch in Silber bezahlen? — 76 Ducaten und 3 fl. Silbergeld.

(16). Für 4 Gemeinden, deren Felder durch Hagel gänzlich verwüstet wurden, wird eine Sammlung veranstaltet: man bekommt $267\frac{1}{2}$ Metzen Weizen, $150\frac{3}{4}$ Metzen Korn, $152\frac{2}{3}$ Metzen Gerste und $285\frac{1}{4}$ Metzen Mais. Dieses Getreide wurde, da die Gemeinden an Einwohnerzahl ziemlich gleich waren, unter dieselben zu gleichen Theilen vertheilt; es entsteht nun die Frage, wie viel Getreide wurde im Ganzen eingesammelt; wie viel Getreide von jeder einzelnen Art erhielt jede Gemeinde, und wie viel Getreide zusammen? — Die ganze Sammlung enthielt $856\frac{1}{6}$ Metzen, jede Gemeinde bekam $66\frac{7}{8}$ Metzen Weizen, $37\frac{11}{16}$ Metzen Korn, $38\frac{1}{6}$ Metzen Gerste und $71\frac{5}{16}$ Metzen Mais, zusammen $214\frac{1}{24}$ Metzen Getreide.

Siebentes Hauptstück.

Verhältnisse und Proportionen.

I. Verhältnisse.

§. 77.

Wenn man z. B. bey einem Zimmer, welches 6 Klafter lang und 3 Klafter breit ist, die Länge und die Breite mit einander vergleicht, so kann man entweder suchen, um wie viel die Länge des Zimmers größer ist als die Breite, oder wie vielmahl die Länge des Zimmers so groß ist als die Breite desselben. Im ersten Falle zieht man 3° von 6° ab, wodurch man 3° bekommt; die Länge ist also um 3° größer als die Breite. Im zweyten Falle muß man untersuchen, wie oft 3° in 6° enthalten ist, man muß also 6 durch 3 dividiren, wodurch man 2 erhält; die Länge ist also 2mahl so groß als die Breite.

Vergleicht man eben so 24 Kreuzer und 8 Kreuzer mit einander, so findet man, daß 24 Kr. um 16 Kr. mehr sind als 8 Kr., und daß 24 Kr. 3mahl so viel sind als 8 Kr.

So können was immer für zwey benannte Zahlen mit einander verglichen werden, nur müssen sie gleichartig seyn. Z. B. Klafter und Gulden kann man nicht mit einander vergleichen, wohl aber Gulden und Gulden, auch Gulden und Kreuzer, nur müssen die letztern früher gleichnahmig gemacht werden.

Auch unbenannte Zahlen kann man auf zweyfache Art mit einander vergleichen; z. B. 18 und 3, man kann entweder fragen, um wie viele Einheiten 18 größer ist als 3, oder wie vielmahl 18 so groß ist als 3. Durch das Subtrahiren findet man, daß 18 um 15 größer ist als 3; durch die Division, daß 18 6mahl so groß ist als 3.

Jede Vergleichung von zwey gleichartigen Zahlen wird ein **Verhältniß** genannt. Die Vergleichung zweyer Zahlen, um zu sehen, **um wie viel** Einheiten die eine größer ist als die andere, heißt ein **arithmetisches Verhältniß**; die Vergleichung zweyer Zahlen aber, um zu sehen, **wie vielmahl** die eine größer ist als die andere, wird ein **geometrisches Verhältniß** genannt.

Für das Rechnen sind nur die geometrischen Verhältnisse besonders wichtig, darum sind auch in der Folge, so oft von Verhältnissen die Rede seyn wird, immer geometrische Verhältnisse darunter zu verstehen.

§. 78.

Zu einem Verhältnisse werden **zwey** Zahlen erfordert; sind sie benannt, so müssen sie gleichartig seyn.

Sie heißen **Glieder** des Verhältnisses, und zwar die erste das **Vorderglied**, die zweyte das **Hinterglied**. Wenn man z. B. die zwey Zahlen 12 fl. und 3 fl. mit einander vergleicht, um zu sehen, wie oftmahl 12 fl. so viel sind als 3 fl., so ist 12 fl. das Vorderglied, 3 fl. das Hinterglied des Verhältnisses von 12 fl. zu 3 fl.

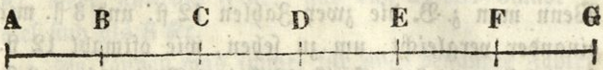
Bey einem geometrischen Verhältnisse wird untersucht, wie vielmahl das Vorderglied so groß ist als das Hinterglied. Um dieses zu erfahren, muß man sehen, wie oft das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten ist, d. i. man muß das Vorderglied durch das Hinterglied dividiren. Daher wird ein Verhältniß dadurch angezeigt, daß man zwischen die Glieder desselben das Divisionszeichen setzt; z. B. 12 : 3, welches man so ausspricht: 12 verhält sich zu 3, oder kürzer: 12 zu 3.

Ein Verhältniß kann betrachtet werden, als ein **angezeigter Quotient**; das Vorderglied ist der Dividend, das Hinterglied der Divisor.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten ist, heißt der **Nahme** oder **Exponent** des Verhältnisses. Um daher den Exponenten zu erhalten, braucht man nur das Vorderglied durch das Hinterglied zu dividiren. In dem Verhältnisse 12: 3 ist 4 der Exponent, weil 3 in 12 4mahl enthalten ist; der Exponent des Verhältnisses 2 : 3 ist $\frac{2}{3}$, weil 2 durch 3 dividirt $\frac{2}{3}$ zum Quotienten gibt.

Man suche die Exponenten folgender Verhältnisse:
6 : 2, 8 : 4, 20 : 4, 36 : 8, 100 : 16, 84 : 8;
4 : 4, 6 : 6, 2 : 5, 4 : 16, 5 : 12, 18 : 42.

Um sich von dem Wesen eines geometrischen Verhältnisses eine noch deutlichere Vorstellung zu machen theile man eine gerade Linie AG in den Puncten B, C, D, E, F in 6 gleiche Theile.



Vergleicht man nun die ganze Linie AG mit der kleineren Linie AB, so sieht man, daß die erstere 6mahl so groß ist als die zweyte; die Linien AG und AB haben also das Verhältniß 6 : 1 gegen einander, und der Exponent ist 6. Umgekehrt stehen die Linien AB und AG in dem Verhältnisse 1 : 6, dessen Exponent $\frac{1}{6}$ ist. — Nimmt man die Linien AE und AC, so sieht man, daß AE 4 gleiche Theile und AC 2 eben solche Theile enthält; das Verhältniß der zwey Linien AE und AC ist also 4 : 2, und der Exponent 2; umgekehrt ist das Verhältniß der Linien AC und AE 2 : 4, dessen Exponent $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ist. — So haben, wie man sich auf dieselbe Art überzeugt,

die Lin. AF u. AB	d. Verh.	5 : 1	m. d.	Exponenten	5,
" " AB " AF	"	1 : 5	"	"	$\frac{1}{5}$,
" " AF " AC	"	5 : 2	"	"	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$,
" " AC " AF	"	2 : 5	"	"	$\frac{2}{5}$,
" " AC " AG	"	2 : 6	"	"	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,
" " AG " AC	"	6 : 2	"	"	3,
" " AE " AF	"	4 : 5	"	"	$\frac{4}{5}$,
" " AF " AE	"	5 : 4	"	"	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

u. s. w.

§. 79.

Wenn man die beyden Glieder eines Verhältnisses mit einander vergleicht, so sieht man, daß sie entweder gleich oder ungleich sind.

Sind beyde Glieder gleich, so heißt das Verhältniß ein **Verhältniß der Gleichheit**; z. B. 1 : 1, 2 : 2, 5 : 5, 12 : 12. Ein solches Verhältniß findet Statt zwischen den gegenüberliegenden Seiten eines Tisches, einer Tafel, zwischen den gegenüberstehenden Wänden, zwischen dem Boden und der Decke eines Zimmers. — Der Exponent eines Verhältnisses der Gleichheit ist 1, weil jede Zahl in sich selbst 1mahl enthalten ist.

Wenn das Vorderglied eines Verhältnisses größer ist als das Hinterglied, so heißt das Verhältniß **fallend**; z. B. 3 : 2, 5 : 1, 12 : 8, 20 : 15. Der Exponent eines solchen Verhältnisses ist immer größer als 1. In einem fallenden Verhältnisse stehet z. B. die Höhe einer Thür zu deren Breite.

Wenn endlich das Vorderglied eines Verhältnisses kleiner ist als das Hinterglied, so heißt das Verhältniß **steigend**; z. B. 1 : 2, 2 : 3, 7 : 10, 15 : 25. Der Exponent ist immer ein echter Bruch, also kleiner als 1. In einem steigenden Verhältnisse stehet z. B. die Breite eines Fensters zu der Höhe desselben.

§. 80.

Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse den nähmlichen Exponenten haben, so heißen sie **gleiche Verhältnisse.** So sind 6 : 2, 9 : 3, 12 : 4, 30 : 10 gleiche Verhältnisse, weil sie alle denselben Exponenten 3 haben.

Da bey einem Verhältnisse der Gleichheit der Exponent gleich 1, bey einem fallenden Verhältnisse größer als 1, bey einem steigenden kleiner als 1 ist, so kann ein Verhältniß der Gleichheit nicht gleich seyn einem fallenden, oder einem steigenden Verhältnisse, und umgekehrt. Wenn daher zwey Verhältnisse gleich seyn sollen, so müssen entweder beyde fallend, oder beyde steigend, oder beyde Verhältnisse der Gleichheit seyn.

Zwey gleiche Verhältnisse können übrigens auch ungleich benannte Glieder haben; z. B. das Verhältniß 8 ℔ : 2 ℔ hat den Exponenten 4, das Verhältniß 24 fl. : 6 fl. hat auch den Exponenten 4, die zwey Verhältnisse 8 ℔ : 2 ℔ und 24 fl. : 6 fl. sind also gleich, wiewohl die Glieder des ersten Verhältnisses eine andere Benennung haben, als die Glieder des zweyten.

Ein Verhältniß bleibt so lange ungeändert, als der Exponent desselben beständig bleibt.

1. **Ein Verhältniß bleibt** daher **unverändert, wenn man beyde Glieder mit einerley Zahl multiplicirt,** weil dadurch der Exponent nicht geändert wird. So gibt das Verhältniß 6 : 2, wenn man beyde Glieder mit 2, oder mit 3, oder mit 4 multiplicirt, die Verhältnisse 12 : 4, oder 18 : 6, oder 24 : 8, welche alle dem ersten Verhältnisse gleich sind; weil sie mit ihm einerley Exponenten 3 haben.

Mit Hülfe der Multiplication kann man ein Verhältniß, worin Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen darstellen. Um z. B. das Verhältniß 4 : $\frac{2}{3}$ in ganzen Zahlen darzustellen, braucht man nur beyde Glieder mit dem Nenner 3 zu multipliciren, als Vorderglied erhält man $4 \times 3 = 12$, als Hinterglied aber $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, das neue Verhältniß 12 : 2 ist nun in ganzen Zahlen ausgedrückt, und dem vorigen ganz gleich. — Ist das Verhältniß $\frac{2}{5} : 3\frac{1}{2}$ in ganzen Zahlen darzustellen, so multiplicirt man zuerst beyde Glieder mit dem einen Nenner 5, wodurch man das gleich große Verhältniß 2 : $\frac{35}{2}$ erhält; nun multiplicirt man wieder beyde Glieder mit dem zweyten Nenner 2, wodurch man das Verhältniß 4 : 35 bekommt, welches in ganzen Zahlen ausgedrückt, und mit dem gegebenen Verhältnisse $\frac{2}{5}$: $3\frac{1}{2}$ gleichbedeutend ist.

Um also ein Verhältniß, welches in Brüchen oder gemischten Zahlen ausgedrückt ist, durch ganze Zahlen darzustellen, braucht man nur beyde Glieder mit jedem Nenner zu multipliciren.

Man stelle folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen dar: 3 : $\frac{1}{5}$, 7 : $4\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$: 4, $5\frac{1}{6}$: 3, $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{5}$, $10\frac{1}{6}$: $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$: $4\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$: $3\frac{5}{6}$.

2. Ein Verhältniß bleibt unverändert, wenn man beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt, weil auch dadurch der Exponent nicht geändert wird. So ist z. B. das Verhältniß 12 : 4 gleich dem Verhältnisse 6 : 2, welches aus dem ersten dadurch entstehet, daß man beyde Glieder durch 2 dividirt; weil in beyden 3 der Exponent ist.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man jedes Verhältniß, dessen beyde Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, abkürzen, wenn man Vorder- und Hinterglied durch jene Zahl dividirt. So kann man das Verhältniß 16 : 12, dessen beyde Glieder durch 4 theilbar sind, durch die Division mit 4 in das einfachere, aber gleich große Verhältniß 4 : 3 verwandeln.

Eben so gibt 24 : 8 abgekürzt 3 : 1,
30 : 24 " 5 : 4,
120 : 48 " 5 : 2.

Um ein Verhältniß auf die einfachste Gestalt zu bringen, muß man es zuerst in ganzen Zahlen darstellen, und dann, wenn es angeht, abkürzen.

Man bringe folgende Verhältnisse auf die einfachste Form: $8:6$, $6:\frac{2}{3}$, $5:\frac{5}{8}$, $3\frac{1}{2}:14$, $5\frac{3}{4}:6\frac{1}{2}$, $\frac{8}{5}:1\frac{3}{10}$, $15\frac{3}{4}:\frac{9}{16}$.

Am leichtesten und schnellsten macht man sich die wahre Vorstellung von einem solchen Verhältnisse, dessen Hinterglied 1 ist; z. B. $4:1$, $2\frac{1}{2}:1$, $\frac{5}{6}:1$, weil da das Vorderglied zugleich der Exponent ist. Ein Verhältniß, dessen Hinterglied 1 ist, heißt ein **Grundverhältniß**.

Man kann jedes Verhältniß in ein Grundverhältniß verwandeln, wenn man es zuerst in ganzen Zahlen darstellt und abkürzt, d. i. auf die einfachste Form bringt, und dann beyde Glieder durch das Hinterglied dividirt. Um z. B. $8\frac{1}{2}:\frac{5}{12}$ in ein Grundverhältniß zu verwandeln, bringt man es durch Multiplication mit 2 und 12 auf ganze Zahlen, man bekommt $204:10$, dann kürzt man es durch 2 ab, wodurch man $102:5$, bekommt; endlich dividirt man beyde Glieder durch 5, wodurch man das Grundverhältniß $20\frac{2}{5}:1$ erhält.

Eben so gibt $8:4$ das Grundverhältniß $2:1$,
$16:10$ " $1\frac{3}{5}:1$,
$6:\frac{18}{25}$ " $8\frac{1}{3}:1$,
$\frac{8}{3}:\frac{9}{16}$ " $\frac{2}{3}:1$,
$1\frac{4}{5}:2\frac{5}{8}$ " $\frac{24}{35}:1$,
$12\frac{8}{9}:1\frac{2}{3}$ " $7\frac{11}{15}:1$.

§. 81.

Aufgaben.

(1). Ein Thurm ist 24 Klafter hoch, ein anderer nur 20 Klafter; wie verhält sich die Höhe des ersten

Thurmes zu der Höhe des zweyten? — Wie 24 zu 20, oder 6 : 5, oder $1\frac{1}{5}$: 1.

(2). Wie verhält sich 1 Kreuzer zu 1 Gulden? — Wie 1 : 60, oder $\frac{1}{60}$: 1.

(3). Wie verhält sich 1 Zoll zu 1 Fuß? — Wie 1 : 12, oder $\frac{1}{12}$: 1.

(4). In welchem Verhältnisse steht 1 ℔ zu 1 Loth? — In dem Verhältnisse 32 : 1.

(5). 1 ℔ Zucker kostet 20 Kr., 1 ℔ Kaffeh 24 Kr.; wie verhält sich der Preis des Zuckers zu dem Preise vom Kaffeh? — Wie 20 : 24, oder 5 : 6, oder $\frac{5}{6}$: 1.

(6). Ein Bothe macht in 10 Stunden 6 Meilen, ein anderer legt in derselben Zeit 8 Meilen zurück, wie verhalten sich die Geschwindigkeiten der beyden Bothen zu einander? — Wie 6 : 8, 3 : 4, oder $\frac{3}{4}$: 1.

(7). Eine österreichische Meile hat 4000 Wiener Klafter, eine deutsche geographische aber 3906 Wiener Klafter, wie verhält sich nun die österreichische Meile zu der deutschen geographischen? — Wie 4000 : 3906, oder 2000 : 1953, oder $1\frac{47}{1953}$: 1.

(8). Das Kaiserthum Österreich hat 36 Millionen Einwohner, das Königreich Preußen 15 Millionen, welches Verhältniß findet zwischen den Einwohnerzahlen dieser beyden Monarchien Statt? — 36 : 15, oder 12 : 5, oder $2\frac{2}{5}$: 1.

(9). Die Sonne ist von der Erde 21000000 Meilen entfernt, die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 51000 Meilen; wie verhalten sich diese Entfernungen zu einander? — Wie 21000000 : 51000, oder 7000 : 17, oder $411\frac{23}{17}$: 1.

(10). Eine Kanonenkugel legt in einer Secunde 700 Fuß zurück, der Schall 1050 Fuß; wie verhalten sich diese Geschwindigkeiten zu einander? — Wie 700 : 1050, oder 2 : 3, oder $\frac{2}{3}$: 1.

II. Proportionen.

§. 82.

Die Gleichsetzung zweyer gleichen Verhältnisse nennt man eine **Proportion**. Die beyden Verhättnisse 8 : 2 und 12 : 3 haben denselben Exponenten 4, sie sind gleich und können also auch gleichgesetzt werden 8 : 2 = 12 : 3. Dieß ist dann eine Proportion, welche so gelesen wird: 8 verhält sich zu 2, wie sich 12 zu 3 verhält; oder: 8 zu 2, wie 12 zu 3. — Die Verhältnisse 8 : 2 und 15 : 3 sind ungleich, weil sie verschiedene Exponenten haben; sie können daher auch nicht gleichgestellt, und folglich in keine Proportion gebracht werden.

Jede Proportion besteht aus zwey gleichen Verhältnissen, also aus **vier** Gliedern; diese werden nach der Ordnung von der Linken gegen die Rechte benannt: das **erste, zweyte, dritte, vierte Glied** der Proportion. Auch werden das erste und vierte Glied die **äußern**, das zweyte und dritte die **innern** Glieder genannt. In der Proportion 8 : 2 = 12 : 3 ist 8 das erste, 2 das zweyte, 12 das dritte, 3 das vierte Glied; ferner sind 8 und 3 die äußern, 2 und 12 aber die innern Glieder.

Da nur gleiche Verhältnisse eine Proportion bilden können, so muß eine Proportion entweder zwey fallende oder zwey steigende, oder zwey Verhältnisse der Gleichheit enthalten. — Ist daher in einer Proportion das vierte Glied kleiner als das dritte, so muß auch das zweyte kleiner als das erste seyn; ist das vierte Glied größer als das dritte, so muß auch das zweyte größer als das erste seyn; ist endlich das vierte dem dritten gleich, so muß auch das zweyte dem ersten gleich seyn.

Um sich in der Bildung der Proportionen zu üben, nehme man irgend ein Verhältniß, z. B. 2 : 1, und suche Verhältnisse, welche denselben Exponenten, nähmlich 2, haben.

Je zwey solche Verhältnisse z. B. 4 : 2, 6 : 3, 8 : 4, 20 : 10, $\frac{2}{7}$: $\frac{1}{7}$ bilden eine Proportion.

Man suche zu 9 : 3 ein gleiches Verhältniß, ein solches ist 18 : 6; 9 : 3 = 18 : 6 ist dann eine Proportion. Eben so suche man zu folgenden Verhältnissen 10 : 2, 6 : 4, 5 : 3, 18 : 15, 3 : $\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$: 5, gleiche Verhältnisse, und bilde aus je zwey gleichen Verhältnissen eine Proportion.

Wenn vier Zahlen da stehen, so ist es leicht zu entscheiden, ob sie in jener Ordnung eine Proportion bilden oder nicht. Man suche nähmlich den Exponenten zwischen den ersten zwey Zahlen, und dann den Exponenten zwischen den andern zwey Zahlen; sind die beyden Exponenten gleich, so geben die Zahlen in der Ordnung, wie sie dastehen, eine Proportion; sind die Exponenten ungleich, so bilden jene Zahlen keine Proportion. So geben die Zahlen 7, 2, 14, 4 die Proportion 7 : 2 = 14 : 4, weil 7 : 2 den Exponenten $\frac{7}{2}$, und 14 : 4 auch den Exponenten $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ gibt. Die Zahlen 7, 2, 14, 5 hingegen bilden keine Proportion, weil 7 : 2 den Exponenten $\frac{7}{2}$, 14 : 5 aber den Exponenten $\frac{14}{5}$ gibt, welcher von $\frac{7}{2}$ verschieden ist.

Man prüfe die Richtigkeit folgender Ansätze:

$4 : 6 = 6 : 9$,	$51 : 3 = 34 : 2$,
$12 : 3 = 15 : 3$,	$1 : 5 = 7 : 35$,
$16 : 2\frac{1}{4} = 18 : 3\frac{1}{2}$,	$40 : 9 = 30 : 7$,
$18 : 6 = 27 : 9$	$20 : 5 = 36 : 9$.

§. 83.

Man betrachte die Proportion $4 : 2 = 10 : 5$; die äußern Glieder sind 4 und 5, ihr Product also 20; die innern Glieder sind 2 und 10; ihr Product auch 20; das Product der äußern Glieder ist also eben so groß als das Product der innern.

Man nehme ferner die Proportion $3 : 8 = 9 : 24$. Multiplicirt man die äußern Glieder mit einander, so hat man 3mahl $24 = 72$; und eben so die innern, so erhält man 8mahl $9 = 72$; man sieht wieder, daß das Product der äußern Glieder gleich ist dem Producte der innern.

Aus diesen und mehreren solchen Beyspielen überzeugt man sich von dem Satze:

In jeder Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Producte der innern Glieder.

Es gibt also ein **zweyfaches Kennzeichen** für die Richtigkeit einer Proportion: **erstens**, wenn die Exponenten beyder Verhältnisse gleich sind; **zweytens**, wenn das Product der äußern Glieder gleich ist dem Producte der innern Glieder. Das erste Kennzeichen ist natürlicher und dem Begriffe einer Proportion entsprechender, das zweyte ist gewöhnlich einfacher.

Man prüfe nach dem zweyten Kennzeichen die Richtigkeit folgender Ansätze:

$60 : 12 = 10 : 2$,	$5\frac{3}{4} : 6 = 2\frac{5}{6} : 3$,
$7\frac{1}{2} : 9 = 2\frac{1}{2} : 3$,	$35 : 5 = 28 : 4$,
$15\frac{1}{4} : 2 = 17 : 3$,	$6\frac{1}{4} : 11\frac{2}{3} = 1\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}$,
$16 : 4 = 36 : 6$,	$9 : 12 = 8 : 14$.

§. 84.

So wie es Verhältnisse zwischen benannten Zahlen gibt, so können benannte Zahlen auch eine Proportion bilden.

Z. B. 1 Elle Tuch kostet 6 Gulden, 2 Ellen Tuch kosten doppelt so viel, also 12 Gulden. Das Verhältniß der Ellen ist hier 1 Elle : 2 Ellen, das Verhältniß der Gulden, 6 Gulden : 12 Gulden; das erste Verhältniß hat den Exponenten $\frac{1}{2}$, das zweyte ebenfalls den Exponenten $\frac{1}{2}$: die beyden Verhältnisse sind also gleich und bilden eine Proportion, nähmlich:

1 Elle : 2 Ellen = 6 Gulden : 12 Gulden,

welche mit der Zahlenproportion

$$1 : 2 = 6 : 12$$

gleichbedeutend ist.

Eben so ist das Verhältniß 12 Arbeiter : 8 Arbeitern gleich dem Verhältnisse 18 Tage : 12 Tagen, weil beyde den Exponenten $1\frac{1}{2}$ haben; daher bestehet die Proportion:

12 Arbeit. : 8 Arbeit. = 18 Tage : 12 Tagen,

welche auch durch die Zahlenproportion

$$12 : 8 = 18 : 12$$

ausgedrückt werden kann.

§. 85.

Wenn in einer Proportion nur drey Glieder bekannt sind, so kann das unbekannte Glied leicht gefunden werden. Aus einer Proportion, in welcher drey Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die **Proportion auflösen.**

Das unbekannte Glied einer Proportion wird durch den Buchstaben x bezeichnet.

a. Es sey die Proportion x : 3 = 8 : 6 aufzulösen. — Das Product der äußern Glieder muß gleich seyn dem Producte der innern Glieder; das Product der innern Glieder ist 3mahl 8 = 24, also muß auch das Product der äußern Glieder 24 seyn; wenn nun die beyden äußern Glieder mit einander multiplicirt 24 geben müssen, und eines derselben 6 ist, so muß das andere äußere Glied nothwendig 4 seyn, welches man bekommt, wenn man 24 durch 6 dividirt. Die Proportion heißt 4 : 3 = 8 : 6. — Hier ist also das Product der innern Glieder, nähmlich 24, durch das bekannte äußere Glied 6 dividirt worden.

Auf gleiche Weise sind noch folgende Proportionen aufzulösen:

x : 7 = 4 : 2	9 : 6 = 12 : x,
x : 9 = 8 : 24	15 : 8 = 30 : x,
x : 3 = 10 : 6	2 : 6 = 9 : x.

Dadurch kommt man auf die Regel:

Um ein äußeres Glied der Proportion zu finden, multiplicire man die beyden innern mit einander, und dividire das Product durch das bekannte äußere Glied.

Beyspiele.

(1). Man löse die Proportion x : 2 = 15 : 3 auf.

2 × 15 = 30; 30 : 3 = 10;

also x = 10.

Die Proportion heißt also $10 : 2 = 15 : 3$. Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, sucht man entweder die Exponenten der beyden Verhältnisse, oder man vergleicht das Product der äußern Glieder mit dem Producte der innern. Hier haben beyde Verhältnisse den Exponenten 5; auch ist sowohl das Product der äußern als das Product der innern Glieder gleich 30; also ist die Proportion richtig.

(2). Es sey die Proportion $x : \frac{3}{4} = 16 : 3$ aufzulösen. Man hat

$$16 \times \frac{3}{4} = \frac{48}{4} = 12;\quad 12 : 3 = 4;$$

also ist $x = 4$, und die Proportion $4 : \frac{3}{4} = 16 : 3$.

(3). Um die Proportion $x : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} : 3$ aufzulösen, hat man

$$2\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8};\ \frac{9}{8} : 3 = \frac{3}{8};$$

also $x = \frac{3}{8}$, und $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} : 3$ die Proportion.

(4). Man löse die Proportion $2\frac{1}{2} : 5 = 3\frac{2}{5} : x$ auf.

$$5 \times 3\frac{2}{5} = 17;\ 17 : 2\frac{1}{2} = 17 \times \frac{2}{5} = \frac{34}{5} = 6\frac{4}{5};$$

also $x = 6\frac{4}{5}$, und die Proportion $2\frac{1}{2} : 5 = 3\frac{2}{5} : 6\frac{4}{5}$.

(5). Man suche aus $1\frac{3}{4} : 5\frac{3}{8} = 8\frac{1}{2} : x$ das unbekannte Glied.

$$5\frac{3}{8} \times 8\frac{1}{2} = \frac{43}{8} \times \frac{17}{2} = \frac{731}{16};$$

$$\frac{731}{16} : 1\frac{3}{4} = \frac{731}{16} : \frac{7}{4} = \frac{731}{16} \times \frac{4}{7} = \frac{2924}{112} = \frac{731}{28} = 26\frac{3}{28}.$$

Das vierte Glied der Proportion ist also $26\frac{3}{28}$, und die vollständige Proportion heißt $1\frac{3}{4} : 5\frac{3}{8} = 8\frac{1}{2} : 26\frac{3}{28}$.

(6). Man löse noch folgende Proportionen auf:

$x : 9 = 8 : 24$,	$9 : 12 = 15 : x$
$x : \frac{2}{3} = 5 : 4$,	$2 : 5 = 7\frac{1}{8} : x$,
$x : 6 = 2 : \frac{5}{8}$,	$\frac{3}{4} : 6 = 8 : x$,
$x : 8\frac{3}{4} = 1 : 1\frac{2}{3}$,	$\frac{5}{6} : 2\frac{7}{10} = 9 : x$,
$x : 3\frac{4}{5} = 2\frac{1}{5} : 6\frac{5}{9}$	$10\frac{5}{6} : 3\frac{2}{3} = 6\frac{3}{8} : x$.

§. 86.

b. Man löse die Proportion $4 : x = 10 : 15$ auf. — Das Product der äußern Glieder ist 4mahl $15 = 60$, also muß auch das Product der innern Glieder 60 seyn; es ist also hier die Frage: welche Zahl gibt mit 10 multiplicirt 60 zum Producte? Dieses findet man, wenn man 60 durch 10 dividirt; es ist die Zahl 6. Die Proportion ist demnach $4 : 6 = 10 : 15$. — Hier hat man zuerst die beyden äußern Glieder multiplicirt, und dann ihr Product 60 durch das bekannte innere Glied 10 dividirt.

Eben so soll auch in folgenden Proportionen das unbekannte Glied gefunden werden;

$2 : x = 8 : 12$	$4 : 5 = x : 10,$
$12 : x = 8 : 6$	$20 : 12 = x : 9,$
$10 : x = 15 : 3$	$18 : 27 = x : 3.$

Dabey wird man auf die Regel geleitet:

Um ein inneres Glied der Proportion zu finden, multiplicire man die beyden äußern Glieder mit einander, und dividire das Product durch das bekannte innere.

Beyspiele.

(1). Es sey die Proportion $8 : x = 10 : 50$ aufzulösen.

$$8 \times 50 = 400;\ 400 : 10 = 40;$$

also $x = 40$, und $8 : 40 = 10 : 50$ die Proportionen.

(2). Man löse die Proportion $\frac{3}{4} : 6 = x : \frac{2}{5}$ auf.

$$\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{20};\ \tfrac{6}{20} : 6 = \tfrac{1}{20};$$

folglich $x = \frac{1}{20}$, und die Proportion heißt $\frac{3}{4} : 6 = \frac{1}{20} : \frac{2}{5}$.

(3). Man suche das unbekannte Glied aus der Proportion $5\frac{1}{8} : x = 3\frac{1}{4} : 7\frac{1}{2}$. Die Rechnung wird stehen:

$$5\tfrac{1}{8} \times 7\tfrac{1}{2} = \tfrac{41}{8} \times \tfrac{15}{2} = \tfrac{615}{16};$$

$$\tfrac{615}{16} : 3\tfrac{1}{4} = \tfrac{615}{16} : \tfrac{13}{4} = \tfrac{615}{16} \times \tfrac{4}{13} = \tfrac{2460}{208} = \tfrac{615}{52} = 11\tfrac{43}{52};$$

die vollständige Proportion ist also $5\frac{1}{8} : 11\frac{43}{52} = 3\frac{1}{4} : 7\frac{1}{2}$.

(4). Es sollen noch folgende Proportionen aufgelöset werden:

$9 : x = 3 : 5$, $\quad 2 : 1 = x : 7$,

$\frac{1}{2} : x = 2 : \frac{3}{4}$, $\quad 5 : 3 = x : \frac{4}{5}$,

$5\frac{1}{3} : x = \frac{1}{2} : 4$, $\quad 1\frac{2}{4} : \frac{2}{5} = x : 6$,

$\frac{3}{4} : x = \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$, $\quad 6\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = x : \frac{3}{4}$,

$1\frac{1}{2} : x = 2\frac{2}{3} : 3\frac{3}{4}$, $\quad 6\frac{7}{8} : 1\frac{3}{4} = x : 3\frac{1}{2}$.

Achtes Hauptstück.

Die Regel de Tri.

§. 87.

Wenn zwey Arten von Zahlen so zusammenhängen, daß, wenn die eine Art größer wird, auch die andere in demselben Verhältnisse zunimmt, und wenn die eine Art kleiner wird, auch die andere in demselben Verhältnisse abnimmt; so heißen die beyden Arten von Zahlen **gerade proportionirt**, oder man sagt: **sie stehen in einem geraden Verhältnisse.**

So sind **Waare und Preis** gerade proportionirt; denn 2mahl so viel von derselben Waare kostet auch 2mahl so viel Geld, 3mahl so viel Waare kostet auch 3mahl so viel Geld; die Hälfte der Waare hat auch nur die Hälfte des Preises, der dritte Theil der Waare kostet auch nur den dritten Theil des Geldes. Waare und Preis sind also in einem solchen Zusammenhange, daß sie beyde in demselben Verhältnisse wachsen, oder beyde in demselben Verhältnisse abnehmen, d. h. Waare und Preis sind **gerade** proportionirt.

Eben so stehen in geradem Verhältnisse:

Arbeitszeit und Lohn; denn für 2mahl so viel Arbeitstage wird man auch 2mahl so viel Arbeitslohn erhalten, für die 3fache Arbeitszeit auch den 3fachen Lohn; für die halbe Arbeitszeit nur den halben Lohn; —

Kapital und Zins; 2, 3mahl so viel Kapital gibt auch 2, 3mahl so viel Zins; der vierte Theil des Kapitals gibt auch nur den vierten Theil des Zinses; —

Zeit und Zins; in einer 3mahl so großen Zeit wird man von demselben Kapitale auch 3mahl so viel Zins bekommen; für die Hälfte der Zeit wird man auch nur den halben Zins erhalten; —

Geschwindigkeit der Bewegung und Größe des zurückgelegten Raumes; wer sich 2mahl, 3mahl, 4mahl so geschwind bewegt, wird auch einen 2mahl, 3mahl, 4mahl so großen Raum zurücklegen; mit der halben Geschwindigkeit wird man auch nur den halben Weg zurücklegen; —

Münzen und Münzen; 2mahl so viel Ducaten geben auch 2mahl so viel Gulden; die Hälfte der Anzahl der Ducaten gibt auch nur die Hälfte von der Anzahl der Gulden.

Auf gleiche Weise kann man sich überzeugen, daß auch folgende Arten von Zahlen gerade proportionirt sind:

Zeit und Wirkung, — Gewicht der Last und Fracht, — Weite des Weges und Fracht, — Länge und Inhalt, — Breite und Inhalt, — Höhe und Inhalt, — Menge der Nahrungsmittel und Zahl der zu Nährenden, — Menge der Nahrungsmittel und Dauer derselben, — Zahl der Arbeiter und Größe der Arbeit, — Einlage bey einer Unternehmung und der Gewinn oder Verlust.

§. 88.

Wenn zwey Arten von Zahlen von einander so abhängen, daß, wenn die eine Art größer wird, die andere in demselben Verhältnisse kleiner werden muß; so heißen die beyden Arten von Zahlen **verkehrt proportionirt**, oder man sagt: sie **stehen im verkehrten Verhältnisse**.

So sind die **Zahl der Arbeiter und die Dauer der Arbeitzeit** verkehrt proportionirt; denn 2mahl so viel Arbeiter werden für dieselbe Arbeit nur die Hälfte der Zeit brauchen, 3mahl so viel Arbeiter brauchen nur den dritten Theil der Zeit; die Hälfte der Arbeiter braucht die doppelte Zeit, der dritte Theil der Arbeiter braucht 3mahl so viel Zeit. Wenn also die Zahl der Arbeiter zunimmt, so wird die Dauer der Arbeitzeit in demselben Verhältnisse kleiner, und wenn die Zahl der Arbeiter abnimmt; so wächst die Dauer der Arbeitzeit in demselben Verhältnisse.

Verkehrt proportionirt sind auch:

Dauer der Nahrungsmittel und Zahl der zu Nährenden; durch 2mahl so viel Tage werden nur halb so viel Personen mit denselben Lebensmitteln auskommen; umgekehrt, 2mahl, 3mahl so viel Personen werden mit denselben Nahrungsmitteln nur die Hälfte, den dritten Theil der Zeit ausreichen; —

Geschwindigkeit und Zeit bey demselben Wege; wenn sich ein Körper mit einer 3mahl, 4mahl so großen Geschwindigkeit bewegt, so braucht er, um denselben Weg zurückzulegen, nur den dritten, vierten Theil der Zeit; —

Kapital und Zahl bey gleichem Zinsbetrage; 2mahl so viel Kapital braucht nur halb so viel Zeit angelegt zu seyn, um dasselbe Interesse zu geben; die Hälfte des Kapitals muß 2mahl so viel Zeit anliegen.

Eben so kann man nachweisen, daß folgende Arten von Zahlen in einem verkehrten Verhältnisse stehen:

Länge und Breite, Länge und Höhe, Breite und Höhe (bey demselben Inhalte), — der Preis des Getreides und das Gewicht eines Backwerks (von immer gleichem Preise), — die Zahl der Erben und die Größe des Erbtheiles, — Gewicht der Last und Weite des Weges (bey derselben Fracht), — die Größe einer Einlage und die Zeit, (bey demselben Erträgnisse).

§. 89.

Es gibt auch Arten von Zahlen, welche zwar in einem innigen Zusammenhange stehen, jedoch weder gerade noch verkehrt proportionirt sind.

Zeit und Fallraum wachsen zwar beyde, sind aber doch nicht gerade proportionirt: wenn nähmlich ein Stein in 1 Secunde aus einer Höhe von 15 Fuß fällt, so wird er in 2 Secunden nicht 2mahl 15 = 30 Fuß, in 3 Secunden nicht 3mahl 15 = 45 Fuß, sondern der Erfahrung gemäß in 2 Secunden 4mahl 15 = 60 Fuß, in 3 Secunden 9mahl 15 = 135 Fuß tief fallen.

Das **Gewicht des Menschen** nimmt bis zu einem gewissen **Alter** mit diesem zu, darum sind aber das Gewicht und das Alter des Menschen doch nicht gerade proportionirt. Wenn z. B. ein 10jähriger Knabe 50 ℔ wiegt, so wird er mit 20 Jahren nicht gerade 2mahl 50 ℔, mit 30 Jahren nicht 3mahl 50 ℔, mit 60 Jahren nicht 6mahl 50 ℔ wiegen.

Die **Zeit und die Arbeit unter ungleichen Umständen** sind nicht proportionirt. Wenn z. B. mehrere Arbeiter in 3 Tagen eine Grube 5 Fuß tief graben, so wäre es fehlerhaft zu schließen, daß sie in 6 Tagen die Grube 10 Fuß tief ausgraben werden, da die Arbeit immer schwieriger wird, je größer die Tiefe ist.

Der **Durchmesser einer Kugel und der Inhalt**, eben so die **Seite eines Würfels und der Inhalt**, sind nicht einfach proportionirt. Wenn ein Würfel, dessen jede Seite 3 Fuß ist, 580 Maß enthält; so wird ein würfelförmiges Gefäß, dessen jede Seite nur 1 Fuß ist, nicht den 3ten Theil von 580 Maß, sondern nur den 27sten Theil davon fassen.

Dasselbe gilt von der Größe und dem Preise eines Diamanten, einer Spiegeltafel.

§. 90.

Wenn zwey Arten von Zahlen gerade oder verkehrt proportionirt sind, so kann man immer aus zwey Paaren zusammengehöriger Zahlen der beyden Arten eine Proportion

bilden; wie man aus folgenden Beyspielen sehen kann.

3 Ellen Tuch kosten 12 fl., 6 Ellen Tuch werden gewiß doppelt so viel, also 24 fl. kosten. Die Zahlen der einen Art sind 3 Ellen und 6 Ellen, ihr Verhältniß also 3 Ellen : 6 Ellen, wovon $\frac{1}{2}$ der Exponent ist; die Zahlen der zweyten Art sind 12 fl. und 24 fl., ihr Verhältniß also 12 fl. : 24 fl., und der Exponent desselben auch $\frac{1}{2}$; die beyden Verhältnisse 3 Ellen : 6 Ellen, und 12 fl. : 24 fl. sind daher gleich, und bilden eine Proportion, nähmlich 3 Ellen : 6 Ellen = 12 fl. : 24 fl.

8 Arbeiter brauchen zu einer gewissen Arbeit 10 Tage, 4 Arbeiter werden zu derselben Arbeit doppelt so viel Zeit brauchen, also 20 Tage. Hier sind die Zahlen der einen Art 8 Arbeiter und 4 Arbeiter, ihr Verhältniß 8 Arb. : 4 Arb., und dessen Exponent 2; die Zahlen der andern Art sind 10 Tage und 20 Tage, das Verhältniß derselben, wenn man sie in umgekehrter Ordnung nimmt, 20 Tage : 10 Tagen, und der Exponent desselben auch 2; die beyden Verhältnisse bilden also eine Proportion, nähmlich 8 Arb. : 4 Arb. = 20 Tage : 10 Tagen.

Wenn daher zwey Arten von Zahlen gerade oder verkehrt proportionirt sind, und man setzet zwey Zahlen der einen Art in ein Verhältniß, so bilden immer auch die zwey zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, ein Verhältniß, welches dem vorigen gleich ist.

§. 91.

Wenn zwey Arten von Zahlen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse stehen, und wenn von einer

Art beyde Zahlen angegeben werden, von den zugehörigen Zahlen der andern Art aber nur eine bekannt ist; so kann man die andere unbekannte Zahl dieser zweyten Art leicht finden. Die Rechnung, durch welche dieses geschieht, heißt die **Regel de Tri.**

Bey der Regel de Tri wird also vorausgesetzt:

1. Daß zwey Arten von Zahlen angegeben werden, welche entweder gerade oder verkehrt proportionirt sind;

2. daß drey Zahlen bekannt sind, die zwey Zahlen der einen Art, und eine der dazu gehörigen Zahlen der andern Art.

Z. B. Wenn 4 Pfund einer Waare 52 Kreuzer kosten, wie viel Kreuzer werden 3 Pfund von derselben Waare kosten? — Die beyden Arten von Zahlen, welche hier vorkommen, sind Pfund und Kreuzer; sie sind gerade proportionirt, weil 2mahl, 3mahl, 4mahl so viel Pfund auch 2mahl, 3mahl, 4mahl so viel Kreuzer kosten werden; von der ersten Art sind beyde Zahlen gegeben, nähmlich 4 Pfund und 3 Pfund; von den dazu gehörigen Zahlen der zweyten Art ist nur eine bekannt, nähmlich 52 Kr., die andere ist unbekannt und soll erst gefunden werden. Dieß ist also eine Aufgabe, welche zur Regel de Tri gehört.

Die unbekannte Zahl wird in der Rechnung mit dem Buchstaben x bezeichnet, und in der Proportion gewöhnlich in das vierte Glied gesetzt.

§. 92.

Es seyen folgende Regel de Tri-Aufgaben aufzulösen:

a. 6 Pfund Zucker kosten 2 Gulden; wie viel Gulden kosten 25 Pfund Zucker?

Bey der Regel de Tri werden die zusammengehörigen Zahlen neben einander, die gleichartigen aber unter einander geschrieben. Man schreibt also

6 Pfund 2 Gulden
25 „ x „

Die beyden Arten von Zahlen sind hier Pfund und Gulden, und stehen in geradem Verhältnisse; es läßt sich daher aus ihnen eine Proportion bilden. Setzt man nähmlich die unbekannte Zahl x in das vierte, und die damit gleichnahmige Zahl 2 in das dritte Glied, wodurch man das Verhältniß 2 : x bekommt; so muß sich auch aus den dazu gehörigen Zahlen der Pfunde 6 und 25 ein Verhältniß bilden lassen, welches dem vorigen gleich ist. Es entstehet nun die Frage, in welcher Ordnung müssen 6 und 25 in ein Verhältniß gebracht werden, damit dasselbe dem Verhältnisse 2 : x gleich sey? Um dieses zu erfahren, muß man wissen, ob x kleiner oder größer als 2 ausfallen soll. Man beurtheilet also: wenn 6 ℔ 2 fl. kosten, werden 25 ℔ mehr oder weniger als 2 fl. kosten? Gewiß mehr, x wird also größer als 2 ausfallen. Wenn aber in einer Proportion das vierte Glied größer als das dritte ist, so muß auch das zweyte größer als das erste seyn; man wird daher von den beyden Zahlen 6 und 25 die kleinere 6 in das erste, und die größere 25 in das zweyte Glied setzen. Dadurch erhält man die Proportion

$$6 : 25 = 2 : x.$$

Aus dieser Proportion wird nun der Werth von x gefunden, wenn man die beyden innern Glieder mit einander multiplicirt, und das Product durch das bekannte äußere Glied dividirt; man hat nähmlich

$$6 : 25 = 2 : x$$

$$6 \mid 50 \mid 8\tfrac{1}{3} \text{ fl.}$$

$$48$$

$$\tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

Wenn also 6 ℔ Zucker 2 fl. kosten, so wird man für 25 ℔ $8\frac{1}{3}$ fl. bezahlen.

b. Für 8 Zentner Waare muß man 9 fl. Fracht zahlen; wie viel fl. wird man für 3 Zentner zahlen müssen?

Man schreibt

8 Ztr. 9 fl.
3 „ x „

Hier sind wieder zwey Arten von Zahlen angegeben, welche gerade proportionirt sind, nähmlich Zentner und Gulden. Setzt man daher die unbekannte Zahl x in das vierte und die damit gleichnahmige Zahl 9 in das dritte Glied, wodurch man das Verhältniß 9 : x erhält, so müssen auch die zugehörigen Zahlen der Zentner, in derselben oder in umgekehrter Ordnung, ein Verhältniß geben, welches dem vorigen gleich ist. Um zu wissen, ob x größer oder kleiner als 9 seyn wird, fragt man: wenn man für 8 Zentner Waare 9 fl. Fracht zahlen muß, wird man für 3 Zentner mehr oder weniger als 9 fl. zahlen? Gewiß weniger; x wird also kleiner als 9 ausfallen, folglich wird das vierte Glied kleiner als das dritte, daher muß man auch von den beyden Zahlen der andern Art die größere 8 in das erste, und die kleinere 3 in das zweyte Glied setzen. Man hat dann die Proportion

$$8 : 3 = 9 : x$$

$$8 \mid 27 \mid 3\tfrac{3}{8} \text{ fl.}$$

$$24$$

$$3$$

Wenn man also für 8 Ztr. Waare 9 fl. Fracht zahlen muß, so wird man für 3 Ztr. $3\frac{3}{8}$ fl. Fracht zahlen.

Aus diesen Beyspielen ergibt sich für die Regel de Tri folgendes **Verfahren:**

1. Man schreibe die zusammengehörigen Zahlen neben einander, und die gleichartigen unter einander, die gleichartigen Zahlen müssen, wenn sie nicht gleichnahmig sind, auf gleiche Benennung gebracht werden.

2. Man setze die unbekannte Zahl x in das vierte, und die damit gleichnahmige Zahl in das dritte Glied; die zwey Zahlen der andern Art kommen in gehöriger Ordnung in das erste und zweyte Glied zu stehen. Um diese Ordnung zu bestimmen, beurtheile man aus den Umständen der Aufgabe, ob x größer oder kleiner ausfallen wird, als die damit gleichnahmige Zahl. Soll x größer ausfallen, so ist das vierte Glied größer als das dritte; man muß daher von den beyden Zahlen der andern Art die kleinere in das erste, und die größere in das zweyte Glied setzen. Soll aber x kleiner ausfallen, so ist das zweyte Verhältniß fallend; man bringt daher auch die Zahlen der andern Art in ein fallendes Verhältniß, indem man die größere in das erste, und die kleinere in das zweyte Glied setzet.

3. Die Proportion wird aufgelöset.

Aufgaben, welche nicht zu große Zahlen enthalten, können meistens leichter und schneller **im Kopfe** als schriftlich aufgelöset werden.

§. 93.

Beyspiele und Aufgaben.

Waare und Betrag.

(1). 3 Ellen Tuch kosten 15 fl.; wie viel fl. kosten 12 Ellen?

Auflösung im Kopfe. Wenn 3 Ellen 15 fl. kosten, so wird 1 Elle nur den 3ten Theil von 15 fl., also 5 fl. kosten; 12 Ellen werden aber 12mahl so viel als 1 Elle, also 12mahl 5 fl. = 60 fl. kosten. — Oder: 12 Ellen sind 4mahl so viel als 3 Ellen; wenn also 3 Ellen 15 fl. kosten, so werden 12 Ellen 4mahl 15 fl. = 60 fl. betragen.

Schriftlich. Man schreibt

3 Ell. 15 fl.
12 " x "

und setzt x in das vierte, und 15 in das dritte Glied. Dann beurtheilet man: wenn 3 Ellen 15 fl. kosten, werden 12 Ellen mehr oder weniger als 15 fl. kosten; offenbar mehr; x muß also größer als 15 ausfallen, daher muß auch das zweyte Glied größer als das erste seyn. Man setzt daher von den beyden Zahlen der andern Art die kleinere 3 in das erste, und die größere 12 in das zweyte Glied; dadurch erhält man

$$
\begin{array}{r}
3 : 12 = 15 : x \\
12 \\
\hline
30 \\
15 \\
\hline
3 \mid 180 \mid 60 \text{ fl.} \\
18 \\
\hline
0
\end{array}
$$

12 Ellen werden also 60 fl. kosten.

(2). Was kostet 1 Maß, wenn 3 Eimer auf 32 fl. zu stehen kommen?

Mündlich. Wenn 3 Eimer auf 32 fl. kommen, so kostet 1 Eimer nur den 3ten Theil davon, also 32 Zwanziger; 1 Maß kostet nun den 40sten Theil von dem, was 1 Eimer kostet; der 20ste Theil von 32 Zwanzigern sind 32 Kreuzer; der 40ste Theil also ist die Hälfte davon, nähmlich 32 halbe Kreuzer, oder 16 Kr. Eine Maß kostet also 16 Kr.

Schriftlich.

x fl.	1 Maß	$120 : 1 = 32 : x$	
32 „	120 „	$120 \mid 32 \mid \frac{32}{120} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ fl. = 16 Kr.	

Da Eimer und Maß verschiedene Benennungen sind, so müssen sie gleichnahmig gemacht werden; man bringt also 3 Eimer auf Maß, indem man mit 40 multiplicirt; die 120 Maß werden unter 1 Maß angeschrieben. Nun setzt man x in das vierte, und die damit gleichnahmige Zahl 32 in das dritte Glied, und folgert: wenn 120 Maß 32 fl. kosten, so wird 1 Maß gewiß weniger als 32 fl. kosten; x wird also kleiner als 32 ausfallen, und das Verhältniß 32 : x ist ein fallendes. Man bildet daher auch aus 1 und 120 ein fallendes Verhältniß, setzt dieses dem andern Verhältnisse gleich, und löset dann die Proportion auf. Man bekommt dadurch $\frac{4}{15}$ fl. = 16 Kr. 1 Maß kostet also 16 Kr.

(3). Jemand kauft 6 ℔ Zucker um $2\frac{1}{2}$ fl.; wie viel Zucker von derselben Gattung wird er um 15 fl. bekommen? — 36 ℔.

(4). 5 Ellen Leinwand werden mit $2\frac{1}{4}$ fl. bezahlt, wie hoch kommen 12 Ellen? — Auf $5\frac{2}{5}$ fl.

(5). 4 Loth Quecksilber kosten 26 Kr.; wie theuer sind $3\frac{1}{2}$ ℔? — 12 fl. 8 kr.

(6). Ein Kalb wiegt 125 ℔; wie viel muß man dafür geben, wenn 1 Ztr. auf 13 fl. angeschlagen wird? — 16 fl. 15 Kr.

(7). Wie viel muß man für 45 ℔ einer Waare bezahlen, wovon man 1 Ztr. um 60 fl. erhält? — 27 fl.

(8). Ein Kaufmann hat $42\frac{1}{4}$ Ztr. Waare für 296 fl. 40 Kr. gekauft; wie viel von dieser Waare bekommt er für 148 fl. 20 Kr. — $21\frac{1}{8}$ Ztr.

Hier müssen die Kreuzer in Guldenbrüche verwandelt werden. — Diese Aufgabe läßt sich sogleich im Kopfe auflösen, da 148 fl. 20 Kr. genau die Hälfte von 296 fl. 40 Kr. sind, so wird man dafür auch gerade die Hälfte von $42^1/_4$ Ztr., also $21^1/_8$ Ztr. bekommen.

(9). Was kosten 4 ℔, wenn 3 Ztr. 20 ℔ um 760 fl. gekauft werden? — 9 fl. 30 Kr.

(10). Wenn $3\frac{3}{4}$ Ellen Taffet 5 fl. 24 Kr. kosten, wie hoch kommen $11\frac{1}{4}$ Ellen? — Auf 16 fl. 12 Kr.

§. 94.

Kapital, Zeit und Zins.

(1). 100 fl. Kapital geben in einem Jahre 5 fl. Zins; wie viel Zins werden in derselben Zeit 240 fl. Kapital geben? — Oder kürzer: Wie viel Zins geben 240 fl. Kapital in einem Jahre zu 5 Percent?

Im Kopfe. Wenn 100 fl. jährlich 5 fl. Zins geben, so wird man von 200 fl. doppelt so viel, also 10 fl. bekommen; 20 fl. sind der 5te Theil von 100 fl., also geben sie nur den 5ten Theil des Zinses, nähmlich 1 fl., daher 40 fl. doppelt so viel, also 2 fl.; 200 fl.

geben also 10 fl., 40 fl. geben 2 fl., folglich 240 fl. 10 und 2 d. i. 12 fl. Zins.

Schriftlich.

100 fl. Kap. 5 fl. Zins		100 : 240 = 5 : x
240 " " x " "		1,00 | 12,00 | 12 fl.

Hier schließt man: 100 fl. Kapital geben 5 fl. Interesse, 240 fl. werden gewiß mehr Zins geben; x wird also größer als 5, u. s. w.

(2). Welches Kapital gibt zu 4 Percent jährlich 50 fl. Zins?

Zu 4 Percent heißt: von 100 fl. bekommt man jährlich 4 fl. Zins.

Auflösung im Kopfe. Um 4 fl. jährlichen Zins zu bekommen, muß man 100 fl. Kapital anlegen; um 1 fl. Zins zu erhalten, braucht man nur den 4ten Theil von 100 fl., also nur 25 fl. Kapital anzulegen; um nun jährlich 50 fl. Zins zu haben, muß das Kapital 50mahl so viel, also 50mahl 25 fl. betragen; 5mahl 20 ist 100, 5mahl 5 ist 25, daher 5mahl 25 gleich 125, 50mahl 25 wird also 125 Zehner, d. i. 1250 machen. Um daher jährlich 50 fl. Zins zu bekommen, muß man 1250 fl. Kapital anlegen.

Schriftlich.

100 fl. Kap. 4 fl. Zins	4 : 50 = 100 : x,
x " " 50 " "	woraus x = 1250 fl. folgt.

Hier folgert man: um 4 fl. Zins zu bekommen, muß man 100 fl. Kapital anlegen; um 50 fl. Zins zu erhalten, wird man gewiß mehr Kapital anlegen müssen; x wird also größer als 100 ausfallen.

(3). Ein Kapital gibt in 1 Jahre 248 fl. Interessen, wie viel gibt es in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

Mündlich. In 2 Jahren gibt das Kapital doppelt so viel Zins, also 2mahl 248 fl. d. i. 496 fl.; in

$\frac{1}{2}$ Jahre gibt es die Hälfte von 248 fl., also 124 fl.; zusammen 620 fl. Zins.

Schriftlich.

1 Jahr	248 fl. Zins	$1 : 2\frac{1}{2} = 248 : x$
$2\frac{1}{2}$ "	x " "	also $x = 620$ fl.

Man folgert: in 1 Jahre bekommt man 248 fl. Zins; in $2\frac{1}{2}$ Jahren wird man gewiß mehr Zins bekommen; u. s. w.

(4). 360 fl. Kapital geben in einer gewissen Zeit 48 fl. Zins; wie viel Zins geben in derselben Zeit 1200 fl. Kapital? — 160 fl. Zins.

(5). Ein Kapital gibt jährlich 45 fl. Interesse; wie viel gibt es in 2 Monathen? — $7\frac{1}{2}$ fl.

(6). Ein Kapital gibt in 1 Jahre $149\frac{1}{2}$ fl. Zins; wie lange Zeit wird das Kapital angelegt bleiben müssen, um $398\frac{2}{3}$ fl. Zins zu erhalten? — $2\frac{598}{897} = 2\frac{2}{3}$ Jahre, oder 2 Jahre und 8 Monathe.

(7). Wie viel beträgt der Zins von 1260 fl. Kapital bey 6 Percent in 3 Jahren 4 Monathen? — 252 fl.

(8). Wie viel Zeit muß ein Kapital zu 5 Percent angelegt bleiben, damit es sich verdoppelt? — 20 Jahre.

Die Aufgabe heißt eigentlich: in wie viel Jahren werden 100 fl. Kapital 100 fl. Zins abwerfen, wenn sie in 1 Jahr 5 fl. Zins geben? — Im Kopfe würde man rechnen: um 5 fl. Zins zu bekommen, müssen die 100 fl. Kapital 1 Jahr anliegen, um 100 fl. Zins zu bekommen, müssen sie 20mahl so lange, also 20 Jahre angelegt bleiben.

(9). Zu wie viel Percent muß man 1680 fl. Kapital anlegen, um jährlich 56 fl. Zins zu ziehen? — Zu $3\frac{1}{2}$ Percent.

Die Aufgabe heißt eigentlich, wenn man von 1680 fl. Kapital 56 fl. Zins haben will, wie viel Zins muß man von 100 fl. Kapital verlangen?

(10). Zu wie viel Percent sind 2115 fl. ausgeliehen, wenn sie jährlich 105 fl. 45 Kr. Zins tragen? — Zu 5 Percent.

§. 95.

Arbeitszeit und Lohn.

(1). Eine Köchinn hat monathlich 4 fl. Dienstlohn; wie viel kommt auf 12 Tage?

Mündlich. Auf 1 Monath oder 30 Tage kommen 4 fl., also auf 1 Tag der 30ste Theil von 4 fl., der 30ste Theil von 1 fl. sind 2 Kr., also von 4 fl. 4mahl so viel, nähmlich 8 Kr.; auf 1 Tag kommen also 8 Kr., auf 12 Tage daher 12mahl 8, d. i. 96 Kr. oder 1 fl. 36 Kr.

Schriftlich.

30 Tage 4 fl. $\qquad$ $30 : 12 = 4 : x$,

12 „ x „ $\qquad$ 30 | 48 | $1\frac{3}{5}$ fl.

30

$\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ fl.

Hier folgert man, wenn man in 30 Tagen 4 fl. Lohn bekommt, so wird der Lohn für 12 Tage weniger als 4 fl. betragen; x wird also kleiner als 4 ausfallen, u. s. w.

(2). Jemand hat monathlich 15 fl. Lohn; wie lange muß er dienen, um 120 fl. zu erhalten? — 8 Monathe.

(3). Ein Diener bekommt für $3\frac{1}{2}$ Monathe 33 fl. 15 Kr. Lohn; wie viel kommt auf 1 Monath? — $9\frac{1}{2}$ fl.

(4). Ein Knecht hat alle 2 Monathe 15 fl. Lohn; in wie viel Zeit wird er 225 fl. verdienen? — In $2\frac{1}{2}$ Jahren.

(5). Jemand verdient monathlich 36 fl., und erspart $\frac{1}{4}$ seiner Einnahme; wie viel erspart er in $10\frac{1}{2}$ Monathen? — $94\frac{1}{2}$ fl.

(6). Ein Taglöhner hat das ganze Jahr hindurch 212 fl. verdient; wie hoch stellt er sich im Durchschnitte täglich? — Auf $34\frac{62}{73}$ Kr. oder ungefähr $34\frac{7}{8}$ Kr.

§. 96.

Zahl der Arbeiter, Größe und Dauer der Arbeitszeit.

(1). 10 Menschen machen täglich 8000 Ziegel; wie viel Stücke machen 15 Menschen?

Mündlich. Wenn 10 Menschen 8000 Ziegel machen, so macht 1 Mensch nur den 10ten Theil von 8000, also 800 Ziegel; 15 Menschen machen nun 15mahl so viel, also 12000 Ziegel.

Schriftlich.

10 Menschen	8000 Ziegel	10 :	15 =	8000 : x	
15 „	x „	1,0	12000,0	12000	Ziegel.

(2). Wenn 5 Personen eine Arbeit in 20 Tagen vollenden; wie viele Personen werden erfordert, um damit in 25 Tagen fertig zu werden?

Mündlich. Wenn 5 Personen eine Arbeit in 20 Tagen vollenden, so würde man, um mit derselben Arbeit in 1 Tage fertig zu werden, 20mahl so viel Personen, also 20mahl 5 = 100 Personen aufnehmen müssen; um nun die Arbeit in 25 Tagen zu vollenden, braucht man nur den 25sten Theil von 100 Personen, also nur 4 Personen?

Schriftlich.

5 Pers. 20 Tage		$25 : 20 = 5 : x$
x „ 25 „		25 | 100 | 4 Pers.
		100
		‒ ‒

Folgerung: Wenn in 20 Tagen eine Arbeit von 5 Personen vollendet wird, so braucht man, wenn dieselbe Arbeit erst in 25 Tagen fertig werden soll, gewiß weniger Arbeiter; x wird also kleiner als 5 ausfallen, u. s. w.

(3). 14 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; in wie viel Tagen kommen 12 Arbeiter damit zu Stande?

Im Kopfe. 14 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; 1 Arbeiter würde 14mahl so viel Zeit, also 14mahl 6 = 84 Tage dazu brauchen; 12 Arbeiter brauchen nur den 12ten Theil so viel Zeit als 1 Arbeiter, also den 12ten Theil von 84, d. i. 7 Tage.

Schriftlich.

14 Arb. 6 Tage		$12 : 14 = 6 : x$
12 „ x „		12 | 84 | 7 Tage.
		84
		‒

Man schließt, wenn 14 Arbeiter eine Arbeit in 6 Tagen vollenden, so werden 12 Arbeiter dazu gewiß mehr als 6 Tage brauchen; x muß also größer als 6 werden u. s. w.

(4). 15 Menschen reinigen in einem Tage einen Graben, welcher 24 Klafter lang ist; wie viel Menschen werden in derselben Zeit mit der Reinigung eines Grabens von 72 Klafter Länge fertig? — 45 Menschen.

(5). Ein Damm ist von 9 Arbeitern in 8 Tagen aufgeworfen worden; wie viel Arbeiter werden nöthig seyn, um einen gleich großen Damm in 6 Tagen aufzuwerfen? — 12 Arbeiter.

(6). Um eine Wiese abzumähen, braucht man 12 Mäher durch 6 Tage, der Eigenthümer aber will solche in 4 Tagen abgemähet haben; wie viel Mäher wird er noch aufnehmen müssen? — Um die Wiese in 4 Tagen abzumähen, sind 18 Mäher nöthig; also müssen zu den frühern noch 6 aufgenommen werden.

(7). Ein Canalbau wird dahin berechnet, daß 800 Mann in 10 Monathen fertig werden, derselbe soll aber schon in 4 Monathen fertig seyn; wie viel Mann wird man noch aufnehmen müssen? — Noch 1200 Mann.

§. 97.

Zeit und Ergebniß.

(1). In einer Haushaltung gibt man alle 4 Tage 8 fl. 40 Kr. aus; wie viel in 25 Tagen?

Im Kopfe. Wenn man in 4 Tagen 8 fl. 40 Kr. ausgibt, so kommt auf 1 Tag nur der 4te Theil davon, nähmlich 2 fl. 10 Kr.; auf 25 Tage also 25mahl 2 fl. 10 Kr.; 25mahl 2 fl. sind 50 fl., 25mahl 10 Kr. sind 25 Zehner, d. i. 4 fl. 10 Kr., zusammen 54 fl. 10 Kr.

Schriftlich.

4 Tage	$8\frac{2}{3}$ fl.	$4 : 25 = 8\frac{2}{3} : x$
25 „	x	$8\frac{2}{3} \times 25 = \frac{26}{8} \times 25 = \frac{650}{8}$
		$x = \frac{650}{3} : 4 = \frac{650}{12} = \frac{325}{6} = 54\frac{1}{6}$ fl.

(2). In einer Mühle mahlte man in 2 Stunden 15 Metzen Korn; wie viel Zeit wird man brauchen, um 96 Metzen zu mahlen? — $12\frac{4}{5}$ Stunden.

(3). Jemand nimmt monathlich 66 fl. 40 Kr. ein; wie viel kommt auf 5 Tage? — $11\frac{7}{9}$ fl.

(4). Jemand gibt in 7 Tagen 12 fl. 40 Kr. aus; wie lange wird er verhältnißmäßig mit 126 fl. 40 Kr. ausreichen? — Durch 70 Tage.

§. 98.

Gewicht der Fracht, Weite des Weges und Frachtlohn.

(1). Für 2 Ztr. Waare muß man 7 fl. Fracht zahlen; wie viel für 20 Ztr.

Mündlich. Für 2 Ztr. muß man 7 fl. Fracht zahlen, also für 1 Ztr. nur die Hälfte davon, nähmlich $3\frac{1}{2}$ fl., daher für 20 Ztr. 20mahl $3\frac{1}{2} = 70$ fl. — Oder: für 2 Ztr. zahlt man 7 fl., von 20 Ztr. wird man 10mahl so viel, also 70 fl. Fracht zahlen.

Schriftlich.

2 Ztr. 7 fl. Fracht	$2 : 20 = 7 : x$
20 „ x „	2 | 140 | 70 fl.
	14

(2). Ein Fuhrmann verspricht, 10 Ztr. für ein gewisses Frachtgeld 9 Meilen weit zu führen; wie weit wird er für eben so viel Geld 15 Ztr. führen?

Mündlich. Wenn man 10 Ztr. um ein gewisses Geld 9 Meilen weit führt, so wird man 1 Ztr. um dasselbe Geld 10mahl so weit, also 90 Meilen führen; man wird daher 15 Ztr. den 15ten Theil von 90, also 6 Meilen weit führen.

Schriftlich.

10 Ztr. 9 Meilen	$15 : 10 = 9 : x$
15 „ x „	15 | 90 | 6 Meilen.
	90

Man schließt hier: Wenn man 10 Ztr. um ein gewisses Frachtgeld 9 Meilen weit führt, so wird man 15 Ztr. um dasselbe Geld nicht so weit führen können; x wird also kleiner als 9 ausfallen; u. s. w.

(3). Ein Fuhrmann verlangt um eine bestimmte Waare 5 Meilen weit zu führen, 2 fl. 20 Kr.; wie viel Fracht wird man ihm zahlen, daß er dieselbe Waare $12\frac{1}{2}$ Meilen weit führe? — 5 fl. 25 Kr.

(4). $18\frac{1}{2}$ Ztr. führt der Fuhrmann für ein bestimmtes Frachtgeld 12 Meilen weit, nun setzt man ihm noch $2\frac{1}{4}$ Ztr. dazu; wie weit wird er diese vermehrte Last um dieselbe Fracht führen? — $10\frac{58}{83}$ Meilen.

(5). Ein Zentner wird um 32 Kr. 6 Meilen weit verführt; wie weit um 1 fl. 20 Kr.? — 15 Meilen.

(6). Wie viel Frachtgeld muß man für $8\frac{1}{4}$ Ztr. bezahlen; wenn für 3 Ztr. $2\frac{1}{2}$ fl. Fracht gezahlt wird? — $6\frac{7}{8}$ fl.

(7). Ein Fuhrmann erhält für seine ganze Ladung, welche $32\frac{3}{5}$ Ztr. beträgt, 42 fl. Fracht, und für einen Ballen dieser Ladung beträgt die Fracht 1 fl. 45 Kr.; wie viel wiegt ein solcher Ballen? — 1 Ztr. 35 ℔.

Die ganze Ladung hat 24 Ballen.

§. 99.

Länge, Breite, Höhe und Inhalt.

(1). Jemand läßt Leinwand machen; wenn diese $\frac{3}{4}$ Ellen breit gemacht wird, so bekommt er aus dem hergegebenen Garn 54 Ellen: wie viel Ellen wird er nun bekommen, wenn die Leinwand 1 Elle breit seyn soll?

Im Kopfe. Bey $\frac{3}{4}$ Ellen Breite bekommt man 54 Ellen; bey $\frac{1}{4}$ Ellen Breite würde man 3mahl so viel, also 162 Ellen bekommen; bey der Breite von

1 Elle wird man nun den 4ten Theil so viel Ellen erhalten, als bey der Breite von $\frac{3}{4}$ Elle, also den 4ten Theil von 162, nähmlich $40\frac{1}{2}$ Ellen.

Schriftlich.

$\frac{3}{4}$ Ell. Breite 54 Ell. Länge $1 : \frac{3}{4} = 54 : x$
1 „ x „ $\frac{162}{4} = 40\frac{2}{4} = 40\frac{1}{2}$ Elle.

Hier wird gefolgert: wenn die Leinwand $\frac{3}{4}$ Ellen breit gemacht wird, bekommt man 54 Ellen; macht man die Leinwand 1 Elle breit, also breiter, so wird man gewiß ein minder langes Stück bekommen; x wird also kleiner als 54 ausfallen; u. s. w.

(2). Ein viereckiges Gefäß, welches 1 Fuß 4 Zoll hoch ist, hält 88 Maß; wie viel Maß wird ein eben so weites Gefäß, welches nur 1 Fuß hoch ist, halten?

Mündlich. Auf 1 Fuß 4 Zoll d. i. auf 16 Zoll Höhe gehen 88 Maß, auf 1 Zoll Höhe geht nur der 16te Theil davon, also $5\frac{1}{2}$ Maß; auf 12 Zoll Höhe daher 12mahl $5\frac{1}{2}$ Maß, d. i. 66 Maß.

Schriftlich.

16 Zoll hoch 88 Maß $16 : 12 = 88 : x$,
12 „ x „ woraus $x = 66$ Maß.

(3). Eine Allee soll angelegt werden; pflanzt man die Bäumchen 12 Fuß von einander, so sind 3660 Stück erforderlich; wie viele Bäume wird man benöthigen, wenn man sie nur 10 Fuß von einander setzt? — 4392 Stücke.

(4). Jemand braucht für ein Kleid zum Unterfutter $4\frac{1}{2}$ Ellen $\frac{3}{4}$ Ellen breite Leinwand; wie viel Leinwand wird er nun brauchen, wenn diese 1 Elle breit ist? — $3\frac{3}{8}$ Ellen.

(5). Zu einem Dutzend Hemden braucht man

42 Ellen 5 Viertel breite Leinwand; wie viel von einer 4 Viertel breiten? — $52\frac{1}{2}$ Elle.

(6). Zu dem Überzuge von 6 Sesseln braucht man 18 Ellen 5 Viertel breiten Zeug; wie breit müßte der Zeug seyn, um mit 15 Ellen auszukommen? — 6 Viertel.

(7). Ein Garten ist 28 Klafter lang und 10 Klafter breit; wie breit muß ein anderer Garten, dessen Länge 20 Klafter beträgt, gemacht werden, damit beyde Gärten die nähmliche Fläche haben? — 14 Klafter.

(8). Jemand will einen Acker, welcher 15 Klafter lang, und 6 Klafter breit ist, um 1 Klafter schmäler machen; um wie viel länger muß dann der Acker ausfallen, damit er mit dem frühern gleich groß bleibe? — Der Acker muß dann 18 Klafter lang, also um 3 Klafter länger gemacht werden, als er früher war.

§. 100.

Zeit, Geschwindigkeit und zurückgelegter Raum?

(1). Jemand legt in 4 Tagen 36 Meilen zurück; wie viel in 17 Tagen?

Mündlich. Wenn man in 4 Tagen 36 Meilen macht, so legt man in 1 Tag den 4ten Theil von 36, also 9 Meilen, daher in 17 Tagen 17mahl $9 = 153$ Meilen zurück.

Schriftlich.

4 Tage	36 Meilen	$4 : 17 = 36 : x$
17 "	x "	woraus $x = 153$ Meilen.

(2). Ein Bothe geht täglich 6 Meilen weit, und braucht, um einen gewissen Ort zu erlangen, 12 Tage;

wie viel Zeit würde er brauchen, wenn er täglich 8 Meilen zurücklegen möchte?

Im Kopfe. Wenn man durch 12 Tage täglich 6 Meilen macht, so legt man zusammen 12mahl 6 = 72 Meilen zurück, der Ort, an den der Bothe gelangen will, ist also 72 Meilen entfernt; wenn nun der Bothe täglich 8 Meilen zurücklegen möchte, so würde er den 8ten Theil von 72, also 9 Tage brauchen.

Schriftlich.

6 Meilen tägl. 12 Tage	8 : 6 = 12 : x
8 〃 x 〃	8 | 72 | 9 Tage.
	72
	=

Man schließt: wenn man täglich 6 Meilen macht, so braucht man 12 Tage, um an einen gewissen Ort zu kommen; wenn man täglich 8 Meilen macht, so wird man, um an denselben Ort zu kommen, weniger Tage brauchen; x wird also kleiner als 12 ausfallen; u. s. w.

(3). An einen Ort kann man in 4 Tagen gelangen, wenn man täglich durch 9 Stunden fährt; wie viel Stunden muß man täglich fahren, um diese Reise in 3 Tagen zu vollenden? — 12 Stunden.

(4). Ein Eilbothe kann in 15 Tagen an den Ort seiner Bestimmung kommen, wenn er täglich 16 Meilen macht; er kommt aber schon in 12 Tagen an; wie viel Meilen hat er täglich zurückgelegt? — 20 Meilen.

(5). Wenn man täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen macht, erreicht man das Ziel seiner Reise in $17\frac{1}{2}$ Tagen; wie viel Meilen muß man täglich zurücklegen, um diese Reise in 15 Tagen zu vollenden? — $5\frac{1}{4}$ Meilen.

§. 101.

Münzen, Maße und Gewichte.

(1). 14 preußische Thaler geben 20 fl. Conventions-Münze; wie viel fl. Conv. Münze betragen 30 preußische Thaler?

Im Kopfe. 30 ist 2mahl 14 und noch 2; 2mahl 14 oder 28 Thlr. werden 2mahl 20 d. i. 40 fl. C. M. geben; 2 Thlr. sind der 7te Theil von 14 Thlrn., sie werden daher den 7ten Theil von 20 fl., also $2\frac{6}{7}$ fl. betragen; zusammen $42\frac{6}{7}$ fl.

Schriftlich.

14 preuß. Thl. 20 fl. C. M. $\quad 14 : 30 = 20 : x$
30 " x " $\quad$ also $x = 42\frac{6}{7}$ fl. C. M.

(2). Wie viel Gulden betragen 648 Franken, wenn 51934 Franken 20000 Gulden geben? — Nahe 249 fl. 33 Kr.

(3). Wie viel Gulden betragen $243\frac{1}{2}$ russische Rubel, wenn 13 Rubel 20 Gulden ausmachen? — $374\frac{8}{13}$ fl.

(4). 100 Venetianer Ellen machen 82 Wiener Ellen; wie viel Wiener Ellen geben 30 Venetianer Ellen? — $24\frac{3}{5}$ Wiener Ellen.

(5). Wie viel Eimer halten 240 Conzi Wein; wenn 2 Conzi 3 Eimer geben? — 360 Eimer.

(6). Wie viel Wiener Metzen betragen 92 böhmische Strich; wenn 23 Strich 35 Wiener Metzen ausmachen? — 140 Metzen.

(7). Wie viel Triester Star machen $749\frac{1}{2}$ Wiener Metzen; wenn man 5 Star auf 6 Metzen rechnet? — $624\frac{7}{12}$ Star.

(8). Wie viel Wienrr ℔ geben 98 Lemberger ℔, wenn 4 Lemberger ℔ 3 Wiener ℔ betragen? — $73\frac{1}{2}$ Wiener ℔.

§. 102.

Preis des Kornes und Gewicht des Brotes.

(1). Wenn der Metzen Korn 2 fl. kostet, so wiegt ein Zweygroschenbrot $3\frac{1}{4}$ ℔; wie schwer wird man das Zweygroschenlaib ausbacken, wenn der Metzen Korn mit 2 fl. 30 Kr. bezahlt werden muß?

Im Kopfe. Um 2 Groschen bekommt man $3\frac{1}{4}$ ℔ Kornbrot, um 2 fl. also 20mahl so viel, nähmlich 65 ℔; folglich erhält man bey dem Preise von 2 fl. aus einem Metzen Getreide 65 ℔ Brot; wird nun der Metzen mit 2 fl. 30 Kr. bezahlt, so wird man für 2 fl. 30 Kr. 65 ℔ Kornbrot erhalten; 2 Groschen sind aber in 2 fl. 30 Kr. 25mahl enthalten, also wird man für 2 Groschen auch nur den 25sten Theil von 65 ℔ bekommen; der 5te Theil von 65 ist 13, und davon wieder der 5te Theil sind $2\frac{3}{5}$ ℔; das Zweygroschenbrot wird also nur $2\frac{3}{5}$ ℔ wiegen.

Schriftlich.

2 fl. der Metzen $3\frac{1}{4}$ ℔ $\quad 2\frac{1}{2} : 2 = 3\frac{1}{4} : x$

$2\frac{1}{2}$ 〃 x 〃 woraus $x = 2\frac{3}{5}$ ℔.

Man beurtheilt: wenn der Metzen Korn 2 fl. gilt, so wird ein Zweygroschenlaib Kornbrot $3\frac{1}{4}$ ℔ wiegen; wird ein Zweygroschenlaib, wenn der Metzen Korn 2 fl. 30 Kr. gilt, mehr oder weniger Gewicht haben? Gewiß weniger; x wird also kleiner als $3\frac{1}{4}$ ausfallen; daher u. s. w.

(2). Eine Kreuzersemmel wiegt $7\frac{1}{2}$ Loth, wenn der Metzen Weizen 3 fl. 20 Kr. kostet; wie viel muß der Metzen kosten, damit eine solche Semmel 8 Loth schwer ausgebacken werden könne? $3\frac{1}{8}$ fl.

(3). Wenn der Metzen Korn 1 fl. 54 Kr. gilt, so wiegt ein Groschenlaib 1 ℔ 23 Lth.; wie schwer wird ein solches Brot seyn, wenn der Metzen Korn 2 fl. 12 Kr. kostet? 1 ℔ $15\frac{1}{2}$ Lth.

(4). Der Metzen Weizen, welcher früher 2 fl. 50 Kr. kostete, steigt um 20 Kr.; um wie viel leichter wird man nun eine Mundsemmel, welche früher $4\frac{3}{4}$ Loth wog, ausbacken? — Die Mundsemmel muß $4\frac{1}{4}$ Loth schwer, also um $\frac{1}{2}$ Loth leichter ausgebacken werden.

(5). Wenn ein Metzen Roggen 162 Groschen W. W. kostet, wiegt ein Groschenlaib 1 ℔ 14 Lth.; um wie viel muß der Metzen Roggen im Werthe fallen, damit man das Groschenlaib um 8 Lth. schwerer ausbacken könne? — Der Metzen Roggen muß, damit ein Groschenlaib 1 ℔ 22 Lth. wiegen könne, 138 Groschen kosten, also um 24 Gr. im Werthe fallen.

Inhalt.

Fünftes Hauptstück.

Sechstes Hauptstück.

Siebentes Hauptstück.

Achtes Hauptstück.

enb. Gedruckt bey Leopold Grund.