# VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Dragi bralci, v četrti številki prejšnjega letnika smo zastavili nalogo o gepardu, ki lovi gazelo. Veseli smo, da je naloga naletela na dober odziv, in v povzetku odgovorov vam bomo predstavili glavni oris rešitve. Seveda smo imeli odgovor „na zalogi“ in se z izjemo nekaterih podrobnosti ujema s tistim, ki ga je v knjigi „Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun“ opisal že France Križanič. Na to rešitev so nas opozorili tudi pozorni bralci.

Povzemimo nalogo: v začetku je gazela v izhodišču koordinatnega sistema, ko opazi geparda pa začne bežati v smeri osi $y$ s hitrostjo $v_0$. Gepard je na začetku na osi $x$ pri koordinati $-x_0 < 0$, nato pa lovi gazelo s stalno hitrostjo $v_1$ tako, da je vseskozi usmerjen proti gazeli. Gepard ujame gazelo v točki $(0, y_0)$.

Gibanje geparda je opisano s parametrično krivuljo $t \mapsto (x(t), y(t))$. Očitno je $t \mapsto x(t)$ strogo naraščajoča funkcija, zato lahko gepardovo pot opišemo z grafom funkcije $y = y(x)$. Ker je gepard vseskozi obrnjen proti gazeli, je smerni koeficient tangente na krivuljo $y(x)$ v točki, ki jo gepard doseže ob času $t$, enak:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y - v_0 t}{x}\,. \tag{1}$$

Iz te enačbe želimo eliminirati čas, zato jo prepišemo v $xy' = y - v_0 t$ in odvajamo po $x$: $y' + xy'' = y' - v_0 t'$, kjer $t'$ označuje $dt/dx$. Komponenta gepardove hitrosti v smeri osi $x$ je

$$\frac{dx}{dt} = v_1 \cos\varphi = \frac{v_1}{\sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Če to upoštevamo v preoblikovani enačbi (1), dobimo

$$xy'' = -k\sqrt{1 + y'^2}\,,$$

kjer smo označili $k = v_0/v_1$. V enačbi lahko ločimo spremenljivki

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -k\frac{dx}{x}$$

in integriramo. Integral na levi spada med osnovne integrale in ga lahko napišemo kot $\operatorname{arsh} y'$ ali pa kot dolgi logaritem $\ln(y' + \sqrt{y'^2 + 1})$. Dobimo

$\operatorname{arsh} y' = -k \ln|x| + c$. Začetni pogoj narekuje, da je odvod gepardove krivulje enak nič, saj je gepard obrnjen proti gazeli, ki je takrat v izhodišču: $0 = -\ln x_0^k + c$ in zato

$$y' = \operatorname{sh} \ln \frac{x_0^k}{|x|^k} = \operatorname{sh} \ln \frac{x_0^k}{(-x)^k}\,.$$

Z uporabo $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ dobimo

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^k}{(-x)^k} - \frac{(-x)^k}{x_0^k}\right).$$

Ponovno integriramo in upoštevamo začetni pogoj $y(-x_0) = 0$:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{(-x)^{k+1}x_0^{-k}}{1+k} - \frac{x_0^k(-x)^{1-k}}{1-k}\right) + \frac{x_0 k}{1-k^2}\,. \tag{2}$$

Na podoben način pridemo do enakega rezultata, če najprej zapišemo dolžino poti, ki jo do trenutka $t$ opravi gepard: $s = v_1 t$. Pot izrazimo še s krivuljnim integralom in dobimo zvezo:

$$t = \frac{1}{v_1}\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,. \tag{3}$$

V tem času gazela priteče vzdolž osi $y$ do $v_0 t$. Ker je gepard usmerjen proti gazeli, velja

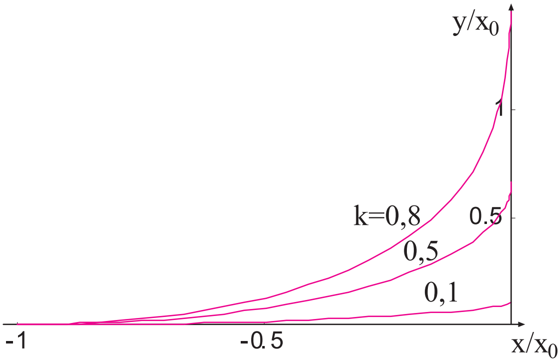
$$y' = \frac{y - v_0 t}{x} = \frac{y - k\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx}{x}\,.$$

Enačbo pomnožimo z $x$ in odvajamo po $x$. Spomnimo: če odvajamo integral neke funkcije po spremenljivki v meji, je tak odvod enak vrednosti funkcije na meji: $\frac{d}{dx}\int_{konst}^{x} f(u)\,du = f(x)$. Dobimo seveda enako kot prej

$$y' + y''x = y' - k\sqrt{1 + y'^2}\,.$$

Pot geparda za tri različna razmerja hitrosti $k = 0.1;\ 0.5;\ 0.8$ kaže slika 1. Kadar je gepard le malo hitrejši od gazele ($k \to 1$), se krivulja skoraj asimptotično približuje navpični osi in lov lahko traja zelo dolgo.

Čas, ki ga gepard potrebuje, da ujame gazelo, bi lahko izračunali iz (3). Lažje pa pridemo do istega rezultata, če izračunamo čas, ki ga do konca porabi gazela. Konec se zgodi v točki $(0, y_0)$ na osi $y$. Te točke ni težko




**Slika 1**

izračunati iz (2): $y_0 = \frac{kx_0}{1-k^2}$. Do te točke gazela teče s konstantno hitrostjo $v_0$ in za pot potrebuje

$$t = \frac{x_0}{v_1(1-k^2)} \, .$$

Pri $k \to 1$ gre čas $t \to \infty$. Za $k > 1$ bi dobili $t < 0$, kar pa ni fizikalno smiseln rezultat. Če je gepard počasnejši od gazele, je seveda ne bo ujel.

Povejmo še zgodbo o kmetu in prašičku. Kmet stoji v oglišču kvadratne ograde, v oglišču diagonalno nasproti zeva luknja, prašiček pa je v sosednjem oglišču. Prašiček se v trenutku, ko začnemo meriti čas, požene s hitrostjo $v_0$ proti luknji, kmet pa, enako kot prej gepard, s hitrostjo $v_1$ ves čas teče v smeri proti prašičku. Kolikšna vsaj mora biti kmetova hitrost, da prašička ujame pred luknjo? Najmanjšo hitrost potrebuje v mejnem primeru, ko prašička ujame pri luknji. Krivulja gibanja kmeta je enaka kot pri gepardu. Kmet ujame prašička, če je $y(x = 0) = x_0$, saj smo privzeli kvadratno ograda. Pogoju zadosti $k$, ki je rešitev enačbe $k = 1 - k^2$. Fizikalno smiselna rešitev je $k = (\sqrt{5} - 1)/2$ oziroma $v_1 = (\sqrt{5} + 1)v_0/2 \approx 1.618 v_0$.

Ob obravnavi naloge z gepardom se je cenjenemu bralcu porodila podobna zanimiva naloga, ki vam jo podajamo v premislek. Ime naloge je *Gospod Hulot in njegov pes gresta na sprehod.* Pes je na vrvici, ki jo g. Hulot krajša z enakomerno hitrostjo. Po kakšni krivulji se giblje pes, če g. Hulot koraka s konstantno hitrostjo naravnost v smeri pravokotno na začetno smer vrvice?

*Aleš Mohorič*