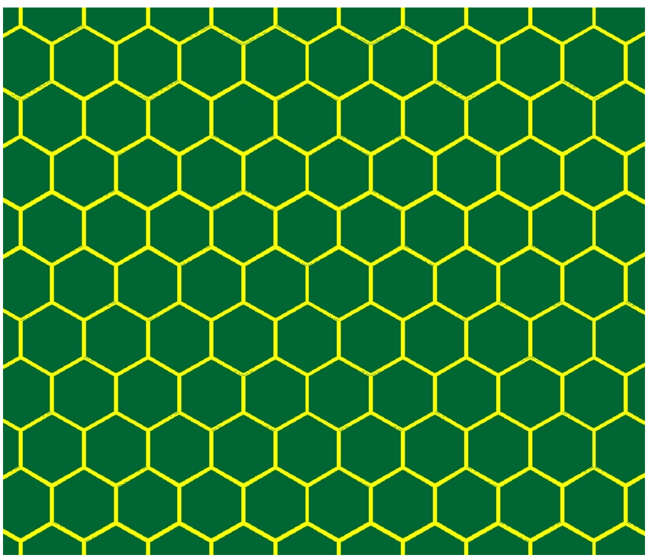
Sat

Andrej Likar

Sat je skupek voščenih celic, kamor čebele shranjujejo med, cvetni prah in zalego. Očara nas s pravilno zgradbo, saj so pravilni šestkotniki tesno zloženi drug ob drugem (glej sliko 1). Le kako se čebelam posreči zgraditi tako pravilno zgradbo?



SLIKA 1.
Celice v satu so skoraj pravilni šestkotniki.

Že od pamtiveka so ljudje slutili, da se za zgradbo sata skriva nekakšen globlji smisel. Čebelji vosek morajo čebele uporabiti čim bolj smotrno, saj ga ni lahko narediti. Vosek nastane s presnovo medu v čebeljih voskovnih žlezah. Za kilogram voska porabijo čebele 8,4 kilograma medu. Zato je misel, da je satovje zgrajeno, kar se da premišljeno, povsem razumljiva. In res, ameriški matematik Thomas Hales je nedavno tega dokazal *satno domnevo*. Sat iz pravilnih šestkotnikov je najekonomičnejši: pri dani ploščini celic P_0, s tem pa tudi pri njeni prostornini, je poraba voska pri dani debelini sten najmanjša. Sat z drugačno obliko celic pri enaki ploščini P_0 in enaki debelini sten bi bil glede voska bolj potraten. To je pomembna zmaga za čebele!

Pa poglejmo na treh primerih, kako je s to domnevo. Denimo, da bi najprej ravnino prekrili s kvadrati, kjer je ena stranica kateregakoli kvadrata hkrati stranica drugega kvadrata. Kakšno je razmerje med vsoto obsegov kvadratov v velikem delu ravnine in vsoto njihovih ploščin? Obseg enega kvadrata je v povprečju $ob_p = 2a$, kjer je a njegova stranica. Ena stranica je namreč hkrati tudi stranica sosednjega kvadrata, zato je ne smemo šteti dvojno. Če izberemo kvadratovo ploščino $P_0 = a^2$, je razmerje med povprečnim obsegom in to izbrano ploščino

- $$\frac{ob_p}{P_0} = 2\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

Prekrivanje z enakostraničnimi trikotniki da

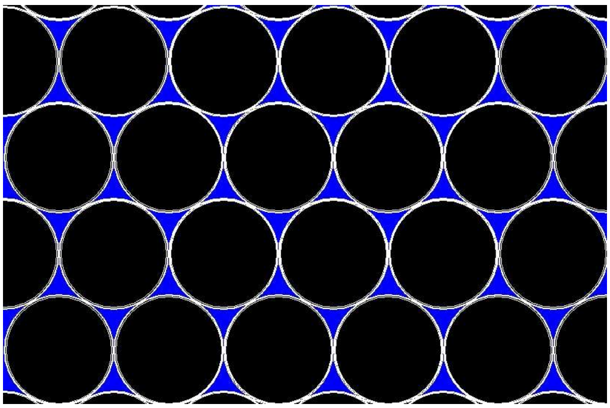
- $$\frac{ob_p}{P_0} = \sqrt[4]{27}\,\frac{1}{\sqrt{P_0}} = 2,280\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

Ti dve vrednosti primerjajmo s prekrivanjem v obliki sata:

- $$\frac{ob_p}{P_0} = \sqrt[4]{12}\,\frac{1}{\sqrt{P_0}} = 1,861\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

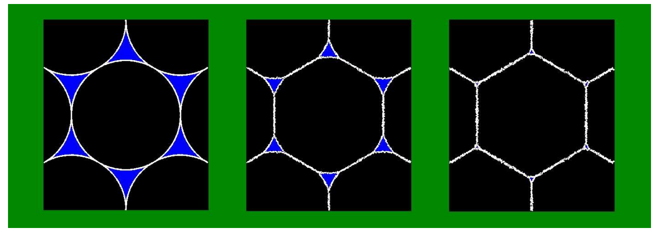
Najbolj ekonomično prekrivanje od teh je zadnje, saj je koeficient pred $\frac{1}{\sqrt{P_0}}$ tu najmanjši. Hales je dokazal, da je to najmanjši koeficient med vsemi možnimi prekrivanji s poljubnimi liki enake ploščine.

Čebelja »pamet« nas sicer lahko očara, a smo vseeno v dvomih; ničesar ne vemo o debelini sten. So tudi te optimalno izbrane? Ekonomičnost bi se izboljšala, če bi čebele delale nekoliko večje celice. Ali je velikost celic tudi kako optimirana? O tem *satna domneva* nič ne pove.



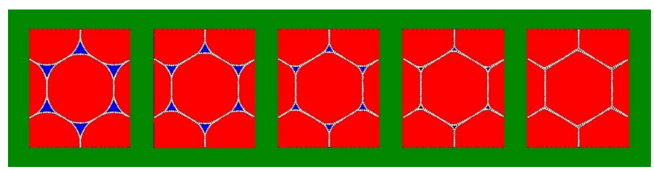
SLIKA 2.
Prvotne celice v satu so okrogle, med njimi je precej praznega prostora (modro).

Velikost celic je določena z velikostjo same čebele. Kako gradijo čebele sat? Vosek z usti pregnetejo in okoli sebe zgradijo sprva okrogle celice, ki jih naslonijo na dve že zgrajeni. Sat iz okroglih celic bi imel prav slabo ekonomijo, saj je koeficient pri njem kar 3,54 v primeri z najmanjšim 1,861. Nastane tudi precej praznega prostora med celicami (glej sliko 2). Kmalu zatem pa čebele zapolnijo prazne prostore z naključnim brcanjem v stene sprva okroglih celic. Čebele vosek s telesi segrejejo na temperaturo okrog 35 °C. Tedaj je mehak in gnetljiv ter se brcam zlahka vdaja. Brcanje ja lahko povsem naključno, ni nujno, da je usmerjeno proti vrzelim v prvotnem satu. Brcanje pripelje do sata s celicami v obliki pravilnih šestkotnikov. Da bi to trditev podprl, sem napisal računalniški program, kjer začnem z okroglo celico, potem pa z naključnimi radialnimi sunki po malem celico preoblikujem. Vsak sunek nekoliko premakne steno celice. V praznem prostoru, kamor čebele ne morejo, ni sunkov v nasprotni smeri, v sosednjih celicah pa čebele, ki so tam, poskrbijo za nasprotne sunke. S tem se širjenje sten ustavi. O pravilnih šestkotnikih čebele ne vedo ničesar, pojavijo se sami od sebe. Preobrazba iz krožne celice v šestkotno je prikazana na sliki 3. Na levi je originalna celica, ki jo čebele naredijo najprej, potem pa se z majhnimi, naključno velikimi sunki, celica preoblikje v pravilni šestkotnik.



SLIKA 3.
Tudi z naključnimi sunki v radialni smeri se sprva okrogla celica preobrazi v šestkotno, prazni prostori (modro) se zapolnijo.

Preoblikovanje v šestkotnike opazimo tudi pri drugih pojavih. Če gruči enako velikih vodnih balonov omejimo širjenje, se pri polnjenju začno preoblikovati v šestkotnike in se postavijo kot celice v satu. V programu prikažemo polnjenje balonov z vodo z enakomernimi sunki (glej sliko 4). Tudi prsti na rokah, ki jih z vrhovi blazinic staknemo in vtisnemo ene proti drugim, tvorijo značilne kote 120 (glej sliko 5). Stisnjene paličice, ovite z vato, so prav tako podobne satu (glej sliko 6).

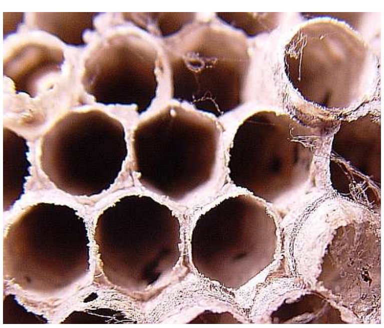


SLIKA 4.
Sprva okrogli baloni postopno dobivajo v prerezu obliko šestkotnikov.

Izjemne lastnosti voska torej pomagajo čebelam priti do najbolj ekonomičnega sata. Vosek je gnetljiv in voljan pri višji temperaturi in zelo trden pri nižji, kar omogoča zanesljivo hrambo medu in cvetnega prahu ter dobro zaščito zaroda. Osja gnezda imajo nekoliko bolj okrogle celice (glej sliko 7), čeprav tudi tu najdemo predele zelo podobne satu. Pri osah je gradivo podobno papirju, ki nima lastnosti voska. Izdelava takega gradiva pa stane ose precej manj, kot stane čebele izdelava voska.

SLIKA 5.
Blazinice prstov na rokah se pri tesnem stiku postavijo pod značilnim kotom 120°.

SLIKA 6.
Tudi stisnjene vatirane paličice so podobne satu.



SLIKA 7.
Zapuščeno osje gnezdo – celice so skoraj okrogle.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

░	15\	14\	░	░	░	░	░
\12			░	░	░	17\	8\
\16			10\	░	8\9		
░	\3			5\17			
░	░	\17				░	░
░	░	░	\3			░	░

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

░	15\	14\	░	░	░	░	░
\12	8	4	░	░	░	17\	8\
\16	7	9	10\	░	8\9	8	1
░	\3	1	2	5\17	1	9	7
░	░	\17	8	4	5	░	░
░	░	░	\3	1	2	░	░

× × ×