SAMMLUNG VIEWEG

TAGESFRAGEN AUS DEN GEBIETEN
DER NATURWISSENSCHAFTEN
UND DER TECHNIK

Heft 35

Theorie der Gezeitenkräfte

Von

Dr. Aloys Müller

FRIEDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHWEIG

E

Die **„Sammlung Vieweg“** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Verzeichnis der bisher erschienenen Hefte siehe 3. und 4. Umschlagseite.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Kosmische Physik (Astrophysik, Meteorologie und wissenschaftliche Luftfahrt — Aerologie — Geophysik):

Herr Geh. Ober-Reg.-Rat Professor **Dr. med. et phil. R. Assmann** in Gießen;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Elektro-, Maschinen-, Schiffbautechnik, Flugtechnik, Motoren, Brückenbau):

Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde,** Techn. Hochschule, Stuttgart;

Biologie (Allgemeine Biologie der Tiere und Pflanzen, Biophysik, Biochemie, Immunitätsforschung, Pharmakodynamik, Chemotherapie):

Herr Professor **Dr. phil. et med. Carl Oppenheimer,** Berlin-Grunewald.

Theorie der Gezeitenkräfte

Von

Dr. Aloys Müller

Mit 17 Abbildungen

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1916

Vorwort.

Die Schrift will die Diskussion über den Ursprung des Kraftfeldes, dem die charakteristischen Eigenschaften der Tiden ihre Form verdanken, in hoffentlich endgültiger Weise zum Abschluß bringen. Weil ich sie gern in weiten Kreisen wirksam sähe, habe ich durch sorgfältige Disposition ihr Verständnis zu fördern gesucht und das Mathematische elementar gehalten. Allerdings ist ihre Mathematik dadurch etwas ungleichmäßig geworden.

Röttgen bei Bonn, April 1916.

Dr. Aloys Müller.

Inhaltsverzeichnis.

VI. Die Zentrifugalkrafttheorie der fluterzeugenden Beschleunigungen.

VII. Die halbtägigen Perioden der Tiden.

VIII. Die Beziehung der Theorie der Gezeitenkräfte zum kopernikanischen Weltsystem.

I. Das Problem.

§ 1. Die Ursachen der Oberflächengestaltung der Meere.

Wenn man unter den Ursachen der Oberflächengestaltung der Meere die Einflüsse versteht, die die relative Lage des Niveaus der Meere oder Teile von ihnen zum Erdschwerpunkt bestimmen, so kann man die hauptsächlichsten in folgender Weise unterscheiden:

A. Ständig vorhandene oder regelmäßig wirkende Ursachen.

I. Ursachen irdischen Ursprungs.

1. Die Anziehungskraft der Erde.
2. Die Rotation der Erde.
3. Die Verteilung der Kontinentalmassen.
4. Periodische meteorologische Einflüsse: Wind, Luftdruck, Regenfall.

II. Ursachen außerirdischen Ursprungs.

1. Die Anziehungskräfte von Mond und Sonne.
2. Die Revolution der Erde in den Systemen Erde–Mond und Erde–Sonne.
3. Die Neigungen der Bahnebenen von Mond und Erde gegen die Äquatorebene.

B. Nicht regelmäßig wirkende Ursachen.

1. Seismische Vorgänge.
2. Vulkanische Vorgänge.
3. Temperatur- und Salzgehaltsänderungen des Meerwassers.
4. Nicht periodische meteorologische Einflüsse, die sich wie vorhin zerlegen lassen.

Die nicht regelmäßig wirkenden Ursachen interessieren uns nicht weiter. Von den regelmäßig wirkenden scheiden wir diejenigen aus, die eine symmetrisch um die Erdachse verteilte und konstante Niveaufläche des Meeres herstellen. Es sind dies die Anziehungskraft der Erde und die Rotationszentrifugalkraft. Die übrigbleibenden sind nun die Ursachen der Gesamterscheinung der Gezeiten oder Tiden. Die Tiden sind eine Wellenerscheinung, also eine periodische Störung der konstanten Niveaufläche. Da mit allen Wellen in Flüssigkeiten auch Strömungen verbunden sind, die beim Wellenberg in der Fortschreitungsrichtung der Welle, beim Wellental in der umgekehrten Richtung erfolgen, so gibt es auch Gezeitenströmungen, die entsprechend der Wellenlänge (bis zu 20000 km) große Bereiche umfassen.

Das Wort „Tiden“ ist ein plattdeutsches Wort aus der Seemannssprache. Von dem Plural „die Gezeiten“ bildet man neuerdings häufig den Singular „die Gezeit“.

§ 2. Die charakteristischen Eigenschaften der Tiden.

Um die Ursachen der Gesamterscheinung der Tiden noch genauer auseinanderhalten zu können, müssen wir die Frage nach den charakteristischen Eigenschaften der Tiden erheben.

Man darf darunter nicht die praktischen oder für den einzelnen Hafenort wichtigsten Eigenschaften verstehen. Die letzteren sind Höhe der Flut und Zeit des Eintreffens. Wenn aber ein Hafenort diese Werte für jeden Fall aus seinen Konstanten oder Tabellen bestimmen kann, dann ist es ihm völlig gleichgültig, ob beispielsweise dieselbe Periode der Tiden, die er kennt, allgemein gilt oder nicht. Um die charakteristischen Eigenschaften zu finden, müssen wir von allen örtlichen Besonderheiten abstrahieren und deshalb die Erde als Ganzes ins Auge fassen. Dann ergibt sich sofort als vornehmste Eigenschaft, die die Tidenerscheinung charakterisiert, die Tatsache, daß im Durchschnitt an zwei antipodischen Punkten der Erde Hochwasser bzw. Niedrigwasser ist. Ferner lassen sorgfältige Beobachtungen erkennen, daß die Amplitude der Nadirflut etwas kleiner ist als die der Zenitflut. Dieser Unterschied ist aber nicht mit der sogenannten täglichen Ungleichheit zu verwechseln; die letztere ist eine Erscheinung für denselben Ort außerhalb des Äquators, also ein Ortswert, und eine Folge der Neigungen der Mond- und Erdbahn gegen die Äquatorebene (§ 25). Die charakteristischen Eigenschaften sind also:

1. Die harmonische Dualität der gleichen Tidenphasen.
2. Der Maximalwert der Zenitflut.

§ 3. Primäre und sekundäre Ursachen.

Die Ursachen, von denen die genannten charakteristischen Eigenschaften der Tiden herrühren, nennen wir die primären Ursachen; die übrigen sind sekundärer Natur.

Weil in der Tabelle von § 1 die sekundären Ursachen nicht alle ausdrücklich aufgezählt sind, folgen die hauptsächlichsten hier:

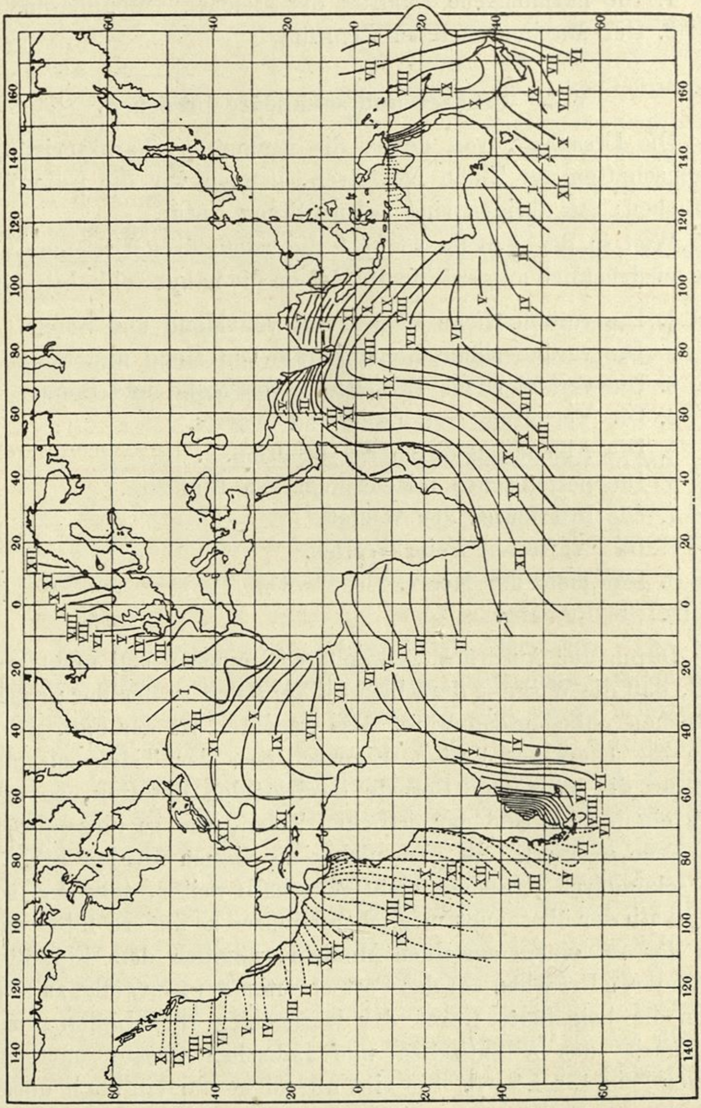
1. Die veränderliche Deklination von Mond und Sonne.
2. Die veränderliche Konstellation von Mond und Sonne.
3. Die veränderliche Entfernung von Mond und Sonne.
4. Die Verteilung von Land und Wasser.
5. Die Ablenkung durch die Rotation.
6. Die periodischen meteorologischen Einflüsse.
7. Die Interferenz der Wellen.
8. Das Auftreten freier Wellen.
9. Die Tiefe der Meere.
10. Die Reibung.

Durch den Ausdruck „sekundäre“ Ursachen soll nicht gesagt sein, daß die Wirkung derselben im Vergleich zu der der primären Ursachen unbedeutend wäre. Das Gegenteil ist der Fall. Nimmt man die charakteristischen Eigenschaften der Tiden zusammen mit der die halbtägige Periode bewirkenden Rotation, so erhält man ein ideales Bild der örtlichen Tiden, wie es nirgendwo auf der Erde existiert. Es gibt nichts an diesem idealen Bild, das die sekundären Ursachen nicht innerhalb weiter, teilweise sogar innerhalb der überhaupt möglichen Grenzen zu ändern fähig wären. Um das an einem einzelnen Moment, nämlich dem Einfluß der sekundären Ursachen auf das Fortschreiten der Flutwelle, zu zeigen, kann die beigefügte Karte der Isorhachien (der Linien gleicher Hafenzeit) des Atlantischen und Indischen Ozeans nach Airy dienen [Fig. 1, a. f. S.[1])]. Sie gibt allerdings nur ein nach unserem

[1]) Aus Airys „Tides and Waves“ nach G. H. Darwin, Ebbe und Flut, S. 172, 1902.

heutigen Wissen sehr verbesserungsbedürftiges und unsicheres Bild der Wirklichkeit, besonders was das Fortschreiten der Welle

Fig. 1.



Isorhachien des Atlantischen und Indischen Ozeans nach Airy.

über den freien Ozean angeht. Aber sie genügt für unseren Zweck, zumal es noch keine bessere, wenigstens für so große Gebiete, gibt. Die Linien stellen das Fortschreiten der Welle von Stunde zu Stunde nach Greenwicher Zeit dar. Die mit XII bezeichneten Linien geben also die Lage der Wellenkämme um 12 Uhr Greenwicher Zeit wieder. Zu derselben Zeit liegen die Wellentäler auf den Linien VI. Sehr schön zeigt die Karte auch, wie das Fortschreiten der Welle an den Küsten durch Reibung in flacherem Wasser verzögert wird.

So mächtig nun aber auch der Einfluß der sekundären Ursachen ist, so hat er doch die Wirkung der primären Ursachen zur notwendigen Voraussetzung. Ohne die primären Ursachen würden die sekundären, wenigstens als Faktoren in der Gezeitenerscheinung, nicht existieren. Damit ist die Bezeichnung gerechtfertigt.

§ 4. Formulierung des Problems.

Das Problem dieser Schrift läßt sich jetzt so formulieren:

Es sollen die primären Ursachen gefunden werden, die zum Verständnis der charakteristischen Eigenschaften der Tiden notwendig und hinreichend sind.

Wir wollen also den Ursprung des Kraftfeldes feststellen, von dem diese Eigenschaften herrühren. Nun hängen aber die störenden Kräfte, wie wir für die primären Ursachen auch sagen können, mit sekundären Ursachen notwendig zusammen. So hat z. B. der Mond, dessen Anziehungskraft das in Frage stehende Kraftfeld mitbestimmt, immer eine bestimmte Deklination, eine bestimmte Entfernung usw. Es wird deshalb nicht möglich sein, die Feststellung des Ursprunges des Kraftfeldes reinlich von der Beschreibung seiner Veränderungen zu trennen. Wir beziehen aber diese Beschreibung nur insoweit ein, als sie nicht unmittelbar der Praxis dient. So läßt sich denn unsere Aufgabe, zwar etwas ungenau, aber immerhin am besten als Theorie der Gezeitenkräfte bezeichnen.

Ausgeschlossen ist demnach von unserer Darstellung die Ableitung der charakteristischen Eigenschaften mit ihren Besonderheiten (Höhe, Periode usw.), denn sie würde über unser Thema einer Theorie der Kräfte hinausgehen. Die Ableitung hängt nicht nur von den fluterzeugenden Kräften, sondern auch von der Beschaffenheit des Materials ab, auf das die Kräfte wirken. Sie würde eine praktische Anwendung der Ausdrücke für die Gezeitenkräfte bedeuten und spezielle Annahmen über die Beschaffenheit der Wasserhülle und der Erde selbst nötig machen. Sie gehört in eine Tidentheorie. Wir wollen lediglich ein solches Kraftfeld aufsuchen, das uns zum allgemeinsten Verständnis der Form der charakteristischen Eigenschaften verhelfen kann. Diese allgemeine Form der Eigenschaften — in Betracht kommt, wie wir später sehen werden (§ 18), praktisch ausschließlich die erste — muß sich aus jeder Tidentheorie ergeben, wie immer sie sich auch auf Grund jener speziellen Annahmen darstellen mag. Deshalb können wir auch, ohne damit in die Anwendung zu verfallen, gelegentlich beispielsweise sagen: es entsteht eine Flut.

Damit wäre unsere Hauptaufgabe nach der positiven und negativen Seite hinreichend deutlich gemacht.

Einiger Worte bedarf es noch darüber, wie weit wir die Rotation der Erde ausschließen und einschließen. Die Rotation spielt nach dem Bisherigen eine dreifache Rolle in der Oberflächengestaltung der Meere:

1. Sie erzeugt gemeinsam mit der Anziehungskraft der Erde eine konstante Niveaufläche des Wassers.
2. Sie ist die Ursache der halbtägigen Perioden der Tiden.
3. Sie wirkt als sekundäre Ursache durch die Ablenkung der Fluten (analog wie z. B. bei den Passaten).

Die dritte Wirkung gehört ohne Zweifel in die Tidentheorie, ihre Betrachtung fällt also aus unserem Thema heraus. Ein Zweifel könnte im Hinblick auf die erste Wirkung bestehen. Nun ist es gewiß ohne Schwierigkeit möglich, gleichzeitig alle Kräfte in Betracht zu ziehen, die auf einen Punkt der Erdoberfläche wirken, also auch die Anziehungskraft der Erde und die Rotationszentrifugalkraft. Aber es ist zunächst aus einem mehr formellen Grunde richtiger, von diesen beiden abzusehen. Die Tiden besitzen, wie wir schon sagten, den Charakter der Störung einer konstanten Niveaufläche. Wenn man also diesen Charakter nicht verwischen will, dann darf man die genannten Kräfte nicht zu den fluterzeugenden Kräften rechnen. Dazu kommt als ausschlaggebend ein sachlicher Grund. Die Rotation hat nämlich, wie unsere späteren Ausführungen noch deutlicher zeigen werden, keinen Einfluß auf den wesentlichen Charakter der Tiden. Besäße die Erde nur Rotation, wäre also kein Systemkörper, so wäre eine Tidenerscheinung überhaupt unmöglich. Hätte umgekehrt die Erde keine Rotation, wäre aber ein Systemkörper, so würden die charakteristischen Eigenschaften der Tiden dieselben bleiben, die sie in Wirklichkeit sind. Die Amplituden und die Perioden der Tiden wären dann allerdings geändert, aber das bedeutet, die Erde als Ganzes betrachtet, keine wesentliche Änderung. Die Berücksichtigung der Rotation, soweit die erste der genannten Wirkungen in Betracht kommt, gehört also nicht in eine Theorie der Gezeitenkräfte, sie hat erst in der Tidentheorie dadurch zu erfolgen, daß die Ausdrücke für die Gezeitenkräfte auf die Gleichgewichtsform der rotierenden Erde angewandt werden.

In einem Punkte aber müssen wir über die Theorie der Gezeitenkräfte hinausgehen, nämlich hinsichtlich der zweiten Wirkung der Rotation. Die halbtägige Periode der Tiden stellt sich nämlich nach der Theorie der Gezeitenkräfte, wie sie im folgenden entwickelt wird, anders dar, als nach der üblichen Theorie. Es wird darum nötig sein, kurz darauf einzugehen (Kap. VII).

Schließlich besitzt die Theorie der Gezeitenkräfte noch eine kaum irgendwo bemerkte, aber interessante und wichtige Beziehung zum kopernikanischen Weltsystem, die wir im Schlußkapitel besprechen wollen.

§ 5. Bezeichnungen.

Jede Bezeichnung ist da, wo sie zuerst angeführt wird, erklärt. Um aber an späteren Stellen das lästige Zurücksuchen überflüssig zu machen, mögen die öfters gebrauchten Bezeichnungen hier zusammenstehen:

r = Erdradius
m = Erdmasse
g = Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche
ω = Winkelgeschwindigkeit
d = Abstand eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche von der Systemachse
M = Masse des störenden Gestirnes
T = Umlaufszeit des störenden Gestirnes

G = Einheit der Beschleunigung der $\left.\begin{matrix}\text{Mond-}\\ \text{Sonnen-}\end{matrix}\right\}$ Anziehung

D = Entfernung der Mittelpunkte Erde- $\left\{\begin{matrix}\text{Mond}\\ \text{Sonne}\end{matrix}\right.$

A = Entfernung der Mittelpunkte Erde- $\left\{\begin{matrix}\text{Mond}\\ \text{Sonne}\end{matrix}\right.$ ausgedrückt in Erdradien

E = Abstand eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche vom Mittelpunkt des störenden Körpers

V = Bahngeschwindigkeit der Erde

c = Revolutionszentrifugalbeschleunigung

ϱ = Krümmungsradius

z = wahre Zenitdistanz des störenden Körpers

z' = scheinbare „ „ „ „

τ = Stundenwinkel des störenden Gestirnes

k = Gravitationskonstante

h und v = — angehängt — horizontale und vertikale Komponente.

Wir setzen die Erde als kugelförmig voraus, nehmen also an, daß die Resultante der Anziehungskräfte der Sonne bzw. des Mondes genau durch ihren Schwerpunkt geht, den wir mit dem Massenmittelpunkt und dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfallen lassen.

II. Die Bewegungsverhältnisse in den fluterzeugenden Systemen.

§ 6. Allgemeine und numerische Charakterisierung.

Wir nennen Rotation die Drehung eines Körpers (oder Systems) um eine durch den Schwerpunkt des Körpers (oder Systems) gehende Achse, Revolution die Drehung um eine außerhalb des Schwerpunktes liegende Achse. Die Revolution eines Körpers bedeutet also stets die Rotation eines Systems, dem der Körper angehört.

In jedem der fluterzeugenden Systeme Erde–Mond und Erde–Sonne führen die beiden Körper, wenn man von der Präzession und der Nutation absieht, zwei Arten von Bewegungen aus: 1. eine Rotation um die augenblickliche Drehungsachse, 2. eine Revolution um die Schwerpunktsachse des Systems.

Die Rotationszeit der Erde beträgt 24 Stunden, die des Mondes rund 27,3 Tage, die der Sonne ist nach der Breite verschieden. Die Revolutionszeit beider Körper beträgt im System Erde–Mond 27,3 Tage (siderischer Monat), im System Erde–Sonne 356,26 mittlere Sonnentage (siderisches Jahr).

Sind m_1 und m_2 die Massen zweier Systemkörper, r_1 und r_2 die Abstände ihrer Schwerpunkte vom Systemschwerpunkt, R der Abstand ihrer Schwerpunkte voneinander, so berechnen sich r_1 und r_2 wie folgt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

und, da $r_1 + r_2 = R$, auch

$$\frac{r_1}{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Daraus

$$r_1 = \frac{R\,m_2}{m_1 + m_2} = \frac{R}{\frac{m_1}{m_2} + 1}.$$

Da die Bahn der Erde in beiden Systemen, bezogen auf den Systemschwerpunkt, eine Ellipse ist[1]), hat r_1 in beiden Systemen einen Maximal- und einen Minimalwert. Für das System Erde–Mond ist der Maximalwert der Entfernung Erdeschwerpunkt–Systemschwerpunkt 5026 km und der Minimalwert 4403 km. Daraus folgt eine lineare Exzentrizität der Erdbahn in diesem System von rund 311 km. Da der Erdradius eine Länge von 6370 km besitzt, geht die Systemachse durch den Erdkörper, senkrecht zur Zentrale des Systems. Im Perigäum liegt sie 1967 km, im Apogäum 1344 km unter der Erdoberfläche. In dem System Erde–Sonne liegt der Systemschwerpunkt im Maximum 456 km, im Minimum 441 km vom Sonnenschwerpunkt entfernt; die lineare Exzentrizität der Sonnenbahn folgt daraus zu 7,5 km. Praktisch läßt man den Systemschwerpunkt Erde–Sonne in den Sonnenschwerpunkt fallen. Deshalb sagt man nach dem ersten

[1]) Strenggenommen beschreibt in dem System Erde-Sonne nicht die Erde, sondern der Systemschwerpunkt Erde-Mond diese Ellipse. Doch sehen wir davon ab. Theoretisch müßte das eine der halbtägigen Hauptsonnentide überlagerte halbmonatliche Tide geben (vgl. § 25).

Keplerschen Gesetz, die Sonne stehe in dem einen Brennpunkte der Erdbahn, und nennt Radiusvektor die Verbindungslinie der Mittelpunkte Erde–Sonne. Weil aber diese Verhältnisse des Systems Erde–Mond in der Theorie der Gezeitenkräfte eine entscheidende Rolle spielen, muß man sich deutlich machen, daß jene Redeweise ungenau ist. Der Schwerpunkt des Systems zweier Körper liegt in dem einen Brennpunkt ihrer Bahnen, und die Radienvektoren sind die Verbindungslinien ihrer Mittelpunkte mit diesem Brennpunkte.

Die Bahn, die der größere der beiden Körper eines Systems bei der Revolution beschreibt, ist ein verkleinertes Bild der Bahn des kleinen Körpers.

Die Störungen der Bewegungen, auf die wir hier keine Rücksicht genommen haben, können bei der in § 25 angedeuteten weiteren Analyse der dort entwickelten Gleichungen einbezogen werden.

§ 7. Revolution ohne Rotation.

Wenn wir nach § 4 vorläufig von der Rotation der Erde absehen, so dürften für den Physiker die folgenden kurzen Bemerkungen über die Art der dann noch übrigbleibenden Bewegung der Erde genügen.

Erteilt man den Punkten der Erde ohne Änderung ihrer relativen Lage eine Verschiebung δx parallel zur x-Achse, δy parallel zur y-Achse und δz parallel zur z-Achse, so ist die Bewegung des Schwerpunktes durch die Gleichungen bestimmt

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$m \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y,$$

$$m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z,$$

wo m die Erdmasse, X, Y, Z die in der Richtung der positiven Achsen wirkenden Kräfte und ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes sind. Da nun nach unserer Voraussetzung von der einzig möglichen Änderung der relativen Lage, nämlich der Rotation, abgesehen wird, so wird die Bewegung aller Punkte der Erde gleich der des Schwerpunktes sein. Die Bewegung wird also so vor sich gehen, daß jede beliebige Ebene des Erdkörpers, z. B. eine Meridianebene, parallel mit sich selbst verschoben wird. Eine Revolution ohne Rotation ist eine reine Translation. Die allgemeine Charakterisierung einer reinen Translation, daß alle Punkte identische Vektoren beschreiben, läßt sich im vorliegenden Falle folgendermaßen spezialisieren:

1. Alle Punkte der Erde beschreiben gleich große elliptische Bahnen, deren Ebenen parallel sind.

2. Die Radienvektoren aller Punkte der Erde sind in jedem Augenblick der Bewegung einander und der Zentrale des Systems parallel und sind gleich der Entfernung des Erdschwerpunktes vom Systemschwerpunkt.

Richtige Charakterisierungen der Revolution ohne Rotation für den speziellen Fall der Kreisbahn haben unter anderen C. A. F. Peters[1]), Helmert[2]), W. M. Davis[3]), G. H. Darwin[4]), W. Schweydar[5]), Krümmel[6]) gegeben.

§ 8. Andere Darstellung der Revolution ohne Rotation.

Es scheint, daß in diesen einfachen Überlegungen eine eigenartige Schwierigkeit steckt, die so groß ist, daß selbst so ausgezeichnete theoretische Physiker wie W. Thomson, Tait, W. Voigt u. a., wie wir noch sehen werden (§ 13), zu einer falschen Auffassung kamen. Deshalb mag die Überlegung des letzten Paragraphen noch einmal einfacher und ausführlicher wiederholt werden.

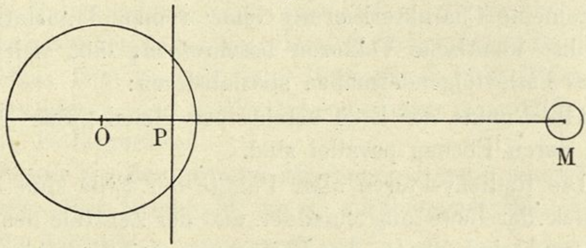
Wir betrachten das System Erde–Mond (Fig. 2, a. f. S.). O sei der Mittelpunkt der Erde, M der Mond, P der Systemschwerpunkt. Die Senkrechte in P auf OM ist die Systemachse, wenn die Bahnebene senkrecht zur Zeichenebene steht. Wir legen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem im Raume fest, und zwar so,

---

[1]) C. A. F. Peters, Astron. Nachr. **91**, 2175 und (nach seinem Zitat) im Bull. d. Petersburger Akad. 1845, Bd. 3. — [2]) Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie **2**, S. 3 f., 1884, und Astron. Nachr. **91**, 2175. — [3]) W. M. Davis, Journ. of School Geography **2**, 129, 1898. — [4]) G. H. Darwin, Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem 1902, S. 79 ff. — [5]) W. Schweydar, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol., 35. Jahrg., 1907, S. 179. — [6]) Krümmel, Handb. d. Ozeanographie **2**, 209 ff., 1911.

daß die z-Achse in die Systemachse fällt und die y-Achse in P auf der Zeichenebene senkrecht steht; für den Zeitpunkt, den die Figur darstellt, fällt dann die x-Achse in die Zentrale.

Fig. 2.



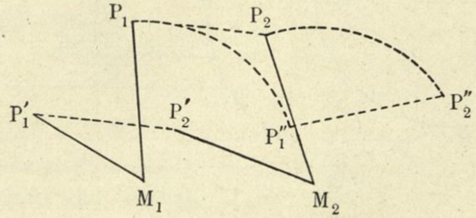
Wir denken uns nun zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 der Erde durch eine Gerade verbunden. Diese Gerade bilde mit der z-x-Ebene (also mit der Zeichenebene) den Winkel φ. Versetzen wir jetzt die Erde in Bewegung, so soll sie dabei keine Rotation weder um ihre Schwerpunktsachse noch um irgend eine andere Achse machen, es soll also auch die Schwerpunktsachse sich immer selbst parallel bleiben. Dann muß der Winkel, den $P_1 P_2$ mit der z-x-Ebene bildet, stets gleich φ sein, denn $P_1 P_2$ hat offenbar eine feste Lage zu einer beliebigen Ebene im Erdkörper, etwa zu der Meridianebene, die durch P_1 geht. Diese Meridianebene bildet zu der Zeit, wo die Bewegung beginnt, mit der z-x-Ebene einen Winkel φ' und muß denselben während der Bewegung beibehalten, weil nur die Rotation den Winkel einer Meridianebene mit einer im Raume festen Fläche ändern kann. Also behält auch die Strecke $P_1 P_2$ den Winkel φ mit der z-x-Ebene während der Bewegung bei. Da die Punkte beliebig waren, können wir das Resultat in die Worte fassen: Bewegt sich die Erde ohne Rotation, so bleibt die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte der Erde stets sich selbst parallel.

Stellen wir uns jetzt vor, die Strecke $P_1 P_2$ werde allein im Raume parallel mit sich selbst bewegt. Nach der Zeit t mögen ihre Endpunkte in die Raumpunkte $P_1' P_2'$ fallen, nach der Zeit $2t$ in die Raumpunkte $P_1'' P_2''$, nach der Zeit $3t$ in die Raumpunkte $P_1''' P_2'''$ usw. Dann folgt, daß die Strecken $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_1' P_1''$, $P_2' P_2''$ usw. einander gleich sind. Dasselbe gilt offensichtlich für alle Punkte der Strecke $P_1 P_2$. Würde also z. B. die Strecke eine

Kreisbewegung machen, so würden alle ihre Punkte gleich große Kreise beschreiben. Was für die Strecke $P_1 P_2$ gilt, gilt für jede Verbindungslinie beliebiger Punkte, also für die ganze Erde. Es ergibt sich somit: Macht die Erde eine Revolutionsbewegung ohne Rotation, so beschreiben alle ihre Punkte Bahnen, die der Bahn des Schwerpunktes gleich und deren Ebenen parallel sind.

Die Bahnen sind Ellipsen. Die Bahn des Erdschwerpunktes hat als einen Brennpunkt den Systemschwerpunkt. Wir stellen uns das System in einem beliebigen Zeitpunkte vor und denken uns für diesen Augenblick von jedem Punkte der Erde seinen Radiusvektor zu dem zugehörigen Brennpunkte gezogen. Diese Radienvektoren sind nun nicht nur gleich, sondern auch parallel. Wären sie nämlich nicht parallel, so wäre das vorhin gewonnene Resultat nicht richtig. Der Nachweis ist einfach. P_1 und P_2 seien wieder zwei beliebige Punkte der Erde, M_1 und M_2 die zugehörigen Brennpunkte. $P_1 M_1$ und $P_2 M_2$ mögen nun zwar gleich, aber nicht parallel sein (Fig. 3). Nun muß aber $P_1 P_2$ nach

Fig. 3.



unserem ersten Resultat sich stets parallel bleiben. Soll also $P_1 P_2$ mit sich parallel so verschoben werden, daß P_1 und P_2 gleiche Bahnen um M_1 und M_2 beschreiben, so ist das im Falle der Figur nicht möglich. Kommt $P_1 P_2$ parallel mit sich selbst nach $P_1' P_2'$, so können die Bahnen, die die Endpunkte beschrieben haben, gleichgültig, welche Form sie besitzen, relativ zu M_1 und M_2 nicht gleich sein, weil $M_1 P_1'$ nicht gleich $M_2 P_2'$ ist. Sind umgekehrt die Bahnen von P_1 und P_2 gleich, wie bei den eingezeichneten Bahnstücken (der Einfachheit wegen sind Kreisstücke genommen), so ist $P_1'' P_2''$ weder gleich noch parallel $P_1 P_2$. Unser letztes Resultat schließt demnach als Voraussetzung die Parallelität der Radienvektoren ein. Ein solcher Radiusvektor ist uns bekannt, nämlich die Verbindungslinie zwischen Erdschwerpunkt und Systemschwerpunkt, die stets in der Zentrale des Systems liegen muß. Somit haben wir den weiteren Satz: Die Radienvektoren sämtlicher Punkte der Erde sind bei der Revolution ohne Rotation in jedem Zeitmoment einander und der Zentrale des Systems parallel.

In den drei Resultaten finden wir die Ergebnisse von § 7 wieder.

Fig. 4.

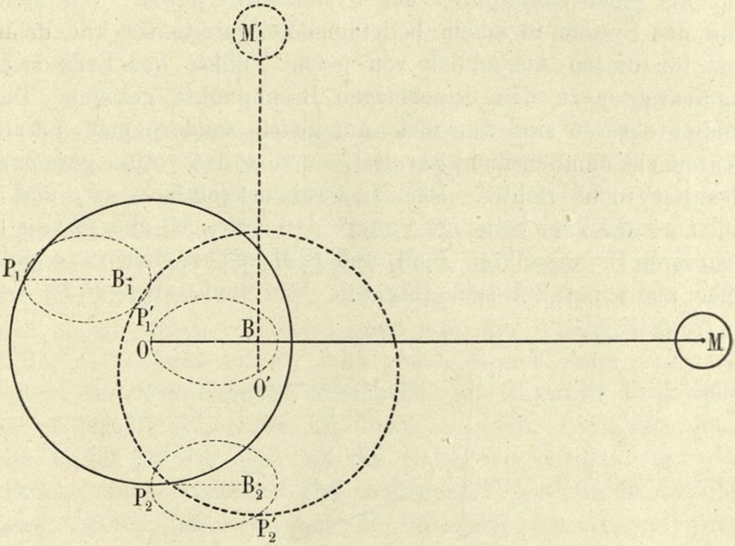


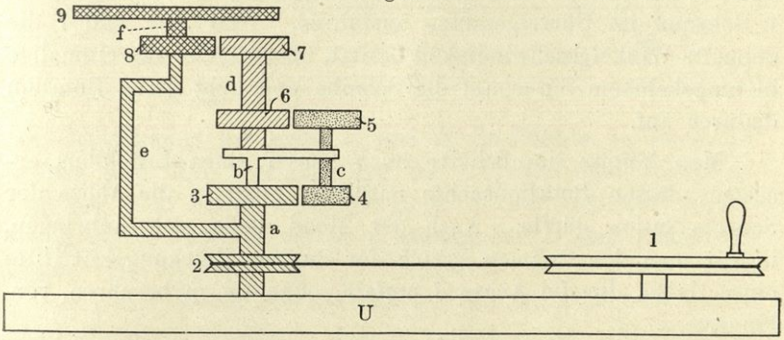
Fig. 4 gibt ein Bild zweier Phasen der Bewegung. Die Zeichenebene ist die Bahnebene. Der Phasenwinkel beträgt $\frac{\pi}{2}$. Die erste Phase (ausgezogen) gibt die Stellung im Apogäum, die zweite (gestrichelt) bei einer wahren Anomalie von $\frac{3}{2}\pi$. Von drei Punkten ist die Bahnellipse mit den zugehörigen Brennpunkten eingezeichnet, nämlich vom Mittelpunkt O und den beiden beliebigen Punkten P_1 und P_2. Die Gleichheit der Bahnen und Radienvektoren und die Parallelität der letzteren sind deutlich zu sehen. Die Exzentrizität ist übermäßig groß angenommen; infolgedessen ist der Systemschwerpunkt, der in der ausgezogenen Phase richtig gezeichnet ist, in der gestrichelten zu nahe an den

Mittelpunkt gerückt. Die den einzelnen Punkten zugehörigen Brennpunkte, d. h. diejenigen Brennpunkte, die für sie dieselbe Rolle spielen wie der Systemschwerpunkt für den Mittelpunkt, sind in dem Volumen einer Kugel von der Größe der Erde angeordnet, deren Mittelpunkt im Systemschwerpunkt liegt und die mit der Revolution der Systemkörper um die Systemachse rotiert.

§ 9. Ein Modell des Systems Erde–Mond.

Unter Voraussetzung der Kreisbewegung ließe sich ein auch in Schulen brauchbares Modell des Systems Erde–Mond konstruieren, das eine Revolution der Erde ohne Rotation zeigt. Fig. 5

Fig. 5.



gibt eine schematische Skizze, die natürlich weder auf konstruktive Einzelheiten sich festlegen noch auf technische Eleganz Anspruch erheben will.

Die Zahlen 1 bis 8 bezeichnen Räder, und zwar 3 bis 8 Zahnräder. 1 ist das Handrad, dessen Bewegung durch Riemen auf 2 übertragen wird. Die gleich schraffierten Teile sind unter sich starr verbunden. Die Stütze *b* ist mit der tragenden Unterlage *U* starr verbunden. Sie trägt nach einmaliger Knickung eine Achse *c*, an der die Zahnräder 4 und 5 befestigt sind. Die hohle Achse *a* läuft auf *b*. Auf einer Verlängerung von *b* läuft die gleichfalls hohle Achse *d*, die die zwei an ihr befestigten Zahnräder 6 und 7 trägt. Der dreimal geknickte Rahmen *e* ist mit der Achse *a* fest verbunden. Kurz nach der dritten Knickung trägt er die hohle Achse *f*, an der das Zahnrad 8 und die Scheibe 9 befestigt sind. Diese Scheibe stellt die Erde dar. Die Radien von 3 und 4 müssen sich wie 2 : 1, die Radien von 5 und 6 sowie von 7 und 8 wie 1 : 1 verhalten. Die Dimensionen der Scheibe sind so zu bemessen, daß die Verlängerung von *b* die Scheibe in einem Punkte treffen würde, der den vierten Teil des Radius vom Rande entfernt ist.

Die Wirkungsweise ist leicht verständlich. Dreht man das Handrad, von oben gesehen, im Uhrzeigersinne, dann bewegen sich die Räder 2, 3, 6, 7 in demselben, die Räder 4, 5, 8 und die Scheibe im umgekehrten Sinne. Rad 7 hat die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Rades 2 oder des Rahmens *e*. Würde es dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen, so würden Scheibe und Rahmen relativ zueinander nicht rotieren, die Scheibe würde aber relativ zu *b* bzw. seiner Verlängerung bei 1 Revolution 1 Rotation im Uhrzeigersinne ausführen. Weil aber Rad 7 die doppelte Winkelgeschwindigkeit besitzt, überträgt es die einmalige in umgekehrtem Sinne auf die Scheibe und hebt deren Rotation dadurch auf.

Man könnte die Scheibe auch durch einen Erdglobus ersetzen, dessen Rotationsachse natürlich nicht in die Achse der Scheibe fallen dürfte. Auch der Mond ließe sich anbringen, indem man den Rahmen *e* nach der zweiten Knickung mit Hilfe einer Gabel, die die Achse *d* umfaßt, ohne sie zu berühren, verlängerte.

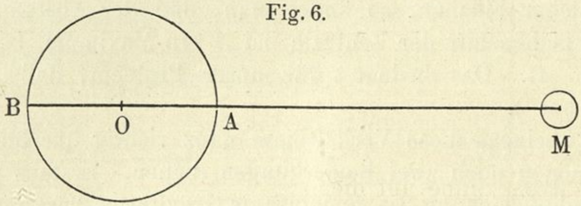
Die Scheibe läßt sich noch zu einem weiteren wichtigen Zwecke benutzen und dürfte deshalb niemals ausschließlich durch den Globus ersetzt werden. Man kann in ihrer Mitte ein Stäbchen und auf dem Stäbchen mit der Kreuzung zweier Durchmesser einen Ring befestigen, dessen Durchmesser etwa dem der Scheibe gleich ist. Hängt man dann am ganzen Umfang des Ringes Fäden auf, die an ihren Enden Kügelchen tragen, so kann der Apparat die bei der Revolution entstehenden Zentrifugalkräfte demonstrieren, von denen wir später (§ 25) noch sprechen werden.

III. Mängel in den üblichen Theorien der Gezeitenkräfte [1]).

§ 10. Die Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen [2]) aus den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen.

Die am weitesten verbreitete Auffassung leitet die fluterzeugenden Beschleunigungen von den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen her. In Fig. 6 sei M der Mond,

Fig. 6.



O der Mittelpunkt der Erde, A und B die Punkte, in denen die Zentrale und ihre Verlängerung die Erdoberfläche schneiden. A ist der dem Mond nächstgelegene, B der ihm entfernteste Punkt. A wird stärker als O, O stärker als B vom Monde angezogen. Die Differenz der Anziehungskräfte in A und O stellt eine nach dem Monde hin gerichtete Kraft dar, die Differenz in O und B eine vom Monde weg gerichtete Kraft. Die Wirkung dieser Kräfte ist ein Anschwellen des Wassers in A und B. Das ist der Grundgedanke der genannten Ableitung.

Diese Ableitung befriedigt aus zwei Gründen nicht.

1. Die Anziehungskraft eines Körpers ist von seiner Bewegung wenigstens für die im vorliegenden Falle in Betracht kommenden Geschwindigkeiten praktisch unabhängig. Da nun jene Ableitung die störenden Beschleunigungen bei den Tiden ausschließlich auf die Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen zurückführt, so müssen nach ihr Tiden von der Art

---

[1]) Wir sehen von allen Darstellungen ab, die hydrostatische Gesetze benutzen (vgl. S. Günther, Handbuch der Geophysik² 2, 468, 1899), weil ihre Unzulänglichkeit leicht zu verstehen ist. — [2]) Wir sagen bald „fluterzeugende Kräfte“, bald „fluterzeugende Beschleunigungen“. Das ist erlaubt, weil die Ausdrücke für die Kraft und für die Beschleunigung identisch werden, wenn, wie wir es stets tun, die Masse, auf die die Kraft wirkt, gleich 1 gesetzt wird.

der wirklichen auch in einem System entstehen, dessen Körper in relativer Ruhe sind. Beachtet man, daß die relative Ruhe auch die Rotation des Systems um die Systemachse ausschließt und nur eine gleichförmige Translationsbewegung gestattet, so werden in einem solchen System mit den Massen m_1 und m_2 die Niveauflächen durch den Ausdruck

$$\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} = Const$$

dargestellt. Zeichnet man sich nach bekannter Methode eine Reihe solcher Flächen, so findet man, daß der Abstand zweier solcher Flächen auf der Zentrale bei A ein Maximum, bei B ein Minimum ist. Das bedeutet für unser Problem, daß A Flut, B Ebbe hat [1]).

Um übrigens diese Verhältnisse ganz richtig überblicken zu lassen, mögen noch zwei Bemerkungen dienen. Erstens gibt die vorstehende Gleichung die gemeinsame Gravitationswirkung zweier Massen auf eine dritte Masse wieder. Als dritte Masse gilt hier das Wasser. Sobald es sich um die Gravitationswirkung beider Massen aufeinander handelt, wird das Bild der Flächen gleichen Potentials wesentlich anders. Zweitens wird die durch die störenden Kräfte hervorgerufene Änderung in der Verteilung des Wassers auch selber wieder das Kraftfeld stören, aber nicht in einem für uns wesentlichen Sinne. Wer sich dafür interessiert, mag genaueres bei Thomson-Tait [2]) nachlesen.

2. Wir wollen den Grundgedanken der Ableitung für einen Augenblick akzeptieren, also annehmen, daß Tiden von der Art der wirklichen auch im relativ ruhenden System entstehen können. Führen wir jetzt die wirkliche Bewegung des System ein, indem wir es um seine Achse rotieren lassen (natürlich wird von der Rotation der Erde stets abgesehen), so treten neben die Gravitationspotentiale, die ja nach jener Ableitung allein schon die

---

[1]) Das Umgekehrte wäre der Fall, wenn die Erde kein durch eine Newtonsche Kraft mit anderen Körpern verketteter Systemkörper wäre, sondern zwangsweise eine Bewegung ausführte, wie sie die Scheibe des in § 9 besprochenen Modells macht (der Beweis in § 25); auch die Rotation würde nach dem Bisherigen nichts daran ändern. Superponiert man diese Wirkung mit der im Text besprochenen Wirkung bei relativer Ruhe, so erhält man die Kräftebedingungen für die tatsächlich vorhandenen Tiden. — [2]) Thomson-Tait, Handbuch der theoretischen Physik 1, 2, 376 f.

fluterzeugenden Kräfte ergeben, noch die Zentrifugalkraftspotentiale, die, wie wir später (§ 25) sehen werden, in allen Punkten der Erde gleich den Gravitationspotentialen von Sonne und Mond im Mittelpunkte der Erde sind. Das Gesamtpotential ergibt Niveauflächen, deren Abstand in A ein Minimum, in B ein Maximum ist, d. h. A hat Ebbe, B Flut.

Genauer kann uns die folgende einfache Überlegung unterrichten. Die Gravitationsbeschleunigungen in A, O, B seien $|a_1|$, $|a_0|$, $|a_2|$. Die Richtung nach dem Mond wird positiv, die Richtung vom Mond weg negativ gerechnet. c bezeichne die Zentrifugalbeschleunigung. Dann ergeben sich die gesamten störenden Beschleunigungen in A und B gemäß der vorstehenden Betrachtung aus der folgenden Übersicht:

A	B
$+(a_1 - a_0)$	$-(a_0 - a_2)$
$-c$	$-c$
$+(a_1 - a_0) - c$	$-(a_0 - a_2) - c$

und da $|c| = |a_0|$

$+(a_1 - 2\,a_0)$	$-(2\,a_0 - a_2)$

Beachten wir, daß $|a_1| > |a_0| > |a_2|$ ist, so folgt zunächst, daß $-(2\,a_0 - a_2)$ eine Flut bedeutet.

Sind ferner r_1, r_0, r_2 die zu $|a_1|$, $|a_0|$, $|a_2|$ gehörigen Entfernungen, so ist $|a_0| \leqq 1/2\,|a_1|$, wenn $r_0 \geqq r_1\sqrt{2}$ ist, wie sich leicht übersehen läßt. Da aber für die Systeme Erde–Mond und Erde–Sonne $r_0 < r_1\sqrt{2}$ ist, ist auch $|a_0| > 1/2\,|a_1|$[1]). Demnach ist $+(a_1 - 2\,a_0)$ ein negativer Wert, drückt also im Punkte A eine Ebbe aus. —

Nun ist es andererseits richtig, daß die Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen tatsächlich existieren und in der Tidenerscheinung wirksam sein müssen. Wir sehen also: Die Diffe-

[1]) Der kritische Wert des Erdradius in dem System Erde–Mond beträgt rund 156000 km, d. h. wäre der Erdradius größer, als dieser Wert angibt, dann würde nach der in Rede stehenden Ableitung in B und in A Flut entstehen. Dieses Verhältnis, wo also der Planetenradius diesen kritischen Wert überschreitet, ist übrigens mehrfach in unserem Sonnensystem verwirklicht, nämlich in den Systemen Mars–Phobos, Jupiter–V. Mond, Saturn–Mimas.

renzen der Gravitationsbeschleunigungen sind zur Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen notwendig, aber nicht hinreichend.

§ 11. Einige Beispiele dieser Ableitung.

Die Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen aus den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen nimmt in der Literatur die mannigfachsten Formen an.

Wir scheiden davon Formen primitivster Art aus. So meinte z. B. vor langer Zeit in einer interessanten Diskussion über das Problem der Nadirflut [1]) der Dorpater Physiker Parrot, daß jeder Punkt der Erde infolge der anziehenden Kraft, die er auf den Mond ausübt, an anziehender Kraft verlöre, die er auf die übrigen Erdpunkte ausüben könne; aus dieser Schwächung, die an den Punkten A und B (Fig. 6) am größten sei, resultiere Zenit- und Nadirflut. Man sollte kaum glauben, daß man dieser anthropomorphistischen Kraftauffassung auch gelegentlich heute noch begegnen kann [2]).

Die übrigbleibenden Formen teilen wir in drei Gruppen:

1. Als einfachster Typus der ersten Gruppe sei die Darstellung bei Supan erwähnt [3]). Er schreibt: „Unter der Einwirkung des Mondes tritt im Durchmesser AOB eine Streckung ein, indem A ebenso weit von O, wie O von B entfernt wird; da aber der starre Erdkörper an dieser Streckung nicht teilnimmt, so entfällt das ganze Plus auf die Wasserhülle, und ihre höchste Erhebung über ihr früheres Niveau findet an zwei Punkten statt: an jenem, der den Mond im Zenit hat (A), und an dem antipodischen Punkt (Nadir, B). Auf der Ungleichheit der Anziehung, d. h. auf der Differenz $\frac{2}{d^3}$ [4]) beruht also die fluterzeugende Kraft jedes Himmelskörpers."

---

[1]) Pogg. Ann. **4**, 219, 1825. — [2]) Z. B. bei Harms, Erdkundliche Hilfsbücher für Lehrerbildungsanstalten 1914, Heft 1^2, S. 50. — [3]) Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde [5], 303 f., 1911. Um den Raum mehrerer Figuren zu sparen, setze ich in den Text der Zitate die Buchstaben der Fig. 6 ein. — [4]) d ist hier die mittlere Entfernung der Erde von dem Mond bzw. der Sonne.

Die Darstellung dieser Gruppe ist mit den vorstehenden oder ihnen ähnlichen Worten immer eine Variation des Gedankens zu Anfang von § 10: daß die Differenz der Gravitationsbeschleunigungen in O und B ein anderes Vorzeichen erhält als die Differenz in A und O. Das ist eine Behauptung ohne Begründung; es ist nicht abzusehen, woher diese Verschiedenheit in den Vorzeichen kommen soll.

2. Die zweite Gruppe versucht diese Begründung. Gray tut es auf folgende Weise[1]): „Der durch die Masse des Mondes auf ein Teilchen von der Masse 1 in O ausgeübte Zug ist $\frac{kM}{D^2}$ [2]). Wäre die vom Monde ausgeübte Kraft auf jedes Einzelteilchen in der Erde nach Größe und Richtung gleich dieser Kraft auf O[3]), so würde jedes Teilchen eine Beschleunigung von genau diesem selben Betrage erfahren, es gäbe dann keine Deformation der Erde oder Änderung der relativen Lage der beweglichen Materie auf ihrer Oberfläche. Ferner ist es klar, daß, wenn die Erde aus einem Gemengsel von Teilchen von gleicher Masse bestände und jedem dieser Teilchen irgend eine Kraft P, für jedes Teilchen dieselbe in Größe und Richtung, erteilt würde, keine Änderung der relativen Lage der Teile der Erde erfolgen würde. Das Ergebnis würde nur das sein, über jede schon vorher vorhandene Beschleunigung genau dieselbe Beschleunigung aller Teile zu superponieren. Es werde deshalb angenommen, daß auf jedes Teilchen eine Kraft vom Betrage $\frac{kM}{D^2}$ pro Masseneinheit in der OM entgegengesetzten Richtung wirke; diese hebt die Beschleunigung der Teilchen in O oder in seiner Nachbarschaft auf; und somit ist die Resultante dieser Kraft und der Anziehung des Mondes die die Änderung der relativen Konfiguration erzeugende Kraft. Kurz gesagt, wir machen die der Erde als Ganzem vom Monde erteilte Verschiebung durch eine Gegenverschiebung wieder

---

[1]) Gray, Lehrbuch der Physik I, deutsch von F. Auerbach, 1904, S. 634 f. — [2]) M = Mondmasse, D = Entfernung OM. — [3]) In der deutschen Ausgabe lauten die letzten Worte „nach Größe und Richtung dasselbe wie dieses hier". Das ist offenbar ungenau übersetzt. Da ich das Original nicht zur Hand habe, habe ich die Stelle in dem Zitat geschrieben, wie sie lauten könnte. Auch andere Stellen des Zitates machen den Eindruck, als ob eine bessere Wiedergabe von Grays Worten möglich sei.

rückgängig, um nur ihre Deformation um ihren Mittelpunkt als festen Punkt übrig zu behalten."

Die „Gegenverschiebung" erscheint hier als ein Kunstgriff, der gerade die nötigen Werte liefert. In dem als relativ ruhend vorausgesetzten System Erde–Mond gibt es keine Begründung dafür.

Wüllner macht die Sache „leicht durch folgende Betrachtung anschaulich" [1]: „Man habe drei Punkte A, C, B; die Punkte A und B werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen C hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht: an B die Kraft 3, an C die Kraft 2, und an A die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermaßen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältnis der drei Punkte zueinander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt C wieder wie anfangs von keiner Kraft affiziert. Am Punkte B bleibt aber die Kraft nach rechts hin, also vom Punkte C fortziehend übrig. An A zog ursprünglich die Kraft 10 gegen C nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 hinzu, später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort; es bleibt also nur die Kraft 9 nach C hinziehend übrig, oder, da wir uns statt der Kraft 9 die Kraft 10 nach C hin und die Kraft 1 von C fortziehend denken können, so folgt, daß durch Anbringen jener Kräfte auch bei A gleichsam eine von C fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von C und A nach rechts hin wirkenden Kräfte. So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht an den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der anderen Seite der Erde liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der Erde fortziehende Kraft."

Das ist in elementarer Form die Graysche Darstellung. Was bei Gray die Gegenverschiebung, das leistet bei Wüllner die Fortnahme der nach rechts hin ziehenden Kraft 2; auch sie ist in den angenommenen dynamischen Verhältnissen nicht begründet.

---

[1]) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik[5] 1, 192, 1895.

Wir werden noch sehen, daß Darlegungen, wie die vorstehenden, richtig gedeutet werden können, wenn man die wirklichen Verhältnisse zugrunde legt.

Zu dieser zweiten Gruppe gehört auch eine andere viel verbreitete Form. Man denkt sich, daß der Erdkörper zufolge der Anziehung sich ein wenig zum Monde hin bewege, daß aber die Wasser im Nadir dieser Bewegung nicht ganz folgen können, also ein wenig hinter ihr zurückbleiben. Wenn man bei dieser Form, wie es z. B. Krümmel in einer früheren Darstellung[1]) tut, das System Erde–Mond als relativ ruhend annimmt, dann ist selbstverständlich keine Annäherung der Erde an den Mond vorhanden, und die Form besitzt keinen Erklärungswert. Besser ist die Fassung, die ihr der Mathematiker und Philosoph Drobisch, der die Diskussion mit dem vorhin zitierten Aufsatz von Parrot aufnahm, gibt[2]). Es gibt, so meint er, eine Annäherung, wenn wir die richtige Vorstellung der Bewegungsverhältnisse nehmen: Erde und Mond bewegen sich um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Die Erde beschreibt also gleichfalls eine Kreisbahn im Monat. Diese Bewegung der Erde läßt sich in eine tangentiale und eine zentripetale zerlegen, und entsprechend der letzteren, sagt Drobisch, gibt es ein stetes Fallen und eine stete Annäherung der Erde an den Systemschwerpunkt bzw. an den Mond.

An dieser Fassung ist die Einsicht bemerkenswert, daß man ohne Berücksichtigung der Systemachse nicht weiter kommt. Aber sie ist ungenügend durchgeführt. Man kann die Kreisbahn so auffassen, als ob sie in jedem Augenblicke die Resultante einer normalen und einer tangentialen Komponente sei, als ob also eine Annäherung stattfände. Aber das ist eine willkürliche Vektorenzerlegung. Es existiert in Wirklichkeit keine Annäherung. Jede Annäherung würde eine Arbeit der Kraft bedeuten. Unter Voraussetzung der Kreisbahn bewegt sich aber die Erde auf Flächen gleichen Potentials, die Zentralkraft leistet also keine Arbeit. Sobald wir allerdings die volle Wirklichkeit nehmen, nach der die Bahn der Erde in den Systemen Erde–Mond und Erde–Sonne eine Ellipse ist, findet während der einen Hälfte des Monats bzw. Jahres eine stete Annäherung der Erde an Mond

---

[1]) Krümmel in A. Scobel, Geograph. Handbuch[5] **1**, 218 f., 1909. — [2]) Pogg. Ann. **6**, 237, 1826.

und Sonne statt, die im Perigäum bzw. Perihel ein Maximum erreicht und eine vierzehntägige bzw. halbjährige Flut erzeugt. Sie kommt aber für unser vorliegendes Problem offensichtlich nicht in Frage.

Im übrigen ist über diese letzte Form ähnlich wie über die ersten dieser Gruppe zu urteilen: sie stellt einen richtigen Gedanken in einer noch unglücklicheren Form dar.

3. Die dritte Gruppe gehört nur mehr äußerlich hierher. Zu ihr zählen wir alle Autoren, die wenigstens die später zu besprechende Relativtheorie der fluterzeugenden Beschleunigungen richtig bringen, die aber behaupten, dabei nur mit Gravitationsbeschleunigungen auszukommen [1]). Diese Behauptung hat auf ihre Ableitung keinen Einfluß, sie ist lediglich eine nachträgliche Deutung dessen, was sie tun. Ihre Besprechung mag daher dem Kapitel über die Relativtheorie vorbehalten bleiben. —

Diese kurze Übersicht kann den Fehler der Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen aus den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen noch in etwas anderem Lichte zeigen, als es § 10 getan hat. Diese Ableitung bildet die Differenzen zwischen den Beschleunigungen im Mittelpunkt O und in den Punkten A und B, sie faßt die Differenzen aber auf als Beschleunigungen gegen die Erdoberfläche. Das letztere dürfte sie nur, wenn sie zuvor nachweisen würde, daß die Erdoberfläche eine der mittleren Gravitationsbeschleunigung an Größe gleiche Beschleunigung besitzt. Dieser Nachweis ist aber auf dem Boden ihrer Voraussetzungen unmöglich.

§ 12. Unrichtige Auffassung der Revolution ohne Rotation.

Die meisten Autoren, die die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Systemachse einsehen, legen eine falsche Vorstellung der Revolution ohne Rotation zugrunde.

Sie sehen die Erde dabei als eine exzentrisch um die Systemachse sich bewegende Kugel an. Danach würde der Punkt A (Fig. 6, S. 17) dem Monde stets zugewandt bleiben und die Punkte der Erde würden Kreise beschreiben, von denen die in einer zur Erdbahn parallelen Ebene liegenden konzentrisch und deren Mittel-

---

[1]) Z. B. v. Schaper in den „Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol.“ 1910, S. 283; 1911, S. 34.

punkte sämtlich auf der Systemachse angeordnet wären. Anders ausgedrückt: die Erdoberfläche würde gegen ein mit der Zentrale starr verbundenes Koordinatensystem ruhen.

Diese Bewegung kann man zerlegen in eine monatliche Revolution um die Systemachse und eine monatliche Rotation um eine Achse, die durch den Schwerpunkt der Erde geht, aber nicht in die Schwerpunktsachse fällt, sondern der Systemachse parallel ist. Die Bewegung der Erde wäre also dann das genaue Gegenteil zu der in Wirklichkeit vorhandenen Bewegung des Mondes, falls man von der Neigung der Schwerpunktsachse des Mondes gegen die Bahn absieht.

Es stecken zwei Fehler in dieser Auffassung. Erstens ein methodischer. Wenn man von der Rotation der Erde absehen will, so darf man nicht willkürlich eine Art der Rotation beibehalten. Die Auffassung stellt die Revolution nicht rein dar. Ausschlaggebend für die Beurteilung ist natürlich der sachliche Fehler. Die Erde besitzt die vorausgesetzte monatliche Rotation um eine zur Systemachse parallele Achse in Wirklichkeit überhaupt nicht. Unter den hier angenommenen vereinfachten Bedingungen hat sie bloß die tägliche Rotation um ihre Schwerpunktsachse und die monatliche Revolution um die Systemachse. Die Folge jener falschen Vorstellung ist also, daß bei der Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen die Wirkung der monatlichen Rotation zu viel gerechnet wird. Es ist leicht einzusehen, daß die fluterzeugende Beschleunigung in der Vertikalen um den Betrag $\frac{4\pi^2 r \cos\gamma}{T^2}$, in der Horizontalen um den Betrag $\frac{4\pi^2 r \sin\gamma}{T^2}$ zu groß wird, wenn r den Erdradius, γ den Winkel zwischen Erdradius und Zentrale (nicht zwischen Erdradius und Bahnebene), T die Zeit (1 Monat bzw. 1 Jahr) bezeichnen.

§ 13. Einige Beispiele dieser Darstellung.

Ein paar Beispiele mögen diese allgemeinen Ausführungen belegen und verdeutlichen.

1. Thomson und Tait legen [1]) den Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Erde, die

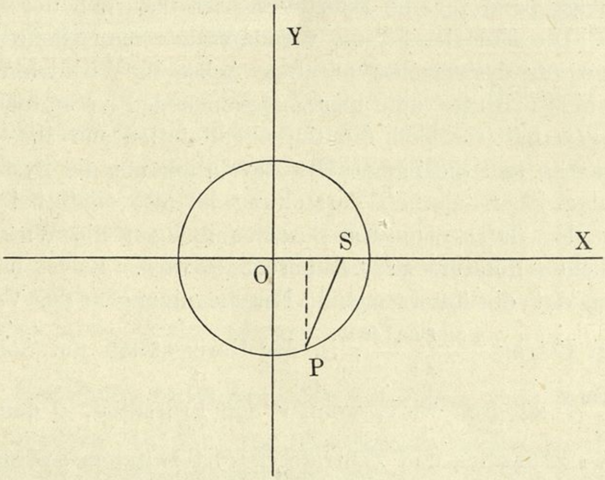
[1]) Thomson-Tait, Handbuch der theoretischen Physik **1**, 2, 374.

z-Achse senkrecht zur Ebene der kreisförmigen Bahnen und die x-Achse in die Zentrale. Bezeichnen nun ω die Winkelgeschwindigkeit der beiden Körper um den Systemschwerpunkt, a den Abstand dieses Schwerpunktes vom Erdmittelpunkt, R den Abstand der Mittelpunkte, M die Mondmasse, so ergeben die Gravitationspotentiale und das Potential der Zentrifugalkraft für die Gleichung einer Schar Oberflächen, die die Resultierenden der Schwere und der Zentrifugalkraft überall unter rechten Winkeln schneiden,

$$\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{M}{\sqrt{(R-x)^2+y^2+z^2}}+{}^1/_2\,\omega^2[(a-x^2)+y^2]=Const.$$

In diesem Ansatz von Thomson-Tait steckt jene falsche Vorstellung. Fig. 7 stellt im Sinne des Ansatzes einen Schnitt in der Bahnebene dar. O ist der Mittelpunkt der Erde, S der

Fig. 7.



Systemschwerpunkt. Die x- und die y-Achsen sind eingezeichnet, die z-Achse steht in O senkrecht zur Zeichenebene. Differenziert man die Funktion ${}^1/_2\,\omega^2[(a-x^2)+y^2]$ partiell einmal nach x und dann nach y, so erhält man $-\omega^2(a-x)$ und $\omega^2 y$. Bezeichnet man mit d den Abstand eines beliebigen Punktes P von der Systemachse (nicht vom Systemschwerpunkt), so sieht man unmittelbar aus der Figur, daß

$$d=\sqrt{(a-x)^2+y^2}$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten $-\omega^2(a-x)$ und $\omega^2 y$ sind demnach Komponenten der Funktion $\omega^2 d$, und das ist die (auf die Masseneinheit bezogene) Zentrifugalkraft, die entsteht, wenn die Erde um die Systemachse als exzentrische Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

2. Nach dieser Kritik ist die Darstellung von W. Voigt ohne weiteres zu beurteilen [1]). Er will von der Rotation der Erde um ihre Achse absehen und setzt Kreisbahnen voraus. Er fährt dann fort: „Denken wir den Schwerpunkt . . . des ganzen Systems ruhend, so rotieren die Zentren beider Kugeln mit gleichförmiger Geschwindigkeit in konstanten Abständen um eine durch ihn gehende Achse...; ruht, wie angenommen, die Flüssigkeit gegen ein mit ihnen rotierendes Koordinatensystem, so kann man die Einwirkung der Bewegung durch die Einführung der Zentrifugalkraft ersetzen und erhält als gesamtes Potential nach früheren Formeln:

$$\Phi = -k\left(\frac{m}{r} + \frac{M}{E}\right) - {}^1\!/_2\,\omega^2 d^2.\text{“}$$

E bedeutet den Abstand eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche vom Mondmittelpunkt, k die Gravitationskonstante.

Man sieht sofort, das ist dieselbe Darstellung wie bei Thomson-Tait: $-{}^1\!/_2\,\omega^2 d^2$ ist das Potential der bei der Rotation der Erde um die Systemachse als exzentrische Achse entstehenden Zentrifugalkraft $\omega^2 d$. Die von Voigt als identisch behandelten Aussagen „Revolution ohne Rotation“ und „Ruhen der Flüssigkeit gegen ein mit den beiden Körpern rotierendes Koordinatensystem“ sind eben nicht gleichbedeutend. Die erstere Aussage bedeutet vielmehr, daß die Erde in einem derartigen Koordinatensystem, dessen eine Achse also stets in die Zentrale fällt, eine monatliche Rotation um eine der Systemachse parallele Achse macht.

3. Le Corguillé spricht es direkt aus [2]), daß bei der Revolution ohne Rotation alle Punkte der Erde mit derselben Winkelgeschwindigkeit um die auf der Bahn senkrechte Systemachse rotieren und daß unter diesen Bedingungen die Zentrifugalkraft für jeden Punkt proportional seinem Abstande von dieser Achse ist.

---

[1]) W. Voigt, Elementare Mechanik², S. 399f., 1901. — [2]) Le Corguillé, Étude rationelle des marées 1896, S. 14.

4. Auch Jaumann behauptet[1]), die Teile der Erde hätten zufolge ihrer monatlichen Revolution desto größere Beschleunigungen, je weiter sie von der Rotationsachse entfernt seien.

5. Einen eigenartigen Typus stellt Hoff dar[2]). Indem er nur die Sonnentiden berücksichtigt und der Einfachheit wegen die Ebenen des Äquators und der Ekliptik zusammenfallen läßt, will er zunächst den Störungsbetrag für jeden beliebigen Punkt des Äquators ableiten. Zu dem Zwecke ist zuerst die Bahngeschwindigkeit zu bestimmen. Sie setzt sich zusammen aus der konstanten Geschwindigkeit des Erdmittelpunktes und aus derjenigen Komponente der rotierenden Bewegung, die in die Richtung der jährlichen Bewegung fällt. Die Geschwindigkeit des Erdmittelpunktes ist

$$V = \frac{2\pi A r}{T},$$

wo A hier die in Erdäquatorialradien ausgedrückte Entfernung des Erdmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkt und T die Dauer des siderischen Jahres bezeichnen. Zerlegt man nun die rotierende Bewegung in zwei Komponenten, die eine parallel zur Bahnlinie des Erdmittelpunktes, die andere senkrecht dazu, so kommt, da die Zentrifugalbeschleunigung in der Richtung der radialen Komponente gleich Null ist und diese Komponente auch keine Lageveränderung zum Erdmittelpunkt bewirkt, bloß die erste Komponente in Betracht, die den Wert

$$V_d = \frac{2\pi r}{t_1} \cos \tau$$

besitzt, wenn t_1 die Dauer des siderischen Tages und τ den Stundenwinkel der Sonne bedeuten. Die gesamte Bahngeschwindigkeit ist demnach gleich

$$V = V_a - V_d = \frac{2\pi A r}{T} - \frac{2\pi r}{t_1} \cos \tau.$$

Die Störungsgröße ergibt sich nun aus der Differenz der Zentrifugalkraft und der Größe der Sonnenanziehung. Bezeichnen M_1

---

[1]) Jaumann, Grundlagen der Bewegungslehre 1905, S. 110 f. — [2]) Hoff, „Elementare Theorie der Sonnentiden“ in den Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie 1907, S. 122 ff.

die Sonnenmasse (bezogen auf $m = 1$) und g die Fallbeschleunigung, so ist diese Differenz offensichtlich

$$\frac{V^2}{Ar} - \frac{gM_1}{A^2} = \frac{\left[\frac{2\pi Ar}{T} - \frac{2\pi r}{t_1} \cos\tau\right]}{Ar} - \frac{gM_1}{A^2}.$$

Da diese Größe auf den Sonnenmittelpunkt bezogen ist, muß sie noch durch Multiplikation mit $\cos\tau$ auf den zugehörigen Erdradius projiziert werden. Dann heben sich einige Glieder weg und es bleibt

$$P = -\frac{8\pi^2 r}{Tt_1}\cos^2\tau + \frac{4\pi^2 r}{At_1^2}\cos^3\tau.$$

Durch entsprechende Multiplikation mit dem Kosinus der Breite ergibt sich der Betrag für jeden beliebigen Parallelkreis.

Hoff will die so erhaltene Störungsformel auf die Gleichgewichtsform der rotierenden Erde anwenden. Daraus ergibt sich, daß er einen Teil der Rotationszentrifugalkraft zweimal in Rechnung stellt. Dieser Teil ist leicht zu finden, wenn wir noch auf einen anderen Fehler Hoffs achten. Er setzt die Zentrifugalkraft mit

$$\frac{V^2}{Ar} = \frac{(V_a - V_d)^2}{Ar}$$

an. Das darf er aber nicht, weil die Geschwindigkeiten V_a und V_d zu verschiedenen Radien gehören, V_a zu Ar, V_d zu r. Die Zentrifugalkraft, die von der Gesamtgeschwindigkeit V herrührt, besitzt in Wirklichkeit den Wert

$$\left(\frac{V_a^2}{Ar} - \frac{V_d^2}{r}\right);$$

das Glied $\frac{V_d^2}{r}$ ist also doppelt in Rechnung gestellt. —

Die besprochene fehlerhafte Auffassung der Revolution ohne Rotation kommt außer in den Arbeiten zur Theorie der Tiden auch gelegentlich anderswo vor, so z. B. bei v. Sterneck, der den Einfluß des Mondes auf die Richtung und die Größe der Schwerkraft der Erde untersuchen will [1]); an seiner Arbeit haben schon Helmert und Peters diesen Fehler getadelt [2]). Sie tritt aber

---

[1]) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien 1876. 73. Bd. Math.-physik. Klasse, II. Abt., S. 553 ff. — [2]) Astron. Nachr. **91**, 2175.

schon viel früher auf. Ich finde sie z.B. bei V. Streffleur, der neben der durch diese Bewegung entstehenden Zentrifugalkraft nicht die Anziehungskraft, sondern die Verteilung von Wasser und Land für die Dualität der Flut verantwortlich macht [1].

§ 14. Nicht hinreichende Allgemeinheit der Lösung.

Für jeden, der die Notwendigkeit der Rücksichtnahme auf die tatsächlichen Achsen einsieht, liegt der Gedanke der Benutzung der Zentrifugalkraft sehr nahe. Auf diese Weise sind denn z.B. auch sämtliche in § 13 besprochene Autoren verfahren.

Nun hat v. Schaper mit Recht darauf aufmerksam gemacht [2], daß der Gebrauch der Zentrifugalkraft im herkömmlichen Sinne nur bei dem Falle der kreisförmigen Bahn zu dem richtigen Ausdruck der fluterzeugenden Kräfte führt, daß er aber bei elliptischen Bahnen versagt, und zwar um so vollständiger, je größer die Exzentrizität der Ellipse wird. Der Grund liegt darin, daß die Zentrifugalkraft gemäß der üblichen Fassung eine Funktion des Krümmungsradius ist, also — mit Ausnahme der Kreisbahn — nicht der ganzen Zentripetalkraft, sondern nur ihrer Normalkomponente entgegengesetzt gleich ist. Fast sämtliche Ableitungen der fluterzeugenden Kräfte mit Hilfe der Zentrifugalkraft bestehen also nur für den speziellen Fall der Kreisbahn zu recht. Hierher gehören z. B. die Ableitungen von Davis, Darwin, Krümmel (zitiert in § 7), ferner die Darstellungen bei Kunz [3], Bidlingmaier [4], Lévy [5], Hatt [6] und meine eigenen früheren [7].

Diese Beurteilung setzt allerdings voraus, daß wir ein sicheres Mittel haben, um die Richtigkeit der Ausdrücke für die fluterzeugenden Kräfte zu erkennen. Dieses Mittel wird das folgende Kapitel an die Hand geben.

---

[1] V. Streffleur, Die Erscheinungen der Ebbe und Flut unter dem Einflusse der Rotation. Naturw. Abhandl. **1**, 115 ff. Wien 1847. — [2] Ann. d. Hydr. und marit. Meteor. 1910, S. 115. — [3] Kunz, Theoret. Physik 1907, S. 169. — [4] Bidlingmaier, Ebbe und Flut 1908. — [5] Lévy, Leçons sur la théorie des marées. I. Partie. 1898, S. 6 ff. — [6] Hatt, Des marées, S. 14 ff. (Paris, Gauthier-Villars, ohne Jahr). — [7] Aloys Müller, Elem. Theorie der Entstehung der Gezeiten 1906; Zur Theorie der Entstehung der Tiden in Gerlands und Rudolphs Beiträgen zur Geophysik **10**, Heft 1 und 2.

IV. Die Relativtheorie der fluterzeugenden Beschleunigungen.

§ 15. Grundlage und Ableitung der Ausdrücke.

Es wurde schon angedeutet, daß es zwei wissenschaftlich in Betracht kommende Theorien der fluterzeugenden Beschleunigungen gibt: die Relativtheorie und die Zentrifugalkrafttheorie.

Wir besprechen zunächst die Relativtheorie.

Sie findet ihre Grundlage in einfachen allgemeinen Überlegungen der Mechanik. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes P zunächst einmal in bezug auf ein absolutes Koordinatensystem, d. h. auf ein solches, von dem man keine Bewegung relativ zu einem anderen aussagen will, und bezeichnen seine Geschwindigkeit als die absolute Geschwindigkeit v. Denken wir uns weiter einen starren, d. h. mit sich selbst stets kongruenten Körper K auch in Bewegung zu diesem absoluten Koordinatensystem. Dann können wir die Bewegung von P auch zweitens relativ zu K betrachten, indem wir uns etwa vorstellen, daß wir uns auf dem Körper K befänden und nur die Bewegung von P relativ zu K kännten. Die Geschwindigkeit von P relativ zu K sei v_r. Schließlich drittens können wir uns P mit K starr verbunden denken. Infolge dieser Verbindung wird P eine Geschwindigkeit haben, die wir Führungsgeschwindigkeit nennen und mit v_f bezeichnen wollen. Unter Umständen ist v_f auch die Geschwindigkeit von K, jedenfalls ist v_f eine absolute Geschwindigkeit, d. h. eine Geschwindigkeit relativ zu unserem absoluten Koordinatensystem. Nehmen wir nun an, P werde von K mitgeführt und besäße gleichzeitig eine Relativbewegung zu K, so ist offenbar

$$\overline{v} = \overline{v_r} + \overline{v_f}.$$

Die Striche sollen anzeigen, daß es sich um geometrische Addition handelt. Daraus folgt

$$\overline{v_r} = \overline{v} - \overline{v_f}.$$

Für den besonderen Fall, daß K eine Translationsbewegung ausführt, ist auch

$$\overline{u_r} = \overline{u} - \overline{u_f},$$

wo die u die den v entsprechenden Beschleunigungen bedeuten. Diese Gleichung gilt nicht allgemein; für den Fall der Drehung kommt noch das Coriolissche Glied hinzu.

Diese Gleichung faßt nun unser vorliegendes Problem. K ist die Erde. In Wirklichkeit ist sie nicht vollkommen starr. Sie wird auch als fester Erdkörper den Störungskräften von Mond und Sonne bis zu einem gewissen Grade folgen. Aber davon können wir hier absehen. P ist ein Punkt des Meeres. Das Meer wird zwar von K mitgeführt, besitzt aber auch Relativbewegungen zu K. Wir dürfen nun ohne weiteres die Beziehung der Geschwindigkeiten in eine solche der Beschleunigungen umsetzen, weil nach § 7 die in Betracht kommende Bewegung der Erde eine reine Translationsbewegung ist. Wir erhalten also die Relativbeschleunigung eines Punktes des Meeres zur Erde, indem wir die Differenz der absoluten Beschleunigung und der Führungsbeschleunigung bilden. Weil die letztere selber absolut ist, können wir auch so sagen: wir erhalten die Relativbeschleunigung aus der Differenz der Absolutbeschleunigungen, indem wir den Punkt zunächst als freien, dann als starren (d. h. starr mit der Erde verbundenen) Punkt ansehen.

Ist G die Einheit der Beschleunigung der $\left.\begin{matrix}\text{Mond-}\\ \text{Sonnen-}\end{matrix}\right\}$Anziehung, so ist

$$u = \frac{G}{E^2}.$$

Um u_f zu finden, beachten wir, daß die Verbindung des Punktes mit der Erde starr ist, daß also die Führungsbeschleunigung die Beschleunigung des Erdmittelpunktes ist. Demnach

$$u_f = \frac{G}{D^2}.$$

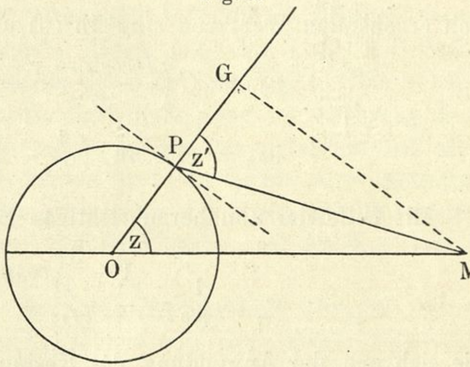
D ist keine Konstante, sondern als Abstand der Mittelpunkte Erde-$\left\{\begin{matrix}\text{Mond}\\ \text{Sonne}\end{matrix}\right.$ die periodisch sich ändernde Summe der Radienvektoren in der Erd- und $\left.\begin{matrix}\text{Mond-}\\ \text{Sonnen-}\end{matrix}\right\}$Bahn. Es ergibt sich also

$$\bar{u}_r = \frac{\overline{G}}{E^2} - \frac{\overline{G}}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Wert u_r ist die fluterzeugende Beschleunigung.

Wir wollen nun die geometrische Subtraktion ausführen, indem wir den Wert in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegen. Wir bezeichnen die Komponenten mit angehängtem h und v. In Fig. 8 ist O der Mittelpunkt der Erde, M der Mond, P der betrachtete beliebige Punkt. MG steht senkrecht auf der Verlängerung des Radius OP. Sehen wir (§ 5) von der Abplattung des Erdkörpers ab, was für die Tidentheorie durchschnittlich genügt, so ist $\sphericalangle MOP = z$ die wahre, $\sphericalangle MPG = z'$ die scheinbare Zenitdistanz des Mondes. Aus der Figur ergibt sich ohne weiteres

Fig. 8.



$$u_v = \frac{G \cos z'}{E^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$u_h = \frac{G \sin z'}{E^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$u_{fv} = \frac{G \cos z}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$u_{fh} = \frac{G \sin z}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Vereinigt man (2) mit (4) und (3) mit (5), so erhält man

$$u_{rv} = \frac{G \cos z'}{E^2} - \frac{G \cos z}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$u_{rh} = \frac{G \sin z'}{E^2} - \frac{G \sin z}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Nun ist

$$\cos z' = \frac{PG}{E},$$

und da $PG = OG - OP = D \cos z - r$ ist, auch

$$\cos z' = \frac{D \cos z - r}{E}.$$

Setzt man diesen Wert und den aus

$$\frac{E}{D} = \frac{\sin z}{\sin z'}$$

sich ergebenden Wert von $\sin z'$ in (6) und (7) ein, so kommt

$$u_{rv} = G\left(\frac{D\cos z - r}{E^3} - \frac{\cos z}{D^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$u_{rh} = GD\sin z\left(\frac{1}{E^3} - \frac{1}{D^3}\right) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Mit Hilfe der annähernd richtigen Beziehung

$$\frac{1}{E^3} = \frac{1 + \frac{3r}{D}\cos z}{D^3},$$

die sich aus der Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck OPM und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß annähernd

$$\frac{1}{1 - \frac{3r}{D}\cos z} = 1 + \frac{3r}{D}\cos z$$

ist, ergibt, wenn man die höheren als die ersten Potenzen von $\frac{1}{D}$ vernachlässigt, verwandeln sich die Gleichungen (8) und (9) in die genäherten Gleichungen

$$u_{rv} = \frac{Gr}{D^3}(3\cos^2 z - 1) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$u_{rh} = \frac{3Gr}{2D^3}\sin 2z \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Das sind die Gleichungen für die fluterzeugenden Beschleunigungen, an die jede Tidentheorie anknüpfen muß.

§ 16. Die Gravitationsunterschiede in der Relativtheorie.

Das letzte Glied von Gleichung (1) würde nicht auftreten, wenn der Punkt keine Beschleunigung besäße, d. h. wenn die Erde keine Revolution um die Systemachse machte. Dann wäre nämlich das System in relativer Ruhe und sämtliche auftretende Beschleunigungen wären reine Gravitationsbeschleunigungen von der Form des ersten Gliedes der Gleichung. Wir ersehen daraus erstens die Notwendigkeit, die wirklichen Achsen zu berücksichtigen. Zweitens und hauptsächlich geht aber daraus hervor, daß die Tiden keine reine Gravitationswirkung sind. Nur an einem in beschleunigter Bewegung befindlichen Körper können die Gravitationsunterschiede Tiden mit den charakteristischen Eigenschaften der wirklichen Tiden hervorbringen. Damit haben wir neben der ersten notwendigen Bedingung zur Ableitung dieser Eigenschaften (§ 10) die zweite notwendige gefunden und sehen gleichzeitig, daß diese beiden notwendigen Bedingungen, nämlich 1. die Translationsbewegung der Erde um die Systemachse, 2. die Abhängigkeit der Gravitation von den Koordinaten, auch hinreichend sind.

Man könnte sagen: in einem beschleunigt bewegten System kommt man bei unserem Problem mit den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen aus. Aber aus historisch-psychologischen Gründen ist es angebracht, statt dieser an sich richtigen Formulierung das Vorhandensein einer beschleunigten Bewegung als eine der beiden notwendigen Bedingungen ausdrücklich hervorzuheben.

§ 17. Eine einfachere Darstellung der Relativtheorie.

Wir wollen noch eine einfache und durchsichtige Darstellung des Grundgedankens der Relativtheorie in Anlehnung an Mach[1]) bringen. Bei Mach ist allerdings die Translationsbewegung der Erde um die Systemachse berücksichtigt; aber nur da, wo die Betonung dieser Notwendigkeit vorangegangen ist, wird die Machsche Darstellung keinem Mißverständnis ausgesetzt sein. Die Erweiterung, die wir im Vergleich zu Mach vornehmen, kann uns besonders deutlich die Möglichkeit eines Verständnisses der beiden charakteristischen Tideneigenschaften zeigen.

Die Punkte A, O, B (Fig. 6) mögen die nächste, mittlere und weiteste Entfernung vom störenden Körper besitzen. Betrachtet man sie als freie Punkte und nennt, wie in § 10, ihre Beschleunigungen gegen den störenden Körper $|a_1|$, $|a_0|$, $|a_2|$, so kann man offenbar diese Beschleunigungen auch schreiben

$$|a_0 + (a_1 - a_0)|, \quad |a_0|, \quad |a_0 - (a_0 - a_2)|.$$

---

[1]) Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung[7], S. 206 f., 1912.

Sieht man sie als starre Punkte an, so haben sie die Beschleunigung $|a_0|$ des Erdmittelpunktes. $|g|$ als Resultante aus der Schwerebeschleunigung und der Rotationszentrifugalbeschleunigung der Erde möge die konstante Niveaufläche symbolisieren, relativ zu der wir die Bewegungen betrachten. Bezeichnet man nun wieder die Beschleunigungen nach dem störenden Körper zu positiv, von ihm ab negativ, so ergeben sich die Endresultate für die drei Punkte folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccc}
A & O & B \\
-g & & +g \\
+[a_0+(a_1-a_0)] & +a_0 & +[a_0-(a_0-a_2)] \\
+a_0 & +a_0 & +a_0 \\
\hline
-[g-(a_1-a_0)] & 0 & g-(a_0-a_2)
\end{array}$$

Daraus läßt sich nun zweierlei schließen:

1. In A und B ist $|g|$ vermindert, also begreifen wir, wie im Zenit und im Nadir Flut entstehen kann.

2. Die Ausdrücke für die Beschleunigungen $|a_1|$, $|a_0|$, $|a_2|$ sind Brüche, deren Zähler gleich, deren Nenner die Quadrate der Entfernungen der Punkte A, O, B vom störenden Körper sind. Bedenkt man, daß $AO = OB$ ist, und nennt man A die in Erdhalbmessern ausgedrückte Entfernung des Punktes O, so lassen sich die Beschleunigungen

in	A	O	B
anstatt durch	$\lvert a_1\rvert$	$\lvert a_0\rvert$	$\lvert a_2\rvert$
auch durch	$\left\lvert\frac{1}{(A-1)^2}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{1}{A^2}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{1}{(A+1)^2}\right\rvert$

als ihre Maße darstellen, und die vorhin abgeleiteten Werte, um die $|g|$ vermindert ist, werden

$$|a_1-a_0| = \left|\frac{1}{(A-1)^2}-\frac{1}{A^2}\right|$$

$$|a_0-a_2| = \left|\frac{1}{A^2}-\frac{1}{(A+1)^2}\right|.$$

Weil nun

$$\frac{1}{A-1} > \frac{1}{A+1}$$

ist, so ist schon

$$\frac{1}{A-1}-\frac{1}{A} > \frac{1}{A}-\frac{1}{A+1},$$

und weil $(A+1)^2 - A^2 > A^2 - (A-1)^2$

ist, in noch höherem Maße

$$\left|\frac{1}{(A-1)^2} - \frac{1}{A^2}\right| > \left|\frac{1}{A^2} - \frac{1}{(A+1)^2}\right|.$$

Die fluterzeugende Beschleunigung in A ist also größer als die in B. Dem entspricht die zweite charakteristische Eigenschaft der Tiden: Die Zenitflut besitzt einen Maximalwert.

§ 18. Die fluterzeugenden Beschleunigungen im Nadir.

Die fluterzeugenden Beschleunigungen im Nadir sind der Richtung nach in den Gleichungen (10) und (11) enthalten, wobei wir z von 0 bis 180° zählen. Denn die vertikale Komponente ist positiv, wenn $3\cos^2 z > 1$ ist, also von $z = 0^\circ$ bis $z = 54^\circ 44'$ und von $z = 125^\circ 16'$ bis $z = 180^\circ$; in dem zwischenliegenden Bereiche ist sie negativ. Die horizontale Komponente ist positiv, wenn $\sin 2z$ positiv ist, also von $z = 0^\circ$ bis $z = 90^\circ$, negativ von $z = 90^\circ$ bis $z = 180^\circ$.

Wenn wir aber in den Gleichungen (6) und (7) auch den Nadir mit Hilfe der Vorzeichen berücksichtigen, so ergibt die Durchrechnung, daß der Unterschied der Größe der Zenit- und Nadirbeschleunigungen aus den Gleichungen (10) und (11) infolge der Vernachlässigungen herausfällt.

Die Größe des Verhältnisses der fluterzeugenden Beschleunigungen im Zenit und Nadir kann man auf folgende Weise erhalten. Bezeichnen wir mit Z und N die Maximalwerte der Beschleunigungen im Zenit und Nadir, so ist

$$Z = G\left(\frac{1}{(A-1)^2} - \frac{1}{A^2}\right),$$

$$N = G\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{(A+1)^2}\right).$$

Daraus

$$\frac{Z}{N} = \frac{2A^3 + 3A^2 - 1}{2A^3 - 3A^2 + 1}.$$

Dieser Ausdruck entwickelt sich in die Reihe

$$1 + \frac{3}{A} + \frac{3^2}{2A^2} + \frac{3^3}{2^2A^3} + \frac{3^4}{2^3A^4} + \cdots$$

Bricht man die Reihe nach dem zweiten Gliede ab, weil die höheren als die ersten Potenzen von $\frac{1}{A}$ sehr kleine Größen sind, so erhält man

$$\frac{Z}{N} = 1 + 3\frac{r}{D}.$$

Wegen einer falschen Auffassung, der man manchmal begegnet, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß dieser Ausdruck von jeder Theorie der Tiden unabhängig und, abgesehen von den Vernachlässigungen in der Reihe, vollkommen richtig ist. Aber das Verhältnis der fluterzeugenden Beschleunigungen ist nur in der Gleichgewichtstheorie der Tiden gleich dem Verhältnis der Fluthöhen, in Wirklichkeit aber nicht. Das wirkliche Verhältnis der Maximalwerte der Fluthöhen im Zenit und Nadir ist etwa halb so groß wie das aus der Gleichgewichtstheorie berechnete.

Die numerische Rechnung gibt für das Verhältnis $\frac{Z}{N}$ bei den Mondtiden ungefähr den Wert 1,05, bei den Sonnentiden ungefähr 1,000 13. In der Praxis wird dieser Unterschied bei den Sonnentiden natürlich ohne weiteres vernachlässigt. Bei den Mondtiden könnte man sich durch Superposition einer ganztägigen und einer halbtägigen Flut helfen. Nennt man h_z die Höhe der Zenitflut so erhält man unter den Voraussetzungen der Gleichgewichtstheorie ein Bild der Wirklichkeit, wenn man eine ganztägige Flut mit der Höhe $3\frac{r}{D}h_z$ und eine halbtägige mit der Höhe $h_z\left(1 - 3\frac{r}{D}\right)$ annimmt, wobei wieder von der Beziehung Gebrauch gemacht ist, daß annähernd

$$\frac{1}{1 + 3\frac{r}{D}} = 1 - 3\frac{r}{D}$$

ist. Aber aus dem vorhin genannten Grunde kann dieser Unterschied auch bei den Mondtiden ohne nennenswerten Fehler praktisch unberücksichtigt bleiben.

V. Die Zentrifugalkraft.

§ 19. Die Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen in elliptischer Bahn mit Hilfe des herkömmlichen Zentrifugalkraftbegriffes.

Bevor wir zur zweiten der in § 15 erwähnten Theorien der fluterzeugenden Beschleunigungen, der Zentrifugalkrafttheorie, übergehen, müssen wir ihre Grundlage, die Zentrifugalkraft, einer Betrachtung unterziehen. Nicht nur bestehen im allgemeinen die verschiedensten Auffassungen dieser Kraft, im besonderen hat auch ihre Benutzung in der Theorie der fluterzeugenden Beschleunigungen ein Problem aufgeworfen, das in § 14 schon berührt wurde. Es läßt sich zeigen, daß bei einer Bewegung, wie sie die Revolution der Erde um die Systemachse ist, eine Zentrifugalkraft auftreten und in der Erscheinung der Tiden mitwirken muß. Sobald man aber die wirkliche, elliptische Bahn berücksichtigt, stimmen die Formeln mit den aus der Relativtheorie erhaltenen, die unzweifelhaft richtig sind, nicht mehr überein. Das wollen wir zunächst nachweisen.

Es mögen noch bedeuten

a und b die große und kleine Halbachse der Bahnellipse der Erde in beiden Systemen,
s den Radiusvektor dieser Bahnellipse,
ϱ den Krümmungsradius,
ψ den Winkel zwischen s und ϱ.

Für den Endpunkt jedes r ist

$$u = \frac{G}{E^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{V^2}{\varrho}.$$

Projiziert man c auf s, so kommt

$$c' = \frac{V^2}{\varrho} \cos\psi.$$

Ferner ist (vgl. § 15)

$$u_v = \frac{G(D\cos z - r)}{E^3}, \qquad c'_v = \frac{V^2 \cos\psi \cos z}{\varrho},$$

und

$$u_h = \frac{G D \sin z}{E^3} \qquad c'_h = \frac{V^2 \cos\psi \sin z}{\varrho}.$$

Die Projektion der gesamten Bahnbeschleunigung $u_f = \frac{G}{D^2}$ auf ϱ ergibt

$$u_f' = \frac{G \cos\psi}{D^2}.$$

Demnach ist

$$\frac{G \cos\psi}{D^2} = \frac{V^2}{\varrho}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichungen der c'-Komponenten ein, so erhält man

$$c_v' = \frac{G \cos^2\psi \cos z}{D^2},$$

$$c_h' = \frac{G \cos^2\psi \sin z}{D^2},$$

und weil, wie sich aus den bei Salmon-Fiedler[1]) mitgeteilten Formeln leicht ableiten läßt,

$$\cos\psi = \frac{b}{\sqrt{s(2a-s)}},$$

auch

$$c_v' = \frac{G b^2 \cos z}{s D (2a-s)},$$

$$c_h' = \frac{G b^2 \sin z}{s D (2a-s)}.$$

Als Komponenten der fluterzeugenden Beschleunigung ergeben sich also

$$u_{rv} = \frac{G(D \cos z - r)}{E^3} - \frac{G b^2 \cos z}{s D (2a-s)},$$

$$u_{rh} = \frac{G D \sin z}{E^3} - \frac{G b^2 \sin z}{s D (2a-s)}.$$

Mit Hilfe der für Gleichung (10) gebrauchten Beziehung zwischen E und D folgen daraus die Gleichungen

$$u_{rv} = \frac{G \cos z}{D^3}\left(D + 3r \cos z - \frac{r}{\cos z} - \frac{3r^2}{D} - \frac{b^2 D}{s(2a-s)}\right),$$

$$u_{rh} = \frac{G \sin z}{D^2}\left(1 + \frac{3r \cos z}{D} - \frac{b^2}{s(2a-s)}\right).$$

---

1) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. I[7], 1907, S. 410.

Das sind, wie man sofort sieht, die Gleichungen (10) und (11) mit den Zusatzgliedern

$$\frac{G\cos z}{D^2}\left(1-\frac{b^2}{s(2a-s)}\right) \text{ für } u_{rv},$$

$$\frac{G\sin z}{D^2}\left(1-\frac{b^2}{s(2a-s)}\right) \text{ für } u_{rh}.$$

Wenn diese Zusatzglieder auch praktisch wenig bedeuten mögen, so sind sie doch nach den Untersuchungen des letzten Kapitels theoretisch falsch. Dieses Ergebnis zusammen mit dem zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Umstande, daß Zentrifugalkräfte auftreten und wirksam sein müssen, legt nur eine Folgerung nahe, daß nämlich nicht der Zentrifugalkraftbegriff überhaupt, sondern nur die herkömmliche Form desselben zur Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen unbrauchbar ist. Die Bestätigung wird der folgende Paragraph enthalten.

§ 20. Strenge Ableitung des analytischen Begriffes der Zentrifugalkraft für die Kreisbahn.

Da man die Zentrifugalkraft in die Mechanik meistens wenig glücklich mit Hilfe des Prinzips der actio und reactio einführt, so sei zunächst in engem Anschluß an Kirchhoff[1]) eine strenge Ableitung für die Kreisbahn gegeben, die geeignet ist, den Begriff von einem Standpunkte aus klarzumachen.

Wir stellen uns das Problem, zu untersuchen, wie sich die Differentialgleichungen der Bewegung ändern, wenn sie auf ein rotierendes Koordinatensystem bezogen werden.

Es sei ein System von materiellen Punkten gegeben, das beliebigen Kräften und beliebigen Bedingungsgleichungen unterworfen ist. Die Lage der Punkte zur Zeit t beziehen wir gleichzeitig auf zwei Koordinatensysteme, ein ungestrichenes und ein gestrichenes. Das ungestrichene System betrachten wir als ruhend, das gestrichene als mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rechtläufig rotierend. Die Anfangspunkte mögen zusammenfallen, die z-Achse und die z'-Achse legen wir in die Achse der Drehung. m bedeute für diesen Paragraphen die Masse eines Punktes, x, y, z seine Koordinaten im ungestrichenen,

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik[4] 1897, S. 86 ff.

x', y', z' im gestrichenen System, X, Y, Z die Komponenten der auf den Punkt wirkenden Kraft zur Zeit t im ungestrichenen, X', Y', Z' im gestrichenen System. δx, δy, δz seien den Achsen parallele virtuelle Variationen im ungestrichenen, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ im gestrichenen System. Nach dem d'Alembertschen Prinzip haben wir

$$\sum\left(m\frac{d^2 x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2 y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2 z}{dt^2}-Z\right)\delta z=0 \quad (12)$$

Unser Problem ist gelöst, wenn wir in diese Gleichung die Buchstaben des gestrichenen Systems eingeführt haben.

Man sieht zunächst leicht, daß die Gleichungen für die Vertauschbarkeit der Koordinaten der beiden Systeme im vorliegenden Falle lauten

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ y &= x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

Für die Variationen gelten die entsprechenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \delta x'\cos\omega t - \delta y'\sin\omega t \\ \delta y &= \delta x'\sin\omega t + \delta y'\cos\omega t \\ \delta z &= \delta z' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (14)$$

Differenzieren wir die Gleichungen (13) nach t, so kommt

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}\cos\omega t-\frac{dy'}{dt}\sin\omega t-\omega x'\sin\omega t-\omega y'\cos\omega t,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx'}{dt}\sin\omega t+\frac{dy'}{dt}\cos\omega t+\omega x'\cos\omega t-\omega y'\sin\omega t,$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt}.$$

Die nochmalige Differentiation nach t ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t-\frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t-2\omega\frac{dx'}{dt}\sin\omega t \\ -2\omega\frac{dy'}{dt}\cos\omega t-\omega^2 x'\cos\omega t+\omega^2 y'\sin\omega t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\omega t+\frac{d^2y'}{dt^2}\cos\omega t+2\omega\frac{dx'}{dt}\cos\omega t \\ -2\omega\frac{dy'}{dt}\sin\omega t-\omega^2 x'\sin\omega t-\omega^2 y'\cos\omega t,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Beachten wir nun noch, daß

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$$

ist, weil es sich dabei um die Arbeit derselben Kraft für dieselbe Verrückung ihres Angriffspunktes handelt. Jetzt können wir die Vertauschung in Gleichung (12) vornehmen. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sum \Bigl(m\frac{d^2x'}{dt^2} - X' - m\omega^2 x' - m\,2\,\omega\frac{dy'}{dt}\Bigr)\delta x' \\ + \Bigl(m\frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - m\omega^2 y' + m\,2\,\omega\frac{dx'}{dt}\Bigr)\delta y' \\ + \Bigl(m\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Bigr)\delta z'. \end{aligned}\right\} \cdot \quad (15)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (12), so ergibt sich folgendes. Man kann das gestrichene System als ruhend ansehen, wenn man zu den Kräften des gestrichenen Systems noch bestimmte Kräfte hinzufügt. Die Komponenten dieser letzten Kräfte auf unseren Punkt sind

$$\begin{aligned} X'' &= m\Bigl(\omega^2 x' + 2\,\omega\frac{dy'}{dt}\Bigr), \\ Y'' &= m\Bigl(\omega^2 y' - 2\,\omega\frac{dx'}{dt}\Bigr), \\ Z'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese Komponenten lassen sich in die beiden Gruppen zerlegen

$$\begin{matrix} m\omega^2 x' & & m\,2\,\omega\dfrac{dy'}{dt} \\ m\omega^2 y' & \text{und} & m\,2\,\omega\dfrac{dx'}{dt} \\ 0 & & 0. \end{matrix}$$

Jede dieser Gruppen stellt eine Kraft dar. Die zweite Kraft tritt dann nicht auf, wenn der Punkt gegen das gestrichene System ruht; denn dann ist

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = 0.$$

Für diesen Fall, der uns allein interessiert, bleibt die Kraft übrig, deren Komponenten die erste Gruppe darstellt. Diese Kraft hat die Größe

$$m\omega^2\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

und stellt einen auf der Achse der Drehung senkrechten und von ihr ab gerichteten Vektor dar. Diese Kraft nennen wir Zentrifugalkraft.

Wir ändern noch die Bedingungen der Lösung etwas ab und nehmen zunächst an, daß die Bedingungsgleichungen zwischen x', y', z' die Zeit nicht enthalten. Dann kann man für $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ in Gleichung (15) setzen dx', dy', dz', weil das jetzt virtuelle Variationen der x', y', z' in der Zeit dt sind. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sum\Big(m\frac{d^2x'}{dt^2} - X' - m\,\omega^2 x'\Big)dx' \\ + \Big(m\frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - m\,\omega^2 y'\Big)dy' \\ + \Big(m\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Big)dz' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Nehmen wir schließlich noch an, daß die Lage des Systems durch eine Variable bestimmt ist, so kann man aus (16) die Bewegung des Systems berechnen. Man sieht, daß also auch unter diesen Voraussetzungen die Rotation des Systems durch Einführung der Zentrifugalkraft ersetzt werden kann.

Daraus ergibt sich deutlich ein Sinn der Zentrifugalkraft, den wir den analytischen Sinn nennen wollen. Will man das Kraftfeld eines rotierenden Körpers beschreiben, so kann man ihn als ruhend ansehen, muß aber dann zu den im Ruhzustande an ihm wirkenden Kräften noch die sogenannte Zentrifugalkraft hinzufügen. Man darf diese Auffassung nicht mißverstehen. Sie gilt nur für die analytische Darstellung: anstatt, wie es in diesem Paragraphen geschehen ist, von einem Prinzip ausgehend die Änderung der Bewegungsgleichungen bei einem rotierenden System zu suchen, kann man unmittelbar das Resultat von Gleichung (16) benutzen. Wer aber aus der obigen Fassung des analytischen Sinnes folgern würde, daß in der Wirklichkeit an einem rotierenden Körper keine Zentrifugalkraft existiere, würde im Irrtum sein; in irgend einer Form existiert sie in der Wirklichkeit. Wir kommen später noch auf diese Frage zurück. Hier soll nur dem Irrtum vorgebeugt werden, die Zentrifugalkraft wegen dieses analytischen Resultates als Scheinkraft oder ähnlich zu bezeichnen; es bleibt vorläufig offen, ob es andere Gründe für diese Bezeichnung gibt.

Noch eine weitere Bemerkung ist anzuknüpfen. Die Entwickelung dieses Paragraphen hat gezeigt, daß die analytische Auffassung der Zentrifugalkraft vollständig klar und keinem Zweifel unterworfen ist. Damit ist die zu Anfang von § 19 aufgestellte Behauptung, daß die Zentrifugalkraft in den Systemen Erde—$\begin{cases}\text{Mond}\\\text{Sonne}\end{cases}$ eine Rolle spielen muß, bewiesen; faßt man die Bahn der Erde in beiden Fällen als Kreisbahn, so hat man das Recht, ohne weiteres die Ergebnisse von Gleichung (16) zu benutzen. Rechnet man mit dem üblichen Zentrifugalkraftbegriff für die elliptische Bahn und erhält, wie § 19 zeigte, falsche Resultate, so kann demnach der Grund nur darin liegen, daß der übliche Ausdruck nicht allgemein genug ist. Die Vermutung am Schluß von § 19 ist damit bestätigt.

§ 21. Der analytische Begriff der Zentrifugalkraft für jede beliebige Bahn.

Die Mechanik kennt bisher eine Zentrifugalkraft nur bei krummliniger Bewegung. Der allgemeinste Ausdruck für die absolute Größe der an einem Punkte mit der Masse m auftretenden Zentrifugalkraft ist nach ihr $m\frac{V^2}{\varrho}\cdot$ Im Falle der Kreisbahn mit dem Radius r ist $\varrho = r$.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß bei jeder beschleunigten Bewegung eines anziehenden Körpers[1]) sein Kraftfeld nur dann vollständig beschrieben wird, wenn zu den Kräften des Ruhzustandes oder — was dasselbe bedeutet — zu den Kräften der geradlinig-gleichförmigen Bewegung noch Kräfte hinzugefügt werden, die überall von derselben allgemeinen Form sind. Insofern sie die relativen Lagen der Teile des Körpers stören können, kann man sie Störungskräfte nennen. Wir führen die Untersuchung der Reihe nach für jede Art von Bewegung.

1. Die geradlinig gleichförmige Bewegung.

Ist der Körper mit dem Mittelpunkt O (Fig. 6) in geradlinig gleichförmiger Bewegung auf der durch die Punkte A und B

---

[1]) Wir beschränken uns auf diesen besonderen Fall, weil er unser Problem einschließt. Die Behauptung gilt im übrigen allgemein.

gehenden Geraden, so besitzen gemäß dieser Voraussetzung sämtliche Punkte relativ zu O lediglich die Beschleunigungen $-g$ bzw. $+g$. Es tritt also keine Störung auf.

Eine andere Überlegung führt zu demselben Ergebnis. Wegen der Relativität der Bewegung darf man den geradlinig gleichförmig bewegten Körper in Ruhe und das Koordinatensystem, auf das seine Bewegung bezogen wird, gegen ihn in umgekehrtem Sinne bewegt denken. Die Fälle der Ruhe und der geradlinig gleichförmigen Bewegung sind also bezüglich des Kraftfeldes identisch.

2. Die geradlinig beschleunigte Bewegung.

Die Störung ergibt sich dabei schon, wenn wir die Punkte A, O, B so ansehen, als ob sie der die Beschleunigung erzeugenden Kraft frei folgen könnten. Ihre Entfernungen vom Orte der anziehenden Kraft seien r_1, r_2, r_3, so daß also $(r_2 - r_1) = (r_3 - r_2)$ ist. Wir stellen uns vor, die Kraft finge in einem bestimmten Augenblicke an zu wirken. In diesem Augenblicke sind die Beschleunigungen von A, O, B gleich $\frac{\mu}{r_1^2}$, $\frac{\mu}{r_2^2}$, $\frac{\mu}{r_3^2}$, wenn μ die Einheit der Beschleunigung der anziehenden Kraft ist. Nennen wir die Wege, die die drei Punkte als freie nach t Sekunden zurücklegen würden, s_1, s_2, s_3, so ergeben sich die folgenden Entwickelungen:

Wege nach t^s	Entfernungen nach t^s	Unterschiede der Entfernungen nach t^s
$s_1 = \frac{\mu t^2}{2 r_1^2}$	$r_1 - \frac{\mu t^2}{2 r_1^2}$	
$s_2 = \frac{\mu t^2}{2 r_2^2}$	$r_2 - \frac{\mu t^2}{2 r_2^2}$	$(r_2 - r_1) + \frac{\mu t^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$
$s_3 = \frac{\mu t^2}{2 r_3^2}$	$r_3 - \frac{\mu t^2}{2 r_3^2}$	$(r_3 - r_2) + \frac{\mu t^2}{2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_3^2}\right)$

Die letzten Glieder der Formeln in der dritten Kolonne zeigen, daß das Kraftfeld sich lediglich unter dem Einfluß der anziehenden Kraft und der Bewegung so geändert hat, als ob eine abstoßende Kraft von O aus den Punkten A und B die Beschleunigungen

$$\mu\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \quad \text{und} \quad \mu\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_3^2}\right)$$

erteilt habe.

Mit Hilfe der Methode der Relativbeschleunigung als Differenz der Absolutbeschleunigungen (§ 15) läßt sich dieses Resultat verallgemeinern. Die drei Punkte A, O, B als freie Punkte betrachtet, mögen die Beschleunigungen $|a + \delta a|$, $|a|$, $|a - \delta a|$ besitzen. Als starre Punkte haben sie die Beschleunigung $|a|$. Wir erhalten also das Schema

A	O	B
$-g$		$+g$
$+a + \delta a$	$+a$	$+a - \delta a$
$+a$	$+a$	$+a$
$-(g - \delta a)$	0	$+(g - \delta a)$

Die von den Störungskräften herrührende Beschleunigung δa läßt sich für jeden beliebigen Punkt sofort festsetzen, wenn wir mit r_p die Entfernung des Punktes vom Orte der anziehenden Kraft, mit r_m die Entfernung des Mittelpunktes von diesem Orte bezeichnen. Die Beschleunigung ist dann

$$+\mu\left(\frac{\bar{1}}{r_p^2} - \frac{\bar{1}}{r_m^2}\right).$$

3. Die Bewegung in kreisförmiger Bahn.

Man erkennt, daß die von den Störungskräften herrührende Beschleunigung δa dieselbe Form wie in der vorhergehenden Nummer annehmen muß.

Weil im vorliegenden Falle $\frac{1}{r_m^2} = \frac{v^2}{l}$ ist, wenn v die Bahngeschwindigkeit, l den Bahnradius bedeutet, so kann die Beschleunigung die Form

$$+\frac{\bar{\mu}}{r_p^2} - \frac{\bar{v^2}}{l}$$

annehmen.

4. Die Bewegung in beliebiger krummliniger Bahn.

Zerlegt man die anziehende Kraft in die Normal- und die Tangentialkomponente, so gilt für die erstere das Resultat von Nr. 3, für die letztere das Resultat von Nr. 2. Das Gesamtresultat ist auch hier eine Relativbeschleunigung von der Form, die Nr. 2 angibt.

Man kann auch unmittelbar die Methode der Relativbeschleunigung als Differenz der Absolutbeschleunigungen anwenden und sieht dann, daß das Ergebnis schon in § 15 vorweggenommen war. —

Wir fassen die Resultate der Nr. 2, 3 und 4 zusammen. An jedem Punkte eines Körpers (mit Ausnahme des Schwerpunktes) treten bei einer beschleunigten Bewegung in beliebiger — auch gerader — Bahn störende Kräfte auf, die die relative Lage der Punkte zum Schwerpunkt zu ändern suchen. Diese Kräfte haben für jede Bahn dieselbe Form

$$+\mu\left(\frac{1}{r_p^2}-\frac{1}{r_m^2}\right),$$

wenn die Masse, auf die sie wirken, gleich 1 gesetzt wird. Zur vollständigen Beschreibung des Kraftfeldes des Körpers muß man also zu dem im Ruhzustande vorhandenen ersten Gliede dieser Kraft das zweite vektoriell hinzufügen.

Im Falle der Kreisbahn ist es üblich, das zweite Glied $-\frac{\mu}{r_m^2}$ dieser Kraft, das, wie wir wissen, dann auch gleich $-\frac{v^2}{l}$ ist, als Zentrifugalkraft zu bezeichnen. Weil dieses Glied aber bei allen Bahnen in derselben Form auftritt, nennen wir es allgemein Zentrifugalkraft. Die Berechtigung und die Notwendigkeit dieser Verallgemeinerung liegen also in der Gleichheit der dynamischen Verhältnisse begründet, die auch die Benutzung desselben Wortes zur Bezeichnung der Kraft notwendig macht. Der Gebrauch des besonderen Wortes „Zentrifugalkraft" ist gestattet, weil nichts im Wege steht, jede Beschleunigung nach dem Orte einer Kraft hin als zentripetal, jede umgekehrte Beschleunigung als zentrifugal zu bezeichnen. Selbstverständlich kommt es uns nicht auf das Wort an, sondern nur auf den Nachweis, daß man eine größere Gruppe von Erscheinungen unter demselben, mehrfach hingeschriebenen mathematischen Ausdruck zusammenfassen muß, als es in der Mechanik bisher üblich war. Sachlich kennt übrigens die Mechanik die Tangentialkomponente unserer Störungskraft (Nr. 4) unter dem Namen Reaktionskraft oder ähnlichen Namen schon. Aber es fehlt ihr die Zusammenfassung der gleichen dynamischen Verhältnisse unter demselben Begriff, und weil die Zentrifugalkraft in der Mechanik bei nicht kreisförmigen krummlinigen Bewegungen schwerlich einmal benutzt zu werden pflegt, hatte sie kaum Gelegenheit, zu dieser Erkenntnis zu gelangen. Möglich wäre die Benutzung schon, z. B. beim Problem der Präzession [1]).

Wenn man die Ausdrucksweise von Voigt gebrauchen will [2]), die aber, wie wir noch sehen werden, bereits eine physikalische Deutung enthält, also nicht mehr rein analytisch ist, so kann man auch sagen: Die Zentrifugalkraft ist eine Äußerung der Richtungs- und Geschwindigkeitsträgheit. Weil die Mechanik sie bisher lediglich als Äußerung der Richtungsträgheit auffaßte, fällt sie nur bei der Kreisbahn mit dem herkömmlichen Begriffe zusammen.

§ 22. Die Zentrifugalbeschleunigung und die Methode der Differenz der Absolutbeschleunigungen.

Die vorstehenden Überlegungen gestatten noch eine wichtige Folgerung: Die Methode, die Relativbeschleunigung aus der Differenz der Absolutbeschleunigungen abzuleiten, ist identisch mit der anderen, sie aus dem Zusammenfassen von Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigungen zu finden. Die letztere ist in gewissem Sinne eine Abkürzung der ersteren.

Vielleicht ist noch eine andere Formulierung vorteilhaft.

Wir wollen unter Vektormenge eines Systems die Anzahl der Vektoren verstehen [3]), deren Angabe der Angabe der Skalare hinzugefügt werden muß, damit das System vollständig beschrieben ist. In dem System zweier anziehenden Körper kann nun die Vektormenge, die für uns in Betracht kommt, in doppelter Weise dargestellt werden:

1. als Gravitationsbeschleunigung und (beschleunigte) Geschwindigkeit,
2. als Gravitationsbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung.

---

[1]) Ich habe den verallgemeinerten Begriff der Zentrifugalkraft zuerst ausgesprochen in den Ann. d. Hydr. u. marit. Met. 1910, S. 449, näher begründet in der Programmschrift „Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Zentrifugalkraft“, 1912. Ungefähr gleichzeitig hat O. Franzius ihn eingeführt (Zeitschr. f. Architektur- u. Ingenieurwesen 1910, S. 300 f.; Ann. d. Hydr. u. marit. Met. 1911, S. 83 ff.), ohne ihn aber systematisch zu entwickeln und ohne zu erkennen, daß mit seiner Hilfe der Gegensatz zwischen den beiden Theorien der fluterzeugenden Kräfte weggeschafft wird. — [2]) Voigt, El. Mech., S. 53. — [3]) Tensoren einbegriffen.

Man kann also sagen: Die Zentrifugalbeschleunigung ist das Resultat einer besonderen Auffassung der Vektormenge eines rotierenden Systems.

Um Mißverständnisse fernzuhalten, muß noch zweierlei bemerkt werden. Erstens bedeutet Vektormenge keine Summierung von Vektoren. Zweitens ist die Vektormenge auch nicht ein Vektor, der bei den beiden genannten Auffassungen in Komponenten zerlegt wird. Im Grunde drückt die erste dieser Auffassungen die Anfangsbedingungen aus, bei denen die Überlegungen über das Kraftfeld einsetzen, die zweite ein Resultat auf dem Wege dieser Überlegungen.

§ 23. Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft.

Um auf unserem allgemeineren Standpunkte diese beiden Begriffe in einem dem üblichen analogen Sinne zusammenbringen zu können, haben wir zuvor einige Definitionen nötig.

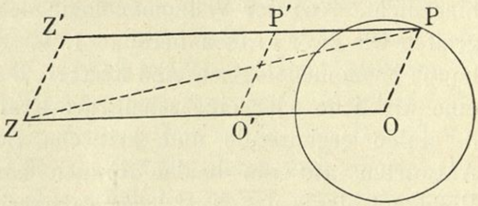
Wir knüpfen an die frühere Betrachtung der Punkte als freie und als starre an. Stellen wir uns jeden Punkt eines Körpers in den von uns betrachteten Systemen als starr vor, so wird er eine bestimmte Bahn, eine geradlinige oder eine krummlinige, beschreiben. Wir denken uns nun, daß jeder Punkt diese selbe Bahn, die er als starrer Punkt beschreibt, als freier Punkt durchläuft, daß er also den Charakter des freien Punktes mit der Bahn des starren Punktes vereinigt. Diese Vereinigung ist nur möglich, wenn wir die Starrheit ersetzt denken durch Kräfte, die geeignet sind, die Punkte in diesen Bahnen zu führen. Jeder Punkt müßte seine eigene derartige Kraft besitzen; diese Kräfte wären voneinander vollständig unabhängig; es würde also jede so wirken, als ob die anderen nicht vorhanden seien. Ein derartiges System von Punkt und Kraft nennen wir ein ideales System, die Kraft eine ideale Zentripetalkraft (Z_i-Kraft). Entsprechend heiße der Abstand eines Punktes vom Orte seiner Z_i-Kraft sein idealer Abstand, der bei krummlinigen Bahnen zum idealen Radius oder Radiusvektor wird.

Dazu zunächst einige Beispiele.

Fig. 9 stelle das in § 20, Nr. 2 besprochene System der geradlinig beschleunigten Bewegung dar. Z ist der Ort der tatsächlichen Zentripetalkraft (Z_t-Kraft). Der Mittelpunkt O bewegt sich also in der Richtung OZ. Wenn O in O' angekommen ist, möge P in P' liegen, so daß $O'P'$ gleich und parallel OP ist. Dann ist Z' der Ort der Z_i-Kraft, falls ZZ' gleich und parallel OP ist. Im vorliegenden Falle ist also die Z_i-Kraft der Punkte im allgemeinen kleiner als die Z_t-Kraft, z. B. ist $Z'P < ZP$; sie ist der Größe nach gleich der Z_t-Kraft, die zum Mittelpunkt des Körpers gehört.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Rotation einer Kugel um ihre Schwerpunktsachse. Die Z_i-Kraft eines Punktes der Äquatorebene ist mit seiner Z_t-Kraft identisch. Für jeden anderen Punkt liegt der Ort seiner Z_i-Kraft in dem Schnittpunkt der Drehungsachse mit seiner Bahnebene. Dem Absolutwerte nach ist seine Z_i-Kraft kleiner als die Z_t-Kraft, und zwar gleich der mit dem Kosinus der Breite des Punktes multiplizierten Z_t-Kraft. An den Polen wird also die Z_i-Kraft Null.

Fig. 9.



Als drittes Beispiel möge die Revolution ohne Rotation dienen. Wir berücksichtigen dabei nur die Kraft, mit der der eine Körper auf den anderen wirkt. Da alle Punkte gleiche Bahnen in parallelen Ebenen beschreiben, sind die Z_i-Kräfte in jedem Zeitmoment der Größe nach gleich, während die zu den Punkten gehörigen Z_t-Kräfte alle verschieden sind. Die Z_i-Kräfte sind dem Absolutwerte nach gleich der Z_t-Kraft, die auf den Schwerpunkt wirkt.

Jetzt können wir kurz formulieren:

Die Zentrifugalkraft an einem Punkte eines in beschleunigter Bewegung befindlichen Körpers ist entgegengesetzt gleich seiner idealen Zentripetalkraft. Im Falle einer Kreisbahn ist die (auf die Masse 1 bezogene) Zentrifugalkraft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit des Punktes und umgekehrt proportional seinem idealen Radius.

§ 24. Phänomenologisches zur Zentrifugalkraft.

Man kann drei Begriffe der Kraft unterscheiden:

a) den analytischen Begriff. Er wird benutzt, um mit einem Worte zu sagen, was sonst umständlicher in Gleichungen ausgedrückt werden müßte;

b) den phänomenologischen Begriff. Er sagt Beziehungen des Kraftbegriffes zu physikalischen Prinzipien und Grundbegriffen aus, enthält also eine physikalische Deutung des analytischen Kraftbegriffes;

c) den metaphysischen Begriff. Er macht Aussagen, die über das, dessen die Physik bedarf, hinaus in das Gebiet philosophischer Ansichten führen.

Den analytischen Begriff der Zentrifugalkraft haben wir im vorhergehenden besprochen. Alles Metaphysische interessiert uns hier nicht. Aus der Phänomenologie des Zentrifugalkraftbegriffes greifen wir zwei Fragen heraus: 1. Ist die Zentrifugalkraft überhaupt phänomenologisch eine Kraft? 2. Ist sie phänomenologisch eine wirkliche oder eine scheinbare Kraft? Es mögen dann noch 3. einige ergänzende und kritische Bemerkungen folgen. Die Antworten auf die beiden Fragen hängen natürlich von der Phänomenologie des Kraftbegriffes überhaupt ab.

Vorerst ein paar Worte zur Terminologie. Die Vorstellungen und Begriffe der Physik sind metaphysisch vieldeutig. Das soll heißen: Sie stehen in keiner eindeutigen, notwendigen Beziehung zu einem philosophischen Weltbild; man kann sie in verschiedenstem Sinne philosophisch interpretieren. So schließt z. B. die physikalische Diskontinuitätsvorstellung, populärer und ungenau gesprochen: der Begriff des Atoms, keine Stellungnahme zu einer metaphysischen Auffassung der Wirklichkeit in sich. Erkenntnistheoretiker jeder Nuance können den Begriff des Atoms in ihr Weltbild aufnehmen. Natürlich wird er durchweg in jedem eine andere Bedeutung annehmen; das ist eben der Ausdruck seines Charakter der metaphysischen Vieldeutigkeit. Wir bezeichnen infolgedessen das Weltbild der Physik mit seinen sämtlichen Vorstellungen und Begriffen als phänomenologisch.

1. Beim ersten Punkte müssen wir wieder eine Scheidung vornehmen: Wir trennen die rein physikalischen von den logisch-physikalischen Begriffen. Was im Kraftbegriff an Axiomatischem, Apriorischem, Erfahrungsgemäßem, Konventionellem usw. stecken mag, gehört in eine Diskussion der logischen Grundlagen der Physik. Damit scheiden wir alle wichtigeren Streitigkeiten über den Kraftbegriff von unseren Erörterungen aus. Uns genügt der rein physikalische Begriff, der alles, was für den Betrieb der Physik notwendig und hinreichend ist, zusammenfaßt.

In diesem Sinne ist der Kraftbegriff ein Ordnungsbegriff, d. h. ein Begriff, der Gruppen von Tatsachen einheitlich zusammenfaßt, ein Hilfsbegriff zur Klassifikation von Tatsachen. Solche beschleunigte Bewegungen, die Einheitlichkeit zeigen, fassen wir zu einer Gruppe zusammen und schreiben die Beschleunigung einer bestimmten Kraft zu, ohne daß wir dadurch etwas darüber aussagen wollen oder können, ob der Kraftbegriff nur ein Ausdruck für einen Beschleunigungstypus ist oder ob er etwas Eigenartiges, Neues, darüber Hinausgehendes bezeichnet. Für die Physik genügt es, die Kraft nur als Ordnungsbegriff zu fassen. Es wäre ein Irrtum, deshalb ausschließlich in dem Kraftbegriff ein Hilfsmittel zur Beschreibung von Tatsachen zu finden. Mitunter — vielleicht sogar meistens — müssen die Tatsachen zum Zwecke der Subsumtion unter den Begriff erst interpretiert werden. Oder man müßte denn dem Worte „Beschreibung" einen vom Herkömmlichen ziemlich weit abliegenden Sinn geben.

Um nun den allgemeinen Kraftbegriff zu finden, fragen wir, was jenen, den einzelnen Kräften zugeteilten Gruppen gemeinsam ist. Es ist zweierlei: 1. das Auftreten einer Relation, die 2. dadurch charakterisiert ist, daß sie eine Änderung der Bewegung bestimmt. Von Kraft sprechen wir also bei jeder beschleunigungbestimmenden Relation. Für gewöhnlich schreiben wir die Kraft einem Fundamente der Relation (oder beiden) zu, falls die Fundamente Körper sind; man sagt, der Körper „hat" die Kraft. Daß das nicht nötig ist, wird aus dem Folgenden klar. Am auffallendsten ist wohl bei dieser Definition der Gebrauch des Begriffes „Relation" an Stelle des üblichen „Ursache". Wohl auch die Dunkelheit des Ursachenbegriffes selber, besonders aber der Sachverhalt ist schuld daran. Wir können in der Tat niemals von einem einzigen, d. h. von anderen ganz isolierten, Körper behaupten, er besitze Kraft; damit eine Kraft auftritt oder wirksam ist, müssen stets mindestens zwei Körper vorhanden sein. Das Wort „Relation" trägt also auch den Hypothesen (wie z. B. der Ätherstoßtheorie der Gravitation) Rechnung, für die tatsächlich von der „Kraft" eines einzelnen Körpers zu sprechen sinnlos wäre. Aus dem gleichen Grunde — um den Erfahrungsbestand nicht überzubestimmen — ist auch beschleunigungbestimmend, nicht beschleunigungverursachend gesagt;

wir kennen physikalisch nur eine funktionale Abhängigkeit der Beschleunigung von der Relation.

Daraus folgt nun, daß wir keinen Grund haben, die Relationen, die unter den Kraftbegriff fallen, auf solche einzuschränken, deren Fundamente Körper sind. Wir müssen physikalisch auch solche dazu rechnen, bei denen die Fundamente selbst wieder Relationen sind. Und gerade dieser Fall liegt bei der Zentrifugalkraft vor. Die Fundamente der Relation, mit der die Zentrifugalbeschleunigung eines Punktes funktional verknüpft ist, sind die beiden Glieder eines Systems, von dem wenigstens das eine, das durch den Punkt oder ein mit ihm verbundenes Teilsystem repräsentiert ist, eine Beschleunigung besitzen muß; mit dem Auftreten dieser Relation, deren einer Beziehungspunkt — Teilsystem mit einer Beschleunigung — selber eine Relation sein muß, tritt auch die Zentrifugalbeschleunigung auf.

Rein physikalisch ist also die Zentrifugalkraft eine Kraft, weil sie ein Ordnungsbegriff für eine typische Gruppe von Beschleunigungen ist.

2. Bei der beliebten Charakterisierung von Kräften als wirkliche oder als scheinbare wird man stets vergeblich nach einem Kriterium für diese Unterscheidung suchen. Manchmal wird sie wohl über die rein physikalische in eine logisch-physikalische Deutung hinübergreifen. Trotzdem ist es uns aber auch auf dem Boden der bisherigen Ergebnisse möglich, eine solche Scheidung zu machen. Erlauben nämlich Gleichungen eines Systems es, außer den von vornherein vorausgesetzten Kräften noch andere anzunehmen, die mit den ersteren zusammen die Vektormenge des Systems überbestimmen, so können wir sie scheinbare Kräfte nennen. So sind z. B. die in § 21, Nr. 2 erwähnten abstoßenden Kräfte scheinbare Kräfte. Beachten wir § 22, so ist danach die Zentrifugalkraft eine wirkliche Kraft.

Die Ausführungen unter 1. scheinen auf den ersten Blick ein Kriterium für jene Scheidung an die Hand geben zu können, und ich glaube, daß dieses Kriterium implizite den meisten derartigen Scheidungen zugrunde liegt. Man könnte nämlich von einer wirklichen Kraft dann sprechen, wenn die Fundamente der betreffenden Gruppenrelation Körper sind, von einer scheinbaren Kraft, wenn wenigstens das in Betracht kommende Fundament eine Relation ist. In diesem Falle wäre die Zentrifugalkraft eine scheinbare

Kraft. Bedenkt man nun, wie vorhin schon erwähnt, daß dann vielleicht noch manche bisher als wirklich angesehene Kräfte — nach der mechanistischen Auffassung sogar alle Kräfte — nur scheinbar sind, dann sieht man, daß in dem einen Falle die Charakterisierung der Kraft von solchen Bedingungen der Kraft mitbestimmt ist, die in dem anderen nicht ausgeschlossen sind. Das ist logisch unzulässig. Allerdings könnte man sich darauf berufen, daß man nur nach den beobachtbaren Bedingungen unterscheiden wolle. Dagegen wäre nichts einzuwenden. Aber dann mag die Relativität dieser Unterscheidung ein Maßstab für die Größe ihres Wertes sein.

3. Man findet vielfach die Zentrifugalkraft noch auf andere Weise, als es hier geschehen ist, zu Prinzipien und Grundbegriffen der Physik in Beziehung gesetzt. Die beiden wichtigsten Arten mögen kurz besprochen werden.

Sehr oft wird die Zentrifugalkraft auf das Prinzip der actio und reactio gegründet. Wir setzen natürlich voraus, daß dieses Prinzip richtig verstanden wird[1]). Es scheint nun außer dem früher zitierten Franzius niemand bemerkt zu haben, daß diese Ableitung, wenn sie richtig wäre, notwendig zu der Verallgemeinerung des Begriffes führen würde, wie sie im vorstehenden dargelegt wurde. Es läßt sich aber durch eine einfache Überlegung die Unhaltbarkeit der Ableitung dartun. Denken wir uns zwei voneinander unabhängige Systeme mit je zwei anziehenden Massen; die sämtlichen Massen und die Entfernungen der Schwerpunkte in den einzelnen Systemen sollen gleich sein. Die Glieder des einen Systems mögen relativ und absolut ruhen; man kann sich ihre Schwerpunkte starr verbunden denken. Die Glieder des anderen Systems mögen um die Systemachse revolvieren. Dann sind die reinen Gravitationskraftfelder in beiden Systemen vollständig einander gleich. Wäre nun die Zentrifugalkraft die reactio auf die actio der Zentripetalkraft, dann müßten auch die Zentrifugalkräfte in beiden Systemen gleich sein; das ist aber nicht der Fall, denn in dem starren System tritt keine Zentrifugalkraft auf.

Wohl ebenso häufig wird die Zentrifugalkraft zur Trägheit in Beziehung gesetzt. Diese Deutung ist nicht falsch, aber sie ist keine eigentliche Deutung, d. h. kein Zurückführen auf andere

---

[1]) Gray, Lehrb. d. Phys. I, S. 141 ff.

physikalische Grundbegriffe mehr, weil die Trägheit auch auf dem Boden der klassischen Mechanik keine selbständige, elementare Eigenschaft zu sein scheint[1]). Es ist in der Tat schwerlich möglich, den Trägheitsbegriff selbständig neben den drei Begriffen der Kraft (f), der Masse (m) und der Beschleunigung (a) zu definieren. Die Trägheit erscheint vielmehr als die Eigenschaft der Masse, die in der Gleichung $f = ma$ ausgedrückt liegt, vollständig beschrieben. Die Zentrifugalkraft auf die Trägheit zurückführen würde also lediglich besagen, daß die Kraft, die Masse und die Beschleunigung in der Weise, wie sie die Zentrifugalkraftsformel angibt, funktional verknüpft sind.

VI. Die Zentrifugalkrafttheorie der fluterzeugenden Beschleunigungen[2]).

§ 25. Die Grundformeln und ihre weitere Analyse.

Um das Ergebnis des letzten Kapitels in der Theorie der fluterzeugenden Beschleunigungen anwenden zu können, müssen wir an die Ausführungen von § 7 bzw. § 8 anknüpfen. Wir haben dort die Bewegungsverhältnisse der Erde in den Systemen $\text{Erde} = \begin{cases} \text{Mond} \\ \text{Sonne} \end{cases}$ für den Fall der Revolution ohne Rotation charakterisiert. Diese Revolution ist eine Translation in elliptischer Bahn. Es müssen also dabei Zentrifugalkräfte auftreten, über die sich auf Grund der Resultate der genannten Paragraphen und des vorstehenden Kapitels ohne weiteres die folgenden Sätze aussprechen lassen:

1. Die Richtungen der Zentrifugalkräfte für alle Punkte der Erde sind untereinander und der Zentrale des Systems parallel.

2. Die Zentrifugalkräfte für alle Punkte der Erde sind zu derselben Zeit einander gleich und sind stets von dem Monde bzw. der Sonne weggerichtet.

3. Da die Summe der Zentrifugalkräfte der Summe der Anziehungskräfte das Gleichgewicht halten muß, ist das Potential

---

[1]) Poske, Die Zentrifugalkraft 1909, S. 16 ff. — [2]) Der Urheber der richtigen Form der Zentrifugalkrafttheorie für die Kreisbahn scheint W. M. Davis zu sein; vgl. die in § 7 zitierte Arbeit.

der Zentrifugalkraft in jedem Punkte der Erde gleich dem Gravitationspotential des Mondes bzw. der Sonne im Schwerpunkte der Erde.

Die Ableitung der fluterzeugenden Beschleunigungen ist danach nicht mehr nötig. Selbst wenn man § 22 nicht berücksichtigt, wonach die Zentrifugalkrafttheorie und die Relativtheorie identisch sind, sieht man sofort, daß die Ableitung mit den Gleichungen (2) bis (5) in § 15 einsetzen würde, wo jetzt u die Gravitationsbeschleunigung, $-u_f$ die Zentrifugalbeschleunigung bedeuten. Wir erhalten also die Gleichungen (10) und (11).

Wir wollen jetzt die fluterzeugenden Beschleunigungen in Koordinaten des Ortes und des störenden Körpers ausdrücken.

Wir legen ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in P (Fig. 8, S. 33), und zwar die positive z-Achse nach dem Zenit, die positive y-Achse nach Norden (also in die Meridianebene), die positive x-Achse nach Westen. Sind X, Y, Z die Komponenten der fluterzeugenden Beschleunigungen in diesem System, so ist die Z-Komponente durch Gleichung (10) gegeben. u_{rh} zerlegen wir noch einmal nach den beiden anderen Achsen. Ist ζ das Azimut, so ist

$$X = u_{rh} \sin\zeta = \frac{3}{2} \frac{Gr}{D^3} \sin 2z \sin\zeta \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$Y = u_{rh} \cos\zeta = \frac{3}{2} \frac{Gr}{D^3} \sin 2z \cos\zeta \quad . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Bezeichnet man mit φ die geographische Breite von P, mit δ die Deklination des störenden Gestirnes, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck, das von dem Gestirn, dem Pole und dem Ortszenit gebildet wird, die bekannten Transformationsformeln der sphärischen Astronomie:

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau \\ \sin z \sin\zeta &= \cos\delta \sin\tau \\ \sin z \cos\zeta &= \sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Ergänzt man in der ersten dieser Gleichungen $\cos z$ zu $3\cos^2 z - 1$, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} 3\cos^2 z - 1 &= 3(\sin^2\varphi \sin^2\delta + \cos^2\varphi \cos^2\delta \cos^2\tau \\ &\quad + 2\cos\varphi \cos\delta \sin\varphi \sin\delta \cos\tau) - 1 \\ &= \tfrac{3}{2}\cos^2\varphi \cos^2\delta \cos 2\tau + \tfrac{3}{2}\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos\tau \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2\varphi - 1), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (20)$$

wobei zur Verwandlung bekannte trigonometrische Formeln, besonders die Formel

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

benutzt werden.

Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen von (19) mit der ersten, so kommt

$$\begin{aligned}
\sin z \cos z \sin\zeta &= \sin\delta\cos\delta\sin\varphi\sin\tau + \cos^2\delta\cos\varphi\sin\tau\cos\tau \\
\sin z \cos z \cos\zeta &= \sin^2\delta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\delta\cos\delta\cos^2\varphi\cos\tau \\
&\quad - \sin\delta\cos\delta\sin^2\varphi\cos\tau - \cos^2\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\tau.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der auch bei (20) gebrauchten Formeln, wozu hier noch besonders die Formel

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

kommt, verwandeln sich diese beiden Gleichungen in die folgenden:

$$\begin{aligned}
\sin 2z \sin\zeta &= \sin 2\delta\sin\varphi\sin\tau + \cos^2\delta\cos\varphi\sin 2\tau \\
\sin 2z \cos\zeta &= (3\sin^2\delta - 1)\sin\varphi\cos\varphi + \sin 2\delta\cos 2\varphi\cos\tau \\
&\quad - \cos^2\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\tau.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (17) und (18) und ferner den Ausdruck (20) in Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{3}{2}\frac{Gr}{D^3}(\sin 2\delta\sin\varphi\sin\tau + \cos^2\delta\cos\varphi\sin 2\tau) \\
Y &= \frac{3}{2}\frac{Gr}{D^3}[(3\sin^2\delta - 1)\sin\varphi\cos\varphi + \sin 2\delta\cos 2\varphi\cos\tau \\
&\qquad - \cos^2\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\tau] \\
Z &= \frac{3}{2}\frac{Gr}{D^3}\left[\frac{(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2\varphi - 1)}{3} + \sin 2\delta\sin 2\varphi\cos\tau\right. \\
&\qquad \left. + \cos^2\delta\cos^2\varphi\cos 2\tau\right].
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Man betrachtet die beiden ersten Komponenten als die eigentlichen fluterzeugenden Beschleunigungen und schreibt der dritten, ohne sie weiter zu berücksichtigen, lediglich die Wirkung zu, den Zusammenhang der Wasserteilchen gewissermaßen etwas zu lockern.

Die bisherige Analyse hat nun schon die fluterzeugenden Beschleunigungen in drei Gruppen zerlegt.

Die erste Gruppe — das erste Glied der Y-Komponente — ist von τ unabhängig, verändert sich also mit der täglichen Bewegung der Gestirne nicht. Weil die y-Achse in der Meridianebene liegt, wirkt sie ausschließlich in der Richtung des Meridians, und weil sogar bei der größten Deklination (beim Monde rund $28^0 45'$, bei der Sonne $23^0 27'$) der Klammerausdruck negativ bleibt, ist sie stets nach dem Äquator gerichtet und bewirkt hier eine ständige Anhäufung des Wassers. Sie hat für denselben Ort ein Maximum, wenn $\delta = 0$ ist, also das Gestirn im Äquator steht. Ihre Periode erhält sie von der Änderung der Deklination δ, also eine 14tägige Periode vom Mond, eine halbjährige Periode von der Sonne. Sie verschwindet für alle Orte des Äquators und die Pole und ist für die Breite von 45^0 am größten.

Die zweite Gruppe — das erste Glied der X-Komponente und das zweite Glied der Y-Komponente — hängt zunächst ab von τ. Sie hat dieselbe Phase wieder, wenn τ alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen hat, besitzt also eine ganztägige Periode. Sie ist ferner eine Funktion von $\sin 2\delta$, wird also für denselben Ort Null, wenn $\delta = 0$ ist. Bei $\varphi = 45^0$ verschwindet das Glied der Y-Komponente, und weil die positive x-Achse nach Westen gerichtet ist, steht die Richtung der Beschleunigung dann auf der Meridianebene senkrecht. Bei $\varphi = 0^0$, also für die Orte auf dem Äquator, verschwindet das Glied der X-Komponente und die Beschleunigung liegt in der Meridianebene. Sie ist im allgemeinen an den Polen nicht Null. Sie ist die Ursache der in § 2 erwähnten täglichen Ungleichheit.

Die dritte Gruppe — das zweite Glied der X-Komponente und das dritte Glied der Y-Komponente — ist von 2τ abhängig. Sie ist wieder in derselben Phase, wenn τ alle Werte von 0^0 bis 180^0 durchlaufen hat, besitzt also eine halbtägige Periode. Da sie gleichzeitig proportional $\cos^2\delta$ ist, hat sie für denselben Ort bei $\delta = 0$, also wenn das störende Gestirn im Äquator steht, ein Maximum. Für die Orte des Äquators ($\varphi = 0^0$) verschwindet das Glied der Y-Komponente, die Beschleunigung wirkt dann senkrecht zum Meridian. An den Polen ist sie Null.

Alle drei Gruppen sind in gleicher Weise von den periodischen Änderungen des Abstandes D abhängig, die aber, wie schon bemerkt, bei den Sonnentiden im allgemeinen vernachlässigt werden können.

Die fluterzeugenden Kräfte lassen sich auf den allgemeinen Ausdruck bringen:

$$F = K \sin(nt \pm mx).$$

Sie würden also einfache harmonische Schwingungen darstellen, wenn die in K enthaltenen Größen alle konstant und die Winkel gleichförmig veränderlich wären. Das ist nun zwar nicht der Fall. Aber man kann sämtliche Veränderliche durch die in der Astronomie gebräuchlichen gleichförmigen Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken. Dadurch zerfallen die fluterzeugenden Kräfte in eine Reihe von Gliedern, die alle Ausdrücke von der obigen Form sind und die Bedingungen der einfachen harmonischen Schwingung erfüllen und deren Anzahl man beliebig vermehren kann, indem man sie als Überlagerung von Schwingungen der gleichen Art auffaßt. Die Periode der Schwingungen ist $\frac{2\pi}{n}$. Ist λ die Wellenlänge, so ist $m = \frac{2\pi}{\lambda}$, und $\frac{n}{m}$ stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dar. x bestimmt die Lage des betrachteten Ortes. Wendet man die Ausdrücke auf die Wasserhülle der Erde an, so entspricht jedem Gliede eine Teiltide von der Periode des Gliedes. Da diese Analyse der Kräfte nur für die Anwendung auf die Gezeitenbeobachtungen von Interesse ist, unterlassen wir sie hier. Nur sei noch die jetzt verständliche Bemerkung angefügt, daß man auch bei gewissen Mondteiltiden die Größe D als konstant ansehen kann.

Um einige Einzelheiten der Schrift besser verstehen zu können, müssen wir hier einen kleinen Schritt über die Theorie der Gezeitenkräfte hinaus tun. Wir fassen unter der Voraussetzung einer vollkommen starren Erde die Wasserhülle als ein der Reibung unterworfenes schwingungsfähiges System auf. Dann wirken auf jedes Wasserteilchen im allgemeinen drei Arten von Kräften: 1. die fluterzeugenden Kräfte, 2. eine elastische Kraft, 3. die dämpfende Kraft der Reibung. Die Gezeitenkräfte stellen also nur die äußeren Kräfte dar, die in der Tidenerscheinung wirksam sind (zu der Gruppe der äußeren Kräfte gehören übrigens auch noch einige der in § 3 genannten sekundären Ursachen). Unter dem Einfluß dieser drei Arten von Kräften entstehen nun ständig gezwungene Schwingungen, die sich als freie fortpflanzen und als solche langsam abklingen. Trotz dieser komplizierten Einwirkung führt jedes Teilchen den äußeren Kräften analoge Schwingungen aus, wenn man die elastische Kraft dem Ausschlag, die Dämpfung der Geschwindigkeit proportional setzt. Den Beweis für diesen Satz können wir hier nicht bringen. Man wird aber jetzt einigermaßen begreifen, weshalb die Analyse der Gezeitenkräfte in der genannten Form gemacht wird. Weiterhin ersieht man schon aus diesen allgemeinen Überlegungen, daß die Höhe einer Tide nicht einfach der fluterzeugenden Kraft proportional sein kann. Das ist nicht einmal der Fall, wenn man die äußere Kraft allein berücksichtigt. Unter der Einwirkung einer Kraft von der vorhin angeschriebenen Form wird nämlich die Höhe der gezwungenen Welle

$$h = \frac{2KHr}{r^2 n^2 - 4gH} \cos\left(nt \pm \frac{2x}{r}\right),$$

in der H die Tiefe des Meeres bedeutet. Die Gleichung setzt noch voraus, daß die Wellen in einem relativ schmalen Kanal entstehen, der auf einem größten Kreise der Erde liegt.

Wer sich über die Theorie und Praxis der Analyse genauer unterrichten will, sei auf die Arbeiten von van der Stok[1]), Börgen[2]) und G. H. Darwin[3]) verwiesen, von denen die erste, allerdings mit gewissen Vernachlässigungen, eine besonders einfache Darstellung gibt.

§ 26. Ableitung auf Grund der Potentialtheorie.

Die Potentialtheorie gestattet eine elegantere Ableitung, die im wesentlichen den Grundgedanken der Zentrifugalkrafttheorie enthält, wenn auch bei manchen Autoren etwas verhüllt. Sie wird in ähnlicher Weise z. B. von Lévy[4]), Hatt[5]), G. H. Darwin[6]), Hough[7]) gebracht.

Wir beziehen die Punkte des Meeres auf ein mit der Erde starr verbundenes Koordinatensystem. Wollen wir die Achse als unbeweglich betrachten, so müssen wir (§ 20) an jedem Punkte eine Beschleunigung anbringen, die (§ 23) gleich und entgegengesetzt der Beschleunigung J ist, die der Mittelpunkt der Erde von dem störenden Gestirn erfährt, also die Beschleunigung $-J$.

---

[1]) Van der Stok in den Ann. d. Hydr. u. marit. Met. 1911, S. 227 ff. — [2]) Börgen, Die harmonische Analyse der Gezeitenbeobachtungen, 1885. — [3]) G. H. Darwin in dem Report of the fifty-third meeting of the british association for the advancement of science held at Southport 1883. — [4]) Lévy, Leçons I, § 4. — [5]) Hatt, Des marées, § 3. — [6]) G. H. Darwin, Art. Tide in The Encyclopedia Britannica, Bd. XXVI. — [7]) Hough in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften VI, Bd. I_2, S. 8 f.

Da die Komponenten $-J_x$, $-J_y$, $-J_z$ dieser Kraft nur von der Zeit und nicht von den Koordinaten der einzelnen Punkte abhängen, so können sie als die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$-(J_x x + J_y y + J_z z) = -J r \cos(\widehat{J\, r})$$

betrachtet werden, wo $\widehat{J\, r}$ den Winkel bezeichnen soll, den der Radius r des betreffenden Punktes mit der Richtung der Beschleunigung J bildet. Bis auf eine Konstante stellt also diese Funktion das Potential der Revolutionszentrifugalkraft dar. Da die Beschleunigung, die der störende Körper dem Erdmittelpunkt erteilt, gleich $\frac{M}{D^2}$ ist, kann man dieses Potential auch schreiben:

$$-\frac{Mr}{D^2} \cos(\widehat{D\, r})$$

und weil $\widehat{D\, r} = z$ ist, endgültig

$$-\frac{Mr}{D^2} \cos z.$$

Das Gravitationspotential des störenden Gestirnes in einem beliebigen Punkte ist $\frac{M}{E}$. Beachtet man, daß

$$E^2 = D^2 + r^2 - 2 D r \cos z$$

ist, so lautet das Gesamtpotential in einem beliebigen Punkte

$$\Pi = \frac{M}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2 D r \cos z}} - \frac{M r \cos z}{D^2}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{D}$, so erhält man

$$\Pi = \frac{M}{D} + \frac{3}{2} \frac{M r^2}{D^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right) + \frac{M r^3}{2 D^4} (5 \cos^3 z - 3 \cos z) + \cdots$$

Wir betrachten $\frac{M}{D}$ als eine Konstante. Da aber eine additive Konstante zum Potential ohne Bedeutung ist und da die Glieder, die die 4. und höheren Potenzen von $\frac{1}{D}$ enthalten, vernachlässigt werden können, bleibt als Potential

$$\Pi = \frac{3}{2} \frac{M r^2}{D^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right).$$

Mit Hilfe der im letzten Paragraphen schon hergestellten Ergänzung von $\cos z$ nach Gleichung (19) zu $(3\cos^2 z - 1)$ läßt sich das Potential so schreiben:

$$\Pi = \frac{3}{4}\frac{Mr^2}{D^3}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2\varphi - 1)}{3} \\ + \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos\tau \\ + \cos^2\delta \cos^2\varphi \cos 2\tau \end{array}\right\}.$$

Durch entsprechende Differentiation erhält man die Gleichungen (21).

§ 27. Vergleich der Relativtheorie und der Zentrifugalkrafttheorie untereinander, mit der Theorie der bloßen Gravitationsbeschleunigungen und mit den Tidentheorien.

1. Der Vergleich zwischen der Relativtheorie und der Zentrifugalkrafttheorie ist nach dem Ergebnis von § 22 leicht zu ziehen. Unter den beiden in Kapitel V besprochenen Voraussetzungen, daß der Zentrifugalkraftbegriff 1. im analytischen Sinne genommen und 2. verallgemeinert wird, sind die beiden Theorien nicht bloß einwandfrei und führen zu den gleichen Resultaten, sondern sind sie geradezu identisch, stellen sie nur verschiedene Formen desselben Gedankens dar. Denn dann ist die Zentrifugalkrafttheorie weiter nichts als eine besondere Interpretation von Gleichung (1). Betrachtet man sich als im Besitze des verallgemeinerten Begriffes der Zentrifugalkraft, so kann man die Zentrifugalkrafttheorie als eine Abkürzung der Relativtheorie ansehen. Die Relativtheorie arbeitet am bequemsten mit Beschleunigungen, die Zentrifugalkrafttheorie kann mit Beschleunigungen und Kräften gleich gut arbeiten. Es ist ungenau zu sagen, die Relativtheorie betrachte die Erde in ihrem wahren Zustande der Bewegung, die Zentrifugalkrafttheorie in einem gedachten künstlichen Zustande der relativen Ruhe, und ungerecht, deshalb die letztere geringer zu werten. Richtiger und gerechter ist die Aussage, daß jede Theorie auf ihre Weise der Bewegung der Erde Rechnung trägt. Bei dieser Sachlage hat es keinen Sinn zu behaupten, die Relativtheorie sei die einfachere, wissenschaftlich feinere, sie vermeide alle Umwege und Hilfsvorstellungen. Es wird schwerlich jemand die Darstellung in § 26 wissenschaftlich weniger fein finden als die in § 15; daß die Zen-

trifugalkrafttheorie keinen Umweg, eher das Gegenteil bedeutet, und daß sie die Hilfsvorstellung der Kraft nicht nötig hat, hörten wir schon.

Das alles gilt natürlich nur unter den gemachten Voraussetzungen. Wo nur der gröbere und speziellere Begriff der Zentrifugalkraft bekannt ist, ist die Zentrifugalkraftform der Theorie praktisch vorzuziehen. Sie wird deshalb in Schulen und in populäreren Büchern der bessere Weg sein, um die Entstehung der fluterzeugenden Kräfte verständlich zu machen.

2. Die in § 11 besprochenen Autoren erhalten die richtigen Ausdrücke für die fluterzeugenden Beschleunigungen, trotzdem sie die fehlerhafte Ableitung aus den bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen haben. Der Grund ist nach den bisherigen Darlegungen leicht einzusehen. Weil in jedem fluterzeugenden System das Potential der Führungskraft (§ 15) oder das der Zentrifugalkraft in einem Punkte der Oberfläche der Erde gleich dem Gravitationspotential des störenden Körpers im Mittelpunkte der Erde ist, sind die absoluten Beträge der Relativbeschleunigungen gegen den Erdboden, wie sie die Ableitung aus den Gravitationsdifferenzen aufstellt, gleich denen der Relativbeschleunigungen nach den beiden richtigen Formen der Theorie. Fügt man im ersteren Falle das entsprechende Vorzeichen hinzu, so ist die Übereinstimmung vollständig.

3. Es erscheint besonders wichtig, noch einmal nachdrücklich zu betonen, daß unsere sämtlichen Entwickelungen von jeder Tidentheorie vollständig unabhängig sind. Sie stellen allgemeine, unter allen Umständen geltende Ausdrücke dar, die auf die Wasser der Erde angewandt werden können (§ 4). Weil eine Kraftwirkung aber nicht nur von der Kraft, die wirkt, sondern auch von dem Zustand des Körpers oder Systems, auf das sie wirkt, abhängig ist, so ist die Gestaltung der Gezeiten nicht nur von der Verteilung und Größe der Gezeitenkräfte, sondern auch von den Voraussetzungen bestimmt, die man über die Wasserhülle der Erde macht. Je nachdem man die Wasserhülle als ein System ansieht, das unter Einwirkung der Gezeitenkräfte in jedem Augenblick im Gleichgewichtszustande ist, oder sie als ein der Reibung unterworfenes schwingungsfähiges System faßt, ist die Wirkung derselben Kräfte sehr verschieden. Die Tidentheorien haben die Aufgabe, diese Voraussetzungen so zu ge-

stalten, daß die Resultate, die sich aus der Anwendung der allgemeinen Ausdrücke der Gezeitenkräfte auf sie ergeben, sich der Wirklichkeit möglichst anschmiegen; die vollständige analytische Bewältigung des Tidenproblems ist heute noch nicht möglich. Sowohl die Verschiedenheiten in den Resultaten der Tidentheorien als auch die Nichtübereinstimmung der wirklichen Gezeiten mit dem in Betracht kommenden Kraftfeld der Erde rühren also nicht von Ungenauigkeiten in den Ausdrücken der Gezeitenkräfte her; das Feld dieser Kräfte ist allgemein sicher bestimmt.

VII. Die halbtägigen Perioden der Tiden.

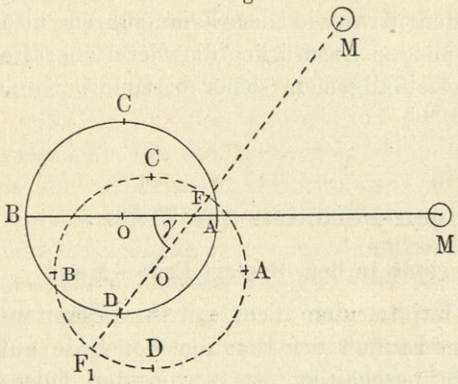
§ 28. Die halbtägige Periode in dem System Erde—Mond.

Weil das vorliegende Kapitel sich nicht mit den Gezeitenkräften, sondern mit einem Einfluß der Rotation der Erde auf die Gestaltung der Gezeiten beschäftigt, ist es von den Tidentheorien nicht unabhängig. Man kann ihm entweder die Vorstellung der Gleichgewichtstheorie oder die Theorie der gezwungenen Wellen zugrunde legen: in beiden Fällen ist die Flut mit den Kulminationen der störenden Gestirne verknüpft. Weil aber diese Verknüpfung unzweifelhaft besteht, trotzdem sogar unter der Wirkung der freien Wellen die Gezeit unter dem störenden Gestirn invers werden kann, so ist die Abhängigkeit von den Voraussetzungen einer Theorie auf die Richtigkeit der folgenden allgemeinen Betrachtungen ohne Einfluß.

Der Grund, weshalb wir diese Betrachtungen hier einfügen, ist schon in § 4 kurz bezeichnet worden. Für die Theorie der bloßen Differenzen der Gravitationsbeschleunigungen ist die halbtägige Periode kein Problem, sie ist die selbstverständliche Folge der einzigen Bewegung der Erde, die die Theorie bei den Tiden kennt, der Rotation. Sobald man aber die tatsächlichen Achsen berücksichtigt und die Revolution als eine notwendige Bedingung für den Ursprung der Gezeitenkräfte erkennt, ergibt sich, daß auch ohne die Rotation Gezeitenperioden existieren würden. Die Frage, wie sich daraus und aus der Rotation die halbtägigen Perioden ableiten, wollen die folgenden Überlegungen beantworten. Teils weil die Verhältnisse in den beiden fluterzeugenden Systemen etwas verschieden liegen, teils mit Rücksicht auf das folgende Kapitel fassen wir die Systeme gesondert ins Auge. Der Einfachheit wegen sehen wir die Revolutionsbewegung als kreisförmig an.

Fig. 10 stellt zwei Phasen der Revolutionsbewegung des Systems Erde–Mond mit dem Phasenwinkel γ dar. Die Zeichenebene ist die vom Nordpol gesehene Bahnebene.

Fig. 10.



Betrachten wir nur die Rotation der Erde, die in der Richtung W–O geschieht, so gehen die Punkte D, B, C in dieser Reihenfolge durch die Zentrallinie, bis nach einer Rotation wieder Punkt A hineinfällt. Die beiden Flutwellen im Zenit und Nadir durchlaufen also den Erdumfang in 24 Stunden, und zwar in der der Rotation entgegengesetzten Richtung O–W, so daß jeder Punkt zufolge der Rotation allein alle 12 Stunden Flut bzw. Ebbe hat.

Fassen wir jetzt nur die Revolutionsbewegung ins Auge, so ist auch sie die Ursache einer Bewegung der Gezeiten über der Erdoberfläche. Denn infolge der Revolution durchwandern die Schnittpunkte der Zentrale und ihrer Verlängerung mit der Oberfläche bei einer Revolution einen größten Kreis. Bei der ersten Phase der Zeichnung entsteht die Flut in A und B. Bei der zweiten Phase haben sich die Schnittpunkte um γ^0 auf dem Umfang verschoben und die Fluten sind in F und F_1. Nach einer Drehung von $\pi/2$ haben C und D Flut usw., bis die Schnittpunkte nach einer Revolution wieder in A und B liegen. Die Richtung ist offenbar dieselbe wie die der Revolution.

Im ganzen existieren also gleichzeitig zwei Bewegungen der beiden Flutwellen über die einmalige Länge des Erdumfanges: eine infolge der Rotation innerhalb eines Tages in der Richtung O–W, eine zweite infolge der Revolution innerhalb eines Monates in der Richtung W–O. Da die zweite der ersten entgegengesetzt ist und langsamer vor sich geht, wird die erste jeden Tag ein wenig verzögert.

Wir wollen diese Verzögerung bestimmen. Der Mond steht für jeden Schnittpunkt der Zentrale mit der Erdoberfläche im Meridian. Der bequemen Vorstellung wegen denken wir uns die Erdachse parallel der Systemachse, also senkrecht auf der Zeichenebene. In der ersten Phase der Zeichnung hat A den Mond im Meridian. Gleichzeitig stehe im Meridian von A ein Fixstern α. Infolge der Revolution verschiebt sich die Meridianebene von A parallel mit sich selbst (§ 7); besäße also die Erde nur die Revolutionsbewegung, so würde der Stern α stets im Meridian von A bleiben. In der zweiten Phase hat F den Mond im Meridian. Bei der Rotation der Erde in dieser Phase geht die Meridianebene von A zuerst durch den Fixstern und erst nach einer Drehung von γ^0 durch den Mond. Bei dieser Phase ist also der Mond bei seinem Meridiandurchgang um γ^0 hinter dem Fixstern zurückgeblieben. Nach einer Revolution gehen Mond und Stern wieder gleichzeitig durch den Meridian von A. In dieser Zeit hat sich also der Mondmeridiandurchgang um 360^0 oder, zeitlich ausgedrückt, um einen Tag gegenüber dem Fixsternmeridiandurchgang verzögert. Die Erde hat in der Zeit eines (siderischen) Monats soviel Rotationen gemacht, als der Stern α Meridiandurchgänge für A hinter sich hat, nämlich 27,3 Rotationen. Der folgende Paragraph wird übrigens zeigen, daß zu dieser Zahl ein gewisser Betrag zu addieren ist, weil 27,3 Tage nicht genau gleich 27,3 Rotationen sind; da er aber nur rund 1 Stunde 48 Minuten beträgt, würde er die Zahl 27,3 auf 27,37 ändern, so daß wir ihn als für unseren Zweck unwesentlich übersehen dürfen. Weil nun der Mond sich in 27,3 Tagen um einen Tag verzögert, geht er während eines siderischen Monats in Wahrheit nur 26,3 mal durch den Meridian von A. Infolge der Rotation allein wäre also die Zenitflut in einem Monat 27,3 mal über A in der Richtung O–W geführt worden; infolge der Revolution ist sie in dieser Zeit einmal über A in der Richtung W–O gegangen: sie hat demnach A in Wirklichkeit 26,3 mal in einem Monat passiert. Auf diese Weise stellt sich die Erfahrungstatsache dar, daß die Mondfluten mit der oberen und unteren Kulmination des Mondes zusammenhängen.

Weil die Flut zufolge der Revolution allein in 27,3 Tagen 360^0 durchlaufen würde, würde sie in einem Tage 13^0 in der Richtung W–O zurücklegen. Diese 13^0 bedeuten für die Rotationsflut eine tägliche Verzögerung von rund 52 Minuten. In der Tat besitzt die halbtägige Mondflut eine Periode von etwa 12 Stunden 26 Minuten.

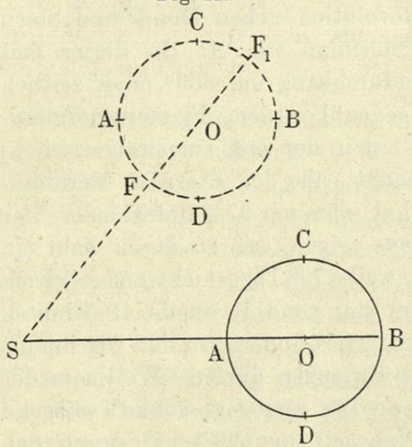
Den Zeitraum von 24 Stunden 52 Minuten, also die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Mondmeridiandurchgängen für denselben Ort, pflegt man in der Tidentheorie den Mondtag zu nennen.

§ 29. Die halbtägige Periode in dem System Erde–Sonne.

Fig. 11 stellt zwei Phasen der Revolutionsbewegung dar. S sei die Sonne.

Wir nehmen zunächst an, die Erde besitze eine Revolution ohne Rotation. Nach den Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen sieht man leicht, daß die Schnittpunkte der Zentrale und ihrer Verlängerung mit der Erdoberfläche, also auch die Fluten, während der Revolution nacheinander in die Punkte F, D, B, C fallen und nach einer Revolution wieder in A und B. Die Sonnenfluten machen demnach zufolge der Revolution allein in einem Jahr einen Umlauf, und zwar in der Richtung W–O.

Fig. 11.



Lassen wir die Voraussetzung fallen und nehmen die Rotation hinzu, so tritt zu dieser jährlichen Flutbewegung noch die relative Flutbewegung, die infolge der Rotation die Flut in einem Tage um die Erde führt. Die Richtung der letzteren ist O–W. Die tägliche Bewegung wird also durch die jährliche verzögert.

Die Größe der Verzögerung ergibt sich ähnlich wie beim Monde. Bei der ersten Phase stehe ein Fixstern α gleichzeitig mit der Sonne im Meridian von A. Wir nehmen nun einmal an, der Phasenwinkel der Figur sei so groß, daß zwischen den beiden Phasen gerade die Zeit einer Rotation liege. Dann sieht man sofort, daß die Erde mehr als eine Rotation hinter sich hat, wenn die Sonne wieder durch den Meridian von A geht. Der Stern α

passiert also den Meridian früher, und zwar um den Phasenwinkel der Figur. Bei einem Phasenwinkel von 90° ist auch die Sonne 90° von α entfernt. Der Stern α geht also im Vergleich zur Sonne um so früher durch den Meridian, je weiter die Erde auf ihrer jährlichen Bahn vorrückt. Ist die Erde nach einer Revolution wieder in die Lage der ersten Phase der Figur angekommen, so ist α der Sonne um 360° voraus. Weil die wahren Rotationen den Fixsternmeridiandurchgängen entsprechen, hat die Erde während einer Revolution eine Rotation mehr gemacht, als die Anzahl der Sonnenmeridiandurchgänge beträgt. Die Anzahl der tatsächlichen Rotationen in einem Jahre beträgt also 366, da die Sonne in dieser Zeit 365 mal durch den Meridian von A geht. Zufolge der Rotation allein würden demnach die Sonnenfluten in einem Jahre 366 mal A in der Richtung O–W passieren, zufolge der Revolution gehen sie in dieser Zeit einmal in der Richtung W–O über A: sie passieren also A in Wirklichkeit 365 mal in einem Jahre. So ergibt sich das Erfahrungsresultat, daß die Sonnenfluten mit der oberen und unteren Kulmination der Sonne zusammenhängen.

Da die Sonnenfluten infolge der Revolution allein 360° in 365 Tagen durchlaufen, legen sie an einem Tage 59′ zurück; dem entspricht eine tägliche Verzögerung von rund 4 Minuten. Da übrigens das siderische Jahr genau 365,256 mittlere Sonnentage besitzt, ist die Anzahl der Erdrotationen 366,256 und der genaue Wert jener Verzögerung 3 Minuten 56,4 Sekunden. Tatsächlich verzögert sich der Meridiandurchgang der Sonne täglich um rund 4 Minuten. Die Erfahrung ergibt, daß die halbtägige Sonnenflut eine Periode von 12 Stunden besitzt.

Scheinbar drückt dieses letzte Resultat keine Verzögerung aus, während sie beim Monde sehr anschaulich ist. Der Grund liegt darin, daß unsere Zeitrechnung von der Sonne hergenommen ist, daß infolgedessen die Verzögerung bei der Sonne in die Zeitrechnung aufgenommen ist, beim Monde aber nicht. Würden wir die Zeit nach Fixsternmeridiandurchgängen rechnen, also Sternzeit einführen, dann käme die Verzögerung in beiden Fällen gleich deutlich zum Bewußtsein. In unserer wirklichen Zeitrechnung ist aber ein Tag die von der Erdrotation bewirkte Zeitperiode + ihrer periodischen Änderung und liegt als diese Größe der Sonnen- und Mondrechnung zugrunde.

§ 30. Die Kombination von Mond- und Sonnentiden.

Was wir im vorstehenden Erfahrungstatsachen nannten, sind in Wahrheit Analysen der Erfahrung; denn in der Wirklichkeit kombinieren sich die Mond- und Sonnentiden. Diese Kombination findet im allgemeinen durch Superposition statt. Allerdings nicht immer. Wenn nämlich die Höhe der einzelnen Wellen im Verhältnis zur mittleren Wassertiefe groß ist, tritt keine einfache Superposition ein. Doch schließen wir diesen Fall hier aus. Um nun zu zeigen, wie sich die halbtägigen Perioden kombinieren, betrachten wir mit Hilfe der Zeichnungen 12 bis 15[1]) vier besondere Fälle etwas näher.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, Sonne und Mond bewegten sich im Äquator und der Beobachtungsort liege auf dem Erdäquator. In den Figuren steht links jedesmal der Vertikalkreis des Beobachtungsortes. In diesem Kreise bewegen sich Sonne ☉ und Mond ☾. Horizont und Zenit sind eingezeichnet. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten Uhrzeiten. Aufgang und Untergang der Sonne legen wir auf 6 Uhr a. m. bzw. 6 Uhr p. m. Die angeschriebenen Zeiten beziehen sich auf die Sonne. Fig. 13 besagt also z. B. nicht, daß der Mond um 9 Uhr an der bezeichneten Stelle steht; um 9 Uhr wird er vielmehr dort sein, wo 3 Uhr p. m. angeschrieben ist. Mond und Sonne mögen den Winkelabstand, den sie in jeder Figur innehaben, während 12 Stunden beibehalten. In Wirklichkeit ändern die Hauptebenen von Mond und Sonne in 12 Stunden ihren Winkelabstand um rund 6°. Weil aber diese Verschiedenheit der Perioden für die Zeit von 12 Stunden bei der Kleinheit der Zeichnung ohne bemerkbaren Einfluß auf die Kurven wäre, sehen wir davon in der einzelnen Zeichnung ab. Der Winkelabstand von Mond und Sonne während 12 Stunden beträgt also bei Fig. 12 0°, bei Fig. 13 90°, bei Fig. 14 45°, bei Fig. 15 135°. Rechts von jedem Vertikalkreise sind die zugehörigen Flutkurven gezeichnet. Die Ordinaten sind die Fluthöhen, die Abszissen entsprechen den Sonnenzeiten des zugehörigen Vertikalkreises. Die gestrichelten Kurven stellen die Mondtide, die punktierten Kurven die Sonnentide, die ausgezogenen Kurven die kombinierte Tide dar. In Fig. 12 sind die Kurven phasengleich, in

---

[1]) Nach Hann (Die Erde als Ganzes[5], 1897, S. 316) und Bidlingmaier (Ebbe und Flut, 1908, S. 29). Ich habe eine bestimmte Höhenformel benutzt.

Fig. 12 bis 15.

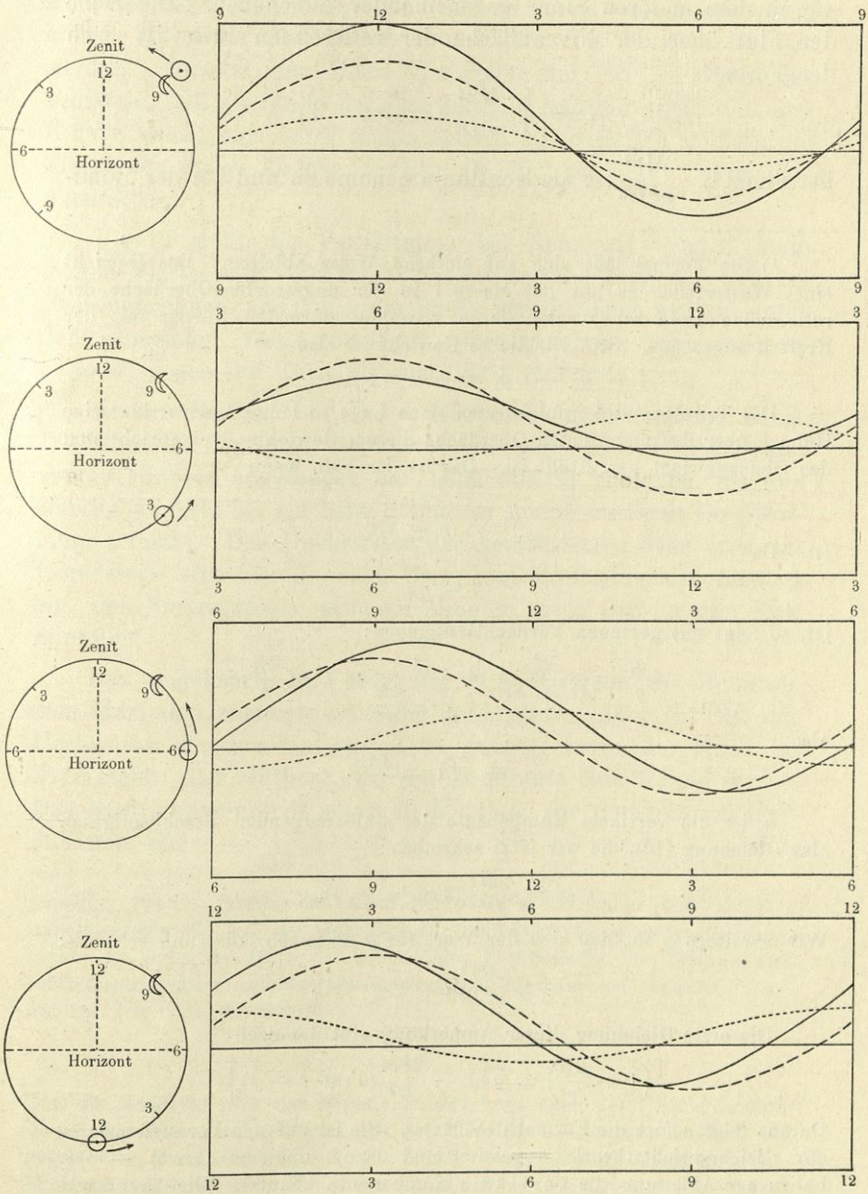

Zenit
Horizont
Zenit
Horizont
Zenit
Horizont
Zenit
Horizont

Fig. 13 um 90°, in Fig. 14 um 45° in dem einen, in Fig. 15 um 45° in dem anderen Sinne gegeneinander verschoben. Die Höhe der Flut über der Niveaufläche der rotierenden Erde ist nach der Formel:

$$h = \frac{1}{2} \frac{Mr^4}{mD^3} (3 \cos^2 z - 1)$$

berechnet[1]. $\frac{Mr^4}{mD^3}$ ist als Konstante genommen und bei der Mond-

[1]) Die Formel läßt sich auf einfache Weise ableiten. Das Gewicht eines Wasserteilchens mit der Masse 1 in der ungestörten Oberfläche der rotierenden Erde sei g. Es werde von dem störenden Körper mit der Kraft a angezogen. Sein wirkliches Gewicht ist also

$$g_1 = g - a.$$

Das Teilchen wird infolgedessen seine Lage so lange ändern, bis seine Höhe h über der ungestörten Oberfläche diesem Gewichte g entspricht und das Gleichgewicht hergestellt ist. Das ist der Fall, wenn

$$g_1 = \frac{km}{(r+h)^2}$$

ist. Da

$$g = \frac{km}{r^2}$$

ist, so folgt mit geringen Vernachlässigungen:

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{r}} = 1 - \frac{2h}{r},$$

also

$$g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right).$$

a ist die vertikale Komponente der fluterzeugenden Beschleunigung, also Gleichung (10), die wir jetzt schreiben:

$$a = \frac{kMr}{D^3} (3 \cos^2 z - 1).$$

Wir erweitern a so, daß sich der Wert für g einsetzen läßt, und erhalten:

$$a = g \frac{Mr^3}{mD^3} (3 \cos^2 z - 1).$$

Die erste Gleichung dieser Anmerkung gibt demnach

$$g\left(1 - \frac{2h}{r}\right) = g\left[1 - \frac{Mr^3}{D^3} (3 \cos^2 z - 1)\right].$$

Daraus folgt sofort die Formel des Textes. Sie ist auf den Voraussetzungen der Gleichgewichtstheorie abgeleitet und darum ungenau (§ 25). — Wir haben zur Ableitung die vertikale Komponente benutzt. Die hauptsächlichste fluterzeugende Beschleunigung liefert allerdings die horizontale Komtide gleich 5, bei der Sonnentide gleich 2 gesetzt. Um die Verhältnisse, auf die es uns hier ankommt, zu veranschaulichen, könnte ebensogut eine andere Formel für die Fluthöhe benutzt werden. Versetzt man Mond oder Sonne um 180°, so würde das bedeuten, daß an Stelle der Zenitflut die Nadirflut tritt. An den Kurven würde sich dabei nichts ändern. Theoretisch müßten die Fluthöhen etwas kleiner werden (§ 18), praktisch wäre das unmerkbar.

Fig. 12 stellt die Verhältnisse bei Neumond, Fig. 13 beim letzten Viertel dar. Zu beiden ist nichts zu bemerken, weil bei Phasengleichheit und bei einer Phasenverschiebung von 90° unter den gemachten Voraussetzungen eine Änderung der „Gesamtperiode" gegen die Einzelperioden nicht eintreten kann.

Anders bei Fig. 14. Um 9 Uhr steht der Mond im Zenit. Die Mondtide hat also ein Maximum, während die Sonne erst vor 40 Minuten angefangen hat, eine Flut zu erzeugen, die nun ständig wächst, bis sie beim Stand der Sonne im Zenit ihr Maximum erreicht. Das Hochwasser der kombinierten Tide tritt infolgedessen eine Stunde nach dem Zenitdurchgang des Mondes ein, das Niedrigwasser etwa 40 Minuten nach der unteren Kulmination.

Das umgekehrte Bild zeigt Fig. 15. Während die Mondtide zum Maximum ansteigt, sinkt die Sonnentide. Aber so, daß das Hochwasser der kombinierten Tide eintritt, bevor der Mond im Zenit steht. Der Flutberg eilt dem Monde um eine Stunde voraus. Das Niedrigwasser tritt etwa 40 Minuten vor der unteren Kulmination ein.

---

ponente. Aber so falsch, wie van der Stok in seiner früher (§ 25) zitierten Arbeit es darstellt, ist der Gebrauch der vertikalen Komponente durchaus nicht. Er findet mit Hilfe der horizontalen Komponente den Abstand zwischen Niedrigwasser und Hochwasser der Mondtide zu 54 cm. Unsere Formel hat bei $z = 0$ das Maximum

$$\frac{M r^4}{m D^3}.$$

Für die Mondtide gibt das 36 cm. Da sich nun nach der Gleichgewichtstheorie die Tiefe des Niedrigwassers zur Höhe des Hochwassers, relativ zur ungestörten Oberfläche, wie 1 : 2 verhält (zum Beweise setze man das Minimum von h bei $z = 90°$ in das Verhältnis zum Maximum), so stimmt der erhaltene Wert mit dem Werte van der Stoks vollständig überein.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen:

Die Kurven können natürlich auch über den Einfluß der Kombination auf die Fluthöhe unterrichten. Fig. 12 stellt die Springflut, also das Maximum der kombinierten Flut dar, Fig. 13 die Nippflut, also das Minimum der kombinierten Flut. Fig. 14 und 15 zeigen Verhältnisse zu Zeitpunkten zwischen diesen beiden.

Eine viel größere Phasenverschiebung der Einzeltiden gegenüber der Phase der Kraft kann durch die am Schlusse von § 25 betrachteten Verhältnisse der Wirklichkeit entstehen, so daß sogar, wie schon im Anfang von § 28 bemerkt wurde, unter dem störenden Gestirn Niedrigwasser eintreten kann. Ihre Größe hängt von der Tiefe des Wassers und der geographischen Breite des Ortes ab.

Ein näheres Eingehen auf diese beiden Punkte liegt außerhalb unseres Themas.

VIII. Die Beziehung der Theorie der Gezeitenkräfte zum kopernikanischen Weltsystem.

§ 31. Die Theorie Galileis.

Der Gedanke, die Tiden zu einem Beweise für die Richtigkeit des kopernikanischen Systems zu benutzen, stammt von Galilei. Er hat ihn schriftlich zuerst in Aufzeichnungen niedergelegt, die er 1616 für den Kardinal Alexander Orsini schrieb; sie wurden gegen Ende des vorigen Jahrhunderts in der Vatikanischen Bibliothek wiedergefunden und 1899 von der Akademie der Nuovi Lincei veröffentlicht. Ausführlicher hat er ihn 1632 in dem Dialog über die beiden Weltsysteme behandelt[1]).

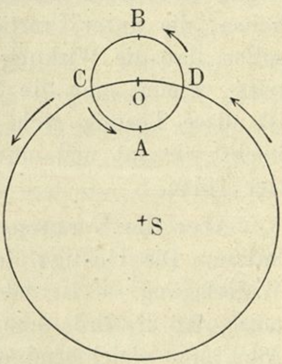
In Fig. 16 steht die Sonne in S; A, D, B, C sind Punkte der Oberfläche der Erde. A ist der der Sonne zunächst liegende, B der am weitesten entfernte Punkt. Die Pfeile geben die Richtung der täglichen Rotationsbewegung der Erde und der Revolutionsbewegung in der als Kreis gezeichneten jährlichen Bahn an.

---

[1]) G. Galilei, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische. Übersetzt von E. Strauß, 1891, S. 434—485.

Die tägliche Bewegung ist der jährlichen entgegengesetzt gerichtet in *A*, gleich gerichtet in *B*. Die Gesamtgeschwindigkeit ist also in *A* kleiner, in *B* größer als die Geschwindigkeit, die bei einer Art von Bewegung allein vorhanden wäre. Die Punkte des Erdumfanges, die sich bei der täglichen Bewegung dem Punkte *B* nähern, erfahren eine immer stärker werdende Beschleunigung, weil die in die Richtung der täglichen fallende Komponente der jährlichen Bewegung stets größer wird; entsprechend erhalten die dem Punkte *A* sich nähernden Punkte eine immer stärker werdende Verzögerung. Die Beschleunigung erreicht in *B*, die Verzögerung in *A* ein Maximum. Die Meere der Erde sind also im Laufe des Tages ständig wechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen unterworfen. Die Folgen macht Galilei in einem Vergleich mit den Barken klar, die das Süßwasser von Lizza Fusina für Venedig herbeiholen. „Stellen wir uns vor, eine solche Barke komme mit mäßiger Geschwindigkeit durch die Lagune daher und fahre das Wasser, womit sie beladen ist, ruhig dahin. Nun aber erleide sie eine merkliche Verringerung ihrer Geschwindigkeit, sei es, daß sie aufs Trockene aufläuft oder sich sonst ein Hindernis ihr in den Weg stellt. Dann wird das in der Barke befindliche Wasser nicht sofort, wie diese selbst, den erlangten Antrieb verlieren, sondern ihn beibehalten und vorne nach dem Bug hinströmen; dort wird es merklich steigen, am Hinterteile dagegen sinken. Wenn aber umgekehrt bei dem ruhigen Dahingleiten der Barke eine merkliche Zunahme der Geschwindigkeit stattfindet, so wird das darin befindliche Wasser sich nicht gleich an diese gewöhnen, sondern seine Langsamkeit bewahren, zurückbleiben, also nach dem Hinterteile sich in die Höhe stauen, vorne hingegen sich senken" (S. 444). So, meint Galilei, muß es auch den Meeren unter dem täglichen Wechsel der Beschleunigung und Verzögerung ergehen, und dieses Sinken und Steigen sind Ebbe und Flut. Die Tatsache der Gezeiten ist also ein Beweis für das Dasein einer doppelten Bewegung der Erde und damit für die Richtigkeit des kopernikanischen Systems.

Fig. 16.



Man muß beachten, daß Galilei durch diese Überlegung nicht bloß die Sonnentiden, sondern die Gesamterscheinung der Gezeiten in den Grundzügen erklären will.

Diese Theorie steht nun hauptsächlich in zwei wichtigen Punkten mit der Erfahrung in Widerspruch: 1. Es folgt aus ihr nur eine eintägige Tide. 2. Sie ergibt eine Tide, die stets zur gleichen Tageszeit eintritt.

Den zweiten Punkt hat Galilei ganz unbeachtet gelassen. Das erste Bedenken sucht er durch Berücksichtigung der von Größe und Tiefe abhängigen Eigenschwingungen der Meere zu heben, die unter Umständen von so bedeutendem Einfluß sein sollen, daß die Wirkung der primären Ursachen dagegen zurücktritt. Nimmt man die Voraussetzung Galileis einmal an, dann ist diese Lösung nicht nur im Prinzip richtig, sondern auch höchst elegant und eine Vorahnung der heutigen Wellentheorie der Tiden.

Aber die Voraussetzung Galileis läßt sich nicht aufrecht halten. Die richtige Betrachtung — und damit eine indirekte Widerlegung — ist leicht[1]). Es ist im Sinne Galileis nicht nötig, daß die Erde eine jährliche kreisförmige Bahn beschreibt. Auch eine gleichförmige Bewegung in gerader Linie müßte nach ihm dieselbe Wirkung haben, weil er ja die durch die Kreisbahn gegebene Beschleunigung gar nicht benutzt. Nach früheren Überlegungen (§ 21, 1) tritt nun infolge einer solchen Bewegung keine Störung im Gravitationsfeld eines Körpers auf. Die Rotation der Erde ändert an diesem Resultat auch nichts; sie schafft, wie wir schon mehrmals betonten, nur eine konstante Niveaufläche. Im ganzen ist also der Fall derselbe, wie wenn die Erde mit relativ ruhendem Schwerpunkt rotiere.

Schwieriger ist die direkte Widerlegung und das Herausstellen des Fehlers. Wenn man sich des Vergleiches mit der Barke erinnert, so kann man sagen, die Erde sei eine Vereinigung von Gefäßen, die mit Wasser gefüllt sind. Damit die von Galilei an der Barke beschriebenen Wirkungen eintreten, müssen diese Gefäße beschleunigt oder verzögert werden. Ist also die Galileische Auffassung der Erdbewegung richtig, dann würde die Halbkugel

---

[1]) Mach, Mechanik, S. 209.

der Erde, die der jährlichen Bewegung abgewandt ist, sich ständig in beschleunigter, die andere ständig in verzögerter Bewegung befinden; ihre Winkelgeschwindigkeiten müßten, auch unter ihren einzelnen Teilen, verschieden sein. Besäße ein solcher rotierender Himmelskörper etwa am Äquator die Rotationsgeschwindigkeit v und wäre die Revolutionsgeschwindigkeit ebenfalls gleich v, dann müßte nach Galilei der Punkt A ruhen. Das sind alles ganz unsinnige Folgerungen, die aber aus der Art, wie Galilei die Bewegung behandelt, notwendig hervorgehen. Oder man könnte fragen: In bezug auf welches Koordinatensystem findet denn jene Beschleunigung und Verzögerung statt oder würde der Punkt A in dem letztbetrachteten Falle ruhen? Darf man die tägliche Geschwindigkeit auf die jährliche projizieren und diese Projektion als einen Zuwachs der täglichen Bewegung ansehen? Wo bleibt die andere Komponente? Dürfte man nicht mit demselben Rechte die tägliche Geschwindigkeit auf die jährliche projizieren und dort von einer Verzögerung und Beschleunigung sprechen? Jeder Punkt der Erde hat natürlich in bezug auf ein im Fixsternsystem ruhendes Koordinatensystem beide Geschwindigkeiten und dementsprechend ist seine Bewegungsmenge verändert. Aber Galilei setzt die jährliche Bewegung zweimal in Rechnung, einmal dadurch, daß er die Erde ihre jährliche Bahn beschreiben läßt, und fürs zweite durch die Komponente, die er der täglichen Bewegung zuteilt. Er faßt die jährliche Bewegung gleichzeitig auf als eine Rotationsbewegung in einem im Mittelpunkte der Erde festliegenden Koordinatensystem, dessen eine Achse in die Richtung der jährlichen Bewegung fällt; denn nur bei einer Beschleunigung in diesem Koordinatensystem könnten die Wirkungen entstehen, die er sich denkt.

Der Ansatz der Theorie Hoffs (§ 13) ist im Grunde mit dem Galileis identisch, nur mit dem Unterschiede, daß Galilei die jährliche Bewegung mit der täglichen kombiniert, während Hoff die tägliche mit der jährlichen kombiniert und infolgedessen die tägliche Bewegung zweimal in Rechnung stellt, in dem er sie noch einmal als Drehbewegung um die Sonne faßt. Man erkennt, daß auch der Fehler der übrigen in § 13 besprochenen Ableitungen dem Galileis ähnlich ist.

Es ist auch nicht uninteressant, daß eine der Galileischen ähnliche Überlegung in der Ballistik bei der Theorie der Bahn rotierender Geschosse in der Luft angewandt wird[1]); es handelt sich dabei um den Einfluß der vorhin angedeuteten Änderung der Bewegungsmenge auf das umgebende Medium und dessen Rückwirkung auf das Geschoß.

§ 32. Die Beweiskraft der Tiden für das kopernikanische System.

So oft die Frage nach der Beweiskraft der Tiden für das kopernikanische System auf dem Standpunkte der üblichen Theorie der Gezeitenkräfte (§ 10) aufgeworfen wurde, mußte die Antwort verneinend ausfallen. Denn weil nach ihr die Tiden auch in einem relativ ruhenden System entstehen können, sind sie keine Beweismittel für die Bewegung des Systems.

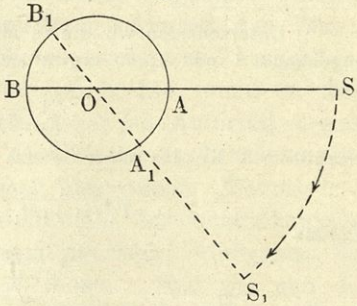
Sobald man aber die Bewegung des Systems als notwendiges Element in die Theorie der Gezeitenkräfte aufgenommen hat, bekommt die Frage ein anderes Aussehen. Allerdings hat gerade das Moment, das als Beweismittel für Kopernikus auf den ersten Blick in Betracht zu kommen scheint, nämlich die Verzögerung der Sonnenfluten (§ 27), gar keine beweisende Kraft. Denn diese Verzögerung stellt eine Analyse der Erfahrungstatsachen dar, die nur auf der Voraussetzung des kopernikanischen Systems durchgeführt werden kann. Mit anderen Worten: die Erfahrungstatsachen der Sonnentiden — solange sie rein als Erfahrungstatsachen ohne jede Analyse genommen werden — können vom ptolemäischen Standpunkte aus erklärt werden. Versuchen wir, uns für einige Augenblicke in diesen Standpunkt hineinzudenken. Wurden innerhalb desselben die Erscheinungen von Ebbe und Flut irdischen Kräften zugeschrieben, dann lag natürlich darin überhaupt kein Motiv, das über den ptolemäischen Rahmen hinausdrängte. Aber der leicht feststellbare Zusammenhang der Tiden mit Sonne und Mond war schon im Altertum bekannt. Man wußte zwar die gesetzmäßige Verknüpfung nicht. Überall, wo man sie sich nicht auf irgendeine Weise, z. B. mit Hilfe der Wärme, herzustellen suchte, wurde darum, wie auch heute noch in den naiven Naturbetrachtungen, die Tatsache gewissermaßen zum Gesetz. Der Ptolemäiker, der also auch die Art des Zusammenhanges nicht deuten konnte, vermochte durch den einfachen Hinweis auf die Erfahrung jedem Einwand, der aus der Tidenerschei-

---

[1]) Cranz, Lehrbuch der Ballistik I, 1910, S. 291 f.

nung gegen sein System hätte erhoben werden können, die Spitze abzubrechen. Ist für ihn (Fig. 17) O die feststehende Erde, S die sich um sie drehende Sonne, so muß erfahrungsgemäß in A und B Flut entstehen. Steht die Sonne in S_1, so ist die Flut in A_1 und B_1 usw. In einem Tage wandert also jede Flut in Abhängigkeit von der Kulmination der Sonne in der Richtung O–W einmal über die Erde, wie immer man sich auch die Verknüpfung mit der Sonne denken mag.

Fig. 17.



Um diesen Gedankengang richtig werten zu können, darf man aber nicht vergessen, daß das ptolemäische System nicht bloß den Stillstand der Erde und die Bewegung der Gestirne um sie bedeutet, sondern auch die ganze Mechanik und Physik jener Zeiten mit umfaßt. Nur auf dem Boden einer solchen primitiven Mechanik ist es möglich, das ptolemäische System mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen.

Denken wir aber im Sinne der heutigen Mechanik, so ist diese Möglichkeit ausgeschlossen. Wir wissen dann vielmehr, da wir den ursächlichen Zusammenhang der Tiden mit Sonne und Mond als erfahrungsgemäß bestätigt ansehen dürfen, mit voller Bestimmtheit folgendes: Selbst wenn das System Sonne-Mond-Erde so, wie es der Ptolemäiker annimmt, möglich wäre, könnten keine Tiden vom Charakter der wirklichen Tiden entstehen; denn wenn die Erde fest fixiert wäre, würde es bloß Zenitfluten, keine Nadirfluten geben (§ 10), ausgenommen selbstverständlich den einen Fall, daß Sonne und Mond in Opposition ständen. Die Tatsache der halbtägigen Periode ist ohne die Annahme einer Bewegung der Erde, die nicht um die Rotationsachse erfolgt, unerklärbar. Weil nun die genauere Beobachtung ohne Schwierigkeit Sonnen- und Mondtiden unterscheiden läßt, so ist das ptolemäische System insofern prinzipiell durchbrochen, als die Bewegung der Erde um wenigstens zwei nicht mit der Rotationsachse zusammenfallende Achsen sicher ist. Damit ist gewiß der kopernikanische Standpunkt nicht rein erreicht; man bedürfte aber nur der Kenntnis der Umlaufszeiten, um von hier aus die genaue

Einsicht in die Massen- und Entfernungsverhältnisse von Sonne, Mond und Erde zu erlangen[1]). Historisch war natürlich der Gang der Dinge umgekehrt. Nicht die Mechanik war ein Motiv zur Umgestaltung des Systems, sondern das System ein Motiv zur Neugestaltung der Mechanik. Aber alles das, was man heute als wirkliche Beweise für Kopernikus in Händen hat, ist erst

---

[1]) Unterscheiden wir die zu Mond und Sonne gehörigen Größen durch angehängte 1 und 2, so ergibt sich aus der Höhenformel (§ 30) für den Fall $z = 0$:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{D_2^3}{D_1^3}.$$

Nach dem 3. Keplerschen Gesetze ist

$$\frac{D_1^3}{T_1^2(m + M_1)} = \frac{D_2^3}{T_2^2(M_2 + m)}.$$

Daraus

$$\frac{M_2 + m}{m + M_1} = \frac{D_2^3}{D_1^3} \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

Da $\frac{m}{M_2}$ und $\frac{M_1}{m}$ kleine Größen sind, können wir auf der linken Seite im Zähler $m = 0$, im Nenner $M_1 = 0$ setzen und erhalten:

$$\frac{D_2^3}{D_1^3} = \frac{M_2}{m} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Diese Gleichung, mit der ersten kombiniert, liefert:

$$\frac{m}{M_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Die Größen auf der rechten Seite sind beobachtbar, so daß sich aus ihnen das Verhältnis der Erdmasse zur Mondmasse berechnen läßt. Selbstverständlich müßte man zur genaueren Berechnung die exakte Höhenformel (§ 25) verwenden. Nun ergibt ferner die Theorie der Planetenbewegung, daß die Konstante

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + M}} \cdot \frac{D^{\frac{3}{2}}}{T}$$

ist, wo die Größen M (bezogen auf die Sonnenmasse), D und T für denselben Planeten gelten müssen. Benutzen wir die Erde, so können wir in erster Annäherung $m = 0$ und $D = 1$ setzen und erhalten k. Setzt man weiter in der letzten Gleichung $M_1 = 0$, $D = D_1$, $T = T_1$, so kann man daraus mit Hilfe des jetzt bekannten k die Größe D_1, bezogen auf die Entfernung Erde = Sonne, also das Verhältnis $\frac{D_1}{D_2}$, berechnen. Mit dessen Hilfe erhält man aus der ersten Gleichung $\frac{M_1}{M_2}$ und daraus, in Verbindung mit $\frac{m}{M_1}$, auch $\frac{M_2}{m}$. Wiederholt man mit diesen Werten die Berechnung von k, dann von D_1 usw., so bekommt man genauere Werte. Zur Berechnung absoluter Größen sind natürlich andere Mittel erforderlich.

dann gefunden worden, als ernstliche Zweifel an der „Richtigkeit“ seines Systems kaum mehr möglich waren.

So ist denn Galilei unbewußt im Rechte gewesen, als er die Tiden als Beweis für Kopernikus aufstellte. Das soll keine Ehrenrettung Galileis in Sachen seiner Gezeitentheorie sein; sie war in der Hauptsache verfehlt und hat nur durch Berücksichtigung der Eigenschwingungen auf ein neues, fruchtbares Moment aufmerksam gemacht, dessen Ausnutzung indes mit den Mitteln der damaligen Mechanik unmöglich war. Aber die Ehrenrettung wäre auch nicht nötig. Galilei war im Rechte, wenn er ohne „Beweise“ das kopernikanische System gegen jede Autorität vertrat; denn es war dem ptolemäischen in der Deutung der Erscheinungen weit überlegen und das letztere besaß ebensowenig „Beweise“.

Man findet gelegentlich die Behauptung, das kopernikanische und das ptolemäische System seien identisch, wenigstens für solche, die nur relative Bewegung kennen. Weil wir nun die Theorie der Gezeitenkräfte auf die Relativbewegung gegründet haben, könnte es scheinen, als ob an der Richtigkeit des Resultates dieses Paragraphen ein grundsätzlicher Zweifel möglich wäre. Das ist aber nicht der Fall. Identisch sind die beiden Systeme nur für den rein phoronomischen Standpunkt, nicht für den dynamischen. Wegen der genaueren Formulierung und Begründung muß auf andere Ausführungen verwiesen werden[1]).

Es ist vielleicht auch nicht überflüssig, noch zu bemerken, daß die Überlegungen über die Beweiskraft der Tiden für das kopernikanische System ebenfalls von jeder Tidentheorie unabhängig sind, trotzdem sie sich nicht nur auf die Betrachtung der Gezeitenkräfte beschränken. Ihre einzige Voraussetzung, die über die Theorie der Gezeitenkräfte hinausgeht, ist die, daß unter der Einwirkung dieser Kräfte an zwei entgegengesetzten Stellen der Erde Flutwellen entstehen. Diese Voraussetzung muß aber jede Tidentheorie machen, weil sie in dieser allgemeinen Form eine notwendige Konsequenz der Anwendung der Ausdrücke für die Gezeitenkräfte ist, gleichgültig, welche Annahmen die Theorie für diese Anwendung macht.

[1]) Aloys Müller, Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem 1911, S. 63 f.

Bisher erschienen[...]

Sammlung [...]

ferner: [...]

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,40.

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie.* Mit dem Bild des Verfassers und 51 Abbildungen. M. 3,60.

Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer-Berlin: *Stoffwechselfermente.* M. 2,80.

Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Marburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.* Mit 20 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette.* Mit 4 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik.* Mit 4 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie des Hungers.* Mit 39 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine.* Mit 2 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien.* M. 4,—.

Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablauge und ihre Verarbeitung auf Alkohol.* Mit 6 Abbild. M. 2,—.

Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatorenfragen.* Mit 10 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin.* Mit 77 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink und Eisen.* Mit 51 Abbild. M. 6,—.

Heft 34. Obering. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen.* Mit 78 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte.* Mit 17 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 36. Prof. Dr. W. Kummer-Zürich: *Die Wahl der Stromart für elektrische Bahnen.* Mit 7 Abbildungen. Im Druck.