

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

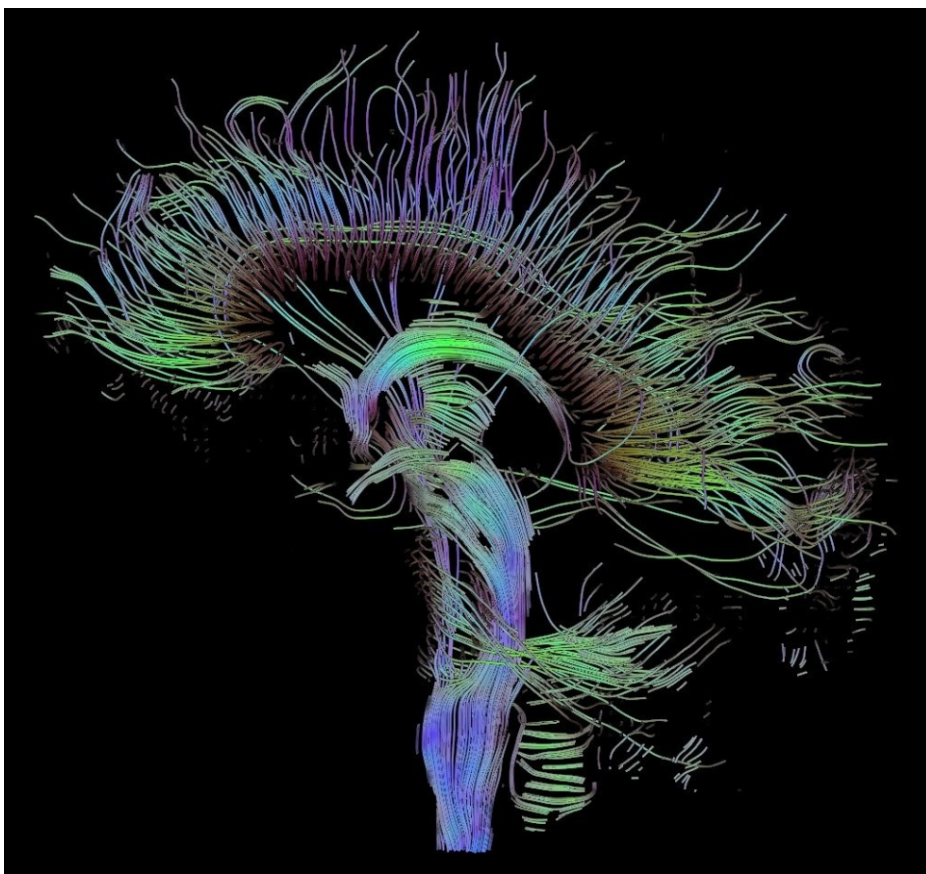
ISSN 0473-7466

2019

Letnik 66

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 66 • ŠT. 2 • STR 41-80 • MAREC 2019

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2019, letnik 66, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** info@dmfa-zaloznistvo.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2019 DMFA Slovenije – 2099

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

TRIKOTNIK, ENAKOOSNA HIPERBOLA IN BERNOULLIJEVA LEMNISKATA

MARKO IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A55, 51M04, 51M15

V prispevku obravnavamo geometrijsko konstrukcijo trikotnika ABC z dano osnovnico AB , razliko $\alpha - \beta$ kotov ob osnovnici in premico, na kateri je oglišče C . Naloga je posplošitev tiste, ki jo je Josipu Plemelju postavil leta 1891 njegov profesor matematike Vincenc Borštner na ljubljanski gimnaziji.

TRIANGLE, RECTANGULAR HYPERBOLA AND LEMNISCATE OF BERNOULLI

In this contribution we discuss a geometric construction of a triangle ABC when its base AB , difference $\alpha - \beta$ between the angles at this base, and a straight line on which the vertex C is located are given. The problem is a generalization of one posed in the year 1891 to Josip Plemelj by his mathematics teacher Vincenc Borštner in secondary school in Ljubljana.

Uvod

Znano je (več v [4, 5]), da je dal prof. Vincenc Borštner (1843–1917) na ljubljanski državni gimnaziji leta 1891 petošolcem, med katerimi je bil tudi Josip Plemelj (1873–1967), iz neke, nam še vedno *neznane zbirke*, naslednjo konstrukcijsko nalogo.

Naloga (A).

Konstruirati je treba trikotnik z znano stranico c , razliko kotov $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ ob njej in višino v_c .

Vse konstrukcije naj se opravijo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Vemo, da se nalogo (A) da rešiti na več načinov. Plemelj jo je najprej rešil z računom, nato pa našel geometrijsko konstrukcijo. V iskanju *neznane zbirke* naletimo dvakrat na isto nalogo v obsežnem delu [2], kjer avtorja pri konstrukciji uporabita izrek o potenci točke glede na krožnico oziroma metodo dopolnitve trikotnika v enakokraki trapez, tako kot je opisano v [1]. Nobena od teh možnosti ni tista, ki naj bi bila v Borštnerjevi zbirki in je obrazložena v [4, 5]. V nadaljevanju iskanja *neznane zbirke* najdemo višješolski učbenik [3] iz leta 1855, v katerem je na strani 185 splošnejša naloga, kot je Borštnerjeva.

Naloga (B).

Konstruirati je treba trikotnik ABC z znano stranico $c = |AB|$, razliko kotov $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ ob njej, pri tem pa mora oglišče C ležati na dani premici p .

Predpostavili bomo, da je trikotnik ABC standardno označen, pri čemer je $0 < \varepsilon < \pi$. Koti α, β in γ so notranji trikotnikovi koti. Če je p vzporedna s stranico AB , potem iz (B) dobimo Borštnerjevo nalogo (A). V nalogi (B) sta dani oglišči A in B , ki določata stranico z dolžino c trikotnika ABC . Kajti le tako je tedaj smiselno podati premico, ki vsebuje tretje oglišče.

Analitična rešitev

Najprej bomo nalogo (B) rešili analitično, podobno kot je to narejeno v [6]. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy naj bosta oglišči trikotnika $A(-f, 0)$ in $B(f, 0)$, pri čemer je $f = c/2 = |AB|/2$. Oglišče C naj ima pozitivno ordinato, da bo trikotnik ABC pravilno označen (slika 1). Če izberemo kot α , potem mora biti kot β enak $\alpha - \varepsilon$. Premica skozi A , nosilka stranice b , in premica skozi B , nosilka stranice a iskanega trikotnika, imata enačbi

$$y = (x + f) \operatorname{tg} \alpha, \quad y = -(x - f) \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon). \quad (1)$$

Njuno presečišče je točka $C(x_C, y_C)$, tretje oglišče iskanega trikotnika. Ko rešimo sistem enačb (1) in dobljena izraza poenostavimo, dobimo:

$$x_C = -f \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma}, \quad y_C = f \cdot \frac{\cos \varepsilon + \cos \gamma}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

Z nekoliko daljšim, pa ne težkim računom, najdemo zvezo

$$x_C^2 - y_C^2 - 2x_C y_C \cot \varepsilon - f^2 = 0,$$

kar pomeni, da oglišče C leži na stožnici, ki ima enačbo

$$x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon - f^2 = 0. \quad (3)$$

V skladu z nalogo je oglišče C lahko le na tistem njenem delu, kjer je $x < 0$ in $y > 0$. Ker je $\varepsilon = \alpha - \beta < \alpha + \beta = \pi - \gamma$, sledi še omejitev $0 < \gamma < \pi - \varepsilon$. Parametrični enačbi te krivulje sta po (2) $x = -f \sin \varepsilon / \sin t$, $y = f(\cos \varepsilon + \cos t) / \sin t$, $0 < t < \pi - \varepsilon$.

Mešani člen $-2xy \cot \varepsilon = 2xy \operatorname{tg}(\varepsilon - \pi/2)$ pove (glej na primer [7]), da je stožnica v koordinatnem sistemu Oxy zasukana okoli O za kot $\vartheta =$

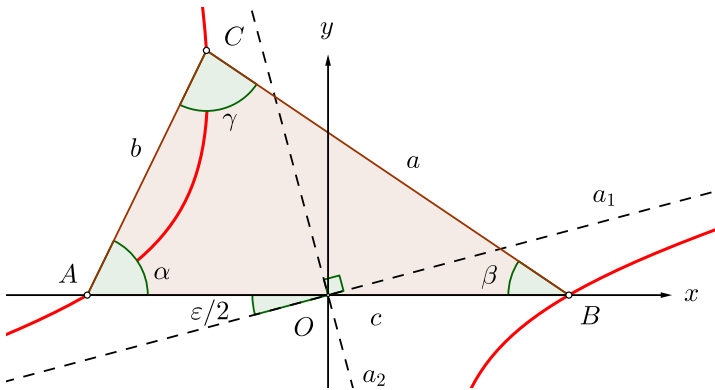
$\varepsilon/2 - \pi/4$. Za $\varepsilon = \pi/2$ preide (3) v $x^2 - y^2 = f^2$, kar je enačba enakoosne hiperbole. Spoznali bomo, da enačba (3) za vsak ε med 0 in π predstavlja enakoosno hiperbolo v koordinatnem sistemu Oxy , zasukano okoli O za kot $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$.

Ponovimo najosnovnejše o hiperboli. Enačba splošne hiperbole v kanonski obliki je $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Pri tem je a realna polos, b pa imaginarna polos hiperbole. Točki $E(-a, 0)$ in $F(a, 0)$ sta temeni hiperbole. Premici, ki sta zajeti v enačbi $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$, sta asimptoti hiperbole. Za $a = b$ dobimo enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$. Razdalja $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ je linearna ekscentričnost hiperbole. Gorišči hiperbole sta točki $G_1(-e, 0)$ in $G_2(e, 0)$. Enakoosna hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ ima gorišči $G_1(-a\sqrt{2}, 0)$ in $G_2(a\sqrt{2}, 0)$.

Ker obstaja realen razcep

$$x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon = \left(y + x \cot \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(x \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - y\right),$$

je stožnica (3) res hiperbola, njeni asimptoti a_1 in a_2 pa sta premici $y = x \operatorname{tg}(\varepsilon/2)$ in $y = -x \cot(\varepsilon/2)$, ki sta očitno med seboj pravokotni, kar samo potrjuje dejstvo, da je hiperbola (3) enakoosna, saj ima samo taka hiperbola med seboj pravokotni asimptoti. Asimptota a_1 oklepa z osjo x kot $\varepsilon/2$, asimptota a_2 pa kot $\varepsilon/2 + \pi/2$.



Slika 1. Trikotnik in hiperbola.

Hiperbola (3) poteka skozi točki A in B . Z njima in razliko kotov ε je natančno določena. Označimo jo s $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$. Točki E in F hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$, ki sta središču O najbližji, sta temeni hiperbole. Poiščimo ju hkrati z dolžino realne polosi $|OE| = |OF|$ hiperbole z metodami linearne algebre. Kvadratni formi $x^2 - 2xy \cot \varepsilon - y^2$, ki definira hiperbolo $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$,

pripada simetrična matrika

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\cot \varepsilon \\ -\cot \varepsilon & -1 \end{bmatrix},$$

ki ima karakteristično enačbo

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - \cot^2 \varepsilon = \lambda^2 - \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} = 0.$$

Lastni vrednosti matrike M sta $\lambda_1 = 1/\sin \varepsilon$ in $\lambda_2 = -1/\sin \varepsilon$. Lastni vrednosti $\lambda_2 < 0$ pripada lastni vektor \vec{v}_2 , ki definira smer Oy' premice, ki hiperbole ne seka. Lastni vrednosti $\lambda_1 > 0$ pa pripada lastni vektor \vec{v}_1 s koordinatama u in v , ki zadoščata enačbi $(1 - \lambda_1)u - v \cot \varepsilon = 0$, iz katere dobimo

$$\frac{v}{u} = \frac{1 - \lambda_1}{\cot \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon - 1}{\cos \varepsilon}.$$

Z uvedbo kota $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$ zapišemo dobljeni rezultat v enostavnejši obliki: $v/u = \operatorname{tg} \vartheta$. Lastni vektor \vec{v}_1 definira smer Ox' premice $y = x \operatorname{tg} \vartheta$, ki hiperbolo seka v temenih E in F . V koordinatnem sistemu $Ox'y'$ ima hiperbola enačbo $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = (x'^2 - y'^2)/\sin \varepsilon = f^2$, iz katere lahko izrazimo dolžino realne polosi hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$: $|OE| = |OF| = f\sqrt{\sin \varepsilon}$. Temeni E in F imata polarna radija

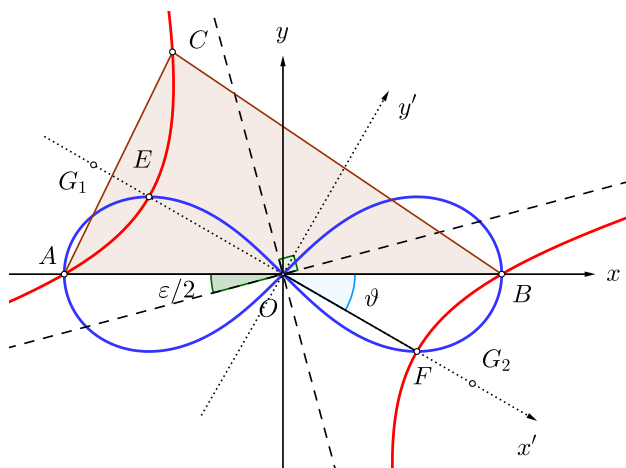
$$\varrho = f\sqrt{\sin \varepsilon} = f\sqrt{\sin(2\vartheta + \pi/2)} = f\sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Temeni E in F hiperbole s spreminjanjem kota ε potujeta po *Bernoullijevi lemniskati*, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = f\sqrt{\cos 2\varphi}$, v pravokotnih kartezičnih koordinatah pa $(x^2 + y^2)^2 = f^2(x^2 - y^2)$.

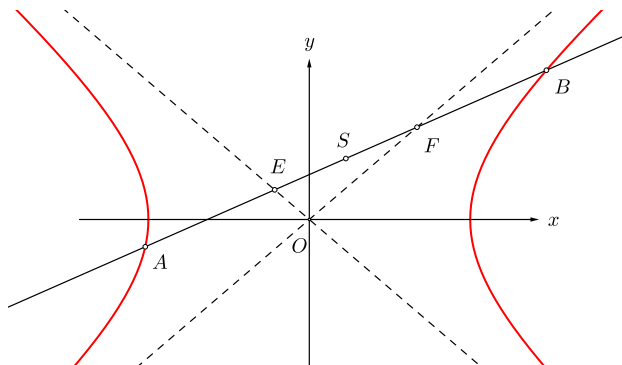
Gorišči G_1 in G_2 hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ tudi ležita na premici $y = x \operatorname{tg} \vartheta$, njuna polarna radija pa sta $f\sqrt{2 \cos 2\vartheta}$, kar pomeni, da se pri spreminjanju kota ε tudi gibljeta po Bernoullijevi lemniskati, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = f\sqrt{2 \cos 2\varphi}$.

Enakoosna hiperbola ima lastnost, da vsak trikotnik ABC , ki ima za stranico AB premer hiperbole, oglišče C pa drsi po eni od vej hiperbole, ohranja razliko kotov ob AB . Premer hiperbole je vsaka tetiva skozi središče hiperbole. Za dokaz potrebujemo najprej trditev 1.

Trditev 1. Če neka premica preseka hiperbolo v točkah A in B , njeni asimptoti pa v točkah E in F , potem imata tetiva AB in daljica EF isto razpolovišče S . Razpolovišča med seboj vzporednih tetiv ležijo na skupni premici.



Slika 2. Trikotnik, hiperbola in Bernoullijeva lemniskata.


 Slika 3. Če premica preseka hiperbolo in njene asimptote, velja $|AE| = |BF|$.

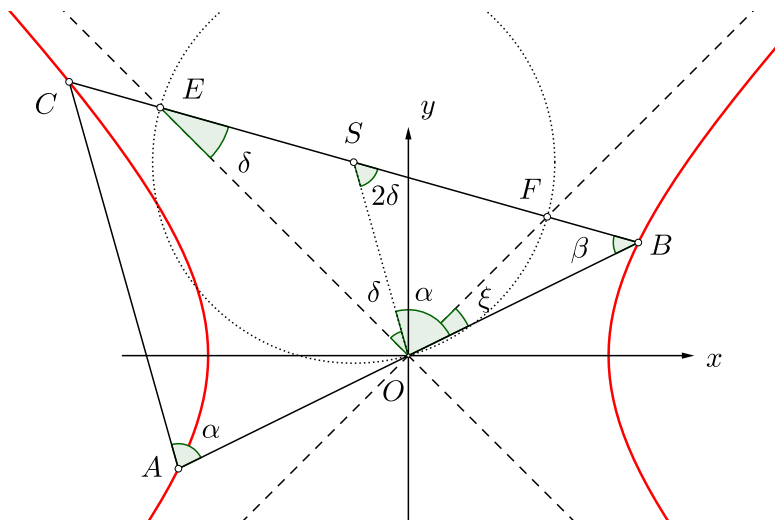
Dokaz. Vzemimo hiperbolo $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (slika 3). Njeni asimptoti zapišemo z razcepno enačbo $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Če je poljubna premica, ki seka hiperbolo in asimptote, navpična, imata tetiva AB in daljica EF očitno skupno razpolovišče, ki leži na abscisni osi. S tem je za ta primer potrjen tudi zadnji del trditve.

V preostalih primerih pa naj ima premica enačbo $y = kx + n$. Za abscisi presečišč vsake take premice s hiperbolo dobimo kvadratno enačbo oblike $x^2 + px + q_h = 0$, za abscisi presečišč z asimptotama pa enačbo oblike $x^2 + px + q_a = 0$. Po Viètovem pravilu je v obeh primerih polovična vsota abscis presečišč enaka $x_0 = -p/2 = a^2kn/(b^2 - a^2k^2)$, polovična vsota ustreznih ordinat pa $y_0 = kx_0 + n = b^2n/(b^2 - a^2k^2)$. S tem imamo koordinati točke S . Središča vseh med seboj vzporednih tetiv hiperbole z naklonom k

ležijo na isti premici, ki ima enačbo $a^2ky = b^2x$. Na sliki 3 tetiva povezuje obe veji hiperbole. Trditev pa velja tudi za tetive posamezne veje. ■

Očitna posledica trditve sta enakosti $|AE| = |BF|$ in $|AF| = |BE|$.

Trditev 2. V trikotniku, ki ima za stranico AB katerikoli izbrani premer enakoosne hiperbole, oglišče C pa leži na tej hiperboli, ostane razlika kotov ob stranici AB stalna pri spreminjanju C , če je pri tem C na isti veji hiperbole, trikotnik ABC pa ne menja svoje orientacije.



Slika 4. Trikotnik, ki ima za stranico premer enakoosne hiperbole.

Dokaz. Koordinatno izhodišče O razpolavlja premer AB hiperbole, točka S pa njeno tetivo CB , pa tudi daljico EF med asimptotama, ki se sekata pravokotno (slika 4). Zato je trikotnik OFE pravokoten, trikotnika EOS in OFS pa enakokraka. Trikotnika ABC in OBS sta si podobna, ker se ujemata v kotu β in v razmerju stranic, ki ga oklepata. Zato sta stranici AC in OS vzporedni. Naj bo ξ kot med daljicama OB in OF . Če upoštevamo relacije med koti v trikotnikih OBS in OBF , dobimo: $\alpha - (\pi/2 - \delta) = \xi$ in $\pi - (\pi/2 + \delta) - \beta = \xi$. Iz obeh sledi $\alpha - \beta = 2\xi$, neodvisno od C . ■

V posebnem primeru, ko je tetiva AB realna os hiperbole $x^2 - y^2 = a^2$, je $\xi = \pi/4$ in s tem $\alpha - \beta = \pi/2$.

Začeli smo z nalogo (B) in prišli do enakoosne hiperbole. Lahko pa začnemo z enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = f^2 \sin \varepsilon$ in načrtamo njen premer

AB , ki oklepa z njeno realno osjo kot $\pi/4 - \varepsilon/2$. Ta premer ima dolžino $2f = c$. Če izberemo na levi veji hiperbole točko C s pozitivno ordinato, je razlika kotov trikotnika ABC ob osnovnici AB enaka ε po trditvi 2. Presek C pozitivnega dela leve veje take hiperbole s premico p določa trikotnik ABC , ki je rešitev naloge (B).

Če izberemo točko C na desni veji hiperbole, dobimo trikotnik, v katerem je $\beta > \alpha$ in $\beta - \alpha = \pi - \varepsilon$.

Nalogo (B) lahko še posplošimo, če zahtevamo, da je oglišče C na poljubni dani krivulji \mathcal{C} namesto na premici. Tedaj konstruiramo za znano stranico AB in znano razliko kotov ε hiperbolo $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$, oglišče C je potem, glede na to, kako je trikotnik ABC označen, in glede na to, da je $0 < \varepsilon < \pi$, presek pozitivnega dela leve veje te hiperbole s krivuljo \mathcal{C} . Reševanje problemov z metodo presekov stožnic in drugih krivulj ni nič novega. Že nekateri antični matematiki so jo uporabljali pri problemu podvojitve kocke in razdelitve kota na tri enake dele.

Na žalost pa stožnice, razen krožnice, niso pravi konstrukcijski elementi, ker konstrukcije ne potekajo samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, zato bomo le za primer, ko je \mathcal{C} premica p , pokazali pravilno konstrukcijo. Je pa nedvomno že solidna skica hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ uporabna, ker nam hitro da grobo informacijo o obstoju in številu rešitev. Če premica p preseka dvakrat pozitivni del leve veje hiperbole, obstajata dve rešitvi naloge. Če jo preseka enkrat ali pa se je dotika, je rešitev ena sama. Sicer pa naloga nima rešitve.

Geometrijske konstrukcije

Oglišče $C(x_C, y_C)$ iskanega trikotnika naj leži na premici p , ki naj ima enačbo v normalni obliki: $x \cos \varphi + y \sin \varphi = d$. Pri tem pomeni φ orientirani kot, ki ga pravokotnica dolžine $d > 0$ iz O na to premico oklepa z osjo x . Če pa je $d=0$, vzamemo za φ naklonski kot premice, povečan za $\pi/2$. Pri tem je $0 \leq \varphi < 2\pi$. V enačbo premice p vstavimo koordinati točke C , ki sta zapisani v (2), upoštevamo $f = c/2$ in dobimo enačbo za kot γ :

$$2d \sin \gamma - c \sin \varphi \cos \gamma = c \sin(\varphi - \varepsilon). \quad (4)$$

Če vzamemo $d = v_c$ in $\varphi = \pi/2$, dobimo enačbo, ki je objavljena v [4, 5]. Podobno kot je naredil dijak Plemelj, lahko vpeljemo pomožni kot μ in razdaljo m tako, da vzamemo $2d = m \cos \mu$, $c \sin \varphi = m \sin \mu$, $m = \sqrt{4d^2 + c^2 \sin^2 \varphi}$. Pri tem je $|\mu| < \pi/2$. S tem enačbo (4) lahko prepisemo v obliko

$$\frac{\sin(\varphi - \varepsilon)}{m} = \frac{\sin(\gamma - \mu)}{c}, \quad (5)$$

v kateri spoznamo, če sta razliki $\varphi - \varepsilon$ in $\gamma - \mu$ med 0 in π , sinusni izrek za trikotnik s stranico m in njej nasproti ležečim kotom $\varphi - \varepsilon$ ter stranico c z njej nasproti ležečim kotom $\gamma - \mu$, ki pa ni znan. Sinusni izrek ima zaradi lihosti sinusne funkcije smisel tudi, ali sta razliki $\varepsilon - \varphi$ in $\mu - \gamma$ med 0 in π . Lahko pa tudi katerokoli pravkar zapisano razliko kotov nadomestimo s suplementarnim kotom. Na žalost v (5) nastopajoči koti niso vedno notranji koti trikotnika. Lahko se zgodi troje, kar povejo tudi preseki premice p s pozitivnim delom leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$: naloga ima eno, dve ali pa nobene rešitve. To je odvisno od kotov ε, φ in razmerja d/c .

Ena od možnosti je tudi, da v (4) izrazimo $\sin \gamma$ in $\cos \gamma$ z $\gamma/2$. Če označimo $T = \operatorname{tg}(\gamma/2)$, dobimo enačbo

$$f \cos(\varphi - \varepsilon/2) \sin(\varepsilon/2) T^2 + dT - f \sin(\varphi - \varepsilon/2) \cos(\varepsilon/2) = 0, \quad (6)$$

iz katere izračunamo T in nato γ . Ker je γ notranji kot trikotnika in ker mora biti $0 < \gamma < \pi - \varepsilon$, pridejo v poštev samo tiste rešitve T , za katere je $0 < T < \cot(\varepsilon/2)$. Potem iz enačb $\alpha - \beta = \varepsilon$ in $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ izrazimo $\alpha = (\pi - \gamma + \varepsilon)/2$ in $\beta = (\pi - \gamma - \varepsilon)/2$. S tem je trikotnik ABC določen.

Za $d \geq f$ ima naloga eno rešitev pri pogoju $\varepsilon/2 < \varphi < \varepsilon/2 + \pi$. Mejna kota sta določena z naklonskim kotom $\varepsilon/2$ asimptote a_1 hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$. Sicer naloga za $d \geq f$ nima rešitve.

Za $0 < d < f$ so razmere malo bolj zapletene. S proučevanjem presečišč premice p s hiperbolo $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ pridemo do ugotovitev, ki jih tukaj ne bomo podrobno utemeljevali. Izračunati je treba kota $\varphi_0 = \pi - \arccos(d/f)$ in $\varphi_2 = \pi + \arccos(d/f)$, pri katerih premica p , izražena v normalni obliki, poteka skozi točko A . Očitno velja relacija $\varphi_0 > \pi/2 > \varepsilon/2$. Če je $d \leq f\sqrt{\sin \varepsilon}$, vpeljemo še kot $\varphi_1 = (\varepsilon - \arcsin((d/f)^2/\sin \varepsilon))/2 + \pi$, za katerega je p tangenta na pozitivni del leve veje hiperbole. Nato se pojavijo naslednje štiri možnosti za eksistenco rešitve.

a) V primeru, ko je $d \leq f\sqrt{\sin \varepsilon}$ in $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varepsilon/2 + \pi$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2 < \varphi < \varphi_0$ ali $\varphi_2 < \varphi < \varepsilon/2 + \pi$. Če je $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, sta rešitvi dve. V tangentskem primeru $\varphi = \varphi_1$ je rešitev ena sama.

b) V primeru, ko je $d \leq f\sqrt{\sin \varepsilon}$ in $\varphi_0 < \varphi_1 < \varepsilon/2 + \pi < \varphi_2$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2 < \varphi < \varphi_0$ ali $\varepsilon/2 + \pi < \varphi < \varphi_2$. Če je $\varphi_1 < \varphi < \varepsilon/2 + \pi$, sta rešitvi dve. V tangentskem primeru $\varphi = \varphi_1$ je rešitev ena sama.

c) V primeru, ko je $d > f\sqrt{\sin \varepsilon}$ in $\varphi_0 < \varphi_2 < \varepsilon/2 + \pi$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2 < \varphi < \varphi_0$ ali $\varphi_2 < \varphi < \varepsilon/2 + \pi$. Če je $\varphi_0 < \varphi < \varphi_2$, sta rešitvi dve.

d) V primeru, ko je $d > f\sqrt{\sin \varepsilon}$ in $\varphi_0 < \varepsilon/2 + \pi < \varphi_2$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2 < \varphi < \varphi_0$ ali $\varepsilon/2 + \pi < \varphi < \varphi_2$. Če je $\varphi_0 < \varphi < \varepsilon/2 + \pi$, sta rešitvi dve.

Za $d = 0$ poteka premica p skozi točko O . Če je njen naklonski kot ψ , premica p enkrat preseka zgornji del leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ za $\varepsilon/2 + \pi/2 < \psi < \pi$. Naloga ima tedaj eno rešitev. Sicer za $d = 0$ naloga nima rešitve.

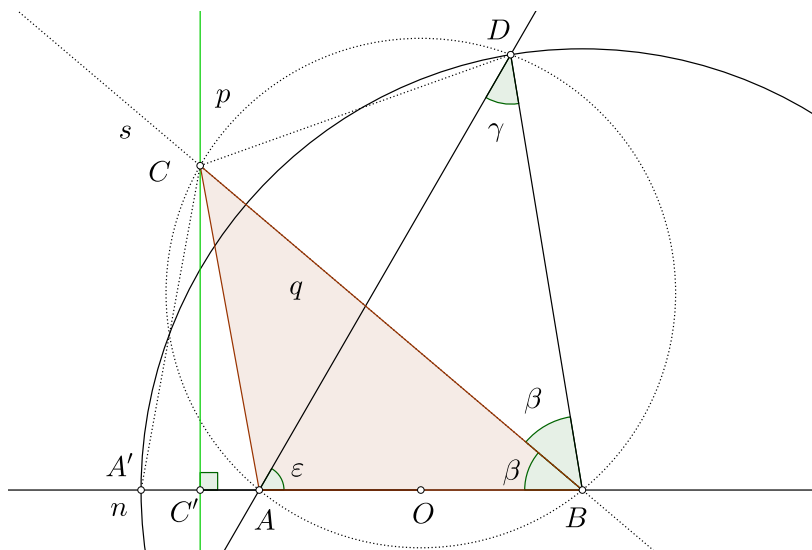
Poglejmo si poseben primer $\varphi = 0$. Tedaj je p premica $x = d > 0$ pravokotna na nosilko n stranice c , ki jo seka desno od njenega središča. Premica p se ne seka s pozitivnim delom leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ in zato naloga nima rešitve.

V primeru $\varphi = \pi$ ima premica p enačbo $x = -d < 0$ in je pravokotna na nosilko n stranice c , levo od njenega središča O . Presečišče premice p z n je točka C' . Pri določenih pogojih, ki jih bomo navedli kasneje, ima tedaj naloga lahko eno rešitev, dve rešitvi ali pa nobene. Pogoji izhajajo iz kvadratne enačbe za neznaniko y , ki jo dobimo iz enačbe hiperbole (3), ko vanjo vstavimo $x = -d$. Naloga je rešljiva, če je vsaj en koren te kvadratne enačbe pozitiven.

V tem primeru konstrukcija trikotnika ABC poteka takole (slika 5). Za iskani trikotnik načrtamo stranico AB dane dolžine c in dano premico p , ki je pravokotna na nosilko n stranice AB . Presečišče premic p in n označimo s C' . Prav tako določimo razpolovišče O stranice AB . Točko A prezrcalimo prek p , da dobimo točko A' . Skozi A pod kotom ε potegnemo premico q , načrtamo krožni lok s središčem v B in polmerom $|BA'| = 2|OC'| = 2d$. Če je ta polmer dovolj velik, krožni lok preseka q vsaj enkrat nad n . Naj bo D eno od teh presečišč. Simetrala s kota DBA seka premico p v točki C , ki je oglišče iskanega trikotnika ABC .

Pravilnost opisane konstrukcije je treba še utemeljiti. Trikotnik ABC dve zahtevi že izpolnjuje: ima za stranico c daljico AB in oglišče C na premici p . Pokazati moramo še, da je res $\varepsilon = \alpha - \beta$. V ta namem notranje kote v trikotniku ABC vpeljemo standardno: $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$. Štirikotnik $A'BDC$ je deltoid, ki ima za simetralo premico s . Zato velja $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BA'C = \pi - \alpha$. V štirikotniku $ABDC$ sta zato kota α in $\sphericalangle CDB = \pi - \alpha$ suplementarna. Ker je vsota notranjih kotov v štirikotniku $ABDC$ enaka 2π , sta suplementarna tudi kota $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle ACD$. Zato je štirikotnik $ABDC$ tetivni in mu lahko očrtamo krožnico, za katero je AB tetiva. Zato sta obodna kota $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle ADB$ enaka γ . V trikotniku ABD velja zveza $\varepsilon + 2\beta + \gamma = \pi$, iz katere dobimo $\varepsilon = \pi - 2\beta - (\pi - \alpha - \beta) = \alpha - \beta$. Rezultat je v soglasju s sinusnim izrekom $\sin \varepsilon / (2d) = \sin \gamma / c$ v trikotniku ABD , ker je $|BA'| = |BD| = 2d$. Iz enačbe (5) namreč za $\varphi = \pi$, $m = 2d$ in $\mu = 0$ dobimo enak rezultat.

Pripomnimo, da smo obravnavali primer, ko leži točka C' levo od A . Posebej je treba obravnavati primer, ko leži C' med A in O . Nazadnje pa pridemo do enakega rezultata.



Slika 5. Konstrukcija trikotnika za navpično premico.

V trikotniku CBD velja zveza $\sphericalangle BCD + (\pi - \alpha) + \beta = \pi$, iz katere sledi $\sphericalangle BCD = \alpha - \beta = \varepsilon$. To pomeni, da iz oglišča C vidimo daljico BD in $A'B$ pod kotom ε . Ta ugotovitev omogoča še eno konstrukcijo, ker znamo poiskati krožnico, s katere vidimo dano daljico pod danim kotom. Presek te krožnice s premico p je oglišče C iskanega trikotnika.

Naloga ima rešitev, če obstaja trikotnik s stranico c , priležnim kotom ε in temu nasproti ležečo stranico $2d$. Natančneje: rešitev je ena sama, če je $2d \geq c$. Če je $c \sin \varepsilon < 2d < c$, sta rešitvi dve, če pa je $c \sin \varepsilon = 2d$, je rešitev tudi le ena. Naloga nima rešitve, če je $c \sin \varepsilon > 2d$ ali pa če je C' desno od razpolovišča O stranice AB .

Ko obstajata dve rešitvi, trikotnika ABC in ABC_1 , sta kota $\gamma = \sphericalangle ACB$ in $\gamma_1 = \sphericalangle AC_1B$ različna. Ker veljata sinusna izreka $\sin \varepsilon / (2d) = \sin \gamma / c$ in $\sin \varepsilon / (2d) = \sin(\gamma_1) / c$, ne gre drugače, kot da sta γ in γ_1 suplementarna kota.

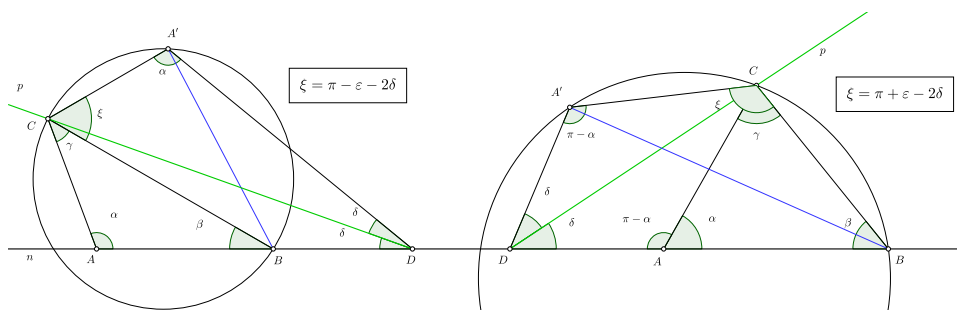
Kaj pa v primeru, ko premica p ni pravokotna na nosilko n ? Na podlagi enačbe (5) se trikotnik ABC morda da konstruirati, vendar je treba upoštevati več možnosti glede razlik kotov. Pomožni kot μ in razdaljo m lahko narišemo z ravnilom in šestilom, prav tako pomožni trikotnik, ki nam da razliko kotov $\gamma - \mu$. S tem in danim $\varepsilon = \alpha - \beta$ sta kota α in β določena. Vendar s konstrukcijo ne moremo biti povsem zadovoljni.

Druga možnost, ki se nam ponuja in za katero dobimo navdih v Borštnerjevi rešitvi naloge (A) v [4, 5], pa tudi v prejšnji konstrukciji, je naslednja.

Premica p naj preseka nosilko n stranice AB v točki D , z δ pa označimo ostri kot med p in n , tako kot kaže slika 6.

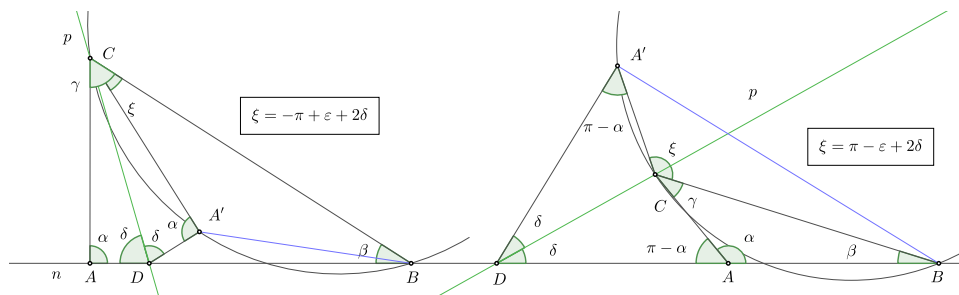
Skromen namig za splošno rešitev naloge (B) najdemo tudi v [3], kjer pa ni ne slike in ne natančne razlage. Točko A prezrcalimo prek premice p v točko A' , nato pa konstruiramo krožnico, s katere vidimo daljico $A'B$ pod nekim stalnim kotom ξ ali njemu suplementarnim kotom. Presek te krožnice in premice p je manjkajoče oglišče C iskanega trikotnika. Kot ξ je odvisen od ε in kota δ . Glede na lego premice p se kot ξ izraža v obliki: $\xi = \pm\pi \pm \varepsilon \pm 2\delta$. Kombinatorično je teh primerov osem. Vendar glede na velikosti kotov δ in ε pridejo v poštev le štirje.

- Denimo, da je trikotnik ABC na sliki 6 levo rešitev problema. Situacija je poenostavljena, p preseka n v točki D , ki je desno od iskanega trikotnika. Oglejmo si deltoid $ADA'C$. Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ . Vsota vseh notranjih kotov deltoida je $2\alpha + \gamma + \xi + 2\delta = 2\pi$. Ker je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, dobimo kot $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$, ki je konstanten pri danih podatkih.



Slika 6. Obravnava trikotnikov za poševno premico v 1. in 2. primeru.

- Oglejmo si trikotnik ABC na sliki 6 desno kot rešitev problema. Premica p preseka n v točki D , ki je levo od iskanega trikotnika. Oglejmo si deltoid $DACA'$. Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ . Vsota vseh notranjih kotov deltoida je tokrat $2\delta + 2(\pi - \alpha) + \xi - \gamma = 2\pi$, iz česar sledi $\xi = \pi + \varepsilon - 2\delta$.
- Na sliki 7 levo premica p preseka stranico AB v točki D . Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ . Prav tako kot v prejšnjem primeru opazujemo deltoid $ADA'C$. Za vsoto njegovih notranjih kotov velja: $2\alpha + 2\delta + \gamma - \xi = 2\pi$. Tokrat dobimo $\xi = -\pi + \varepsilon + 2\delta$.
- Nazadnje si oglejmo še razmere na sliki 7 desno. V konkavnem deltoиду $DACA'$ velja za njegove notranje kote zveza $2\delta + 2(\pi - \alpha) + (2\pi - \xi - \gamma) = 2\pi$. Iz nje dobimo $\xi = \pi - \varepsilon + 2\delta$.

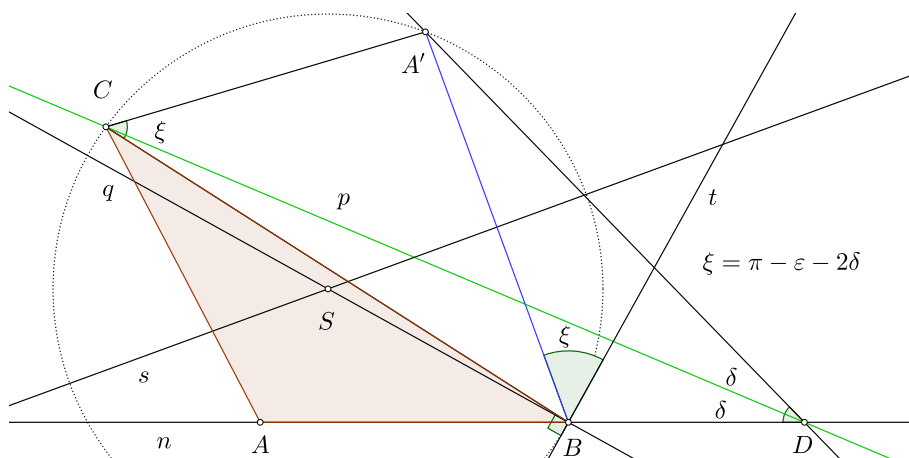


Slika 7. Obravnava trikotnikov za poševno premico v 3. in 4. primeru.

Če je premica p nad n in njej vzporedna, imamo opravka z nalogo (A). Točka D je v neskončnosti. Iz oglišča C vidimo daljico $A'B$ pod kotom $\xi = \pi - \varepsilon$. Če je p pravokotna na n , vidimo iz oglišča C daljico $A'B$ pod kotom $\xi = \varepsilon$.

Pri danih podatkih konstruiramo trikotnik ABC v vseh primerih po enakem postopku. Konstruirati je treba krožnico, s katere vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ . Rešitev je toliko, kolikorkrat ta krožnica preseka premico p nad nosilko n stranice AB in levo od njene simetrale.

Konstrukcija pri znani stranici AB , razliki $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ in premici p , na kateri je oglišče C , je potem razumljiva (slika 8). Ob daljici $A'B$ konstruiramo kot ξ oziroma $\pi - \xi$ z vrhom v B , kjer povlečemo pravokotnico na drugi krak tega kota. Presečišče s simetralo daljice $A'B$ je središče iskane krožnice, ki ima tetivo $A'B$. Krožnica preseka premico p v iskani točki C . Na koncu konstruiramo trikotnik ABC .



Slika 8. Konstrukcija trikotnika za poševno premico.

Pravilnost konstrukcije še utemeljimo. V našem primeru je $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$. Dobljeni trikotnik ABC ima dano stranico AB in oglišče C je na dani premici p . Preveriti je treba samo še, da je razlika kotov α in β enaka danemu ε . Iz dobljene točke C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ zaradi konstrukcije krožnice. Notranji koti trikotnika ADC so α , δ in $(\gamma + \xi)/2$, njihova vsota pa je π . Iz $\alpha + \delta + (\gamma + \xi)/2 = \pi$ in $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ter $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$ dobimo $\varepsilon = \alpha - \beta$.

Podobno bi utemeljevali pravilnost v preostalih primerih. V 1. in 3. primeru za $\delta = (\pi - \varepsilon)/2$ dobimo $\xi = 0$. Tedaj je C presečišče premice p in premice skozi A' in B . V 2. in 4. primeru pa za $\delta = \varepsilon/2$ dobimo $\xi = \pi$ in C je presečišče premice p in daljice $A'B$.

Za konec

Konstrukcije trikotnikov in drugih likov so bile še dolgo v 20. stoletje pri pouku geometrije redna dejavnost, ki pa je precej zamrla, verjetno na račun drugih vsebin in upadanja števila učiteljev, ki jih vse to zanima. Zadnja desetletja smo priča več izvrstnim računalniškim programom, ki naj bi povrnili zanimanje za geometrijo in geometrijske konstrukcije. Namen tega prispevka je ravno v tem, pa tudi v obujanju spomina na Josipa Plemlja ob 52. letnici njegove smrti in bližajoči se 100. letnici ustanovitve ljubljanske univerze, katere prvi rektor je bil.

LITERATURA

- [1] M. Brodar, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 8, str. 285.
- [2] H. Holleben in P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I. in II. del, G. Reimer, Berlin 1831 in 1832.
- [3] E. Heis in T. J. Eschweiler, *Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten*, Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung, Köln, 1855.
- [4] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 6, 188–192.
- [5] J. Plemelj, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 7, 243–245.
- [6] I. Pucelj, *Plemeljev trikotnik in negibne točke transformacij*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015), 1, 12–14.
- [7] H. Stöcker, *Matematični priročnik z osnovami računalništva*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2006.

DIFUZIJSKA TRAKTOGRAFIJA

ALEŠ MOHORIČ^{1,2}, IGOR SERŠA² IN MATIC NOČ¹

¹Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

²Odsek za fiziko trdne snovi, Institut Jožef Stefan

PACS: 82.56.Lz, 87.19.lf

Delovanje možganov je še vedno zavito v tančico skrivnosti. Nedavni napredki v slikanju z magnetno resonanco tančico nekoliko razgrinjajo. Difuzijsko uteženo slikanje z magnetno resonanco lahko razkrije lokalno anizotropijo difuzije in s tem potek živčnih vlaken. To je podatek na mikroskopski skali, ki je manjša od ločljivosti slikanja samega.

DIFFUSION TRACTOGRAPHY

Functioning of the brain is still shrouded in a veil of mystery. Recent advances in magnetic resonance imaging help to unvail the mystery. Diffusion weighted magnetic resonance imaging can reveal local anisotropy in diffusion and with that the information about the tract direction, a microscopic information beyond the resolution of imaging itself.

Uvod

Možgani so pomemben organ, ki je sestavljen iz sivine in beline. Sivino sestavljajo nevroni, belino pa izrastki nevronov, dendriti in nevriti. Izrastki omogočajo mednevronske povezovanje. Zaradi posebne zgradbe svojih sten lahko nevroni »pozabljajo« stare in tvorijo nove povezave, kar je osnova procesa učenja. Delovanja možganov pa ne moremo razumeti zgolj s poznavanjem zgradbe in delovanja posameznih celic, ampak moramo poznati tudi širšo strukturo, kako so posamezni deli možganov povezani med seboj, kateri deli so aktivni ob določenih funkcijah, kateri deli kontrolirajo druge in v katerih smereh potekajo signali. Delovanje možganov lažje razumemo, če to strukturo natančno poznamo. Celično strukturo tkiva lahko raziskujemo z mikroskopom, vendar teh preiskav ne moremo opravljati in vivo in med delovanjem živih možganov. Za razumevanje delovanja možganov je poleg poznavanja strukture pomembno tudi poznavanje dinamike, s katero potekajo procesi v tkivu. Zato potrebujemo način mikroskopskega opazovanja delovanja tkiva na živih vzorcih. Ločljivost metod neinvazivnega slikanja je omejena: pri pozitronski emisijski tomografiji in ultrazvočni sonografiji na milimeter, pri čemer ultrazvok slabo prodira skozi lobanjo in je za preiskave možganov praktično neuporaben. Rentgensko slikanje ima v mehkih tkivih relativno nizek kontrast, drugi postopki (kot npr. tomografija) pa povečajo med preiskavo prejeta dozo in vključujejo uporabo

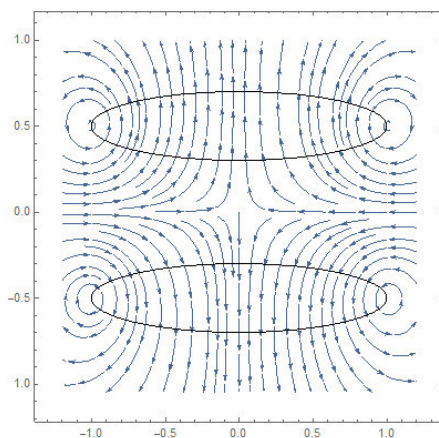
kontrastnih sredstev, ki so lahko škodljiva. Primerna metoda za neinvazivne preiskave delovanja možganov je slikanje z magnetno resonanco (magnetic resonance imaging – MRI). To je metoda, ki omogoča neinvazivno slikanje mehkih tkiv, v katerih je veliko vode (metoda je npr. manj primerna za slikanje pljuč), vendar je tudi pri tej metodi ločljivost omejena na velikostni red desetinke milimetra. Kako torej doseči mikroskopsko ločljivost? Mikroskopsko ločljivost dosežemo tako, da upoštevamo molekularno gibanje, ki je na mikroskopski skali omejeno s strukturo snovi, celičnimi stenami. Merjenje molekularnega gibanja lahko posreduje informacijo o mikroskopski strukturi tkiva. Naključno molekularno gibanje, ki je posledica notranje energije snovi, imenujemo difuzija. Difuzijo v snovi, v kateri se koncentracija snovi ne spreminja s krajem, imenujemo lastna difuzija. Z merjenjem lastne difuzije vode v možganih lahko določimo potek povezav v možganih, postopek imenujemo traktografija. Ko poznamo povezave, tudi bolje razumemo delovanje možganov. Dodatne prednosti slikanja z magnetno resonanco so, da slikanje poteka relativno hitro, ni invazivno in je občutljivo tudi na druge dejavnike, kot je npr. poraba krvi v aktivnih delih možganov. Na ta način lahko s primerno stimulacijo preiskujemo tudi aktivacije različnih sklopov, kar imenujemo funkcijsko slikanje. S takimi preiskavami lahko analiziramo patologijo možganov in načrtujemo posege, da bi stanje izboljšali.

Slikanje z magnetno resonanco

Slikanje z magnetno resonanco (magnetic resonance imaging – MRI) je uveljavljena metoda neinvazivnega slikanja notranjosti diamagnetnih vzorcev. Podatke lahko dobimo za vse tri dimenzije vzorca. Za velikostni red hitreje lahko izmerimo dvodimenzionalno sliko v vnaprej izbrani rezini vzorca. Slikanje temelji na merjenju porazdelitve gostote spinov po prostoru v nehomogenem magnetnem polju [4]. Spin je sinonim za diamagnetni delec z jedrom, ki ima vrtilno količino različno od nič. Pri medicinskem slikanju v večini primerov zaznavamo proton v vodiku, ki je vezan v molekulo vode. Pojav izkorišča jedrsko magnetno resonanco [5], pri kateri merimo resonančne prehode med Zeemanovimi energijskimi stanji spinov v magnetnem polju. V statičnem magnetnem polju B_0 se sicer degenerirani spinski energijski nivoji jeder razcepijo za $\Delta E = \gamma m \hbar B_0$, kjer je γ giromagnetno razmerje značilno za jedro ($\gamma = 2,6 \cdot 10^8$ 1/Ts za proton), \hbar reducirana Planckova konstanta in m magnetno spinsko število. Prehodom med sosednjimi stanji ustreza absorpcija ali sevanje elektromagnetnega valovanja z Larmorjevo frekvenco $\omega = \gamma B_0$. V magnetnem polju z gostoto velikostnega reda tesla, ki je tipično v uporabi, je ta frekvenca v območju radijskih valov. Detektorji radijskih valov so antene, v primeru jedrske magnetne resonance kar primerno uglašene tuljave, ki objemajo ali so prislone ob vzorec. V

termičnem ravnovesju so spini v vzorcu polarizirani v smeri silnic magnetnega polja. Spine vzbudimo s kratkotrajnim sunkom magnetnega polja, katerega gostota niha z Larmorjevo frekvenco v smeri pravokotno na silnice močnega, statičnega magnetnega polja. Po vzbujanju spini precesirajo z Larmorjevo frekvenco okoli osi vzporedne silnicam magnetnega polja in v sprejemni tuljavi inducirajo signal z enako frekvenco. Takoj po vzbujanju so vsi spini v koherentnem stanju, koherenco pa izgubljajo in amplituda signala se manjša eksponentno z značilnim relaksacijskim časom, ki je odvisen od kemijske strukture snovi. Za MRI so uporabne snovi z relaksacijskimi časi daljšimi od milisekund. S posebnimi metodami lahko slikamo tudi snovi s krajšimi relaksacijskimi časi.

Na opisani način deluje spektroskopija z jedrsko magnetno resonanco. Za merjenje prostorske porazdelitve spinov pa mora biti magnetno polje nehomogeno – spreminjati se mora po prostoru. S tokom v ustreznih tuljavah lahko ustvarimo nehomogeno magnetno polje, imenujemo ga gradientno polje, katerega komponenta vzporedna statičnemu, homogenemu polju \mathbf{B}_0 , se po prostoru spreminja približno linearno s koordinato $B = B_0 + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$. Homogeno polje B_0 je običajno več velikostnih redov večje od gradientnega polja. Vektorsko polje \mathbf{G} krajše imenujemo kar gradient (magnetnega polja). Primer gradientne tuljave je inverzna Helmholtzeva tuljava, ki jo sestavlja par krožnih zank, po katerih tečejo tokovi v nasprotnih smereh. Magnetno polje take tuljave kaže slika 1.



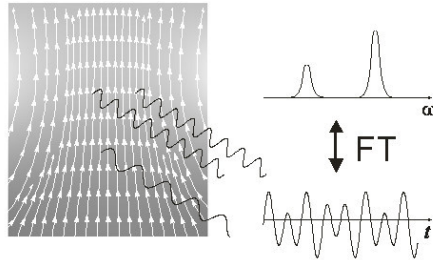
Slika 1. Inverzna Helmholtzeva tuljava je primer tuljave, ki ustvarja nehomogeno magnetno polje. Sestavlja jo dvoje krožnih navitij, po katerih teče tok v nasprotnih smereh. Slika kaže tuljave v perspektivi (črni elipsi) in silnice magnetnega polja v ravnini, ki vsebuje geometrijsko os tuljave.

Frekvenca signala, ki se inducira v sprejemni tuljavi, nosi informacijo o legi spina. Posamezen spin prispeva k celotnemu signalu sorazmerni del, ki

precesira s frekvenco: $\omega = \gamma B_0 + \gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$. Skupni signal vseh spinov v vzorcu, ki ga zaznamo s kvadraturno detekcijo, lahko zapišemo kot:

$$I(t) = I_0 \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{r} t} d\mathbf{r},$$

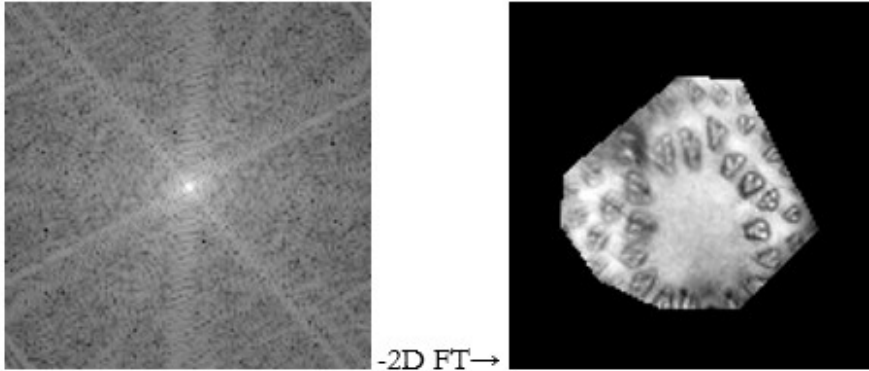
če privzamemo, da je občutljivost sprejemne tuljave po celem vzorcu enaka in številska gostota spinov $\rho(\mathbf{r})$. I_0 je signal, ki bi ga zaznali brez dodatnega nehomogenega polja. S kvadraturno detekcijo iz signala odfiltriramo signal z (visoko) Larmorjevo frekvenco γB_0 .



Slika 2. Osnova slikanja z magnetno resonanco: spini na mestih z različno gostoto magnetnega polja precesirajo z različno frekvenco. Fourierova transformacija signala razkrije porazdelitev spinov po prostoru.

Z definicijo vektorja recipročnega prostora $\mathbf{k} = \gamma \mathbf{G} t$ prepoznamo v prejšnjem izrazu signal ob nekem času $S(t) = S_{\mathbf{k}}$ kot koeficient v razvoju številske gostote spinov v Fourierovo vrsto (slika 2). Če izmerimo koeficiente za dovolj gosto množico različnih \mathbf{k} , lahko z obratno Fourierovo transformacijo rekonstruiramo prostorsko porazdelitev spinov. Pri slikanju izmerimo točke v mreži prostora \mathbf{k} . Ta prostor lahko vzorčimo na različne načine, ki jih izvedemo z ustreznim zaporedjem gradientnih in radiofrekvenčnih polj. Korake med vzorčenimi točkami $\Delta \mathbf{k}$ lahko kontroliramo s časovnim intervalom vzorčenja Δt in spreminjanjem velikosti gradientnega polja $\Delta \mathbf{G}$. S časovnim intervalom vzorčenja določimo vidno polje slike $r_{\text{maks}} \propto \frac{1}{|\Delta \mathbf{k}|}$. Ločljivost slikanja je odvisna od največjega izmerjenega recipročnega vektorja in velikost slikovnega elementa je $\Delta r \propto 1/k_{\text{maks}}$ ter določena s številom vzorčenih točk $N : k_{\text{maks}} = N |\Delta \mathbf{k}|$. S povečevanjem ločljivosti in vidnega polja sta povezana čas meritve in šum signala, tako da so parametri slikanja vedno kompromis med možnimi skrajnimi vrednostmi. Tipična ločljivost slik je velikostnega reda milimetra, a jo lahko s posebnimi tehnikami, ki zaradi dolgega časa slikanja niso primerne za klinično uporabo, povečamo na okoli deset mikrometrov. Čas, ki ga potrebujemo za eno sliko, lahko traja od nekaj desetink sekunde do velikostnega reda ur. Tipične klinične preiskave trajajo eno uro in v tem času naredijo več različnih slik. Za tridimenzionalno sliko moramo vzorčiti tridimenzionalen recipročni prostor, za

dvodimenzionalno sliko pa je dovolj, da vzbudimo spine le v rezini vzorca in v tej rezini vzorčimo v dveh dimenzijah. Sliko, porazdelitev spinov, iz signala dobimo z dvodimenzionalno Fourierovo transformacijo. Primer kaže slika 3.



Slika 3. Primer signala v dvodimenzionalnem recipročnem prostoru \mathbf{k} (levo) in rekonstrukcija slike (desno).

Difuzija

Naključno molekularno gibanje imenujemo difuzija. Pojav je izrazit v tekočinah. Prvi ga je leta 1827 opisal angleški botanik Robert Brown, ki je pod mikroskopom opazoval pelod v vodi in opazil gibanje z naključnim spreminjanjem smeri. Po njem imenujemo tako naključno gibanje tudi Brownovo gibanje. Dinamiko lege delca \mathbf{r} v tekočini z viskoznostjo η opiše drugi Newtonov zakon

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -6\pi\eta R\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F},$$

v katerem prvi člen na desni ustreza viskozni upor, drugi člen pa je naključna sila, ki je posledica trkov z drugimi delci v tekočini. V členu za upor smo privzeli, da je delec okrogel s polmerom R . Ker je sila naključna spremenljivka, se s časom naključno spreminja tudi hitrost telesa $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ in obravnavamo jo lahko statistično. V Brownovem modelu privzamemo, da je pospešek v zgornji enačbi zanemarljiv. Spomnimo, izraz opisuje delec v množici veliko lažjih delcev in posamezni trki le malo spremenijo hitrost. Poleg tega privzamemo, da je časovna ločljivost, s katero opazujemo pojav, dovolj groba, da je naključna sila ob različnih časih popolnoma nekorelirana $\langle F(t)F(t') \rangle \propto \delta(t - t')$, $\delta(t)$ je funkcija delta. Iz zgornje enačbe tako sledi

$$c(t) \propto \delta(t),$$

torej tudi hitrost delca je nekorelirana. Za opis smo uporabili avtokorelacijsko funkcijo hitrosti, ki je statistično povprečje produkta hitrosti ob različnih časih po ansamblu delcev $c(t) = \langle v(t)v(0) \rangle$. Iz avtokorelacijske funkcije hitrosti lahko izračunamo povprečni kvadrat premika delca iz izhodiščne lege ob času t . Če nas zanima le premik vzdolž določene smeri v prostoru, pa naj bo to os x , sledi

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle v_x(t')v_x(t'') \rangle = 2Dt.$$

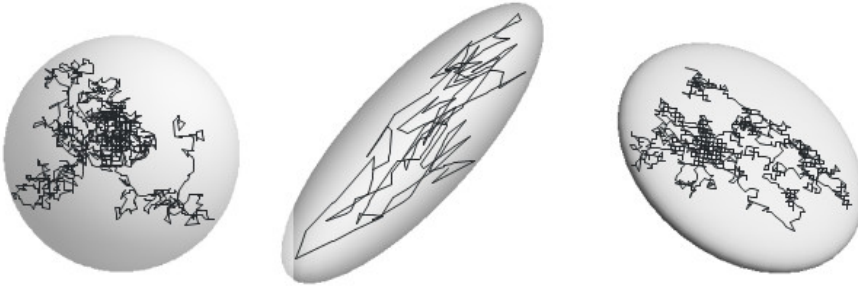
Pri tem vpeljemo difuzijski koeficient $D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$, kjer je k Boltzmannova konstanta, T pa temperatura. Kdor ima rad imena, to je Einsteinova zveza [1]. Povprečni kvadrat premika v določeni smeri je torej sorazmerno času, kar je značilnost naključnih molekularnih gibanj. Če bi opazovali premike v različnih smereh v izbranem časovnem intervalu, bi lahko konstruirali ploskev, katere točke bi bile oddaljene od izhodišča toliko, kot je koren povprečnega kvadrata premika v tisti smeri. V primeru izotropne difuzije bi bila ta ploskev kar sfera. V neizotropni snovi so premiki v določenih smereh večji kot v drugih (slika 4). To upoštevamo tako, da difuzijski koeficient v prvem približku obravnavamo kot tenzor in zveza med kvadratom premika in časom je

$$\langle r_i r_j \rangle = 2D_{ij}t,$$

kjer so indeksi $i, j = x, y, z$.

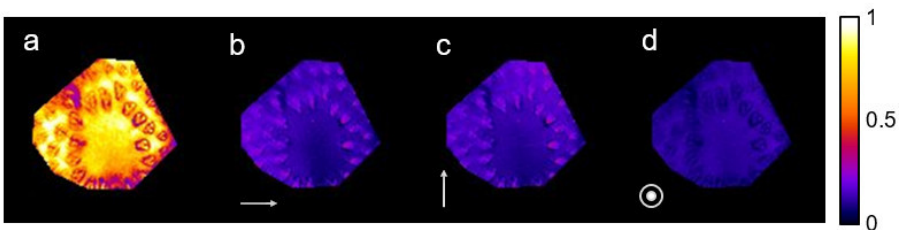
Difuzija je anizotropna, če je anizotropna struktura, v kateri difundira tekočina. Tak primer je struktura živčnih vlaken, ki imajo podolgovato obliko. Vzdolž vlakna je difuzija znatno hitrejša kot prečno na vlakna. Ploskev, ki v prvem približku ustreza anizotropni difuziji, je elipsoid. Če je elipsoid ploščat, je difuzija dominantna v ravnini, če je podolgovat, pa v eni smeri.

Difuzija vpliva na signal magnetne resonance [3]. Vpliv nehomogenega polja na precesijo spinov že poznamo, saj ga uporabljamo za slikanje in je opisan v prejšnjem poglavju. Tudi vpliv difuzije zaznamo preko precesije v nehomogenem polju, difuzijskem gradientu, ki je običajno nekajkrat močnejši od gradientov za slikanje. Spini v močnejšem polju precesirajo hitreje od spinov v šibkejšem in vzorec izgublja koherenco, spini niso več vzporedni in signal slabi. Če v nekem trenutku spremenimo predznak gradienta, bodo spini, ki so bili prej v močnejšem polju in prehitevajo v fazi, zdaj začeli precesirati počasneje, in spini, ki so bili prej v šibkejšem polju, jih bodo po določenem času ujeli v fazi. Ta postopek imenujemo refokusacija spinov in v trenutku, ko se faze spinov ujemajo, nastane spinski odmev. Če se v tem procesu kateri od spinov premakne v polje drugačne gostote,



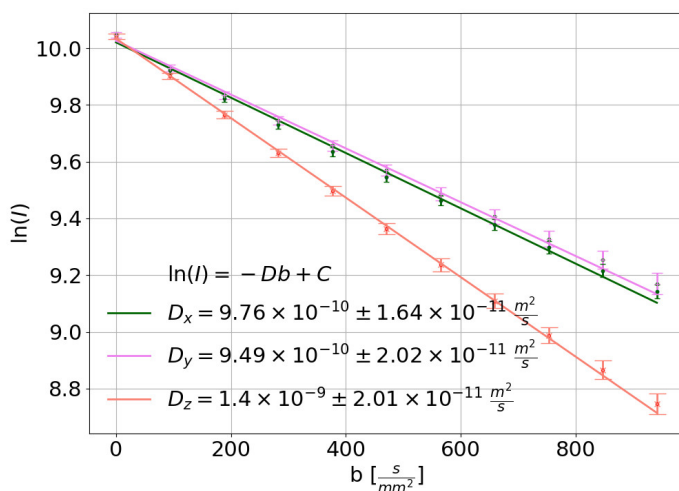
Slika 4. Izotropna difuzija (levo) in anizotropna difuzija (sredina, desno), pri kateri je gibanje v določeni smeri desetkrat hitrejše (sredina) ali počasnejše (desno) kot v nanjo pravokotnih smereh. Narisana je sled delca in difuzijski elipsoid.

se njegova faza v času odmeva ne ujema s fazami preostalih spinov in signal odmeva je šibkejši, kot je bil signal na začetku delovanja difuzijskega gradienta. Difuzija spinov v nehomogenem magnetnem polju torej zmanjša signal, tem bolj, čim večja je difuzija (ki jo opiše difuzijski koeficient D) v smeri difuzijskega gradienta v tem delu vzorca. V podrobnosti se tu ne bomo spuščali, vendar za obravnavo je dovolj, če privzamemo, da je signal vsakega prostorskega elementa vzorca manjši za faktor e^{-bD} . V poskusu na vzorec delujemo z dvema sunkoma gradientnega polja, ki trajata čas δ in med njima poteče čas Δ . Z velikostjo difuzijskega gradienta magnetnega polja G izrazimo faktor $b = \gamma^2 G^2 \delta^2 (\Delta - \frac{\delta}{3})$. S smerjo gradienta določimo, katero komponento difuzijskega tenzorja izmerimo, velikost komponente pa določimo tako, da izmerimo signal pri več vrednostih faktorja b . Primer dvo-dimenzionalne slike brez difuzijskega gradienta in z difuzijskim gradientom v treh različnih, med seboj pravokotnih straneh kaže slika 5.



Slika 5. Slika prečnega preseka šparglja posneta z zaporedjem za slikanje s spinskim odmevom (a) in difuzijsko obtežene slike istega vzorca (b–d) posnete pri enakem času spinskega odmeva in pri faktorju difuzijske obtežbe $b = 860 \text{ s/mm}^2$. Puščice v sliki ponazarjajo smer vklapljenega difuzijskega gradienta. Signal slik je normiran na najvišjo intenziteto in je prikazan v barvni lestvici (desno).

Slike šparglja na sliki 5 jasno ponazarjajo vpliv omejene difuzije na višino signala difuzijsko obteženih slik. Slika 5 a, kjer je bila difuzijska obtežba enaka nič ($b = 0$), ima najvišjo intenziteto signala. Vklon difuzijskega gradienta ($b = 860 \text{ s/mm}^2$) povzroči upad signala, vendar je odvisen od smeri vklopljenega gradienta. Slednje je posledica strukture šparglja in z njo povezanega pojava omejene difuzije. Špargelj ima izrazito vlaknasto strukturo. Njegova vlakna so dolga in tanka, kar ima za posledico »ujetost« vodnih molekul v prostoru med vlakni. Vodne molekule se tako lažje in izraziteje difuzijsko gibljejo vzdolž vlaken kot pa v smeri prečno na vlakna. Ta pojav je viden tudi na izmerjenih difuzijsko obteženih slikah. Tako je signal na sliki 5 d nižji kot na slikah 5 b, c. To lahko razložimo s tem, da smo pri sliki 5 d imeli vklopljen difuzijski gradient v smeri vlaken in smo tako merili hitrejšo (manj omejeno) difuzijo in tako dobili manj signala kot pri slikah 5 b, c, kjer je imel difuzijski gradient prečno smer glede na vlakna in smo s tem merili počasnejšo (bolj omejeno) difuzijo in s tem dobili več signala. Slike so bile posnete pri parametrih $\Delta = 42 \text{ ms}$, $\delta = 2 \text{ ms}$ in času spinskega odmeva 47 ms .



Slika 6. Graf prikazuje logaritem MRI signala šparglja v odvisnosti od faktorja difuzijske obtežbe za tri paroma pravokotne smeri difuzijskega gradienta. Smeri x in y sta bili pravokotni na smer vlaken v šparglju, smer z pa je bila vzporedna s smerjo vlaken v šparglju.

Slika 6 kaže meritev povprečne difuzijske konstante za difuzijo vode v šparglju za tri različne smeri merjenja difuzije. V vsaki od smeri je bil signal izmerjen pri enajstih različnih faktorjih difuzijske obtežbe (različne vredno-

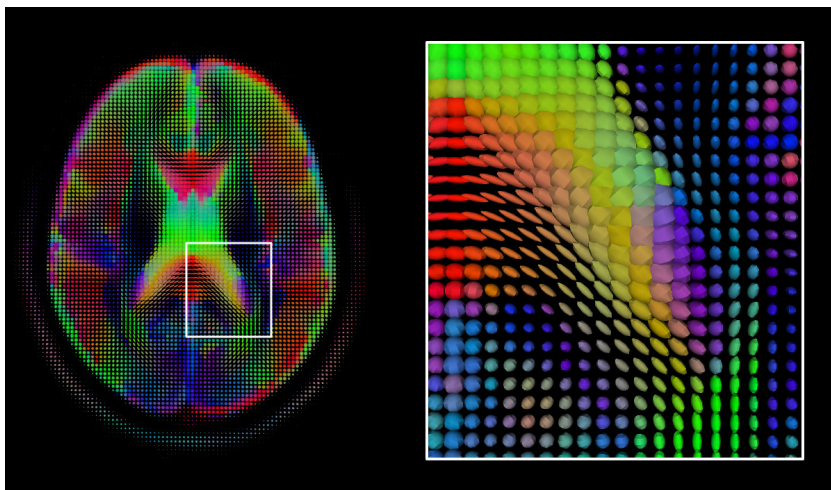
sti G). Iz grafa, ki prikazuje logaritem signala v odvisnosti od difuzijske obtežbe, lahko vidimo, da izmerjen signal I v vseh treh smereh dobro sledi zvezi $I \propto e^{-bD}$, kar omogoča natančen izračun difuzijske konstante za vsako od smeri. Rezultat potrди naša opažanja v sliki 5, saj dobimo v x in y smeri difuzijsko konstanto približno enako veliko, a je ta po velikosti za približno 45 % nižja od difuzijske konstante, ki pripada smeri z . Meritve so bile izvedene pri parametrih $\Delta = 82$ ms, $\delta = 2$ ms in času spinskega odmeva 85 ms. Vse prikazane meritve na vzorcu šparglja so bile posnete in obdelane v Laboratoriju za slikanje z magnetno resonanco na Institutu Jožef Stefan.

Opomniti je tudi treba, da na zaznavanje omejene difuzije poleg strukture vzorca vpliva tudi časovni interval Δ , to je čas, ki označuje razmak med sredinama obeh gradientnih sunkov v zaporedju za difuzijsko obteženo slikanje. Če je čas δ zelo kratek, omejene difuzije ne bomo mogli zaznati, tudi v primerih, ko ima vzorec strukturo, ki omejuje difuzijo. Konkretnjeje, zamislimo si omejeno geometrijo, kjer mora vodna molekula v povprečju prepotovati razdaljo a v smeri vklopljenega gradienta, da naleti na prvo oviro. To se bo zgodilo v času $\frac{a^2}{2D}$. Če je $\Delta \leq \frac{a^2}{2D}$, očitno omejene difuzije ne bomo mogli zaznati, saj se bodo v tako kratkem času opazovanja vodne molekule obnašale kot povsem proste. Omejeno difuzijo bomo lahko torej zaznali v primerih, ko je $\Delta \approx \frac{a^2}{2D}$ ali pa večji.

Zaključek

Traktografija je metoda določanja poteka snopov živčnih vlaken in s tem povezav funkcionalnih delov v možganih [2]. Metoda temelji na difuzijsko uteženem slikanju, ki pa ga ponovimo vsaj šestkrat z različno usmerjenimi gradienti, da lahko določimo glavne osi difuzijskega tenzorja. Po razliki lastnih vrednosti difuzijskega tenzorja sklepamo na anizotropnost difuzije, lastni vektor v smeri največje lastne vrednosti je tangenta na smer snopa živčnih vlaken v opazovanem prostorskem elementu. Smeri vlakna zgolj s slikanjem z magnetno resonanco ne bi mogli ugotoviti, saj je struktura mikroskopska, manjša od ločljivosti metode. S posebnimi računalniškimi programi lahko prostorsko informacijo o difuzijskem tenzorju predstavimo kot sliko z množico vlaken, kot je slika na naslovnici, ki predstavlja sliko difuzijskega tenzorja človeških možganov. Narisani so šopi vlaken, ki tečejo skozi sredinsko sagitalno ravnino. Izstopajo vlakna v obliki črke U, ki povezujejo hemisferi skozi kalozni korpus (vlakna izstopajo iz ravnine slike in se nato ukrivijo navzgor) in šopi vlaken, ki se spuščajo proti hrbtenici (modro, znotraj ravnine slike). Namesto z vlakni lahko rezultate merjenja predstavimo z množico difuzijskih elipsoidov kot na sliki 7.

Posebej zanimivi so deli, kjer se vlakna stikajo ali pa križajo brez stika. Opisani model meritve v tem primeru odpo ve. Približek difuzije s tenzorjem



Slika 7. Predstavitev traktov človeških možganov z množico difuzijskih elipsoidov [6]. Iz dvodimenzionalne slike lahko razberemo le vrednosti difuzije v ravnini, z barvnim kodiranjem pa lahko predstavimo tudi vrednost v smeri pravokotno na ravnino slike. Na sliki z odtenki sive, bolj bela pomeni večjo vrednost D v smeri pravokotno na ravnino slike.

je preveč preprost, pomagamo si lahko z dvema difuzijskima elipsoidoma, vseeno pa ne ločimo med opisanimi primeroma – stikom ali križanjem. Na tem področju potekajo intenzivne raziskave.

Traktografija omogoča prepoznavo tudi nekaterih patoloških procesov. Travma, tumor ali vnetje lahko vplivajo na mielin (ovojnico vlaken) ali strukturo aksona tako, da se anizotropija difuzije zmanjša. Vsekakor je traktografija z difuzijsko uteženim magnetnoresonančnim slikanjem pomembna metoda za raziskovanje delovanja možganov.

LITERATURA

- [1] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik. 322 (8), (1905), 549–560.
- [2] Y. Masutani, S. Aoki, O. Abe, N. Hayashi in K. Otomo, *MR diffusion tensor imaging: recent advance and new techniques for diffusion tensor visualization*, European Journal of Radiology **46** (2003), 53–66.
- [3] E. O. Stejskal in J. E. Tanner, *Spin Diffusion Measurements: Spin Echoes in the Presence of a Time-Dependent Field Gradient*, Chem. Phys. **42** (1965), str. 288.
- [4] J. Stepišnik, *Slikanje z jedrsko magnetno resonanco v medicini*, Obzornik mat. fiz., **34** (1987), 169–177.
- [5] I. Zupančič, *Jedrska magnetna resonanca*, Obzornik mat. fiz., **6** (1958), 120–132.
- [6] upload.wikimedia.org/wikipedia/en/b/b7/DiffusionMRI_glyphs.png, avtor: Tucania, CC BY-SA 3.0. ogled 29. 8. 2019.

MaRS 2019

Od 28. julija do 3. avgusta letos je potekal že štirinajsti tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). MaRSovci smo se zbrali na Pohorju, natančneje v Centru šolskih in obšolskih dejavnosti Planinka. Pri organizaciji tabora je sodelovalo 10 mentorjev: dr. David Gajser, profesor na II. gimnaziji Maribor, Simon Brezovnik, doktorski študent matematike na FNM UM, Rok Havlas, magistrski študent matematike na FMF UL, Žan Hafner Petrovski, Petra Podlogar, Jakob Jurij Snoj, Nejc Zajc in Tjaša Vrhovnik vsi dodiplomski študenti matematike na FMF UL, Klara Drogenik, dodiplomska študentka računalništva in matematike na FMF in FRI UL ter Jakob Svetina, dodiplomski študent finančne matematike na FMF UL. Tabora se je udeležilo 25 dijakinj in dijakov, med njimi tudi dijak iz Makedonije.

Osrednja aktivnost tabora so bili, kot vsa leta doslej, MaRSovski projekti. Mentorji (posadka) smo pripravili devet matematičnih tem, ki so jih udeleženci raziskovali v skupinah po dva ali tri – vsaka skupina svojo



Skupinska slika.

temo. Vsak dan smo nekaj ur namenili delu na svojem projektu. To delo je poleg reševanja matematičnih problemov vključevalo pisanje krajšega sestavka, izdelavo morebitne računalniške aplikacije in pripravo predstavitve projekta. Slednja je bila izvedena na zaključnem dogodku tabora – pristanku, na katerega so bili vabljeni tudi starši udeležencev. Naslovi projektov: MaRSovska geometrija, Konstruktibilna števila, Eliptične krivulje, Verižni ulomki, Cayleyjev izrek, Polyeva teorija, Centralni limitni izrek, Ulovimo lopova!, Teorija odločanja. Več informacij o projektih najdete na spletni strani mars.dmfa.si/projekti/.

Tri dni je bil z nami na MaRSu dr. Primož Moravec, FMF UL, ki je pripravil tri dvourne delavnice z naslovom Grupe v praksi (in teoriji). Spoznali smo se z grupami, podgrupami, ukvarjali smo se s permutacijami, rotacijami in simetrijami množic. Nazadnje smo spoznali še preslikave med grupami, govorili smo o delovanju grup na množicah, orbitah in stabilizatorjih, ter si ogledali več zgledov.

Tri večere so nam popestrili vabljeni predavatelji. V nedeljo se nam je preko Skypea oglasila dr. Marinka Žitnik, podoktorska raziskovalka na Univerzi Stanford. Predavala je o umetni inteligenci in analizi velikih po-



Delovno vzdušje na delavnici dr. Moravca.

datkov, kar je tudi njeno raziskovalno področje. Razlagala nam je o strojnem učenju, predstavitvi podatkov s pomočjo omrežij in grafov ter razložila nekaj algoritmov strojnega učenja. Razlago je popestrila s primeri na konkretnih podatkih, npr. določanju potencialnih prijateljev na družbenih omrežjih in uporabo v medicini. V ponedeljek smo prisluhnili dr. Bojanu Moharju iz Univerze Simona Fraserja v Kanadi, ki je predaval o risanju grafov in prekriznih številih. Ker so se nekateri tokrat prvič srečali z grafi, smo že čez dan razmišljali o nalogah o grafih, ki jih je za nas pripravil gost. Na predavanju smo spoznali še hipotezi Hilla in Turána, ki kljub enostavni formulaciji ostajata nerešeni. Kot zadnji večerni predavatelj pa je v četrtek pred dijake stopil dr. Iztok Banič iz FNM UM. Pri predavanju smo spoznavali odprte in zaprte množice ter se seznanili s topologijo kot pomembno matematično vejo.

Med strokovnim delom programa MaRS 2019 omenimo še delavnici \LaTeX in Python, ki ju je vodil Nejc.

Kljub napornemu urniku je bilo vzdušje na taboru izjemno. V prostem času smo se igrali razne družabne igre, bil je čas za sprehode, igranje košarke ... Vsak dan je bil objavljen problem dneva, s katerim smo si proste urice krajšali tako posadka kot udeleženci. Enkrat smo se podali na pohod do Bellevueja, kjer smo uživali v razgledu na Maribor in okolico. V četrtek je bila pripravljena tradicionalna Velika MaRSovska avantura, orientacijski pohod z osmimi kontrolnimi točkami, na katerih so ekipe reševale različne matematične in praktične probleme. Zmagovalna ekipa je prejela veliko MaRSovsko čokolado, ki jo je že tradicionalno sponzorsko pripravila Čokoladnica Carniola.

V petek zvečer smo na tabor povabili še stare MaRSovce, to je tiste, ki so že kdaj bili na tem taboru. Pripravili smo piknik, na katerem so se bivši MaRSovci lepo zlili z letošnjimi.

MaRS 2019 je imel ogromno finančno podporo v projektih RaST in SKOZ, ki ju financirata Republika Slovenija in Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada. Projekt RaST izvaja II. gimnazija Maribor za dijakinje in dijakke kohezijske regije Vzhodna Slovenija, projekt SKOZ pa izvaja Gimnazija Vič za dijakinje in dijakke kohezijske regije Zahodna Slovenija. Finančno nas je podprla tudi FNM UM, vodjo delavnic pa je prispevala FMF UL. Zahvala gre seveda tudi DMFA Slovenije za logistično in finančno podporo.

David Gajser

Mere, merska reforma in nekaj zgodovine v Močnikovih učbenikih

Doktor Franc Močnik, rojen leta 1814 v Cerknem, je pisal in posodabljal matematične učbenike za osnovne in srednje šole več desetletij. Knjige so prevedli v številne jezike in so doživele skoraj neverjetno število izdaj. V tem času je moral Močnik upoštevati več reform na področju mer in tudi denarja. Najpomembnejši je bil gotovo prehod na metrični sistem leta 1871.

Leta 1874 je izšla Močnikova knjiga z naslovom: »*Nova avstrijska MERA IN VAGA*, Knjižica slovenskim šolam v porabo. Spisal dr. vitez Franc Močnik«.

Knjižico imamo po zaslugi Zvonka Perata skupaj z več Močnikovimi računicami ponatisnjeno v zbirki *Metodika matematike za slovenske ljudske šole* [7].

Najprej Močnik opiše zgodovinski razvoj mer v Avstriji. Opazimo lahko, da se dolgo zakonodajalci niso drznili kaj preveč posegati v tradicionalne mere in so jih le natančneje definirali. Vsekakor pa so želeli s poenotenjem nadomestiti množico lokalnih mer, ki so odražale nekdanjo fevdalno razdrobljenost avstrijskega cesarstva (in samovoljnost krajevnih oblastnikov).

Dunajski seženj = 6 dunajskih čevljev po 12 palcev je bil že z določbo od 19. avgusta 1588. l., in **dolnje avstrijski vagan** = $1 \frac{9471}{10000}$ kubičnih čevljev s patentom od 9. decembra 1687. l. vpeljan.

Nemško ime za **seženj** je *Klafter*, kar so poslovenili tudi v *klaftera* in je meril približno 1,9 metra. **Čevelj** je meril približno 316,1 mm. **Vagan** (nemško *Metzen*) je imel približno 61,5 litra in so ga delili na 16 **meric** (nemško *Massel*) po približno 3,8 litra. Vagan je bil prostorninska mera za suhe stvari, denimo žito.

Marija Terezija je leta 1756 izvedla nekaj dodatnih reform. Kot piše Močnik:

... s tem patentom je bil vpeljan tudi **dunajski vatel** (*Wiener Maßelle*) = 2,46 dun. čevlja kot mera za krojno blago¹, **dolnje avstrijski bokal** (*Maß*) = $77 \frac{4144}{10000}$ kub. palcev, po 40 na **vedro** (*Eimer*), približno 56,6 litra, kot posodna mera za tekočine ... Kar se tiče poljske mere, je bil ustanovljen **avstrijski oral** (*Joch*) po 3 vagane nasetve = 1600 □ sežnjev.

¹Spomnimo se na Prešerna: »meri platno, trak na vatle«.

Poleg matematične definicije (1600 kvadratnih sežnjev), kar je približno 5755 m^2 , je patent celo navedel, koliko semena naj bi porabili na oral! (Liter pšenice ali rži tehta okrog 0,75 kg, liter ječmena malce manj, liter ovsa približno 0,5 kg. Tri vagane pšeničnega semena na oral je torej približno 240 kg na hektar. Priporočilo Marije Terezije je povsem v skladu z današnjo setveno normo za pšenico, ki je 180–300 kg na hektar.)

Britanski zdravnik Richard Bright je potoval v začetku 19. stoletja po Avstriji. V knjigi [1] je objavil vrsto podatkov avstrijskih soavtorjev o kmetijski proizvodnji v letu 1789. Potrjuje, da je norma za setev žit bila tri vagane zrnja na oral. Takrat je Kranjska imela približno 258 tisoč oralov orne zemlje – to je približno 1500 kvadratnih kilometrov, od tega je bilo pod žiti 172 tisoč oralov, kar je približno tisoč kvadratnih kilometrov. Kranjska naj bi pridelala v letu začetka francoske revolucije okrog 257 tisoč vaganov pšenice (po knjigi natančno 256918). To lahko preračunamo kot približno 12 tisoč ton pšenice. K temu dodajmo še približno 11 tisoč ton rži, 15 tisoč ton ječmena in 25 tisoč ton ovs, ki je slovel kot najboljša hrana za konje. To pomeni v povprečju manj kot 700 kg žit na hektar. Nekatere druge avstrijske pokrajine so imele do 25 odstotkov višje pridelke. Leto 1789 menda ni imelo kakih vremenskih ali drugih katastrof, ki bi vplivale na pridelek (in ki so sicer pogosto povzročale pomanjkanje hrane in lakoto po Evropi še v devetnajstem stoletju).

(Danes imamo v celi Sloveniji 1754 kvadratnih kilometrov njiv, torej le 17 % več, kot jih je imela samo Kranjska leta 1789. Pridelek pšenice pa je od 3 do 8 ton na hektar. Cel ekološke kmetije v povprečju pridelajo slabe 4 tone pšenice na hektar. Pričakovani pridelek ječmena in rži je pri nas čez 4 tone na hektar, ovs več kot 3 tone na hektar. Pridelki žit na enoto njivske površine so se torej v primerjavi s časom pred 230 leti pomnožili vsaj s faktorjem pet. V Sloveniji smo leta 2018 po [11] pridelali med drugim 122 tisoč ton pšenice in pire, 88 tisoč ton ječmena, 5 tisoč ton rži in soržice (mešanice rži in pšenice), 3 tisoč ton ovs in 350 tisoč ton koruznega zrnja.)

Vrnimo se k meram iz časa Marije Terezije. Dunajski (dolnjeavstrijski) bokal je meril malce več kot 1,4 litra.

Te mere so se do konca osemnajstega stoletja uveljavile kot uradne mere na območju nemško govorečih avstrijskih dežel in na Madžarskem. Ni se takoj posrečila uveljavitev tega standarda na Češkem, kjer so dolgo vztrajali pri *rimskem čevlju*. Po Močniku so šele 1858 to postale uradne mere v vsem cesarstvu, z izjemo Lombardsko-beneškega kraljestva, ki pa ga je Avstrija 1866 dokončno izgubila. Tudi v deželah, kjer so živeli Slovenci, so, kot bomo

videli, še dolgo uporabljali pravo zmešnjavo starih mer.

Na internetu najdemo zanimiv zgodovinski vir iz devetnajstega stoletja. To je *Domač koledar za leto 1860* [2, str. 58–59], ki ga je napisal Peter Hitzinger, »farnik postojnski«. Ta postojnski župnik, po rodu Nemeč iz gorenjskega Tržiča, je bil zelo plodovit pisec v slovenskem in nemškem jeziku. (Med drugim je napisal v nemščini *Zgodovino Idrijskega rudnika* in vanjo vključil načrt rudnika [3].) V koledarju najdemo poglavje *Mere in tehte*. Razdelek *Votle mere za suhe stvari* ima pod naslovom *Avstrijske postavne mere* recimo:

Vagan, dunajski ... 8 osmink.

Pod naslovom *Druge mere* v Domačem koledarju najdemo med drugim:

<i>Mernik, novi krajnski</i>	...	0,500 dunajskega vagona
<i>Mernik, stari krajnski</i>	...	0,437 dunajskega vagona
<i>Mernik, stari celjski</i>	...	0,432 dunajskega vagona
<i>Polovnik, tržaški</i>	...	0,401 dunajskega vagona.

V Pleteršnikovem (Wolfovem) *Slovensko-nemškem slovarju* iz leta 1895 pa je *polovnik* definiran kot pol mernika, tj. četrtna vagona ali dobrih 15 litrov, kar je le dobrih 62 odstotkov tržaškega polovnika! Človeka začne ob tem boleti glava! Ampak tradicija se težko poslovi. Uporabe mernika (verjetno novega kranjskega?) pri merjenju količine žita se je spominjala še moja mama, ki se je rodila v dvajsetih letih dvajsetega stoletja v okolici Ljubljane. Prav tako se je spominjala uporabe oralja (ponekod imenovanega tudi joh) kot mere za zemljišča. Omenila je tudi *klaftro drv*. Tako kot avstrijski oral je bila klaftra drv vsaj točno in nedvoumno definirana. Klaftra ali seženj drv je bila skladovnica z dolžino dveh klafter in višino pol klaftre, napolnjena s pol klaftre dolgimi kosi lesa. Šlo je torej za pol kubičnega sežnja ali približno 3,4 kubičnega metra drv. Kot nas pouči Marta Zabret v knjigi [12, str. 76–77], so nekateri pri ustvarjanju take skladovnice znali biti ustvarjalni:

Thinska klaftra je naložena tako, da klobuk, ki ga po dolgem zaženemo skozi klaftro, nemoteno prileti na drugo stran.

S starimi merami sem se srečal, ko sem sorodniku pomagal pri njegovi knjigi [6] o zgodovini in posebnostih štirih vasi na tržaškem Krasu. Oglejmo si tile dve zgodbi.

Leta 1821 se je devinski župnik in dekan pritožil, da mu 13 posestnikov iz kraške vasi Mavhinje in 23 posestnikov iz sosednje vasi Cerovlje dolguje 36 voz drv za leta 1817–1819. Naslednji dan je Komisarjat iz Devina že obvestil krajevnega zaupnika Janeza Terčona, da morajo prebivalci letno pripeljati v dekanijo 18 vozov drv. Štiri vozove pa morajo dati zakupniki cerkvenih zemljišč. »Upravna enota« je vsekakor delovala v tem primeru zelo hitro. Samo ugibamo lahko, koliko drv je pomenil en voz. Po nemški literaturi iz začetka devetnajstega stoletja naj bi na dvoosni voz šlo kake tri kubične metre lesa.

Šest voz drv in tri vozove sena so letno poleg desetine, tlake in nekaterih drugih dajatev do leta 1558 morali tržaškemu škofu dajati tudi prebivalci Lipice [4, str. 51]. Kot pa se spomnim iz svoje mladosti, je polno naložen voz sena imel bistveno večjo prostornino kot voz drv in je bilo zaradi visokega težišča treba paziti, da se ne prevrne.

Sorodnik je našel tudi podatke za *biro* ali *bero*, to je letno dajatev v naravi za duhovnika v vasi Mavhinje osem desetletij kasneje, leta 1903. Dajatev v naravi je bila za revne kmete ugodnejša, saj je bilo denarja pri hišah malo. Domačija mojih prednikov je morala dati $1\frac{1}{2}$ mere žita, $\frac{1}{2}$ mere ječmena. Povrhu pa še 20 bokalov vina. Očitno je sodila med »premožnejše«, saj so bile za skoraj vse druge hiše dajatve nižje. Kaj je bila ta stara mera za žito: mernik (kateri?), merica, polovnik? Kot sem videl v literaturi, imajo tudi zgodovinarji težave z rekonstrukcijo številnih starih mer. Dvajset bokalov je zneslo 28,3 litra.

(Dokument iz leta 1903 ne omenja več drv. Fotografije nabrežinskega Krasa iz tistih časov kažejo bolj ali manj golo krajino, po kateri je pustošila burja, tako da je bilo verjetno težko še kaj posekati.)

Strahotna zmešnjava mer je bila pred letom 1865 tudi v mednarodnem merilu. Kot pravi Močnik:

Da si ravno je bila sestava mer in uteži posameznih držav natanko in znanstveno utemeljena, vendar je ostala še zmerom velika napaka, da je skoraj vsako ljudstvo imelo svoje posebnosti pri meri in vagi.

Franc Močnik v svojem učbeniku [8] iz leta 1848 navaja več kot 30 raznih *čevljev* kot dolžinskih enot. Merili so od približno 28,3 cm (na Saškem in v Španiji) do 34,8 cm v Benetkah. Po Wikipediji je bila spodnja meja za *čevlj* celo 25 cm (v nemški deželi Hessen).

Podobno je bilo z *oralom*. Ta prastara mera je pri Rimljanih merila približno četrta hektara, na Bavarskem približno 0,37 hektara, v Avstriji,

kot smo videli, več kot pol hektara, v ZDA pa je *oral (acre)* približno 0,4 hektara.

Močnikove obsežne tabele starih mer kot ilustracijo ponatiskujeta tako nemška kot angleška Wikipedia v ustreznih poglavjih o starih merskih sistemih. Nekateri dežele, kot npr. večina švicarskih kantonov in nemški Baden, so takrat (1848) že uporabljale hibrid starih in metričnih enot, tako da je *čevelj* meril natančno 30 cm. Kot upravičeno pravi Močnik:

Koliko truda in časa bi se bilo lahko prihranilo pri trgovanju in navadnem občenju, koliko manj zmešnjav bi se bilo zgodilo v računskih zadevah in tudi manj ljudi prevarilo, ako bi bile imele vse države enake mere in vage!

Močnik ima v svoji knjigi podrobno opisan nastanek metričnega sistema in odločilno vlogo matematikov in astronomov pri tem:

...; v tej komisiji so bili tedajni sloveči matematikarji *Borda, Lagrange, Laplace, Monge* in *Condorcet*.

Za merjenje dolžine zemeljskega poldnevnikarja, kar naj bi bila podlaga za dolžinsko enoto, sta bila zadolžena »zvezdoznanca« *Jean-Baptiste Delambre* in *Pierre Méchain*.

Ampak leta 1794 so se zadeve zaostriale:

Izvrstni udje teh komisij: *Borda, Lavoisier, Laplace, Coulomb, Brisson* in *Delambre*, bili so odstavljene od glasovitega »odbora za občno srečo«, ker odbor ni imel zadostnega zaupanja do njihovega republikanskega mišljenja in njihovega sovraštva do kralja. *Lavoisier* je bil celo ob glavo djan.

Antoine Lavoisier je bil neutrujen in natančen raziskovalec, genij, ki je utemeljil kemijo kot znanost.

Delo okrog metričnega sistema je bilo končano šele leta 1798. »Široki ljudski sloji« tudi v Franciji novega sistema večinoma niso sprejeli. Sam Napoleon I. Bonaparte je imel nekoliko zaničljivo mnenje o metričnem sistemu in je raje modificiral nekatere stare mere na podlagi metričnega sistema. Sicer pa je metrični sistem v Franciji postal obvezen šele leta 1840.

Metrični sistem so z navdušenjem sprejeli znanstveniki in – vsaj v celinski Evropi – tudi tehniki. Pri nas je Jurij Vega bil velik zagovornik metričnega sistema, a ta v avstrijskem cesarstvu ni bil sprejet še sedem desetletij.

Leta 1875 je bila v Parizu podpisana **Mednarodna metrična konvencija**. K njej je pristopilo 17 držav. Metričnemu sistemu je bila na ta način omogočena razširitev po vsem svetu.

V Veliki Britaniji iz prestižnih razlogov dolgo niso hoteli slišati za metrični sistem in še zmeraj ponekod uporabljajo svoj »imperialni sistem enot«, denimo pri točenju piva. Tako je leta 2008 občinska inšpekcija zagrozila z globo lastniku poljske restavracije, ki je prodajal pivo v litrskih vrčkah. Sam predsednik britanske vlade je moral opozoriti birokrate, da imajo verjetno kako pametnejše delo, kot je preganjanje litrskih posod. Šele potem je bil, tudi zaradi članstva Združenega kraljestva v Evropski uniji, postopek ustavljen.

ZDA, ki so bile v devetnajstem stoletju trgovinsko in tudi sicer zelo vezane na Britanijo, kasneje pa so lahko zaradi svoje moči dosegle, da so se drugi morali prilagajati njim, še vztrajajo pri svojem povsem zastarelem sistemu, ki temelji na britanskem imperialnem sistemu. Danes so, poleg Liberije in Mjanmara (Burme) edine, v katerih metrični sistem ni obvezen, čeprav uporaba počasi narašča. Npr.: ameriška avtomobilska in druga industrija uporablja le metrične vijake in v poslih z zvezno vlado ZDA morajo podjetja skoraj obvezno uporabljati metrični sistem.

Močnikovi učbeniki skoraj dosledno uporabljajo le avstrijske uradne mere, in to samo tiste najbolj pomembne. Izjema je problematični *mernik*, ki nastopa v Močnikovi *Računici za slovenske šole na deželi v avstrijskem cesarstvu* iz leta 1859, a – kolikor sem opazil – le v povezavi z denarjem, tako da natančna vrednost mernika niti ni pomembna. Pred uvedbo metričnega sistema se je Močnik, kot smo že rekli, omejeval na najbolj pomembne mere in se, kolikor sem opazil, ni preveč ukvarjal s pretvarjanjem večjih starih enot v manjše in obratno. Verjetno je predvideval, da bo vse to kmalu pristalo v ropotarnici zgodovine.

Močniku je bila očitno prioriteta znanje računstva in matematike.

Naslednja njegova želja pa je bila vzgoja gospodarnih, razgledanih in odgovornih posameznikov. Veliko je nalog, v katerih nastopa poleg dobička tudi izguba – zaradi toče in pozebe v kmetijstvu ali smole pri trgovanju. V računicah imamo obrazce za letni ali mesečni obračun stroškov in dohodkov – za gospodinjstvo, za kmetijo itd. Imamo tudi poslovne načrte za obrtniško delavnico, za drevesnico ... Podobno znanje bi bilo zaželeno tudi danes.

Prehod Avstrije na metrični sistem leta 1871 je Močnika postavil pred manjši izziv. V knjigah, ki so izšle malo pred tem, je enostavno navedel naloge tako s starimi kot z novimi merami. Uradno navodilo je bilo, da

pred uvedbo uporabljajo stare, po uvedbi nove mere.

V metodičnih navodilih je Močnik krasno navedel, s kakšnimi modeli in metodami naj učitelji ponazorijo nove mere. Pretvarjanje starih mer v nove je bilo v drugem planu. Vseeno je njegova razlaga jasna in nedvoumna. To ne bi mogli reči za sočasne zapise v nekaterih drugih slovenskih tiskih. Poglejte si recimo navodila za pretvorbo [10] v stanovskem glasilu pedagogov *Učiteljski tovariš* iz leta 1875, pa boste lažje razumeli, kako je Močnik štrlel daleč ven iz povprečja.

Močnik kot prednost novega sistema poudarja:

Dalje je tudi to posebno važno, da so nova imena vzeta iz tako imenovanih mrtvih jezikov (latinskega in grškega jezika). To bo gotovo pripomoglo, da se nova mera in vaga v kratkem vpelje med vse izobražene narode. Posebno važno je pa še to za naše cesarstvo, v katerem se po posameznih kronovinah in deželah toliko različnih jezikov govori, da ne bo treba novih imen v vsak jezik posebej predstavljati, pa tudi ne posameznih narodov žaliti s tem, da bi se jim kak drugi živeči jezik vsiljeval.

Ko smo že pri primerjavah s starimi časi, navedimo še en pretresljiv podatek iz drugega življenja Močnikovih knjig. Predelava [9] srednješolskega Močnikovega učbenika iz leta 1910 vsebuje precej verjetnostnega računa, statistike in aktuarske matematike. S tabelami umrljivosti nas opozori, da je Avstrija (in kasneje Avstro-Ogrska) v devetnajstem stoletju imela eno najvišjih stopenj umrljivosti dojenčkov v takratni Evropi: do prvega leta starosti je umrlo med 25 in 31 odstotkov novorojenih. Ta žalostni rekord je Avstro-Ogrska delila z Nemčijo in Rusijo. Stanje se je začelo izboljševati na prehodu v novo stoletje. Mimogrede, po Unicefovi študiji [5, str. 71–92] sta imeli večino devetnajstega stoletja Kranjska in Štajerska (skupaj z goratima Tirolsko in Predarlškim) nižjo umrljivost dojenčkov (22–24 %) kot Spodnja Avstrija z Dunajem (24–34 %) ², vendar še zmeraj zelo visoko v primerjavi z Norveško in Švedsko, kjer je bila umrljivost najnižja v Evropi in je znašala »le« okrog 10 %. Za primerjavo: leta 2017 je v podsaharski Afriki do prvega leta starosti umrlo pet (5) odstotkov otrok.

²V hribovitih pokrajinah je bilo veliko čiste pitne vode, tako da so se kolera, tifus, griža ... teže širili. Otroci so bili v kmečkih družinah tudi cenjena delovna sila. Na Dunaju se je stanje izboljšalo, ko so materam začeli deliti bone za mleko.

LITERATURA

- [1] R. Bright, M. D., J. Sennowitz in J. F. Blumenbach, *Travels from Vienna Through Lower Hungary: With Some Remarks on the State of Vienna During the Congress, in the Year 1814*, A. Constable and Co., Edinburgh 1818, 624 str., dostopno na archive.org/details/travelsfromvienn00brig/page/n751, ogled 5. 7. 2019.
- [2] P. Hitzinger, *Domač koledar slovenski za prestopno leto 1860*, J. Giontini, Ljubljana, 1859, dostopno na www.rutars.net/sr_01_stefan_rutar/sr_2400_kultzadeve/sr_2499_koledards/kut_99_037.htm, ogled 5. 7. 2019.
- [3] P. Hitzinger, *Das Quecksilber-Bergwerk Idria. Von seinem Beginne bis zur Gegenwart. Nach Schriften des Bergwerks-Archives und anderen Quellen. Mit einem Plane des Bergwerkes*, Laibach 1860.
- [4] N. Kerševan, M. Stanonik, K. Marc Bratina, D. Kerševan in M. Piko-Rustia, *Vekuli riti u garžet: folklorne in spominske pripovedi s Kraškega roba do Brkinov, Sežane in Razdrtega*, Založba ZRC SAZU, Ljubljana 2016.
- [5] J. Kytir in R. Münz, *Infant mortality in Austria – 1820–1950*, v P. P. Viazzo, C. A. Corsini urednika, *The Decline of Infant Mortality in Europe, 1800–1950: Four national case studies*, Unicef – Istituto degli Innocenti, Firenze, 1993. Dostopno na www.unicef-irc.org/publications/32-the-decline-of-infant-mortality-in-europe-1800-1950-four-national-case-studies.html, ogled 5. 7. 2019.
- [6] I. Legiša, *Mahinje, Cerovlje, Vižovlje, Sesljan, Vasi, življenja in navade vaščanov*, Samozaložba, Vižovlje 2013, 414 str.
- [7] Dr. F. vitez Močnik: *Metodika matematike za slovenske ljudske šole*, Jutro, Ljubljana – Cerkno 1997, uredil Zvonko Perat (Prosvetna knjižnica).
- [8] Dr. F. Mozhnik, *Lehrbuch des gesammten Rechnens für die vierte Classe der Hauptschulen in den k.k. Staaten*. Im Verlage der k. k. Schulbücher Verschleiß-Administration bey St. Anna in der Johannsgasse, Wien 1848.
- [9] F. Močnik in K. Zahradniček, *Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die V.–VII. Klasse der Realschulen. Bearbeitet von dr. Karl Zahradniček*, 30. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage, F. Tempsky, Wien 1910.
- [10] *Nova (meterska) mera in utež*, Učiteljski tovariš 15 (9), 01. 05. 1875, str. 135, dostopno na www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:doc-HRFX048V, ogled 5. 7. 2019.
- [11] Republika Slovenija, Statistični urad: *Rastlinska pridelava*, Slovenija, 2018, dostopno na www.stat.si/StatWeb/News/Index/8007, ogled 5. 7. 2019.
- [12] M. Zabret, *MaRtematične prigode*, DMFA–založništvo, Ljubljana 2017, 145 str.

Peter Legiša

G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications INC., Mineola, New York 2007, 267 strani.

Knjiga *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* (na kratko »*Ars Magna*«, prva izdaja 1545, druga izdaja 1570, tretja izdaja 1663) velja poleg Kopernikove *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) in Vesaliusove *De Fabrica Humani Corporis* (1543) za eno izmed treh najpomembnejših znanstvenih del v renesansi. V njej je Girolamo Cardano (1501–1576), eden izmed najvplivnejših renesančnih matematikov, polihistor in avtor več kot 200 znanstvenih del z različnih področij (medicina, astronomija, astrologija, filozofija, matematika idr.), klasificiral enačbe 3. in 4. stopnje in ne samo prvi objavil, temveč tudi dokazal ter s konkretnimi zgledi ilustriral pravila (postopke reševanja) za vsak razred enačb iz te klasifikacije. Delo, ki velja za enega izmed mejnikov v razvoju matematike, so vedno visoko cenili, vendar je postajalo vse težje dostopno, saj se je skozi stoletja ohranilo le v redkih izvodih zgodnjih izdaj, pa tudi znanje latinščine se je izgubljalo¹. Prevod v angleščino je izšel šele leta 1967 (ponatisa pa 1993 in 2007). Od takrat se lahko z njim seznanijo tudi sodobni matematiki.² Danes bi ga karakterizirali kot »elementaren« tekst s področja teorije enačb, ki velja za »izčrpano« področje, za Cardanove sodobnike pa je pomenilo pomemben prodor, saj so pravila za reševanje enačb 3. in 4. stopnje matematiki zavzeto iskali kar nekaj stoletij. Danes za reševanje kubične enačbe $x^3 + px + q = 0$ uporabljamo t. i. *Cardanove formule*:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Enačbo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lahko s substitucijo $z = x + \frac{b}{3a}$ prevedemo v obliko $x^3 + px + q = 0$. V resnici je Cardano namesto ene same formule,

¹Latinščina je – po Gutenbergovem izumu tiska s premičnimi črkami (1439), ki je v Evropi omogočil masovno produkcijo knjig in širjenje znanja zunaj ozkega kroga elite ter spodbudil pisanje knjig v nacionalnih jezikih, postopoma začela izgubljati svoj privilegirani status, ki ga je imela ves srednji vek.

²Kogar zanimajo stare knjige, lahko latinski izvornik iz 1545 – stavljen v dveh vzporednih stolpcih, z bogato okrašeno naslovnico in inicialkami ter kar brez ravnila narisanimi diagrami – najde na spletni strani www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf, ogled 19. 1. 2019.

veljavne za vse kubične enačbe, v svoji knjigi podal in dokazal pravila za reševanje vseh 13 različnih tipov kubičnih enačb (po tedanji klasifikaciji, ki ni dopuščala negativnih koeficientov). Izhajajoč iz opažanja, da so rešitve nekaterih enačb oblike $x = a + \sqrt{b}$, je s primerjavo iracionalnih delov njihovih kvadratov in kubov znal pokazati, kateri enačbi tipa $Mx^2 = x^3 + N$ tak x zadošča. Tako je npr. za rešitev $x = 2 + \sqrt{3}$ dobil enačbo $3\frac{3}{4}x^2 = x^3 + \frac{1}{4}$ (str. 49). S tem je močno presegel dosežke svojih predhodnikov in sodobnikov na tem področju, katerih prispevke je sicer korektno navajal in priznaval. Velik korak naprej so pomenile tudi njegove metode, ki jih je sistematično razvijal in uporabljal tudi pri reševanju enačb višjih stopenj. Tudi v tem pogledu – da ni skrival ne svojih odkritij ne poti do njih – je bil veliko pred svojim časom; tedaj so namreč matematiki pogosto ljubosumno skrivali svoja odkritja, da ne bi izgubili prednosti na matematičnih tekmovanjih, od izida katerih so bile usodno odvisne njihove kariere. V tem smislu je Cardano predhodnik Eulerja, ki je prav tako veliko pozornosti namenjal opisom, kako je prišel do svojih rezultatov.

Za boljše razumevanje in vrednotenje Cardanovega prispevka je dobro poznati širši kontekst, zato na kratko preglejmo nekaj mejnikov v zgodovini algebre pred Cardanom.

Omar Hajam, perzijski pesnik, filozof, matematik in astronom iz druge polovice 11. stoletja, je v knjigi *O dokazih problemov algebre in muqabala* klasificiral tipe kubičnih enačb, v katerih nastopata monom in binom:

$$x^3 + ax = b, x^3 + b = ax, x^3 = ax + b, x^3 + ax^2 = b, x^3 + b = ax^2, x^3 = ax^2 + b,$$

in jih reševal z *geometrijsko metodo*, kot presečišča dveh stožnic (npr. parabole in kroga).³ Metodi *al-jabr* in *al-muqabala* sta v Italiji najprej postali poznani po latinskih prevodih al-Khowarizmijeve *Algebre*, ki jih je priskrbel Gerard iz Cremona, ter po delu Leonarda iz Pise (Fibonacci). Med

³V gornjih enačbah sta a in b vselej pozitivni števili (sicer bi imeli le dva tipa: brez kvadratnega člena, in brez linearne člena). Vsak tip enačbe zahteva nekoliko drugačno geometrijsko metodo (konstrukcijo). Tako npr. rešitve enačbe $x^3 + px = q$ oz. $\frac{x^4}{p} + x^2 = \frac{q}{p}x$ iščemo kot presečišče parabole $y = \frac{x^2}{\sqrt{p}}$ in krožnice $y^2 + x^2 = \frac{q}{p}x$.

njunimi nasledniki je najbolj znan pisec aritmetičnih učbenikov Luca Pacioli, čigar knjigo »*De divina proportione*« (napisano 1496–98 v Milanu, objavljeno 1509 v Benetkah) je ilustriral Leonardo da Vinci.

V 13. stoletju je razvoj matematike v Italiji močno pospešil prehod iz blagovne v monetarno trgovino. Razvilo se je bančništvo, potreba po računanju obresti in dolgov. Namesto rimskih števil, ki so bile za računanje prenerodne, so začeli uporabljati arabske.

V Italiji, nekje od 13. do 16. stoletja, pred pojavom analitične geometrije, so matematiki iskali eksplicitne rešitve enačb tretje in četrte stopnje. Svoje rešitve so zapisovali verbalno, brez algebrajskega simbolizma, ki se pojavi šele kasneje.⁴ Poznali so že recept za reševanje kvadratne enačbe (Al Khowarizmi, Omar Hajam), po analogiji so iskali podobno metodo (formulo) za reševanje enačb tretje in četrte stopnje.

S kubičnimi in bikvadratnimi enačbami so se v Italiji ukvarjali: mojster Benedetto iz Firenc, mojster Biaggio iz Firenc, Attonio Mazzinghi, Luca Pacioli, mojster Dardi iz Pise, Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Lodovico Ferrari, Rafael Bombelli idr.

Ker še ni bilo razvitega matematičnega simbolizma, so uporabljali nekakšno »retorično algebro«. Vsak matematik je uporabljal svoje izraze ali oznake za x , x^2 , x^3 , x^4 itd. Namesto formul, kot jih poznamo danes, so uporabljali besedne opise postopkov, ki pripeljejo do rešitev. Dostikrat so bili razloženi le na konkretnih številskih primerih.

Scipione del Ferro (1465–1526) iz Bologne je leta 1515 odkril rešitev za »*reducirano kubično enačbo*« $x^3 = px + q$ oziroma enačbo tretje stopnje brez kvadratnega člena. Ključni korak te metode je zelo domiseln trik: neznanko nadomestimo z dvema parametroma, $x = u + v$, kjer u in v pametno izberemo tako, da dobimo zanj sistem dveh enačb. Takrat so razlikovali med tremi tipi reduciranih kubičnih enačb, ker so dopuščali le pozitivne koeficiente in pozitivne x : $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$. Rešitvi za druga dva tipa reduciranih kubičnih enačb je našel Niccolo Tartaglia.

⁴François Viète je v svojem delu *In artem analyticem isagoge*, 1591, prvi uporabil črke za označevanje neznank in konstant v algebrajskih enačbah.

Rešitve kubičnih enačb Scipiona del Ferra in Tartaglie je objavil Cardano 1545 v knjigi *Ars Magna*. Njune rešitve je razširil tudi na enačbe »brez manjkajočih členov« (kot so npr. $x^3 + 6x^2 = 20x + 112$, glej str. 141) in objavil pravila za vseh 13 tipov kubičnih enačb z različnimi kombinacijami členov različnih stopenj s samimi pozitivnimi koeficienti na obeh straneh enačbe. Te enačbe so takrat obravnavali kot različne, ker se še niso naučili trika, vse člene prestaviti na eno stran enačbe in na drugo stran zapisati število nič, in ker niso uvideli, da »manjkajoči« členi v resnici ne manjkajo, ampak imajo koeficient nič. V isti knjigi je objavil tudi rešitve za enačbe 4. stopnje svojega učenca Lodovica Ferrarija (1522–1565). Vendar to ne izčrpa vsebine Cardanove knjige, v kateri je objavil tudi druge formule oz. pravila. Tako npr. problem *najti število, enako vsoti svojega kvadratnega korena in dvakratnika svojega kubičnega korena*, reši prek rešitve x enačbe $x^6 = x^3 + 2x^2$, za katero izpelje izraz $x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{56}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}}$; iskano število je potem x^6 (str. 243).

Cardano, ki mu je njegov sodobnik Niccolo Tartaglia očital, da je v tej knjigi objavil formule, za katere mu je moral priseči, da jih nikoli ne bo, v uvodu odkrito in korektno navede in priznava prispevke drugih matematikov pri iskanju teh formul. Razloži tudi, v čem je šel dlje od svojih predhodnikov, pojasni pa tudi metode, po katerih je prišel do svojih odkritij. V geometrijski metodi dokazovanja, ki jo je, kot sam pravi, prejel od Tartaglie, je prepoznal »kraljevska pot, ki ji velja slediti v vseh drugih primerih« (glej str. 52). V dokazih pravil se sklicuje tudi na izreke iz Evklidovih *Elementov*, predstavil pa je tudi metode za odkrivanje novih pravil in metod reševanja enačb (glej npr. VI. poglavje: str. 48–55, in XIX. poglavje: str. 180–181).

Tartaglia je močno zameril Cardanu, da je objavil formule, ki mu jih je zaupal. Zaradi tega ga je tudi javno napadel, češ da mu je skrivnost zaupal pod pogojem, da je nikoli ne izda. Stvar je šla tako daleč, da je prišlo do javnega intelektualnega dvoboja med Tartaglio in Ferrarijem, ki pa se za prvega ni iztekel najbolje. Cardano je, po današnjih merilih, pošteno in korektno citiral in priznal vsakomur, kar je odkril (glej npr. Poglavje I, str.

7–9). Vendar je Cardano storil veliko več kot samo objavil neko formulo, ki jo je našel nekdo drug. Sam je našel pravila za rešitve vseh tistih tipov enačb 3. stopnje, ki jih drugi niso rešili. O vsem tem je napisal tudi zelo sistematično in lepo strukturirano knjigo.

Cardanov prispevek je, poleg redukcije zapletenejših tipov enačb na preprostejše – ki sta jih znala rešiti že Scipione del Ferro in Tartaglia – obsegal tudi naslednje dosežke (glej Predgovor, str. xvi): i) Odkril in dokazal je obstoj večkratnih korenov za različne vrste kubičnih in bikvadratnih enačb. ii) Raziskal je relacije med rešitvami različnih enačb. Tako je npr. pokazal, kako iz rešitev enačbe $x^2 = 6x + 16$ dobimo rešitve enačbe $x^2 + 6x = 16$ (tako da rešitvi prve enačbe prištejemo koeficient pri linearnem členu, torej 6, str. 56). iii) Pokazal je, da imajo določeni pari enačb korena, ki se razlikujeta le v predznaku. Tako je npr. 4 koren enačbe $x^3 = 12x + 16$, -4 pa koren od $x^3 + 16 = 12x$ (str. 12). iv). Prepoznal je pomen in neizogibnost negativnih, pa tudi iracionalnih rešitev. v) Obravnaval je tudi rešitve, v katerih so nastopali kvadratni koreni iz negativnih števil, čeprav se mu je njihova narava zdela »s sofisticirana«. Tako je npr. kot rešitev problema, razdeliti 10 na dva sumanda, katerih produkt je 40, dobil $5 + \sqrt{-15}$ in $5 - \sqrt{-15}$ (str. 219–220).⁵ Z vsem tem je Cardano prispeval močan pospešek k neslutnemu razvoju algebre v kasnejših stoletjih.

Cardanovo izvirno besedilo je sodobnemu matematiku razmeroma težko razumljivo, iz več razlogov: 1. Napisano je v latinščini, ki jo danes znajo le redki, potem ko so jo, po izumu tiska, postopoma začeli izpodrivati nacionalni jeziki. 2. Namesto nam domačih modernih matematičnih izrazov in simbolov uporablja terminologijo in oznake tistega časa, dostikrat pa tudi dolgovезne besedne formulacije, značilne za obdobje »retorične algebre«. 3. Sama tematika reševanja enačb (z algebraičnimi formulami), ki je bila takrat na samem robu raziskovalnega horizonta in eden pomembnih nerešenih problemov matematike, danes ne velja več za zelo zanimivo in zato tudi

⁵K odpravi predsodkov proti kompleksnim številom je odločilno prispeval švicarski matematik, fizik in astronom Leonhard Euler (1707–1783), ki je prikazal njihovo večstransko uporabnost.

metode reševanja enačb, ki so privedle do teh formul, večini matematikov niso poznane. 4. Pri klasificiranju enačb (podobno kot pred njim npr. Omar Hajam) upošteva predznake koeficientov (kar se z današnjega zornega kota zdi nepotrebno kompliciranje). 5. Dokaze pravil za reševanje enačb različnih tipov podaja z referencami na Evklidove *Elemente*, ki jih danes matematiki ne poznamo tako dobro, kot so jih nekoč, formule, relacije in razmerja med količinami pa ilustrira z nekakšnimi diagrami, npr. pravokotniki, razdeljenimi na manjše pravokotnike (po vzoru »*geometrijske algebre*« islamskih matematikov). 6. Dostikrat pove pravilo šele potem, ko ga opiše ob posebnem številskem primeru (kar se lahko zdi nenavadno, čeprav je pedagoško po svoje utemeljeno). 7. Nekatera pravila poda brez dokaza. 8. Nekatera mesta v besedilu so nejasna ali netočna (toda ustrezna pravila se na srečo dajo rekonstruirati iz posameznih številskih zgledov).

In še nekaj besed o strukturi in vsebini dela.

Knjiga obsega 40 poglavij. V vsakem poglavju je obravnavan drugačen tip enačb. Te so dostikrat izpeljane iz problemov, npr. iskanja števila ali para števil, ki ustreza določenim pogojem. Nekatera pravila so *splošna*, nekatera pa *partikularna*, namenjena reševanju posameznih problemov.

Iz nekaterih osnovnejših pravil izpeljuje druga pravila. Pri dokazih se dostikrat nasloni na diagrame in sklicuje na izreke iz Evklidovih *Elementov*. Pove, zakaj se večinoma ne bo ukvarjal z enačbami, ki imajo stopnje višje od 3: »*Narava tega ne dopušča.*« (str. 9). V knjigi ne podaja samo eksaktnih formul, s katerimi dobimo eksaktne rešitve. Tako nam npr. eno od njegovih pravil (str. 182–185) omogoča najti zaporedje vse natančnejših približkov k rešitvam. Vsako pravilo oziroma postopek ponazori s primeri. Pravi, da se teh pravil najlažje naučimo ob reševanju problemov. Knjiga v tem pogledu spominja na zbirke nalog za tekmovalce na matematičnih tekmovanjih. Dejansko so se v renesansi matematiki pogosto pomerili med seboj v reševanju problemov oziroma enačb. Od izidov takih soočenj so bile pogosto odvisne njihove kariere in ugled.

Zelo zanimivo je Cardanovo primerjanje rešitev različnih enačb. Tako npr. dokaže: če $x^3 = ax^2 + b$ in $y = x - a$, potem je $y^3 + ay^2 = c$, kjer je $\frac{c}{b} = \frac{y}{x}$.

To pravilo ponazori s primerom: če rešitvi $x = 2\frac{1}{4}$ enačbe $x^3 = 2x^2 + 1\frac{17}{64}$ odštejemo $a = 2$, dobimo $y = \frac{1}{4}$, ki ustreza enačbi $y^3 + 2x^2 = \frac{9}{64}$, katere konstantni člen $c = \frac{9}{64}$ je v enakem razmerju do konstantnega člena $b = 1\frac{17}{64}$ prve enačbe, kot je razmerje $y = \frac{1}{4}$ do $x = 2\frac{1}{4}$ (str. 254–255).

Stvaritev moderne verzije starega znanstvenega besedila postavlja prevajalcu zahtevne probleme (odločati se je treba med novo in staro terminologijo, treba se je odločiti, kako interpretirati nejasne dele besedila in v kolikšni meri uporabljati moderne matematične simbole ipd.). Angleški prevod uporablja (namesto stare matematične terminologije Cardanovega časa) moderne izraze ter (namesto Cardanovih oznak in dolgih besednih opisov) moderno algebraično pisavo, ki naredi besedilo veliko razumljivejše sodobnemu matematiku. Branje angleškega prevoda olajša seznam citatov iz Evklidovih *Elementov*, na katere se Cardano v svojih dokazih sklicuje.

Cardanova knjiga se konča z naslednjim citatom:

NAPISANO V PETIH LETIH. NAJ TRAJA
TOLIKO TISOČ.
KONEC VELIKE UMETNOSTI
PRAVIL ALGEBRE
GIROLAMA CARDANA.

To Cardanovo plemenito upanje se bo uresničilo le v primeru, da bodo ljudje ohranili spoštovanje do dragocenih starih knjig in revij in da jih bomo kot dragoceno kulturno dediščino ohranjali tudi v tiskani, ne le v elektronski obliki. Naj nas naše spoštovanje do Cardanove »*Velike umetnosti*« spomni, da so tudi v starih knjigah shranjeni zakladi in skrivnosti, ki jih ne gre omalovaževati, temveč jih je treba na novo odkriti in prinesiti na svetlobo.

LITERATURA

- [1] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications INC., Mineola, New York, 2007.
- [2] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972, str. 189.

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2019

Letnik 66, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Trikotnik, enakoosna hiperbola in Bernoullijeva lemniskata (Marko in Nada Razpet)	41–53
Difuzijska traktografija (Aleš Mohorič, Igor Serša in Matic Noč)	54–63
Vesti	
MaRS 2019 (David Gajser)	64–66
Iz zgodovine	
Mere, merska reforma in nekaj zgodovine v Močnikovih učbenikih (Peter Legiša)	67–74
G. Cardano, The Rules of Algebra (Ars Magna) (Jurij Kovič)	75–III

CONTENTS

Articles	Pages
Triangle, rectangular hyperbola and lemniscate of Bernoulli (Marko and Nada Razpet)	41–53
Diffusion tractography (Aleš Mohorič, Igor Serša and Matic Noč)	54–63
News	64–66
Miscellanea	67–III

Na naslovnici: Potek živčnih vlaken – traktov lahko ugotavljamo s posebno metodo slikanja z magnetno resonanco (slika: DTI-sagittal-fibers, avtor: Thomas Schultze, CC BY-SA 3.0), (glej članek na straneh 54–63).