

SIMPLICIALNI KOMPLEKSI IN DISKRETNA MORSOVA TEORIJA

ALEKSANDRA FRANČ

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55U10, 57R70

V članku predstavimo enostavne, a nadvse uporabne simplicialne komplekse in osnove diskretne Morsove teorije.

SIMPLICIAL COMPLEXES AND DISCRETE MORSE THEORY

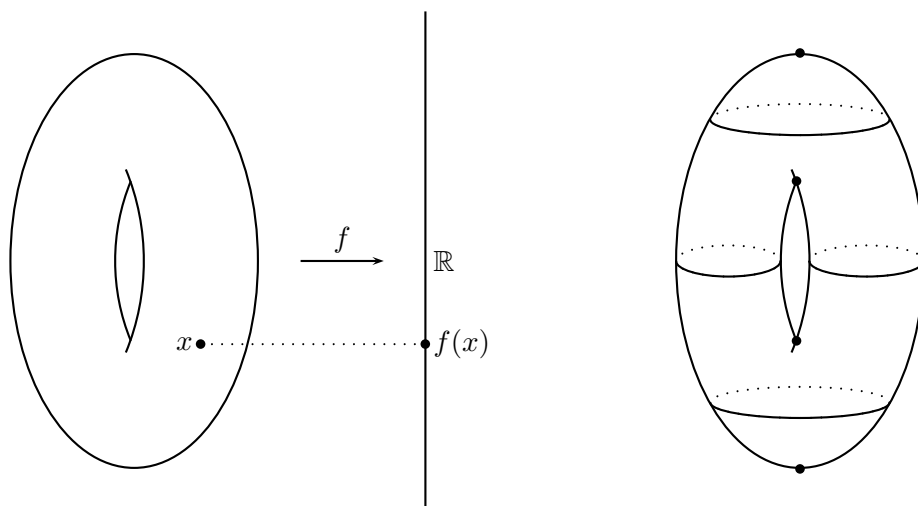
This paper introduces the simple and useful concept of a simplicial complex and the basics of discrete Morse theory.

Uvod

Ameriški matematik Marston Morse [4, 5] je opazil, da so določene gladke funkcije na gladkih mnogoterostih tesno povezane s topologijo teh mnogoterosti, in tako je nastala Morsova teorija. Ta teorija zgradi sklenjene gladke mnogoterosti iz informacije o (končno mnogo) kritičnih točkah Morsovih funkcij oziroma iz (končnega števila) geometrijsko preprostih gradnikov. En primer take funkcije in pripadajoče dekompozicije je na sliki 1. Na žalost pa je pri takih dekompozicijah mnogoterosti na končno število lepih kosov še vedno treba vedeti, kako se ti kosi med sabo zlepijo, načinov za to pa je, na žalost (ali pa morda veselje algebraičnih topologov), v večini dimenzij ogromno.

V veliko veselje številnih bolj ali manj uporabnih matematikov in računalnikarjev pa je prav tako ameriški matematik, Robin Forman, v letih 1998 [1] in 2002 [2] svetu predstavil diskretno verzijo Morsove teorije, ki je definirana za prostore s kombinatorično strukturo (za simplicialne komplekse, za celične komplekse ipd.), in pri kateri so tako Morsove funkcije kot pripadajoča vektorska polja diskretni objekti.

Tako sta področji uporabne matematike in računalništva dobili teorijo, ki ima aplikacije v topološki analizi podatkov, računski homologiji, konfiguracionih prostorih, topološkem poenostavljanju objektov in odstranjevanju šuma, pa še kje.



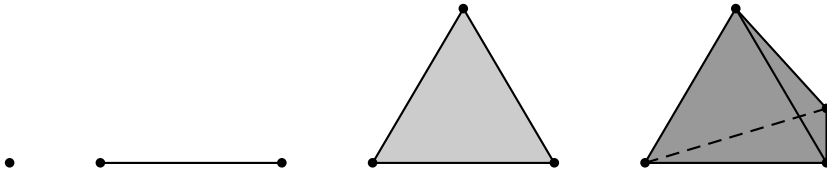
Slika 1. Primer gladke Morseove funkcije na gladki mnogoterosti (torusu) s štirimi kritičnimi točkami in pripadajočo dekompozicijo.

V tem članku bomo najprej vpeljali pojem simplicialnih kompleksov ter si ogledali nekaj njihovih lastnosti. Nato se bomo sprehodili čez osnove diskretne Morseove teorije (teh je presenetljivo malo in so presenetljivo lahko dostopne).

Simplicialni kompleksi

Začnimo s točko v dimenziji 0. V dimenziji 1 ni velikih presenečenj, iz točke nastane daljica z dvema krajiščema. V dimenziji 2 hitro najdemo vsaj dve možnosti za smiselno enostaven geometrijski gradnik: trikotnik ali kvadrat. Izberimo trikotnik. V dimenziji 3 bo na vrsti tetraeder (skupaj z notranjostjo). Tako nadaljujemo. Opisali smo osnovne gradnike simplicialnih kompleksov, simplekse (slika 2). Omenimo še, da bi z izbiro kvadrata v dimenziji 2 in z ustreznimi posplošitvami v višjih dimenzijah lahko prišli do npr. *kubičnih kompleksov* ali pa do *prodsimplicialnih kompleksov*, ampak o tem morda več kdaj drugič.

Da ne bo dilem, kako so videti simpleksi višjih dimenzij, povejmo vse še malo bolj natančno. Za začetek vpeljimo pojem standardnega n -simpleksa



Slika 2. 0-simpleks, 1-simpleks, 2-simpleks in 3-simpleks.

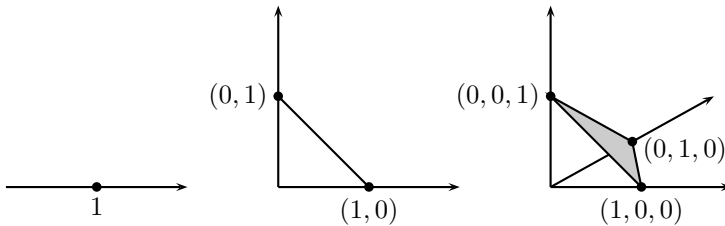
(slika 3), ki je podan kot konveksna ogrinjača $n + 1$ točk s koordinatami

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definicija 1. *Standardni n -simpleks* je podmnožica

$$\Delta^n = \{ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} e_{n+1} \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \text{ in } \lambda_i \geq 0 \text{ za vse } i \} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

pri čemer smo z $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ označili vektor, ki ima na i -tem mestu 1, na vseh preostalih pa 0.



Slika 3. Standardni 0-simpleks, 1-simpleks in 2-simpleks.

Splošen n -simpleks je posplošitev standardnega n -simpleksa, torej objekt, ki ima $n + 1$ oglišč, ki so povezana z $\binom{n+1}{2}$ daljicami, na katere je napetih $\binom{n+1}{3}$ trikotnikov, medtem ko vsaka štiri različna oglišča določajo enega od $\binom{n+1}{4}$ tetraedrov in tako dalje. Z drugimi besedami, splošen n -simpleks je podan z množico $n + 1$ oglišč, vsako njeno podmnožico pa imenujemo *lice* danega simpleksa in je sama po sebi spet simpleks. Če je simpleks τ lice simpleksa σ , pišemo $\tau \leq \sigma$. Vsak simpleks je sam svoje lice, lica nižjih dimenzij pa imenujemo *prava lica*. Če pri tem ne pozabimo na *prazno lice*, ki ustreza prazni podmnožici oglišč, smo morda koga spomnili na dobro znano

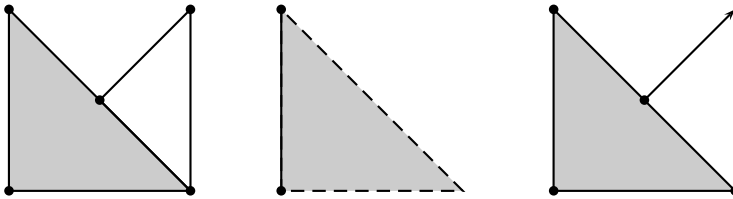
formulo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

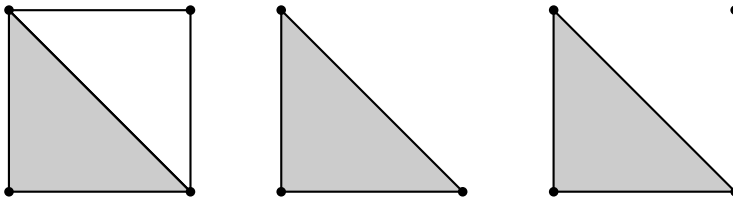
In res, n -simpleks ima 2^{n+1} lic. To je v resnici problem, ki lahko zelo hitro pokvari učinkovitost algoritmov, ki delajo s simplicialnimi kompleksi. Če bo naš algoritem nekaj naredil ali preveril za vsako lice simpleksa, bo takoj vsaj eksponentno zahteven glede na dimenzijo simpleksa. Računska zahtevnost je sicer še ena zanimiva zgodba, ki jo bomo tokrat izpustili. Omenimo le, da lahko težavo precej omilimo, če se mora npr. naš algoritem ukvarjati le z lici kodimenziije 1, tj. s takimi, katerih dimenzija je za 1 manjša od dimenzije simpleksa. Takih je namreč le $\binom{n+1}{n} = n + 1$.

Če želimo za neki simpleks σ poudariti njegovo dimenzijo, jo običajno zapišemo v eksponent, npr. σ^n označuje n -dimenzionalni simpleks z imenom σ .

Zdaj pa je prišel čas, da naše osnovne gradnike simplekse na smiseln način združimo v večjo celoto. Na sliki 4 je prikazanih nekaj načinov združevanja, ki niso sprejemljivi, na sliki 5 pa nekaj takih, ki so.



Slika 4. To niso simplicialni kompleksi. V prvem primeru eden od diagonalnih 1-simpleksov drugega seka v notranjosti in ne v skupnem licu (oglišču), v drugem primeru niso vključena vsa lica 2-simpleksa, v tretjem primeru pa se pojavita oba problema hkrati.



Slika 5. To pa so simplicialni kompleksi.

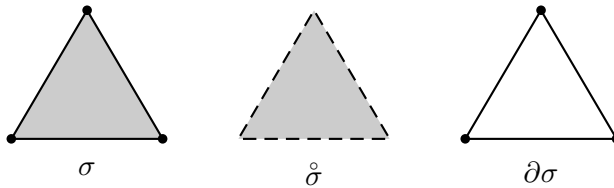
Definicija 2. *Simplicialni kompleks* K je množica simpleksov, ki zadošča naslednjim pogojem:

1. vsako lice simpleksa iz K je vsebovano v K in
2. presek poljubnih dveh simpleksov σ_1 in σ_2 je lice tako v σ_1 kot v σ_2 .

Torej, skupaj z vsakim simpleksom σ so v simplicialnem kompleksu K vsebovana vsa njegova lica in simpleksi so lahko zlepljeni samo vzdolž skupnih lic.

Vsak simpleks $\sigma \in K$, ki ni pravo lice nobenega drugega simpleksa iz K , imenujemo *maksimalni simpleks*. Simplicialni kompleks je torej natančno določen s seznamom svojih maksimalnih simpleksov.

Unija vseh pravih lic simpleksa σ sestavlja njegov rob $\partial\sigma$, preostale točke iz simpleksa σ pa spadajo v njegovo notranjost $\overset{\circ}{\sigma}$ (slika 6). Z izjemo 0-simpleksov torej vsaka točka v simplicialnem kompleksu pripada notranjosti natanko enega od simpleksov (v vseh preostalih simpleksih, ki to točko vsebujejo, leži na robu).



Slika 6. Notranjost in rob 2-simpleksa σ .

Oglejmo si še tri zanimive tipe simplicialnih kompleksov, ki jih lahko konstruiramo kot podmnožice večjih simplicialnih kompleksov.

Definicija 3. *Simplicialno zaprtje* $\text{cl}(\sigma)$ simpleksa $\sigma \in K$ je podkompleks, sestavljen iz vseh simpleksov, ki so lica σ . *Simplicialno zaprtje* $\text{cl}(S)$ podmnožice simpleksov S v simplicialnem kompleksu K je podkompleks, sestavljen iz vseh simpleksov, ki so lica kakšnega simpleksa iz S .

Definicija 4. *Zvezda* $\text{st}(\sigma)$ simpleksa σ iz K je sestavljena iz vseh simpleksov v K , ki imajo σ za lice. *Zvezda* $\text{st}(S)$ podmnožice simpleksov S iz K je unija zvezd $\text{st}(\sigma)$ po vseh simpleksih σ iz S .

Definicija 5. Okvir $\text{lk}(S)$ podmnožice S iz K je razlika množic

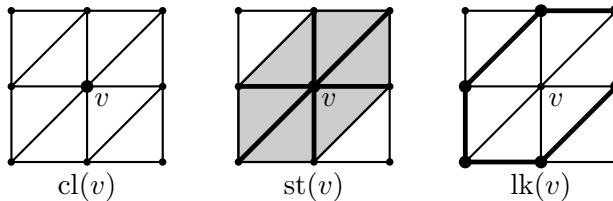
$$\text{cl}(\text{st}(S)) \setminus \text{st}(\text{cl}(S)),$$

tj. iz simplicialnega zaprtja zvezde odstranimo vse elemente, ki so v zvezdi simplicialnega zaprtja.

Primer 6. Na sliki 7 je primer simplicialnega kompleksa, sestavljenega iz osmih maksimalnih 2-simpleksov (in seveda vseh pripadajočih lic). Oglejmo si, kako so videti zgornje tri konstrukcije za 0-simpleks v . Vidimo, da simplicialno zaprtje $\text{cl}(v)$ vsebuje samo 0-simpleks v . Zvezda $\text{st}(v)$ vsebuje poleg 0-simpleksa v še vse 1- in 2-simplekse, ki imajo 0-simpleks v v robu (ki so torej en korak od v). Okvir

$$\text{lk}(v) = \text{cl}(\text{st}(v)) \setminus \text{st}(\text{cl}(v)) = \text{cl}(\text{st}(v)) \setminus \text{st}(v)$$

pa vsebuje simplekse, ki so v simplicialnem zaprtju zvezde $\text{st}(v)$, v zvezdi pa ne (torej take, ki so dva koraka od v po najkrajši poti).

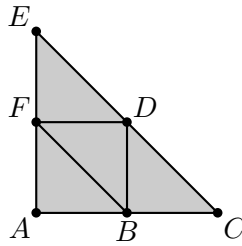


Slika 7. Simplicialno zaprtje, zvezda in okvir 0-simpleksa v (primer 6). Simplicialno zaprtje vsebuje samo oglišče v , zvezda poleg tega še po šest v -ju sosednjih robov in trikotnikov, okvir pa le po šest oglišč in robov, ki so sosedi sosedov v .

Naloga 1. Za simplicialni kompleks s slike 8 določi naslednje podkomplekse:

$$\text{cl}(B), \text{cl}(BD), \text{cl}(BDF), \text{st}(B), \text{st}(BD), \text{st}(BDF), \text{lk}(B), \text{lk}(BD), \text{lk}(BDF).$$

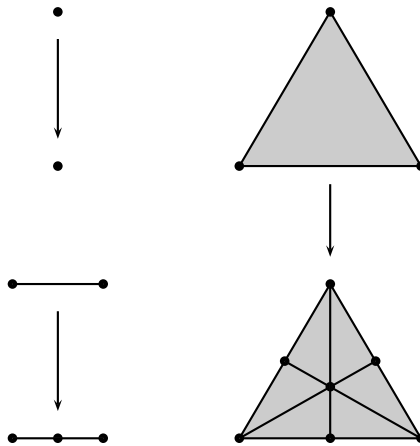
V nadaljevanju si oglejmo zanimivo konstrukcijo, s pomočjo katere iz danega simplicialnega kompleksa dobimo nov, bolj razdrobljen simplicialni kompleks. Začnimo z definicijo za simplicialne komplekse in si prihranimo težave za konec.



Slika 8. Simplicialni kompleks (naloga 1).

Definicija 7. Baricentrična subdivizija simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks \widehat{K} , ki je unija baricentričnih subdivizij vseh simpleksov iz K .

Zdaj pa potrebujemo še definicijo baricentrične subdivizije za posamezni simpleks. Formalna definicija je malce bolj zapletena, zato si najprej oglejmo primer. Baricentrične subdivizije za 0, 1 in 2-simpleks so prikazane na sliki 9.



Slika 9. Baricentrična subdivizija za 0, 1 in 2-simpleks.

To idejo bi želeli posplošiti na simplekse poljubne dimenzije. S pomočjo permutacij lahko na kratko povemo, katere simplekse dodamo, vendar je taka definicija precej abstraktna, zato jo bomo poskusili razumeti tako, da bomo baricentrično subdivizijo zgradili postopoma z dodajanjem simpleksov po dimenzijah. Vseeno najprej zapišimo formalno definicijo:

Definicija 8. Baricentrična subdivizija n -dimenzionalnega simpleksa σ z oglišči v_1, \dots, v_{n+1} je unija $(n+1)!$ simpleksov dimenzije n . Vsak tak simpleks z oglišči p_1, \dots, p_{n+1} ustreza neki permutaciji $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n+1)}$, in sicer tisti, za katero je p_i težišče točk $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i+1)}$.

Vsak simpleks simplicialnega kompleksa K bo ustrezal natanko enemu 0-simpleksu baricentrične subdivizije \widehat{K} . Baricentrično subdivizijo \widehat{K} torej začnemo graditi tako, da v težišče vsakega simpleksa $\sigma \in K$ postavimo en 0-simpleks, v_σ , in vsakega od teh povežemo z vsemi v_α , za katere je $\alpha \leq \sigma$. Dobili smo 1-dimenzionalni simplicialni kompleks, ki bo 1-skelet baricentrične subdivizije \widehat{K} . Če je bila $\dim K = 1$, smo končali, sicer pa za vsak 2-simpleks $\sigma^2 \in K$ za vsako verigo simpleksov $\alpha^0 \leq \beta^1 \leq \sigma$ dodamo v \widehat{K} 2-simplekse, napete na v_α, v_β in v_σ . Dobili smo 2-skelet baricentrične subdivizije. Če je bila $\dim K = 2$, smo končali, sicer ponovimo postopek in za vse $\sigma^3 \in K$ za vsako verigo simpleksov $\alpha^0 \leq \beta^1 \leq \gamma^2 \leq \sigma$ dodamo v \widehat{K} 3-simplekse, napete na $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ in v_σ , in tako naprej.

Iz formalne definicije je jasno, da število simpleksov v baricentrični subdiviziji z dimenzijo izjemno hitro narašča. Če je $\dim K = n$, ima \widehat{K} vsaj $(n+1)!$ simpleksov. Teoretično je baricentrična subdivizija torej uporabna, kadar želimo npr. omejiti velikost največjega simpleksa, ker se ta s subdivizijo strogo zmanjša. Seveda pa hkrati zelo povečamo število simpleksov (funkcija $n!$ narašča še veliko hitreje kot funkcija 2^n , ki smo jo srečali zgoraj), zato se v aplikacijah običajno ne obnese, sploh če bi morali za zmanjšanje maksimalnega premera simpleksov baricentrično subdivizijo uporabiti večkrat zapored. Ta postopek pa lahko posplošimo na konveksne politope in takrat je baricentrična subdivizija zelo uporabna, saj poliedre spremeni v simplicialne komplekse, ki so zaradi bolj homogene strukture s stališča računalniških aplikacij bolj priročni.

Naloga 2. Naj bo K triangulacija ravninskega poligona, tj. povezan 2-dimenzionalni simplicialni kompleks, v katerem so vsi maksimalni simpleksi trikotniki, ki ležijo v isti ravnini in se sekajo vzdolž stranic.

- (a) Dokaži, da lahko oglišča njegove baricentrične subdivizije pobarvamo s tremi barvami tako, da nobeni dve oglišči iste barve ne bosta sosednji (tj. povezani z 1-simpleksom).

- (b) Dokaži, da lahko 2-simplekse v baricentrični subdiviziji K pobarvamo z dvema barvama tako, da bosta vsaka dva 2-simpleksa, ki imata skupno daljico, različne barve.

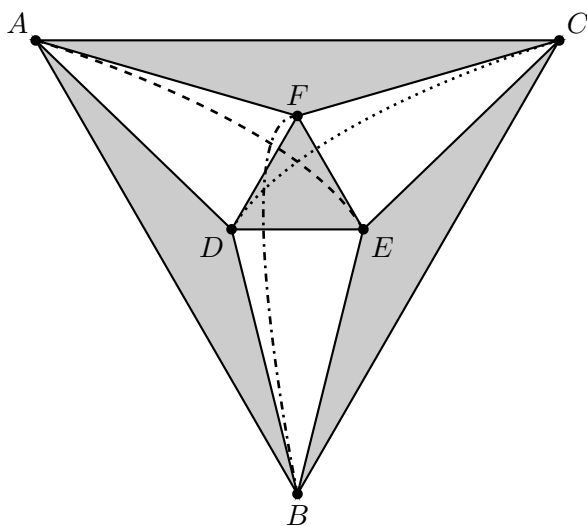
Oglejmo si še, kako lahko zgradimo simplicialne komplekse, ki pripadajo določenim družinam grafov.

Naj bo K_n poln graf z n vozlišči (graf, v katerem sta poljubni dve vozlišči sosednji). Oglejmo si družino \mathcal{V}_n njegovih vpetih podgrafov (vpet podgraf grafa G je podgraf, ki vsebuje vsa vozlišča iz G in nekatere od povezav). Če za vsak graf z lastnostjo \mathcal{L} velja, da imajo to lastnost tudi vsi njegovi vpeti podgrafi, pravimo, da je lastnost \mathcal{L} *monotono padajoča*. Primeri monotono padajočih lastnosti so:

- graf nima več kot k povezav,
- vsa vozlišča grafa imajo stopnjo $\leq \delta$ (tj. vsako vozlišče ima največ δ sosedov),
- graf ni povezan (tj. množica vozlišč razpade na več podmnožic, tako da med vozlišči iz različnih podmnožic ni povezav),
- graf nima Hamiltonovega cikla (tj. ne obstaja sklenjena pot po grafu, ki bi vsako vozlišče obiskala natanko enkrat),
- graf je dvodelen (tj. vozlišča lahko razdelimo na dve podmnožici tako, da vozlišča, ki pripadajo isti podmnožici, niso povezana),
- vozlišča grafa lahko pobarvamo z b barvami tako, da nobeni sosednji vozlišči nista iste barve.

Množici grafov, ki imajo dano monotono padajočo lastnost \mathcal{L} , lahko priredimo simplicialni kompleks. Na primer, označimo z $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{V}_n$ množico vseh nepovezanih vpetih podgrafov polnega grafa K_n . V pripadajočem simplicialnem kompleksu \mathcal{C}_n ustrezajo k -simpleksi tistim nepovezanim vpetim podgrafom, ki imajo natanko $k+1$ povezav. Ker je nepovezanost monotono padajoča lastnost, so v \mathcal{C}_n skupaj z vsakim simpleksom tudi vsa njegova lica in res dobimo simplicialni kompleks.

Primer 9. Za $n = 4$ dobimo simplicialni kompleks s šestimi 0-simpleksi, petnajstimi 1-simpleksi in štirimi 2-simpleksi. Podgrafi, ki ustrezajo posameznim simpleksom, so prikazani na sliki 11. Poimenovali smo jih tako, da smo povezave grafa K_4 poimenovali s črkami od A do F , nato pa vsakemu podgrafu priredili niz, ki ustreza njegovim povezavam. Z nekaj truda lahko \mathcal{C}_4 tudi narišemo tako, da se 2-simpleksi ne prekrivajo (slika 10). Nekaj več o strukturi simplicialnih kompleksov \mathcal{C}_n bomo povedali na koncu naslednjega razdelka.

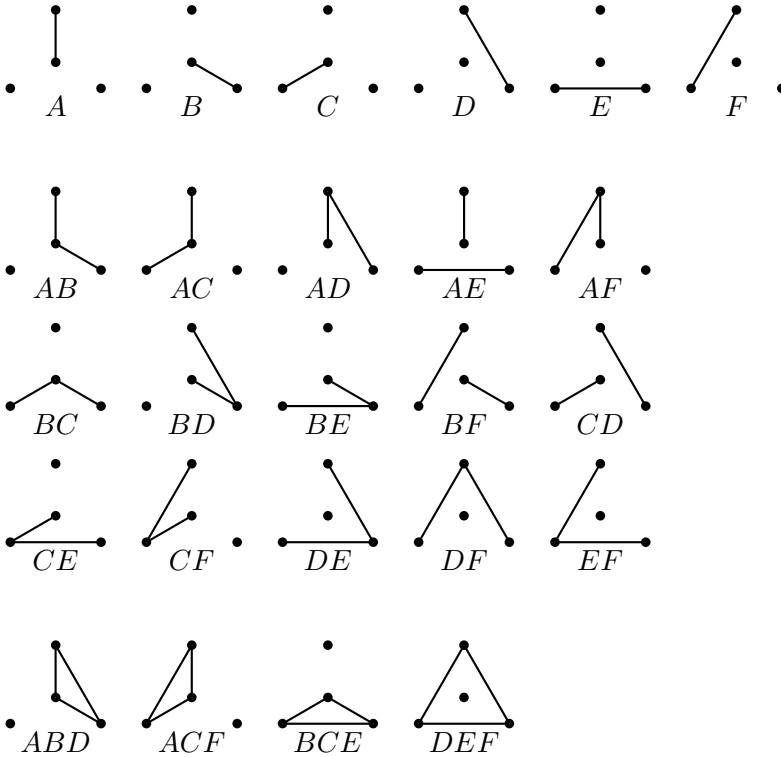


Slika 10. Simplicialni kompleks \mathcal{C}_4 , ki pripada nepovezanim vpetim podgrafom polnega grafa K_4 . Narišemo ga lahko tako, da le 1-simpleksi AE , BF in CD ne ležijo v ravnini.

Diskretna Morsova teorija

Zdaj ko smo se seznanili s simplicialnimi kompleksi, se lahko lotimo diskretne Morseove teorije. Začnimo pri funkcijah.

Funkcija $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vsakemu simpleksu iz K priredi neko realno število. Diskretna *Morsova* funkcija to naredi tako, da vrednost funkcije načeloma narašča z dimenzijo z največ eno izjemo pri vsakem simpleksu. Formalno definicijo običajno zapišemo takole:



Slika 11. Nepovezani vpeti podgrafi polnega grafa K_4 .

Definicija 10. Funkcija $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ je *diskretna Morsova funkcija*, če za vsak p -dimenzionalni simpleks σ^p iz K velja:

1. množica $(p + 1)$ -dimenzionalnih simpleksov

$$\{\alpha^{p+1} \in K \mid \sigma \leq \alpha \text{ in } f(\alpha) \leq f(\sigma)\}$$

vsebuje največ en element in

2. množica $(p - 1)$ -dimenzionalnih simpleksov

$$\{\beta^{p-1} \in K \mid \beta \leq \sigma \text{ in } f(\beta) \geq f(\sigma)\}$$

vsebuje največ en element.

Če sta za kak simpleks σ obe množici iz definicije prazni, pravimo, da je σ *kritični simpleks*.

Primer 11. Naj bo K poljuben simplicialni kompleks in $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ za vse $\sigma \in K$. Potem je f Morsova funkcija na K in vsi simpleksi v K so kritični. Ta primer pokaže, da je za poljuben simplicialni kompleks K množica diskretnih Morsovih funkcij na K neprazna. Seveda pa nas običajno zanimajo takšne diskretne Morsove funkcije, ki imajo čim manj kritičnih celic.

Čeprav je morda videti, da bi lahko imeli po definiciji pri vsakem simpleksu dve izjemi, eno v dimenziji več in eno v dimenziji manj, pa se to ne more zgoditi. Dokaz je izjemno preprost, zato si ga oglejmo.

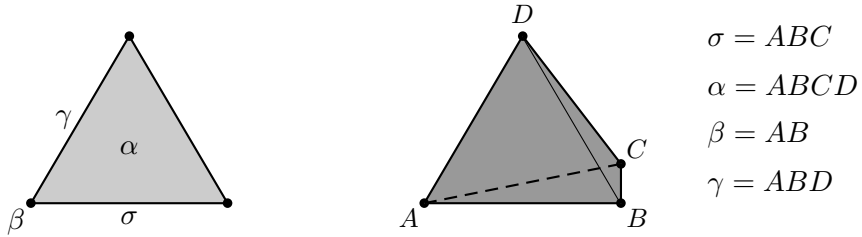
Trditev 12. *Naj bo $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna Morsova funkcija na simplicialnem kompleksu K in naj bo $\sigma \in K$ simpleks, ki ni kritičen. Potem velja natanko ena od naslednjih trditev:*

1. *Obstaja $(p + 1)$ -dimenzionalni simpleks α , za katerega je $\sigma \leq \alpha$ in je $f(\alpha) \leq f(\sigma)$.*
2. *Obstaja $(p - 1)$ -dimenzionalni simpleks β , za katerega je $\beta \leq \sigma$ in $f(\beta) \geq f(\sigma)$.*

Dokaz. Ker simpleks σ ni kritičen, obstaja gotovo vsaj en od simpleksov α in β . Denimo, da obstajata oba. Potem je $p \geq 1$ zaradi drugega pogoja in je $\dim(\alpha) \geq 2$. Za vsa preostala p -dimenzionalna lica (p -lica) $\gamma \neq \sigma$ simpleksa α potem velja $f(\gamma) < f(\alpha)$, saj je f Morsova funkcija in α že ima eno izjemo v dimenziji p . Ampak β je $(p - 1)$ -lice σ , ki je p -lice $(p + 1)$ -simpleksa α , zato je β tudi $(p - 1)$ -lice α (slika 12). To pa pomeni, da obstaja še eno p -lice $\gamma \neq \sigma$ simpleksa α , tako da je $\beta \leq \gamma$. Vendar β že ima izjemo pri σ , zato je $f(\beta) < f(\gamma)$. Če vse neenakosti zberemo skupaj, vidimo, da je

$$f(\beta) \geq f(\sigma) \geq f(\alpha) > f(\gamma) > f(\beta).$$

To protislovje nam pove, da ne moreta biti hkrati izpolnjena oba pogoja. Obstaja torej natanko eden od simpleksov α in β . ■



Slika 12. Situacija za primera $p = 1$ in $p = 2$ (trditev 12).

Trditev 12 nam omogoča, da povežemo diskretne Morsove funkcije z določenimi diskretnimi vektorskimi polji.

Definicija 13. *Diskretno vektorsko polje* V na simplicialnem kompleksu K je družina parov (τ^p, σ^{p+1}) simpleksov $\tau, \sigma \in K$ sosednjih dimenzij s $\tau \leq \sigma$, za katero velja, da se noben simpleks iz K ne pojavi v več kot enem paru.

Polje lahko grafično predstavimo tako, da za vsak par $(\tau^p, \sigma^{p+1}) \in V$ narišemo puščico od središča τ do središča σ . Če simpleks ne pripada nobenemu paru, pravimo, da je *kritičen*. Povezavo z diskretnimi Morsovimi funkcijami nam da naslednja definicija.

Definicija 14. Naj bo K simplicialni kompleks in f diskretna Morsova funkcija na K . *Gradientno vektorsko polje* funkcije f , označimo ga z $-\nabla f$, ima za kritične simplekse vse kritične simplekse funkcije f . Če neki σ^p ni kritični simpleks za f , potem obstaja natanko en simpleks α^{p+1} ali β^{p-1} , kjer ima funkcija f nižjo oziroma višjo vrednost. V prvem primeru je v polju $-\nabla f$ par (σ, α) , v drugem primeru pa par (β, σ) .

Oznako $-\nabla f$ uporabljamo zato, ker puščice gradientnega polja prikazujejo smer (strogega) padanja funkcije f .

V vsakem diskretnem vektorskem polju so *poti* zaporedja puščic, pri katerih je začetek vsake naslednje puščice lice kodimenzije 1 simpleksa, ki je bil konec prejšnje puščice. Zaporedje parov $(\tau_1^{p-1}, \sigma_1^p) \dots (\tau_n^{p-1}, \sigma_n^p)$, kjer je $\tau_i \leq \sigma_i$ za $i = 1, \dots, n$ in $\tau_{i+1} \leq \sigma_i$ za $i = 1, \dots, n - 1$, je *p-pot dolžine n*.

Primer 15. Denimo, da je diskretna Morsova funkcija na simplicialnem

kompleksu s slike 13 podana z naslednjimi vrednostmi:

A	B	C	D	E	F	G	AB	AC	BC	BD	BE
7	5	5	2	0	2	2	6	9	6	3	6

CD	DE	DF	EF	EG	FG	ABC	BCD	EFG
3	1	3	1	1	4	8	4	3

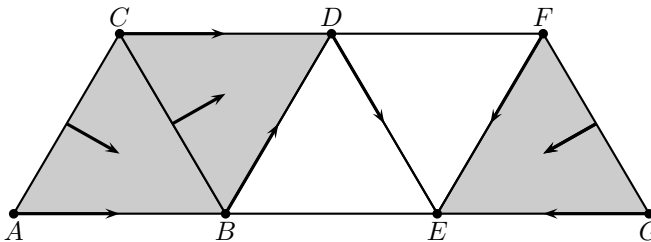
V pripadajočem vektorskem polju so maksimalne 1-poti

- (F, EF) dolžine 1,
- (G, EG) dolžine 1,
- $(C, CD)(D, DE)$ dolžine 2 ter
- $(A, AB)(B, BD)(D, DE)$ dolžine 3

in maksimalne 2-poti

- (FG, EFG) dolžine 1 ter
- $(AC, ABC)(BC, BCD)$ dolžine 2,

medtem ko so 1-simpleksa BE in DF ter 0-simpleks E kritični.



Slika 13. Diskretno vektorsko polje (primer 15).

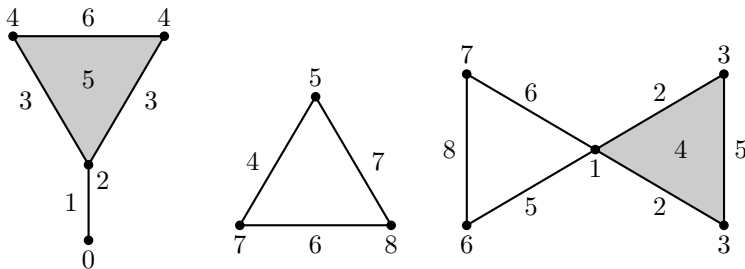
Iz povedanega sledi, da gradientna polja diskretnih Morsovih funkcij nimajo zank, tj. poti iz puščic, ki bi se po nekaj korakih vrnile na začetek, saj vrednosti vzdolž poti strogo padajo in torej začetek poti nikoli ne sovpada s koncem. Da se tudi pokazati (glej izrek 6.19 v [3]), da je vsako vektorsko polje, ki nima zank, gradientno polje kakšne diskretne Morsove funkcije (a očitno ne ene same, saj lahko vrednosti transliramo ali pa jim dodamo šum).

Gradientna polja diskretnih Morsovih funkcij na simplicialnih kompleksih se obnašajo podobno kot gradientna polja gladkih Morsovih funkcij na gladkih mnogoterostih. V obeh primerih govorimo o gradientnih poteh, padajočih diskih ter krajšanjih kritičnih simpleksov in v obeh primerih lahko iz kritičnih simpleksov izluščimo informacijo o homologiji prostora. Robin Forman je bil torej pri iskanju diskretne verzije znane zvezne teorije nadvse uspešen.

Več informacij o Morsovi teoriji lahko bralec najde v knjigi Kevina Knudsona [3], ki bralca v prvi polovici seznanja z gladko Morsovo teorijo, v drugi pa vsebuje poleg diskretne teorije tudi poglavji o algoritmih in aplikacijah.

Kot smo že omenili, lahko z uporabo diskretne Morsove teorije določimo homotopski tip kompleksov \mathcal{C}_n iz primera 9. Z relativno preprostim premislekom lahko vidimo, da je prostor \mathcal{C}_n homotopsko ekvivalenten šopu $(n-1)!$ kopij sfere S^{n-3} . Prostor \mathcal{C}_4 s slike 10 je torej homotopsko ekvivalenten prostoru, ki ga dobimo, če 6 krožnic S^1 zlepimo v eni točki. Podrobnosti lahko zainteresirani bralec najde v Formanovem članku [2], še posebej lepo pa so razložene v že omenjenem poglavju o aplikacijah v Knudsonovi knjigi [3]. Mi pa končajmo z nalogama za preverjanje razumevanja.

Naloga 3. Katere od funkcij s slike 14 so Morsove? Za tiste, ki so, nariši pripadajoče diskretno vektorsko polje.



Slika 14. Katere od zgornjih funkcij so Morsove (naloga 3)?

Naloga 4. Poišči še kakšno diskretno Morsovo funkcijo, ki je Morsova funkcija diskretnega vektorskega polja s slike 13. Poskusi najti kakšno, ki je ne dobiš iz dane s prištevanjem konstante.

Rešitve nalog

Rešitev naloge 1. Za vsak podkompleks bomo našteali vse simplekse, ki jih vsebuje:

$$\begin{aligned} \text{cl}(B) &= \{B\}, \\ \text{cl}(BD) &= \{B, D, BD\}, \\ \text{cl}(BDF) &= \{B, D, F, BD, BF, DF, BDF\}, \\ \text{st}(B) &= \{B, AB, BC, BD, BF, ABF, BCD, BDF\}, \\ \text{st}(BD) &= \{BD, BCD, BDF\}, \\ \text{st}(BDF) &= \{BDF\}, \\ \text{lk}(B) &= \{A, C, D, F, AF, CD, DF\}, \\ \text{lk}(BD) &= \{C, F\}, \\ \text{lk}(BDF) &= \{\}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 2. Baricentrična subdivizija ravninske triangulacije ima tri vrste oglišč. Prva so bila vsebovana že v originalnem simplicialnem kompleksu. Druga so središča daljic iz originalnega simplicialnega kompleksa in tretja so središča trikotnikov iz originalnega simplicialnega kompleksa. Če vsako od teh treh skupin pobarvamo z drugo barvo, dobimo iskano barvanje, v katerem ni sosedov istih barv.

Za drugi del opazimo, da vsak trikotnik razpade na 6 manjših trikotnikov, ki jih očitno lahko pobarvamo izmenično z dvema barvama, belo in črno. Potrebno se je le še prepričati, da lahko za vsak trikotnik izberemo eno od obeh možnih izmeničnih barvanj malih trikotnikov tako, da je usklajeno s sosednjimi trikotniki. To najlažje naredimo tako, da vse trikotnike v prvotnem simplicialnem kompleksu orientiramo v pozitivni smeri (nasprotni vrtenju urnega kazalca). Orientacija na notranjosti trikotnika določi tudi orientacijo na njegovem robu, pri čemer je vsak rob, ki pripada dvema trikotnikoma, v enem trikotniku orientiran v eno smer, v drugem pa ravno obratno. Po subdiviziji vsak tak rob razpade na dve polovici in v vsakem od trikotnikov, ki se v tem robu stikata, mu pripadata dva mala trikotnika. Če pobarvamo te male trikotnike tako, da je glede na podedovano orientacijo

prvi mali trikotnik pobarvan belo in drugi črno, potem bo vsak mali trikotnik iz sosednjega trikotnika pobarvan ravno obratno (črni bo imel belega soseda, beli pa črnega). Tako barvanje bo zadoščalo pogojem naloge.

Rešitev naloge 3. Prva in tretja funkcija sta Morsovi, druga pa ni, ker ima npr. 0-simpleks z vrednostjo 8 višjo vrednost kot 1-simpleksa, ki jima pripada (torej imamo dve izjemi namesto največ ene).

Rešitev naloge 4. En možen nabor vrednosti funkcije f je podan v spodnji tabeli.

A	B	C	D	E	F	G	AB	AC	BC	BD	BE
8	6	8	4	1	5	3	7	9	7	5	7

CD	DE	DF	EF	EG	FG	ABC	BCD	EFG
7	3	6	4	2	7	8	6	6

LITERATURA

- [1] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics **184** (1998), 90–145.
- [2] R. Forman, *A User's Guide to Discrete Morse Theory*, Sémin. Lothar. Combin. **48** (2002), Art. B48c, 1–35 (electronic) MR 1939695.
- [3] K. P. Knudson, *Morse Theory: smooth and discrete*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015.
- [4] M. Morse, *The foundations of a theory in the calculus of variations in the large*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 213–274.
- [5] M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large*, American Mathematical Society Colloquium Publication **18**, New York, 1934.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>