

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **29** (2001/2002)

Številka 4

Strani 197

Dušan Murovec:

NALOGA ZA MATURANTE

Ključne besede: naloge, matematika, teorija števil, deljivost.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/29/1482-Murovec.pdf>

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NALOGA ZA MATURANTE

Dokažite, da je za poljubno praštevilo $p > 5$ številska vrednost polinoma $p^4 - 50p^2 + 49$ deljiva z 2880. (Naloga s sprejemnega izpita na Moskovsko državno univerzo leta 1998.)

Dušan Murovec

Rešitev je na str. 222.

NALOGA ZA MATURANTE – Rešitev s str. 197

Polinom in dani delitelj razstavimo:

$$p^4 - 50p^2 + 49 = (p^2 - 1)(p^2 - 49) = (p - 1)(p + 1)(p - 7)(p + 7) \quad (1)$$
$$2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Če je p praštevilo, $p \neq 2, 3, 5$, so na desni v (1) vsa števila soda, dve od njih deljivi s 4 (dva para sosednjih sodih števil). Od treh zaporednih števil $p - 1, p, p + 1$ je eno deljivo s 3. Ker to ni p , je produkt $(p - 1)(p + 1)$ deljiv s 3. Števili $p - 7$ in $p + 7$ imata pri deljenju s 5 enaka ostanka kot $p - 2$ in $p + 2$. Zato je število $(p - 1)(p + 1)(p - 7)(p + 7)$ deljivo s 5, če je s 5 deljivo število $(p - 1)(p + 1)(p - 2)(p + 2)$. To pa je res, saj je eno od petih zaporednih števil $p - 2, p - 1, p, p + 1, p + 2$ deljivo s 5. Ker je $p > 5$, to ni p .

Dušan Murovec, prir. v ured.