

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



*PODIPLOMSKI ŠTUDIJ  
GRADBENIŠTVA*

*DOKTORSKI ŠTUDIJ*

Kandidat:

**URBAN RODMAN, univ. dipl. inž. grad.**

**ANALIZA NOSILNOSTI PROSTORSKIH OKVIRNIH  
KONSTRUKCIJ Z UPOŠTEVANJEM MATERIALNIH IN  
GEOMETRIJSKIH NEPOPOLNOSTI**

Doktorska disertacija štev.: 191

**BUCKLING ANALYSIS OF SPACE FRAME  
STRUCTURES CONSIDERING MATERIAL AND  
GEOMETRICAL IMPERFECTIONS**

Doctoral thesis No.: 191

Temo doktorske disertacije je odobril Senat Univerze v Ljubljani na svoji 16. seji dne  
4. julija 2007 in imenoval  
mentorja doc.dr. Dejana Zupana,  
somentorja izr.prof.dr. Igorja Planinca.

Ljubljana, 1. april 2009

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



Komisijo za oceno ustreznosti teme doktorske disertacije v sestavi  
doc.dr. Dejan Zupan,  
izr.prof.dr. Igor Planinc,  
izr.prof.dr. Jože Korelc,  
prof. dr. Miha Boltežar, UL FS,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 6. redni seji dne  
28. marca 2007.

Komisijo za oceno doktorske disertacije v sestavi  
prof. dr. Miha Boltežar, UL FS,  
izr.prof.dr. Gordan Jelenić, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci,  
izr.prof.dr. Jože Korelc,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 24. redni seji dne  
28. januarja 2009.

Komisijo za zagovor doktorske disertacije v sestavi  
prof. dr. Bojan Majes, dekan, predsednik  
doc.dr. Dejan Zupan,  
izr.prof.dr. Igor Planinc,  
prof. dr. Miha Boltežar, UL FS,  
izr.prof.dr. Gordan Jelenić, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci,  
izr.prof.dr. Jože Korelc,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 25. redni seji dne  
25. februarja 2009.

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



## IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **URBAN RODMAN, univ. dipl. inž. grad.**, izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom: **»ANALIZA NOSILNOSTI PROSTORSKIH OKVIRNIH KONSTRUKCIJ Z UPOŠTEVANJEM MATERIALNIH IN GEOMETRIJSKIH NEPOPOLNOSTI«.**

Ljubljana, 01. april 2009

.....  
(podpis)

## **BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK**

<b>UDK</b>	<b>624.04:691:620.1:(043.3)</b>
<b>Avtor:</b>	<b>Urban Rodman, univ. dipl. inž. grad.</b>
<b>Mentor:</b>	<b>doc.dr. Dejan Zupan</b>
<b>Somentor:</b>	<b>izr.prof.dr. Igor Planinc</b>
<b>Naslov:</b>	<b>Analiza nosilnosti prostorskih okvirnih konstrukcij z upoštevanjem materialnih in geometrijskih nepopolnosti</b>
<b>Obseg in oprema:</b>	<b>123 str., 11 pregl., 93 sl., 169 en.</b>
<b>Ključne besede:</b>	<b>Reissnerjev nosilec, uklon, postkritično obnašanje, delaminacije, kontakt, nelinearen material</b>

### **Izvleček**

V doktorski disertaciji predstavljamo računski postopek za analizo togosti, duktilnosti, nosilnosti in postkritične nosilnosti materialno nelinearnih prostorskih okvirjev. Podrobno se ukvarjamo z vplivom materialnih in geometrijskih nepopolnosti okvirjev na njihovo nosilnost. Upoštevali smo razpokanost elementov, vzdolžno delaminiranost stebrov in nosilcev in nepopolnost stika med lamelami. Teoretično ozadje disertacije je razdeljeno na štiri dele. V prvem delu implementiramo metodo ločne dolžine. Tako omogočimo sledenje obtežno-deformacijskim potem z numerično učinkovitimi končnimi elementi prostorskih nosilcev, ki so se izkazali za uspešne tudi pri materialno nelinearnih konstrukcijah. Robustnost osnovnega elementa je bila pri sledenju potem ohranjena z doslednim upoštevanjem nelinearnosti konfiguracijskega prostora zasukov in z njim povezanih rotacijskih deformacij. Določanje kritičnih točk zajema drugi del disertacije, kjer se v kritičnih točkah ukvarjamo z njihovo klasifikacijo in iskanjem nadaljnjih poti. Analiziramo lahko pojave kot so uklon v ravnini, bočna zvrnitev ravnih in ukrivljenih nosilcev, torzijska nestabilnost konstrukcij in kombinacije teh pojavov. Uklon elementov pride še posebej do izraza pri konstrukcijah z začetnimi nepopolnostmi. Numerična formulacija je zasnovana tako, da lahko upoštevamo različne geometrijske in materialne nepopolnosti. Z vzdolžno razpokanostjo elementov - delaminacijami se ukvarjamo v tretjem delu. Nepopolnost v smislu delaminacije elementa modeliramo z več elementi ob upoštevanju ustreznih robnih pogojev. Izpeljemo tudi analitično rešitev kritičnih sil ravninskih delaminiranih konstrukcij ob upoštevanju strižnega vpliva ter pokažemo popolno ujemanje numeričnih in analitičnih rešitev. V zadnjem delu disertacije obravnavamo kontakt med posameznimi lamelami linijskih elementov. Konstitucijski zakon stika med lamelami modeliramo s prostorskimi nelinearnimi vzmetmi. Tako poleg rešitve problema prekrivanja lamela delaminiranih elementov omogočimo natančno modeliranje prostorskih kompozitnih konstrukcij. Vsako poglavje disertacije vsebuje številne numerične primere, s katerimi preverimo ustreznost vgrajenih algoritmov. Povzamemo referenčne primere iz literature, prikazujemo pa tudi naše lastne, ki prikazujejo zmogljivost našega postopka tudi za zelo zahtevne začetne geometrije konstrukcij in nelinearen material. Nalogo zaključimo s tremi obsežnimi numeričnimi študijami: nosilnosti lesenih krožnih lokov, analize z jeklenimi ploščami ojačanih armiranobetonskih nosilcev ob prisotnosti delaminacije in analize kompozitnega lesenega nosilca.

## **BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION**

**UDC** 624.04:691:620.1:(043.3)  
**Author:** Urban Rodman  
**Supervisor:** Asist. Prof. Dejan Zupan  
**Co-supervisor:** Asoc. Prof. Igor Planinc  
**Title:** Buckling analysis of space frame structures considering material and geometrical imperfections  
**Notes:** 123 p., 11 tab., 93 fig., 169 eq.  
**Key words:** Reissner's beam, buckling, post-critical behaviour, delaminations, contact, nonlinear material

### **Abstract**

In dissertation we present the numerical method for analysis of the ductility, bearing capacity and post-critical behaviour of materially nonlinear space structures. We focus specially in analyzing the influence of different material and geometrical imperfections on the bearing capacity of beam structures. Imperfections include the study of cracks, delaminations of beams and columns and the contact problem between the lamina. Theoretical background of the presented dissertation can be divided in four parts. In first part, the modified arc-length method was implemented on adapted to spatial beam element based on strain measures. This procedure allows us to trace load-deflection paths with spatial beam finite elements, which proved to be very efficient at handling materially nonlinear structures. The efficiency and the robustness of the formulation was preserved by properly considering the nonlinearities of the configuration space of three dimensional of rotations and the related rotational deformations. The second part includes the determination of critical points. Here we deal with both, classification of the critical points and switching of the branches at the bifurcation points. Therefore, we are able to analyze the phenomena such as in-plane and out-of-plane buckling of straight and curved planar beams, torsional buckling of spatial beams and the combination of these phenomena. Buckling failure of bearing elements is even more substantial in case of structures with initial imperfections. Our numerical formulation allows us to take into consideration an arbitrary nonlinear material model, as well as other imperfections, such as delaminations. Delaminations in structures are modeled in third part of dissertation as the separate elements for which the proper boundary conditions must be considered. We also derive the analytical solutions for buckling loads of planar beams with multiple delaminations. The results show that analytical solutions which take shear into consideration are in total agreement with our numerical results. In the last part of the dissertation the contact problem at delamination is resolved using spatial springs between delaminated elements. Nonlinear constitutive law for springs is assumed to describe the contact of the laminae. Different constitutive models can be used for each local direction at the cross-sections. An arbitrary constitutive spring model allows us to solve the problem of overlapping of delaminated layers and to model spatial composite structures. Each chapter includes several numerical examples, which confirm, that all of the algorithms were built in our spatial formulation efficiently. Many examples are verified with respect to the relevant problems taken from literature, but we also show results of our own examples which include demanding geometrical and material nonlinearities. In this manner, we conclude the dissertation with three extensive numerical studies: optimal lateral support positioning and lateral buckling capacity of curved timber arches, bearing capacity of reinforced concrete beams with additional steel-plate reinforcement with possible delaminations and analysis of nailed composite timber beam.

## *Zahvale*

# Vsebina

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>PROSTORSKI DEFORMACIJSKI LINIJSKI ELEMENT</b>	<b>4</b>
2.1	Uvod . . . . .	4
2.2	Pregled stanja na področju linijskih elementov . . . . .	4
2.3	Osnovne enačbe prostorskega nosilca . . . . .	5
2.3.1	Geometrijski model nosilca . . . . .	5
2.3.2	Kinematične enačbe . . . . .	7
2.3.3	Ravnotežne enačbe . . . . .	7
2.3.4	Konstitucijske enačbe . . . . .	8
2.3.4.1	Linearni materialni model . . . . .	9
2.3.4.2	Nelinearni materialni modeli . . . . .	9
2.3.5	Konsistenčne enačbe . . . . .	11
2.3.6	Enačbe nosilca . . . . .	12
2.4	Linearizacija enačb . . . . .	13
2.4.1	Osnovne ideje . . . . .	13
2.4.2	Linearizacija rotacijske matrike . . . . .	14
2.4.3	Linearizirane enačbe nosilca . . . . .	16
2.4.4	Diskretizacija . . . . .	16
2.4.5	Iterativno reševanje enačb nosilca . . . . .	17
2.4.6	Reševanje enačb na nivoju konstrukcije . . . . .	19
<b>3</b>	<b>METODA LOČNE DOLŽINE</b>	<b>21</b>
3.1	Uvod . . . . .	21
3.2	Pregled stanja na področju sledenja obtežno deformacijskim potem . . . . .	21
3.3	Sledenje obtežno-deformacijski krivulji . . . . .	22

3.3.1	Prediktor . . . . .	24
3.3.2	Korektor . . . . .	25
3.3.3	Kontrola koraka . . . . .	26
3.3.4	Metoda ločne dolžine na nelinearnih konfiguracijskih prostorih . . . . .	26
3.4	Numerični primeri . . . . .	27
3.4.1	Vpeti krožni lok . . . . .	27
3.4.2	Postkritično obnašanje zvezdaste kupole . . . . .	29
<b>4</b>	<b>KRITIČNE TOČKE</b>	<b>33</b>
4.1	Uvod . . . . .	33
4.2	Določanje kritičnih točk . . . . .	33
4.3	Klasifikacija kritične točke . . . . .	34
4.3.1	Nadaljevanje po kritični točki . . . . .	35
4.3.2	Posebnosti zaradi neaditivnih zasukov . . . . .	37
4.4	Numerični primeri . . . . .	37
4.4.1	Bočna zvrnitev visokega previsnega nosilca . . . . .	38
4.4.2	Analiza kolenastega nosilca . . . . .	40
4.4.3	Zviti previsni nosilec . . . . .	44
4.4.4	Krožni lok . . . . .	48
<b>5</b>	<b>DELAMINACIJE</b>	<b>52</b>
5.1	Uvod . . . . .	52
5.2	Računski model delaminiranega nosilca . . . . .	54
5.3	Analitična rešitev uklonskih sil . . . . .	55
5.4	Numerični primeri . . . . .	62
5.4.1	Primerjava z analitičnimi rešitvami . . . . .	63
5.4.2	Vpliv dolžine in lege delaminacije; ena delaminacija . . . . .	64
5.4.3	Vpliv števila delaminacij . . . . .	66
5.4.4	Postkritično obnašanje prostoležečega delaminiranega stebra . . . . .	67
5.4.5	Delaminirani krožni lok . . . . .	70
5.4.6	Delaminirani zaviti nosilec . . . . .	72
<b>6</b>	<b>DISKRETNE NELINEARNE VEZI</b>	<b>75</b>
6.1	Uvod . . . . .	75
6.2	Pregled stanja na področju modeliranja kontaktnih problemov . . . . .	75



6.3	Računski model točkovne vzmeti . . . . .	77
6.4	Računski primeri . . . . .	80
6.4.1	Nosilec z elastično točkovno podporo . . . . .	80
6.4.2	Prostoležeči nosilec podprt z vzmetmi . . . . .	81
6.4.3	Delaminirani konzolni nosilec . . . . .	83
6.4.4	Prostoležeči delaminirani nosilec z osno obtežbo . . . . .	85
<b>7</b>	<b>NUMERIČNE ŠTUDIJE</b>	<b>88</b>
7.1	Uvod . . . . .	88
7.2	Bočna zvrnitev lesenega loka . . . . .	88
7.3	Armiranobetonski nosilci, ojačeni z jeklenimi lamelami . . . . .	95
7.3.1	Vpliv enostranske ojačitve na postkritično obnašanje stebra . . . . .	96
7.3.2	Vpliv obojestranske ojačitve . . . . .	99
7.3.3	Vpliv delaminacije na ojačitev stebra . . . . .	99
7.4	Leseni kompozitni nosilec . . . . .	102
7.4.1	Eksperiment . . . . .	102
7.4.2	Numerična analiza . . . . .	103
7.4.3	Ojačitev lesenega nosilca s polimernimi trakovi . . . . .	106
<b>8</b>	<b>ZAKLJUČKI</b>	<b>108</b>
<b>9</b>	<b>SUMMARY</b>	<b>110</b>
<b>10</b>	<b>VIRI</b>	<b>112</b>

## Seznam slik

Slika 2.1	Model prostorskega nosilca. . . . .	6
Figure 2.1	Model of the three-dimensional beam. . . . .	6
Slika 2.2	Ravnotežje na elementarnem delu nosilca. . . . .	8
Figure 2.2	Equilibrium of an infinitesimal part of the beam. . . . .	8
Slika 2.3	Konstitucijski model betona in jekla. . . . .	10
Figure 2.3	Constitutive model of concrete and steel. . . . .	10
Slika 2.4	Konstitucijski model za polimerni material in za les. . . . .	11
Figure 2.4	Constitutive model of composite and timber. . . . .	11
Slika 2.5	Shemi 3 in 4-točkovnega končnega elementa. . . . .	17
Figure 2.5	Scheme of finite elements with 3 and 4 internal points. . . . .	17
Slika 2.6	Shema sestavljanja tangentne matrike konstrukcije. . . . .	20
Figure 2.6	Scheme of generation of the structural tangent-stiffness matrix. . . . .	20
Slika 3.1	Vpeti krožni lok z asimetrično obtežbo. . . . .	28
Figure 3.1	Circular arch subjected to asymmetric force. . . . .	28
Slika 3.2	Obtežno deformacijska krivulja sredinske točke, pomik v vertikalni smeri. . . . .	28
Figure 3.2	Load deflection path, vertical deflection of midpoint. . . . .	28
Slika 3.3	Geometrijski in materialni podatki zvezdaste kupole. . . . .	29
Figure 3.3	Geometrical and material parameters of the star-shaped frame. . . . .	29
Slika 3.4	Zveza med silo in pomiki sredinske točke zvezdaste kupole. . . . .	30
Figure 3.4	Load deflection path at the midpoint of the star-shaped frame. . . . .	30
Slika 3.5	Zveza med silo in horizontalnimi pomiki točke B zvezdaste kupole. . . . .	30
Figure 3.5	Load deflection path at the point B on the star-shaped frame. Horizontal direction. . . . .	30
Slika 3.6	Zveza med silo in vertikalnimi pomiki točke B zvezdaste kupole. . . . .	31
Figure 3.6	Load deflection path at the point B on the star-shaped frame. Vertical direction. . . . .	31
Slika 3.7	Deformirane oblike zvezdaste kupole. . . . .	32

Figure 3.7	Deformed shapes of the star-shaped frame. . . . .	32
Slika 4.1	Geometrijski in materialni podatki visokega previsnega nosilca. . . . .	38
Figure 4.1	Geometrical and material data of high cantilever. . . . .	38
Slika 4.2	Zveza med silo in pomiki prostega konca previsnega nosilca. . . . .	39
Figure 4.2	Load deflection path of a free end of a cantilever. . . . .	39
Slika 4.3	Deformiran previsni nosilec za različne obtežne faktorje. . . . .	39
Figure 4.3	Deformed shape of the cantilever for different loading factors. . . . .	39
Slika 4.4	Obtežno deformacijske poti za različno število elementov. . . . .	40
Figure 4.4	Load deflection paths for various mesh densities. . . . .	40
Slika 4.5	Kolenasti nosilec pod konservativno obtežbo. . . . .	40
Figure 4.5	Right-angle frame under conservative loading. . . . .	40
Slika 4.6	Obtežno deformacijska pot obtežene točke na nosilcu za smeri X in Y. . . . .	41
Figure 4.6	Load deflection path of a loading point. X and Y direction. . . . .	41
Slika 4.7	Del obtežno deformacijske poti. Primerjava mrež in elementov. . . . .	42
Figure 4.7	Part of the load deflection path. Comparisson of various meshes and element types. . . . .	42
Slika 4.8	Del obtežno deformacijske poti. Primerjava za različni velikosti korakov. . . . .	42
Figure 4.8	Part of the load deflection path. Comparisson of two different step sizes. . . . .	42
Slika 4.9	Sekundarna veja obtežno-deformacijske poti kolenastega nosilca. . . . .	43
Figure 4.9	Bifurcation path of the right-angle frame. . . . .	43
Slika 4.10	Obtežno deformacijska pot za pomike iz ravnine. . . . .	43
Figure 4.10	Load deflection path for displacements in out-of-plane direction. . . . .	43
Slika 4.11	Deformirane lege kolenastega nosilca po primarni in sekundarni veji. . . . .	44
Figure 4.11	Deformed shapes of right-angle frame for primary and bifurcation path. . . . .	44
Slika 4.12	Zviti previsni nosilec s točkovo obtežbo na prostem koncu. . . . .	45
Figure 4.12	Twisted beam with point load at the free end. . . . .	45
Slika 4.13	Obtežno deformacijska pot zavutih nosilcev. . . . .	46
Figure 4.13	Load-deflection path at the free end of a twisted beam. . . . .	46
Slika 4.14	Pomiki v ravnini YZ osno obremenjenih zavutih nosilcev. . . . .	47
Figure 4.14	Displacements in YZ plane for axially loaded twisted beam. . . . .	47
Slika 4.15	Postkritične deformirane oblike osno obremenjenih zavutih nosilcev. . . . .	47
Figure 4.15	Deformed shapes of twisted beams. . . . .	47
Slika 4.16	Bočno zvrnitev krožnega loka. . . . .	48
Figure 4.16	Lateral buckling of circular arch. . . . .	48

Slika 4.17	Obtežno deformacijska pot za krožni lok. . . . .	48
Figure 4.17	Load deflection path at the midpoint of circular arch. . . . .	48
Slika 4.18	Obtežno deformacijska pot za krožni lok. Sekundarna veja. . . . .	49
Figure 4.18	Load deflection path at the midpoint of circular arch. Bifurcation path. . . . .	49
Slika 4.19	Obtežno deformacijska pot srednje točke krožnega loka. Desna podpora vrtljiva okrog osi X in Z. . . . .	50
Figure 4.19	Load deflection path at the midpoint of circular arch. Allowed rotations in two directions at one end. . . . .	50
Slika 4.20	Deformirane oblike za različno podprta krožna loka. . . . .	50
Figure 4.20	Deformed shapes of arches with different supports. . . . .	50
Slika 5.1	Model nosilca z dvema delaminacijama enake dolžine. . . . .	54
Figure 5.1	Beam with two equidistant delaminations. . . . .	54
Slika 5.2	Model nosilca z zamaknjenima delaminacijama. . . . .	55
Figure 5.2	Beam with two overlapping delaminations. . . . .	55
Slika 5.3	Zlaganje togostne matrike pri vzporednih in zaporednih delaminacijah. . . . .	56
Figure 5.3	Tangent stiffness matrix for beam with parallel and overlapping delaminations. . . . .	56
Slika 5.4	Model ravnega nosilca z vzporednimi delaminacijami. . . . .	57
Figure 5.4	Straight beam with parallel delaminations. . . . .	57
Slika 5.5	Različni tipi podpiranja delaminiranega nosilca. . . . .	62
Figure 5.5	Supporting types of delaminated beam. . . . .	62
Slika 5.6	Normirane uklonske sile za (a) prostoležeči in (b) nevtljiivo vpeti nosilec z eno delaminacijo v odvisnosti od relativne dolžine delaminacije $l_d$ . . . . .	65
Figure 5.6	Normalized buckling loads for simply supported beam (a) and clamped beam (b) with one delamination vs. relative delamination height $l_d$ . . . . .	65
Slika 5.7	Uklonske oblike prostoležečega stebra z eno delaminacijo, $r_2 = 0.2$ . . . . .	65
Figure 5.7	Buckling modes of a simply supported beam with one delamination, $r_2 = 0.2$ . . . . .	65
Slika 5.8	Normirane uklonske sile v odvisnosti od dolžine delaminacije $l_d$ in števila delaminacij $n$ . . . . .	66
Figure 5.8	Normalized buckling load vs. length of delamination $l_d$ and number of delam- inations $n$ . . . . .	66
Slika 5.9	Uklonske oblike in normirane uklonske sile prostoležeče podprtih stebrov z dvema delaminacijama različnih relativnih dolžin. . . . .	67
Figure 5.9	Buckling shapes and normalized buckling loads of a simply supported beam with two delaminations of different relative lengths. . . . .	67
Slika 5.10	Model delaminiranega nosilca. . . . .	68

Figure 5.10	Model of a delaminated beam. . . . .	68
Slika 5.11	Obtežno deformacijska postkritična pot karakterističnih točk na delaminiranem nosilcu. . . . .	68
Figure 5.11	Load deflection paths of characteristic points of delaminated beam. . . . .	68
Slika 5.12	Obtežno deformacijska pot karakterističnih točk za drugi tip nepopolnosti. . . . .	69
Figure 5.12	Load deflection paths for the second type of initial imperfection. . . . .	69
Slika 5.13	Obtežno deformacijska pot karakterističnih točk za tretji tip nepopolnosti. . . . .	69
Figure 5.13	Load deflection paths for the third type of initial imperfection. . . . .	69
Slika 5.14	Krožni lok z začetno delaminacijo. . . . .	70
Figure 5.14	Arch with initial delamination. . . . .	70
Slika 5.15	Obtežno deformacijska krivulja loka, delaminacije ob kroni loka. . . . .	71
Figure 5.15	Load deflection path of the arch, delamination at the middle. . . . .	71
Slika 5.16	Obtežno deformacijska krivulja loka, delaminacije ob podporah. . . . .	71
Figure 5.16	Load deflection path of the arch, delamination near supports. . . . .	71
Slika 5.17	Obtežno deformacijska krivulja loka, daljša delaminacija. . . . .	72
Figure 5.17	Load deflection path of the arch, longer delamination. . . . .	72
Slika 5.18	Model zavitega delaminiranega nosilca. . . . .	73
Figure 5.18	Model of a pretwisted delaminated column. . . . .	73
Slika 5.19	Obtežno deformacijske krivulje zavitih nosilcev. . . . .	73
Figure 5.19	Load deflection paths for twisted columns. . . . .	73
Slika 5.20	Postkritične oblike deformiranih zavitih nosilcev. . . . .	73
Figure 5.20	Postcritical deformed shapes of twisted columns. . . . .	73
Slika 6.1	Uporabljeni modeli za modeliranje kontakta iz literature. . . . .	77
Figure 6.1	Different bridging models from literature. . . . .	77
Slika 6.2	Odvisnost med relativnim pomikom in silo v vzmeti. . . . .	78
Figure 6.2	Bilinear spring model. . . . .	78
Slika 6.3	Nosilca z vozliščema, povezanimi s prostorsko vzmetjo. . . . .	78
Figure 6.3	Separated beams, connected with spring. . . . .	78
Slika 6.4	Shema upoštevanja vezi v togostni matriki konstrukcije in desnih straneh. . . . .	80
Figure 6.4	Additional elements in tangent-stiffness matrix due to bridging. . . . .	80
Slika 6.5	Konzolni nosilec s podajno podporo in obtežbo v prostem krajišču. . . . .	81
Figure 6.5	Cantilever beam with elastic support and loading at free end. . . . .	81
Slika 6.6	Skica prostoležečega nosilca podprtega z vzmetmi. . . . .	81

Figure 6.6	Simply supported beam model on elastic support. . . . .	81
Slika 6.7	Diagrami notranjih momentov in pomikov nosilca na elastični podlagi. . . . .	82
Figure 6.7	Diagrams for moments and deflections of a simply supported beam. . . . .	82
Slika 6.8	Skica delaminirane konzole in vhodni podatki. . . . .	83
Figure 6.8	Delaminated beam with numerical data. . . . .	83
Slika 6.9	Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Prosti lameli. . . . .	84
Figure 6.9	Load deflection path of the cantilever. Free lamina. . . . .	84
Slika 6.10	Skica deformirane delaminirane konzole. Prosti lameli. . . . .	84
Figure 6.10	Deformed shape of the delaminated cantilever. Free lamina. . . . .	84
Slika 6.11	Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Različne togosti vzmeti. . . . .	85
Figure 6.11	Load deflection path of a cantilever. Different spring stiffnesses. . . . .	85
Slika 6.12	Skica delaminirane konzole. Vzmeti različnih togosti. . . . .	85
Figure 6.12	Deformed shape of the cantilever. Different spring stiffnesses. . . . .	85
Slika 6.13	Delaminirani nosilec z vzmetmi med lamelama. . . . .	86
Figure 6.13	Delaminated beam with springs between layers. . . . .	86
Slika 6.14	Obtežno deformacijska pot prostoležečega podprtega nosilca z in brez upoštevanja kontakta. . . . .	86
Figure 6.14	Load deflection path of a simply supported beam with/without springs. . . . .	86
Slika 6.15	Del obtežno deformacijske poti prostoležečega nosilca z in brez upoštevanja kontakta. . . . .	87
Figure 6.15	Part of the load deflection path of a simply supported beam with/without springs. . . . .	87
Slika 7.1	Krožni lok pod porazdeljeno vertikalno obtežbo. . . . .	88
Figure 7.1	Geometrical and loading data. . . . .	88
Slika 7.2	Spreminjanje bočne nosilnosti z relativno višino loka. . . . .	89
Figure 7.2	Lateral buckling capacity vs. arch height. . . . .	89
Slika 7.3	Spreminjanje bočne nosilnosti z relativno višino loka. . . . .	90
Figure 7.3	Lateral buckling capacity vs. arch height. . . . .	90
Slika 7.4	Prvih šest uklonskih oblik krožnega loka. . . . .	90
Figure 7.4	First six buckling modes of the arch. . . . .	90
Slika 7.5	Krožni lok s $H_{rel} = 0.2$ . Uklonske oblike in normirani kritični obtežni faktorji za optimalno in ekvidistantno podprt lok (ena in dve podpori). . . . .	91
Figure 7.5	Arch with $H_{rel} = 0.2$ . Buckling shapes and normalized buckling loads for optimal and equidistant supports (one and two supports). . . . .	91

Slika 7.6	Krožni lok s $H_{rel} = 0.2$ . Uklonske oblike in normirani kritični obtežni faktorji za optimalno in ekvidistantno podprt lok (tri in štiri podpore). . . . .	92
Figure 7.6	Arch with $H_{rel} = 0.2$ . Buckling shapes and normalized buckling loads for optimal and equidistant supports (three and four supports). . . . .	92
Slika 7.7	Krožni lok z ekvidistantnimi bočnimi podporami. Odvisnost normiranega kritičnega obtežnega faktorja od relativne višine krožnega loka. . . . .	93
Figure 7.7	Arch with equidistant supports. Normalized buckling load vs. relative height. . .	93
Slika 7.8	Krožni lok z optimalnimi legami bočnih podpor. Odvisnost normiranega obtežnega faktorja od relativne višine krožnega loka. . . . .	93
Figure 7.8	Arch with optimal supports. Normalized buckling load vs. relative height. . . . .	93
Slika 7.9	Odvisnost kritičnega obtežnega faktorja od relativne višine loka za krožne loke s štirimi ekvidistantnimi in štirimi optimalno postavljenimi bočnimi podporami. .	94
Figure 7.9	Buckling factor vs. relative arch height with four equidistant and optimal supports.	94
Slika 7.10	Model ojačanega nosilca z delaminacijo. . . . .	95
Figure 7.10	Beam model with additional steel plate and delamination. . . . .	95
Slika 7.11	Obtežno-deformacijske krivulje konzole z različnimi tipi ojačitev. . . . .	96
Figure 7.11	Load deflection paths of the cantilever with additional reinforcement. . . . .	96
Slika 7.12	Obtežno-deformacijske krivulje prostoležečega nosilca z različnimi tipi ojačitev. .	97
Figure 7.12	Load deflection paths of the simply supported beam with additional reinforcement.	97
Slika 7.13	Obtežno-deformacijske krivulje ojačane in neojačane konzole za različne začetne nepopolnosti. . . . .	98
Figure 7.13	Load deflection paths of the cantilever with/without additional reinforcement including imperfections. . . . .	98
Slika 7.14	Obtežno-deformacijske krivulje sredine ojačanega in neojačanega prostoležečega nosilca za različne začetne nepopolnosti. . . . .	98
Figure 7.14	Load deflection paths of the simply supported beam with/without additional reinforcement including imperfections. . . . .	98
Slika 7.15	Obtežno-deformacijske krivulje enostransko in obojestransko ojačene konzole za različne začetne nepopolnosti. . . . .	99
Figure 7.15	Load deflection paths of the cantilever with one-sided and both-sided additional reinforcement including imperfections. . . . .	99
Slika 7.16	Obtežno-deformacijske krivulje konzole z nedelaminirano in delaminirano enostransko ojačitvijo. . . . .	100
Figure 7.16	Load deflection paths of the cantilever with additional reinforcement with/without delamination. . . . .	100
Slika 7.17	Obtežno-deformacijske krivulje konzole z nedelaminirano (modro) in delaminirano (zeleno) obojestransko ojačitvijo. . . . .	101

Figure 7.17	Load deflection paths of the cantilever with additional both-sided reinforcement with/without delamination. . . . .	101
Slika 7.18	Obtežno deformacijske krivulje sredine prostoležečega stebra z nedelaminirano (modro) in delaminirano (zeleno) obojestransko ojačitvijo. . . . .	101
Figure 7.18	Load deflection paths of the simply supported beam with additional both-sided reinforcement with/without delamination. . . . .	101
Slika 7.19	Leseni kompozitni nosilec in geometrijski vhodni podatki. . . . .	102
Figure 7.19	Timber composite beam and geometrical data. . . . .	102
Slika 7.20	Konstitucijski zakon za en žebelj v strigu in nategu. . . . .	103
Figure 7.20	Constitutive law for one nail: shear and tension. . . . .	103
Slika 7.21	Vertikalni pomiki kompozitnega nosilca za različne obtežbe. . . . .	104
Figure 7.21	Vertical deflections of a composite beam for various loads. . . . .	104
Slika 7.22	Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za različne nivoje obtežbe. . . . .	104
Figure 7.22	Bond slip of a composite timber beam, various loads. . . . .	104
Slika 7.23	Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za večje obtežbe. . . . .	105
Figure 7.23	Bond slip of a composite timber beam, higher loads. . . . .	105
Slika 7.24	Ojačani leseni nosilec in geometrijski vhodni podatki. . . . .	106
Figure 7.24	Reinforced timber beam and geometrical data. . . . .	106
Slika 7.25	Obtežno deformacijske krivulja za lesen nosilec s polimerno ojačitvijo in kompozitni nosilec. . . . .	106
Figure 7.25	Load deflection path for beam with fiber-reinforcement and composite beam. . . . .	106



## Seznam preglednic

Preglednica 4.1	Normirane uklonske sile za predhodno zavite nosilce v odvisnosti od števila elementov. . . . .	45
Table	4.1 Normalized buckling loads for twisted beam vs. rotation angle and number of elements. . . . .	45
Preglednica 5.1	Normirane uklonske sile prostoležečega nosilca z eno delaminacijo. . . . .	64
Table	5.1 Normalized buckling loads of a simply supported beam with one delamination. . . . .	64
Preglednica 5.2	Normirane uklonske sile obojestransko vpetega nosilca z dvema delaminacijama. . . . .	64
Table	5.2 Normalized buckling loads of a clamped beam with two delaminations. . . . .	64
Preglednica 6.1	Vertikalni pomiki prostega krajišča konzole, podprte z vzmetjo različnih togosti. . . . .	81
Table	6.1 Vertical deflections of the free end of the cantilever with elastic support. . . . .	81
Preglednica 6.2	Pomiki in momenti v referenčni točki za različno stopnjo elementa in različne mreže. . . . .	83
Table	6.2 Deflections and moments of middle point of the beam for various type and number of elements. . . . .	83
Preglednica 7.1	Normirani kritični obtežni faktorji za prvih šest uklonskih oblik krožnega loka. . . . .	91
Table	7.1 Normalized buckling loads for the first six buckling modes. . . . .	91
Preglednica 7.2	Krožni lok s $H_{rel} = 0.2$ . Normirane razdalje med optimalno postavljenimi bočnimi podporami krožnega loka. . . . .	92
Table	7.2 Arch with height $H_{rel} = 0.2$ . Normalized lengths between optimal supports. . . . .	92
Preglednica 7.3	Uklonske sile elastičnega, betonskega in armiranobetonskega nosilca. . . . .	96
Table	7.3 Buckling loads of the elastic, concrete and reinforced concrete beam. . . . .	96

Preglednica 7.4	Vrednosti v konstitucijskem diagramu za zamik in izvlek enega veznega sredstva. . . . .	103
Table	7.4 Constitutive law values for shear and tension of one nail. . . . .	103
Preglednica 7.5	Porušna obtežba kompozitnega nosilca in pripadajoči pomiki. . . . .	105
Table	7.5 Ultimate load and ultimate deflections for the composite beam. . . . .	105
Preglednica 7.6	Porušna obtežba kompozitnega nosilca in pripadajoči pomiki. . . . .	107
Table	7.6 Ultimate load and ultimate deflections for the composite beam. . . . .	107



# 1 UVOD

Vedno večje zahteve po optimiranosti gradbenih konstrukcij nam narekujejo vse bolj zahtevne in obširne analize, s katerimi dokazujemo varnost konstrukcij pri različnih pogojih. Med te zagotovo sodijo analize stabilnosti v kritičnem in postkritičnem območju konstrukcije z upoštevanjem vseh vrst nepopolnosti konstrukcij. Značilni primeri takega obnašanja so uklon tlačnega stebra, zožitev natezne palice, površinski valovi na tlačnem delu upogibnega nosilca in strižne lokalizacije. Med geometrijske nepopolnosti med drugim štejemo ekscentričen vnos obtežbe, začetno neravnost elementov, med materialne nepopolnosti pa napake v materialih, kot so razpoke in različne lastnosti materiala v posameznih delih konstrukcije. Vpliv nepopolnosti na obnašanje nosilcev je še posebej pomemben pri določanju nosilnosti in postkritične nosilnosti prostorskih okvirjev. Poleg standardnega pojava uklona stebrov sta pomembna stabilnostna pojava pri prostorskih okvirjih tudi bočna zvrnitev in torzijska stabilnost. Znano je, da so vsi ti pojavi posledica geometrijsko nelinearnega modela okvirjev, pri katerih v analizi upoštevamo nelinearno zvezo med pomiki in deformacijami ter rešujemo ravnotežne enačbe na poljubni deformirani legi.

Geometrijsko nelinearnih formulacij prostorskih linijskih elementov je mnogo, med njimi pa so dobro in v precejšnjem obsegu uveljavljene t.i. geometrijsko točne ali kinematično točne teorije linijskih elementov, ki upoštevajo točne kinematične zveze med pomiki in deformacijami. Tak pristop je razvil Reissner (1981), kasneje pa ga uporabijo še mnogi drugi (Simo (1985), Cardona in Geradin (1988), Ibrahimbegović (1995), Jelenić in Crisfield (1999), Jelenić in Saje (1995), Smolenski (1999), Zupan in Saje (2003b)). Geometrijsko točen pristop je še posebej pomemben, kadar obravnavamo velike pomike in zasuke konstrukcij. Cilj disertacije je analiza prostorskih konstrukcij iz nelinearnega materiala pri upoštevanju pojavov kot so delaminiranost in upoštevanje kontaktnih problemov. Prav take konstrukcije v kritičnem in postkritičnem območju doživijo velike deformacije. Uporaba sodobnih natančnih končnih elementov, je pogoj za uspešno nadgradnjo metode v postopek, ki bo omogočal analiziranje zgoraj omenjenih pojavov. Ker želimo obravnavati konstrukcije iz poljubnih materialnih modelov, kjer se poleg uklona hkrati lahko pojavi materialna porušitev, se omejimo na formulacije, ki zagotavljajo enakost ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil (Tabarrok (1988), Schulz in Filippou (2001), Sanchez- Hubert in Sanchez Palencia (1999), Zupan in Saje (2003b)). Ob vsem tem ne želimo biti omejeni glede začetne oblike konstrukcije, temveč bi radi obravnavali tudi začetno ukrivljene in zavite linijske konstrukcije.

Določanje nosilnosti in postkritične nosilnosti okvirjev zahteva reševanje ravnotežnih enačb v odvisnosti od različnih parametrov. Pomembnejši so: nivo in oblika obtežbe ter geometrijske in materialne nepopolnosti. Stabilnostne analize konstrukcij zahtevajo določitev kritičnih točk, nato pa še njihovo klasifikacijo. Določanje kritičnih točk ni trivialna naloga, v literaturi lahko zasledimo mnogo postopkov (Fujikake (1985), Fujii in Choong (1992), Onate in Matias (1996), Wriggers in Simo (1990), Planinc in Saje (1998), Dellnitz in Werner (1989), Fujii s sodelavci (2001), Noguchi in Fujii (2003) in Rezaiee-Pajand in Vejdani-Noghereiyan (2006)). Večinoma gre za iteracijske algoritme, ki pa so pogosto časovno

zelo zahtevni. V našem delu se bomo ukvarjali s konstrukcijami, pri katerih algoritem za določanje kritičnih točk ne igra bistvene vloge. Pomembnejša je klasifikacija kritične točke in iskanje nadaljevanja obtežno-deformacijskih poti po kritični točki. Za iskanje nadaljnjih poti z upoštevanjem možnih razvezanj bomo sodobne algoritme (Fujikake (1985), Fujii in Ramm (1997), Fujii in Okazawa (1997)) priredili izbranim linijskim končnim elementom.

Ker pogosto prva kritična točka na obtežno deformacijski krivulji še ne pomeni porušitve konstrukcije, je zelo pomembno tudi njeno postkritično obnašanje. Na voljo je več računskih postopkov za sledenje obtežno deformacijskim potem, delimo jih na energijske metode in metode ločne dolžine. Slednje so bolj uveljavljene, uporabljajo se za požarne analize, analize kontaktov med delci in druge probleme. Med linijskimi elementi je največkrat uporabljena metoda ločne dolžine, ki jo prvotno zasnuje Riks (1979), izboljša pa Crisfield (1981). Iz nje zaradi različnih potreb nastane veliko izpeljank te metode (Fafard in Massicotte (1993), Zhou in Murray (1994), Kweon in Hong (1995), Qi in Tianqi (1995), Deng (1996), Teng in Lou (1998), Ligaro in Valvo (1999), Hellweg in Crisfield (1998), Forde in Stierner (1987), Szyszkowski in Husband (1999), Magnusson in Svensson (1998), Geers (1999a, 1999b), Zhu in Chu (2002) in druge). V našem delu ustrezno priredimo algoritem, ki so ga predstavili Feng s sodelavci (1995, 1996) in je prav tako izpeljanka Crisfieldove metode.

Nepopolnosti so v gradbeništvu in na ostalih inženirskih področjih neizogiben pojav. Nastanejo lahko zaradi napak v materialih (oslabitev v elementih zaradi slabše kvalitete določenega sloja, zaradi zastalih napetosti v jeklu, zaradi segregacije v betonu) ali med tehnološkim procesom izdelave (nalaganje plasti materiala po slojih, sanacije z lepljenjem lamel, ki lahko povzročijo nepopolnost stikov med sloji oz. različnimi materiali). Geometrijske nepopolnosti so lahko posledica nenatančne izvedbe elementov, stikov ali drugih napak, večina jih je neodpravljljivih. To so npr. minimalna odstopanja dimenzij, ekscentričnost stikov in vezi in podobno. Vse nepopolnosti imajo pomemben vpliv na obnašanje nosilcev, saj znižujejo njihovo nosilnost in postkritično nosilnost. Z vedno večjo uporabo naprednejših materialov, ki jih odlikuje veliko razmerje med trdnostjo in težo, se povečuje tudi zanimanje za raziskave nosilnosti sestavljenih nosilcev (Dadkhah s sodelavci (1995), He in Cox (1998), Mouritz in Cox (2000), Massabo (2003), Xu s sodelavci (2003a, 2003b), Siegmund (2004), Tilbrook s sodelavci (2007)). Porušni mehanizem v tem primerih večinoma zajema delaminiranost konstrukcije. Vzdolžne delaminacije linijskih elementov povzročajo tudi zelo velika znižanja kritične sile in vplivajo na celotno obnašanje delaminirane konstrukcije. Z vzdolžnimi delaminacijami se ukvarjajo mnogi avtorji: Almond (1970), Kulkarni in Frederic (1973), Chai s sodelavci (1981), Simitse s sodelavci (1985), Yin s sodelavci (1986), Kardomateas in Schmueser (1988), Chen (1991), Moradi in Taheri (1999), Sheinman in Soffer (1989), Kapania in Wolfe (1989), Somers s sodelavci (1991), Lim in Parson (1993), Kutlu in Chang (1992), Hwang in Mao (1999, 2001), Hwang in Liu (2001), Shu (1998), Huang in Kardomateas (1998), Numary in Haddad (2001), Lee s sodelavci (2002a), MsRao s sodelavci (2004a, 2004b, 2004c, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2006c, 2007) in drugi). Pomembna pomanjkljivost večine modelov je omejenost na ravninske konstrukcije, uporaba linearnih materialnih modelov in neupoštevanje strižnih deformacij. Poleg tega so pogosto uporabljeni preprosti numerični modeli konstrukcij. V delu izpeljemo računski model, ki teh pomanjkljivosti nima.

Klasični pristopi k delaminiranim konstrukcijam ne preprečujejo prekrivanja lamel. Tako lahko dobimo nerealne rezultate. Prekrivanje preprečimo z ustreznim bilinearnim konstitucijskim zakonom med lamelama. Vključevanje lastnosti na stiku med lamelami raje naredimo splošneje. Pri tem se opremo na znanje in izkušnje na tem področju: Edwards in Yannopoulos (1979), Ingraffea in Gerstle (1984), De Borst (1987), Rots in De Borst (1987), Carpinteri (1989), Nammer in Naaman (1989), Yamaguchi in Chen (1990), Bocca s sodelavci (1990, 1991), Rots (1991), Gerstle in Xie (1992), Xie in Gerstle (1995), Abdollahi (1996a), (1996b), Ali (1996), Cendon s sodelavci (2000), Ozbolt in Reinhardt (2002), Pad-

marajaiah in Ramaswamy (2002), Galvez s sodelavci (2002), Yang in Proverbs (2004), Yuan s sodelavci (2004), Johnson s sodelavci (2006), Ferracuti s sodelavci (2006), Tong in Sun (2007), Pan in Leung (2007), Wang (2007) in drugi. Značilnost vseh omenjenih pristopov je modeliranje pogojev na stiku, kot zvezo med različnimi količinami posameznih slojev in razmakom slojev. Tako avtorji opisujejo različne konstitucijske modele stika, ki jih v numerične algoritme vgradijo bodisi zvezno ali diskretno. V delu se bomo omejili na diskreten model stika, konstitucijski zakon pa bo lahko dokaj splošen nelinearen.

V skladu s problematiko, ki jo obravnavamo je delo razdeljeno na več smiselnih poglavij. Po prvem, Uvodu, predstavimo končni element prostorskega linijskega nosilca, zasnovanega na deformacijskih količinah. V tretjem poglavju predstavimo implementacijo metode ločne dolžine za izbrani končni linijski element, v četrtem pa klasifikacijo kritičnih točk in postopek iskanja poti z upoštevanjem možnosti razvejanja. V petem poglavju opišemo numerični model delaminiranih prostorskih nosilcev in prikažemo analitične rešitve za kritične sile ustrezne ravninske poenostavitve problema. V šestem poglavju predstavimo model prostorskega kompozitnega nosilca z upoštevanjem razmika in zamika med sloji. Zaključimo s tremi obsežnejšimi numeričnimi študijami.

## 2 PROSTORSKI DEFORMACIJSKI LINIJSKI ELEMENT

### 2.1 Uvod

V disertaciji se bomo ukvarjali z linijskimi prostorskimi konstrukcijami iz betona, jekla, lesa in kompozitnih materialov. Ti materiali se obnašajo izrazito nelinearno, njihovi materialni modeli so določeni na podlagi eksperimentov. Zanimalo nas bo predvsem obnašanje takih konstrukcij v bližini kritičnih točk in v postkritičnem območju. Posebno pozornost bomo posvetili tudi nepopolnosti konstrukcij v obliki delaminacij. Slojevitost bistveno vpliva na nosilnost in na postkritično obnašanje konstrukcij. Opazovali bomo kombiniran vpliv geometrijskih in materialnih nepopolnosti na uklonsko obnašanje nosilcev. Upoštevanje geometrijske nelinearnosti skupaj z materialno pa je numerično zahteven problem.

Za spremljanje obnašanja geometrijsko in materialno nelinearnih konstrukcij v bližini kritičnega stanja in v postkritičnem območju je potrebno združiti metode sledenja potem, metode določanja kritičnih točk in poti iz teh točk s primernimi končnimi elementi linijskih konstrukcij. Za končne elemente, s katerimi bomo opisali prostorske okvirje zahtevamo, da so robustni, natančni in numerično stabilni. Pričakujemo, da bodo končni elementi učinkoviti tudi za nelinearne materiale. Ker v materialnih enačbah nastopajo deformacije kot osnovne količine, si izberemo deformacijske končne elemente, ki namesto klasičnih pomikov in/ali zasukov kot osnovno neznanko problema uporabijo deformacijske količine. Izmed deformacijskih formulacij pa izberemo formulacijo po geometrijsko točni teoriji, saj to družino formulacij odlikuje točna rešitev nelinearnih zvez med pomiki, zasuki in deformacijami.

### 2.2 Pregled stanja na področju linijskih elementov

S teorijami linijskih elementov – nosilcev so se ukvarjali številni avtorji. Tako obstaja v literaturi veliko število različnih teorij nosilcev. Nekatere teorije prostorskih nosilcev izhajajo iz principa virtualnega dela za tridimenzionalna telesa, potem pa z reduciranjem količin izpeljejo enačbe za linijski element, glej Iura (1988) in Washizu (1975). Podobno so lahko izpeljane enačbe iz komplementarnega principa virtualnega dela, Koiter (1973), Murakawa (1978). Reissner (1981) je v svoji formulaciji uporabil drugačen pristop. Deformacije linijskega elementa je neposredno opisal s šestimi skalarnimi funkcijami vzdolž nosilca. Zveze med deformacijskimi količinami, pomiki in zasuki in notranjimi silami so izpeljane tako, da zadoščajo principu virtualnega dela brez predpostavke o njihovih velikostih. Reissnerjeva teorija se je za numerične formulacije izkazala za uspešno, saj so jo kasneje uporabili mnogi avtorji. Simo in Vu Quoc (1985) sta prva predstavila primerno parametrizacijo Reissnerjeve teorije linijskih nosilcev za uspešno numerično implementacijo. Poimenovala sta jo geometrijsko točna teorija linijskih nosilcev,

saj geometrija nosilca ni bila poenostavljena. Na podlagi geometrijsko točne teorije so nastale številne sodobne numerične formulacije po metodi končnih elementov. Med njimi omenimo le nekaj avtorjev: Cardona in Geradin (1988), Ibrahimbegović (1995), Jelenić in Crisfield (1999), Jelenić in Saje (1995), Smolenski (1999), Zupan in Saje (2003b) in drugi.

Ne glede na izbiro teorije nosilcev so ena od neznank problema prostorske rotacije. Kljub neaditivnosti prostorskih rotacij so klasične formulacije temeljile na pomikih in zasukih kot osnovnih neznankah problema (Simo (1985), Ibrahimbegović (1997), Smolenski (1999) in drugi). Pomanjkljivost tega pristopa je blokiranje končnih elementov. Jelenić in Saje (1993, 1995) sta z izbiro zasukov kot edine neznanke problema izpeljala formulacijo, pri kateri ne pride do blokiranja končnih elementov. Problem neaditivnosti rotacij so avtorji reševali na različne načine: z interpoliranjem infinitezimalnih popravkov – Simo in VU-Quoc (1986), z interpoliranjem inkrementalnih popravkov – Cardona in Geradin (1988) z nadomestnim aditivnim inkrementalnim vektorjem Ibrahimbegović (1997). Rešitev, kot jo predlagata Crisfield in Jelenić (1999) je konstrukcija posebnih interpolacijskih funkcij za zasuke. Planinc (1998) je s sodelavci razvil končni element ravninskega nosilca, kjer je za osnovno neznanke problema izbrana deformacijska količina – pseudoukrivljenost. V ravnini so zasuki aditivni, zato je glavna prednost izbire deformacij za osnovne neznanke problema v lažjem upoštevanju nelinearnih materialov. V prostoru pa ima tak pristop dodatno prednost: deformacije so v nasprotju z zasuki aditivne količine in zato naravnejša izbira pri metodah, ki uporabljajo iterativno reševanje nelinearnih enačb. Pseudoukrivljenost kot osnovno neznanke prostorskih nosilcev izberejo Tabarrok (1988), Schulz in Filippou (2001), Sanchez-Hubert in Sanchez Palencia (1999) in drugi.

Pomanjkljivost večine formulacij nosilcev je neenakost med numerično izračunanimi notranji silami, dobljenimi iz ravnotežnih enačb in notranjimi silami, dobljenimi iz konstitucijskih enačb, kar je posebej neugodno pri upoštevanju nelinearnosti materiala. Rešitev s kolokacijsko metodo sta predstavila Vratnar in Saje (1996), kjer so enakosti dosežene za elasto-plastične ravninske nosilce. Planinc (1998) je za ravninske primere v svoji doktorski disertaciji rešil ta problem z Galerkinovo metodo končnih elementov.

Zupan (2003a) je v svojem doktorskem delu predstavil formulacijo prostorskih nosilcev po geometrijsko točni teoriji, ki ne vključuje omenjenih pomanjkljivosti ostalih formulacij. Enakost med ravnotežnimi in konstitucijskimi notranjimi silami in momenti je dosežena v vnaprej izbranih diskretnih točkah. Formulacija temelji na izbiri deformacijskih količin za osnovne neodvisne neznanke problema. Izbira deformacijskih količin na eleganten način odpravi tipične numerične težave klasičnih elementov, neposredno in za poljubno izbiro oblikovanih funkcij omogoča ohranjanje numerično izvedenih deformacij pri togih zasukih, predvsem pa je ta izbira naravna za materialno nelinearne probleme. Dodatno prednost pri materialno nelinearnih problemih predstavlja ujemanje ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil. Izpeljani elementi so poleg tega izredno učinkoviti in natančni, zato predstavljajo smiselno osnovo tudi pri analizi postkritičnega obnašanja in nepopolnosti, če želimo upoštevati geometrijsko in materialno nelinearnost.

## 2.3 Osnovne enačbe prostorskega nosilca

### 2.3.1 Geometrijski model nosilca

Nosilec opišemo z referenčno krivuljo in prečnimi prerezi v vsaki točki te krivulje. V konfiguracijski prostor - Evklidski prostor  $\mathbf{R}^3$  ga umestimo tako, da določimo izhodiščno točko  $\mathcal{O}$  in trojico ortonormiranih baznih vektorjev  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ . Baza  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  je neodvisna od deformiranega nosilca, zato



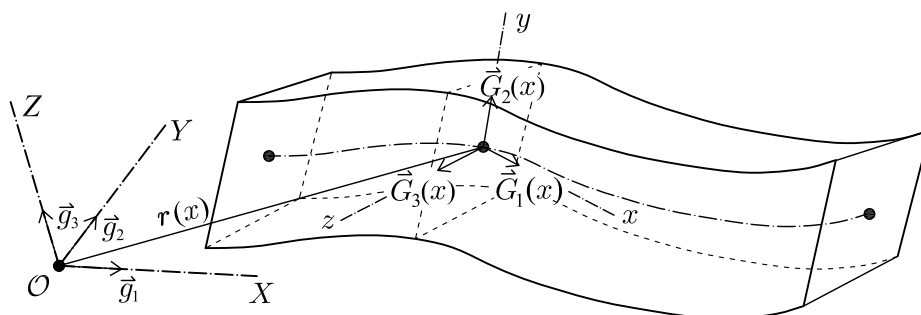
jo imenujemo fiksna baza. Referenčno krivuljo parametriziramo z družino krajevnih vektorjev  $\mathbf{r}(x)$ , kjer  $x$  predstavlja naravni parameter na referenčni osi. Pri modelu nosilca uporabimo hipotezo o ravnih prerezih. Prerezi se spreminjajo kot toga telesa, torej ne spremenijo oblike in velikosti. Za primeren opis prečnih prerezov tako uporabimo trojico ortonormiranih vektorjev  $\left\{ \vec{G}_1(x), \vec{G}_2(x), \vec{G}_3(x) \right\}$ , ki je pripeta na prerez za vsako vrednost parametra  $x$ . Vektor  $\vec{G}_1$  kaže v smeri normale na prečni prerez, vektorja  $\vec{G}_2$  in  $\vec{G}_3$  pa napenjata ravnino prereza. Bazo  $\left\{ \vec{G}_1(x), \vec{G}_2(x), \vec{G}_3(x) \right\}$  imenujemo tudi pomična baza.

Opozorimo, da baza  $\vec{G}_i(x)$  za vsak fiksni  $x$  predstavlja bazo konfiguracijskega prostora. Zato lahko vektorje opišemo tudi v tej bazi, še več, taka baza predstavlja naravno izbiro za materialne količine, kot so deformacije in notranje sile. Določene količine, kot so pomiki, zasuki, zunanje sile, pa je bolje zapisati v fiksni bazi.

Povezavo med dvema ortonormiranimi bazama predstavlja rotacijska matrika. Z  $\mathbf{R}$  bomo označili rotacijsko matriko, ki fiksno bazo preslika v pomično, oziroma zavrti poljuben vektor tako, kot to določa medsebojna lega pomične in fiksne baze. Še eno pomembno lastnost rotacijske matrike bomo potrebovali. Rotacijska matrika predstavlja tudi koordinatno transformacijo med komponentami poljubnega vektorja izraženega v fiksni in pomični bazi

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{R} \mathbf{v}_G; \quad \mathbf{v}_G = \mathbf{R}^T \mathbf{v}_g, \quad (2.1)$$

pri čemer indeks  $g$  uporabimo za stolpec komponent vektorja glede na fiksno bazo in indeks  $G$  za komponentni vektor (stolpec) glede na pomično bazo.



Slika 2.1: Model prostorskega nosilca.

Figure 2.1: Model of the three-dimensional beam.

Rotacijsko matriko sestavlja devet komponent, le tri pa so neodvisne. Namesto šestih algebrskih enačb, ki sledijo iz ortogonalnosti rotacijske matrike, je za numerično formulacijo ugodneje uporabiti drugačne parametrizacije rotacij. V našem modelu uporabimo parametrizacijo rotacij z rotacijskim vektorjem  $\vartheta_g$  (Argyris, 1982). Rotacijski vektor  $\vartheta_g$  leži na osi rotacije, njegova dolžina pa je enaka kotu rotacije. Seveda potrebujemo v nadaljevanju tudi zvezo med  $\vartheta_g$  in  $\mathbf{R}$ . Če vpeljemo antisimetrično matriko

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_3 & \vartheta_2 \\ \vartheta_3 & 0 & -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

sestavljeno iz komponent  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$  vektorja  $\vartheta_g$ , lahko rotacijsko matriko izrazimo z Rodriguesovo

formulo

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \mathbf{\Theta} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{\Theta}^2 = \text{Rod}(\vartheta_g), \quad (2.3)$$

kjer  $\mathbf{I}$  označuje identiteto in  $\vartheta = \|\vartheta_g\| = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2}$ .

Nasprotna smer je prav tako dobro znana. Če poznamo matriko  $\mathbf{R}$ , lahko po Spurrerovem algoritmu (Spurrer 1978) izluščimo rotacijski vektor:

$$\vartheta_g = \text{Spurr}(\mathbf{R}). \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Kinematične enačbe

V geometrijsko točni teoriji neposredno vpeljemo dva deformacijska vektorja. Ta dva vektorja predstavljata šest skalarnih rezultantnih deformacijskih količin prečnega prereza. Deformacijska vektorja običajno zapišemo glede na pomično bazo in označimo  $\gamma_G$  in  $\kappa_G$ . Komponente deformacijskih vektorjev imajo v tej bazi jasen fizikalni pomen:  $\gamma_G(1) = \gamma_1$  pomeni osno deformacijo,  $\gamma_G(2) = \gamma_2$ ,  $\gamma_G(3) = \gamma_3$  sta strižni deformaciji,  $\kappa_G(1) = \kappa_1$  je torzijski zasuk in  $\kappa_G(2) = \kappa_2$ ,  $\kappa_G(3) = \kappa_3$  sta upogibni deformaciji - ukrivljenosti.

Rezultantne deformacijske količine povežemo s kinematičnimi ( $\mathbf{r}_g, \vartheta_g$ ) tako, da zadoščajo principu virtualnega dela (Reissner (1981)). Tako dobimo kinematične enačbe v šibki (varrirani) obliki:

$$\delta\gamma_G = \mathbf{R}^T (\delta\mathbf{r}'_g - \delta\vartheta_g \times \mathbf{r}'_g) \quad (2.5)$$

$$\delta\kappa_G = \mathbf{R}^T \delta\vartheta'_g. \quad (2.6)$$

Oznaka ( $\prime$ ) označuje odvod po naravnem parametru  $x$ , “ $\times$ ” pa pomeni vektorski produkt. Integrirani obliki enačb (2.5) in (2.6) lahko zapišemo kot (glej Reissner (1981), Ibrahimbegović (1997), Zupan (2003))

$$\gamma_G = \mathbf{R}^T \mathbf{r}'_g + \mathbf{c}_G \quad (2.7)$$

$$\kappa_G = \mathbf{T}^T \vartheta'_g + \mathbf{d}_G, \quad (2.8)$$

kjer je

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{\Theta} + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \mathbf{\Theta}^2. \quad (2.9)$$

Vektorski funkciji  $\mathbf{c}_G(x)$  in  $\mathbf{d}_G(x)$  predstavljata variacijski konstanti, ki ju določimo iz znanih deformacij in kinematičnih pogojev nedeformiranega nosilca. Enačbi (2.7) in (2.8) predstavljata zvezi med kinematičnimi in deformacijskimi količinami, zato ju imenujemo kinematični enačbi. Izpeljani sta za poljubno velike pomike in zasuke, od tod izraz geometrijsko ali kinematično točna teorija nosilcev.

### 2.3.3 Ravnotežne enačbe

Naj bosta  $\mathbf{n}_g(x)$  in  $\mathbf{m}_g(x)$  zunanja linijska sila in moment, ki delujeta vzdolž referenčne osi nosilca. Izrazimo ju v fiksni bazi. Prav tako v fiksni bazi zapišemo rezultantno notranjo silo in moment; označimo ju z  $\mathbf{N}_g(x)$  in  $\mathbf{M}_g(x)$ . Nosilec je v ravnotežju, če je v ravnotežju poljuben del nosilca (glej sliko 2.2).

Kadar je dolžina elementarnega dela ( $\Delta x$ ) dovolj majhna, lahko ravnotežne enačbe zapišemo kot

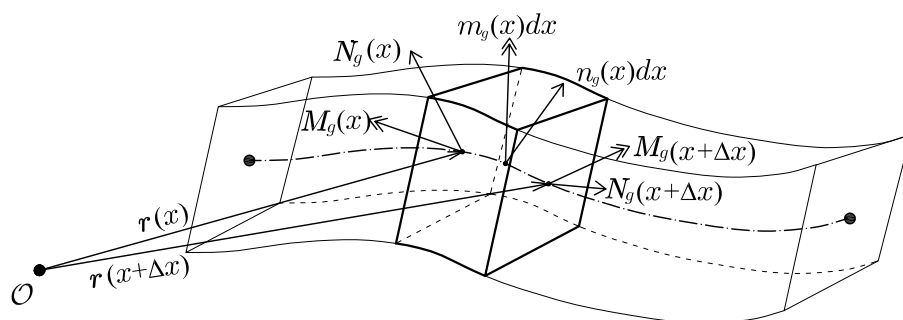
$$0 = -\mathbf{N}_g(x) + \mathbf{n}_g(x) \Delta x + \mathbf{N}_g(x + \Delta x) \quad (2.10)$$

$$0 = -\mathbf{M}_g(x) + \mathbf{m}_g(x) \Delta x + \mathbf{M}_g(x + \Delta x) + (\mathbf{r}(x + \Delta x) - \mathbf{r}(x)) \times \mathbf{N}_g(x + \Delta x) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}(x + \Delta x) - \mathbf{r}(x)) \times \mathbf{n}_g(x) \Delta x. \quad (2.11)$$

Enačbi (2.10) in (2.11) delimo z  $\Delta x$  in izračunamo limito, ko gre  $\Delta x$  proti nič. Tako dobimo navadni diferencialni enačbi prvega reda, ki predstavljata ravnotežna pogoja za sile in momente.

$$\mathbf{n}_g = -\mathbf{N}'_g \quad (2.12)$$

$$\mathbf{m}_g = -\mathbf{M}'_g - \mathbf{r}'_g \times \mathbf{N}_g. \quad (2.13)$$



Slika 2.2: Ravnotežje na elementarnem delu nosilca.  
Figure 2.2: Equilibrium of an infinitesimal part of the beam.

Ker  $N_g$  in  $M_g$  zadoščata ravnotežnim enačbam, ju v nadaljevanju imenujemo ravnotežna sila in ravnotežni moment.

### 2.3.4 Konstitucijske enačbe

Rezultantne notranje sile in momente povezujemo z deformacijskimi količinami prek konstitucijskih enačb. Privzamemo lahko dokaj splošno zvezo med rezultantnimi silami in deformacijami

$$\mathbf{N}_G^C = \mathcal{C}_N(\gamma_G, \kappa_G) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M}_G^C = \mathcal{C}_M(\gamma_G, \kappa_G). \quad (2.15)$$

$\mathcal{C}_N$  in  $\mathcal{C}_M$  sta zaenkrat poljubna, odsekoma zvezna in skoraj povsod zvezno odvedljiva operatorja. Opozorimo, da smo rezultantno silo in moment zapisali v pomični bazi, saj je to naravni zapis za večino konstitucijskih enačb. Ker sili  $N_G$  in  $M_G$  zadoščata konstitucijskim enačbam, ju označimo z  $N_G^C$  in  $M_G^C$  in v nadaljevanju imenujemo konstitucijska notranja sila in moment.

### 2.3.4.1 Linearni materialni model

Najpreprostejšo obliko enačb (2.14) in (2.15) predstavlja linearni materialni model, v katerem sta  $\mathcal{C}_N$  in  $\mathcal{C}_M$  konstantni matriki.

$$\mathbf{N}_G^C = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & ES_y & -ES_z \\ 0 & GA_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \kappa_G \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{M}_G^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GJ_t & 0 & 0 \\ ES_y & 0 & 0 & 0 & EJ_y & EJ_{yz} \\ -ES_z & 0 & 0 & 0 & EJ_{yz} & EJ_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \kappa_G \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

V enačbah (2.16) in (2.17) predstavljata  $E$  in  $G$  elastični in strižni modul,  $A$  je ploščina prečnega prereza,  $A_2$  in  $A_3$  sta strižna prereza,  $J_y$  in  $J_z$  sta vztrajnostna momenta prečnega prereza,  $J_t$  je torzijski vztrajnostni moment,  $J_{yz}$  je deviacijski moment,  $S_y$  in  $S_z$  sta statična momenta okrog osi  $y$  in  $z$ . Deviacijski vztrajnostni moment in statična momenta v enačbah nastopajo, ker se nismo omejili na težiščno os in na glavne vztrajnostne osi. Tak pristop je nujen, če želimo upoštevati slojevitost nosilcev.

### 2.3.4.2 Nelinearni materialni modeli

Linearno elastičen model materiala je najpreprostejši, vendar za dejanske materiale ustrezen le v dokaj ozkem območju. Večina materialov se obnaša nelinearno. V našo numerično formulacijo lahko vključujemo različne materialne modele. Posebej se z določevanjem nelinearnih materialnih modelov v disertaciji ne ukvarjamo, temveč jih povzamemo po literaturi. Največ nelinearnih materialnih modelov izhaja iz rezultatov enoosnih preizkusov. Taki modeli podajajo zvezo med napetostmi in deformacijami vlaken materiala. Iz literature povzamemo modele betona, jekla, lesa in polimera.

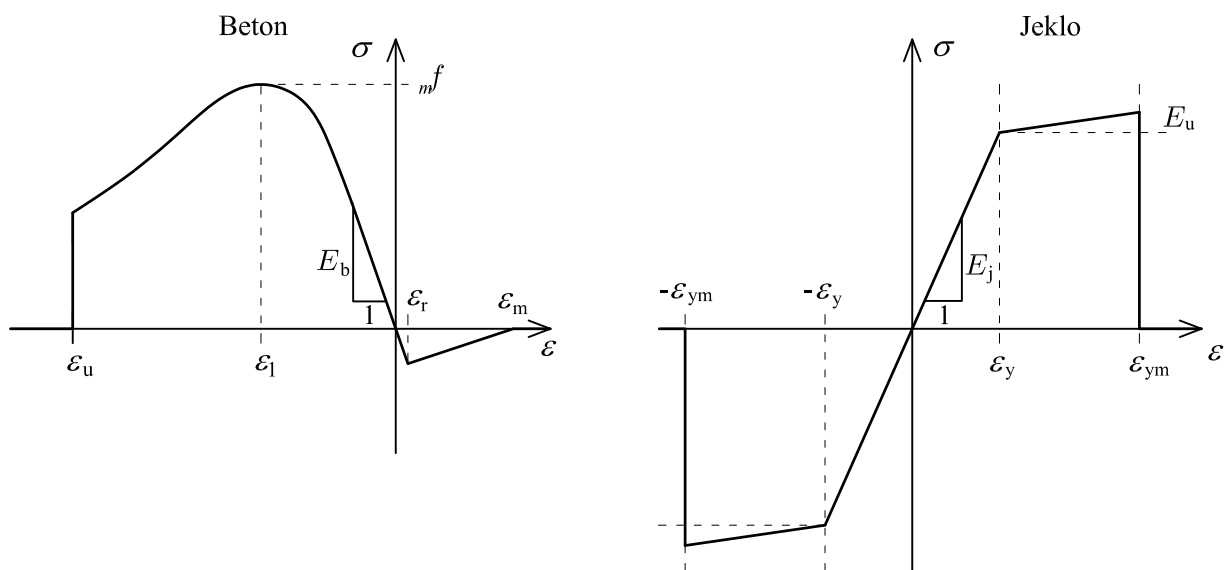
Zvezo med vzdolžnimi napetostmi in deformacijami v **betonu** opišemo s konstitucijskim modelom, ki ga predlagata Desayi in Krishnan (1964). Natezno trdnost betona smo privzeli po Berganu (1979). Konstitucijski model je prikazan na sliki 2.3 in sestoji iz nelinearnega in linearnega dela ter območja, kjer so napetosti enake nič. Na diagramu so označene: povprečna tlačna trdnost betona  $f_m$ , deformacija v betonu pri največji tlačni trdnosti  $\varepsilon_1$ , mejna deformacija v tlaku  $\varepsilon_u$ , deformacija pri največji natezni nosilnosti  $\varepsilon_r$ , največja natezna deformacija  $\varepsilon_m$ . Zvezo med napetostmi in deformacijami zapišemo kot:

$$\sigma_b(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 2f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} & \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} (\varepsilon - \varepsilon_m) & \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_m \\ 0 & \varepsilon_m < \varepsilon \end{cases}. \quad (2.18)$$

Za konstitucijski model **jekla** privzamemo simetričen bilinearen materialni model, opisan z naslednjimi enačbami:

$$\sigma_j(\varepsilon) = \begin{cases} E_j \varepsilon & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y \\ \text{sgn}(\varepsilon) (E_j \varepsilon_y + E_u (|\varepsilon| - \varepsilon_y)) & \varepsilon_y < |\varepsilon| \leq \varepsilon_{ym} \\ 0 & \varepsilon_{ym} < |\varepsilon| \end{cases}. \quad (2.19)$$

Pri tem  $E_j$  in  $E_u$  predstavljata elastični in utrditveni modul,  $\varepsilon_y$  je deformacija na meji plastifikacije in  $\varepsilon_{ym}$  porušna deformacija. Model je predstavljen na sliki 2.3.



Slika 2.3: Konstitucijski model betona in jekla.  
Figure 2.3: Constitutive model of concrete and steel.

Model **polimernega** materiala iz steklenih vlaken in smol povzamemo po Zupan in Saje (2005)

$$\sigma_p(\epsilon) = \begin{cases} 2f_{mk}\epsilon/(2\epsilon_{mk} + \epsilon) & |\epsilon| \leq \epsilon_{mk} \\ 0 & \epsilon_{mk} < |\epsilon| \end{cases}, \quad (2.20)$$

kjer  $\epsilon_{mk}$  predstavlja deformacijo ob največji trdnosti,  $f_{mk}$  pa največjo natezno oz. tlačno trdnost (slika 2.4).

**Les** največkrat modeliramo kar linearno, v primeru sestavljenih kompozitnih nosilcev, pa povzamemo diagram iz Planinc s sodelavci (2008).

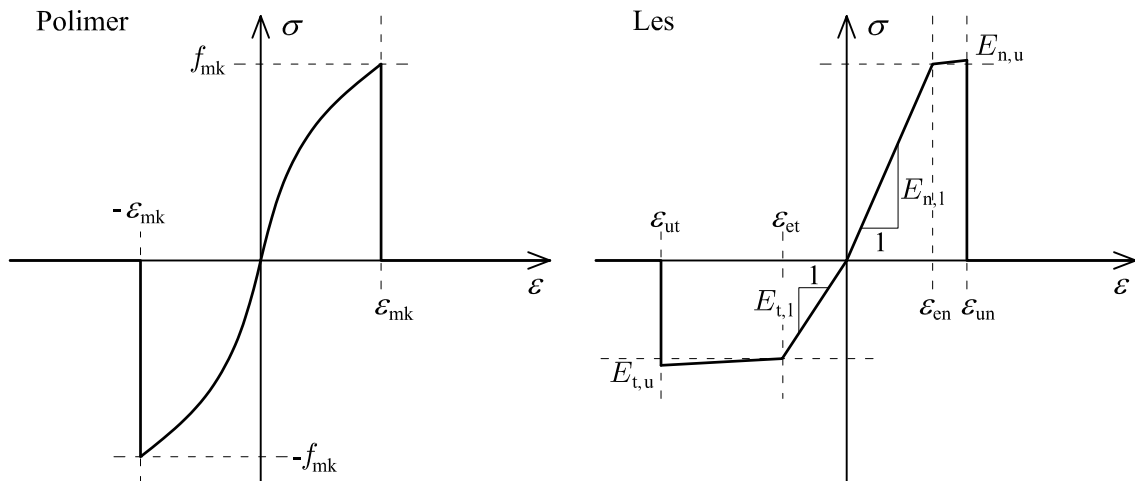
$$\sigma_l(\epsilon) = \begin{cases} E_{n,l}\epsilon & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{en} \\ E_{t,l}\epsilon & \epsilon_{et} \leq \epsilon < 0 \\ E_{n,l}\epsilon_{en} + E_{n,u}(\epsilon - \epsilon_{en}) & \epsilon_{en} < \epsilon \leq \epsilon_{un} \\ E_{t,l}\epsilon_{et} + E_{t,u}(\epsilon - \epsilon_{et}) & \epsilon_{ut} \leq \epsilon < \epsilon_{et} \\ 0 & \epsilon < \epsilon_{ut} \vee \epsilon_{un} < \epsilon \end{cases}, \quad (2.21)$$

kjer  $E_{n,l}$  in  $E_{t,l}$  predstavljata elastična modula v nategu in tlaku,  $E_{n,u}$  in  $E_{t,u}$  predstavljata utrditvena modula v nategu in tlaku,  $\epsilon_{en}$ ,  $\epsilon_{et}$  sta deformaciji na meji plastifikacije v nategu in tlaku,  $\epsilon_{un}$  in  $\epsilon_{ut}$  pa natezna in tlačna porušna deformacija (slika 2.4).

V našem modelu nosilca nastopajo le resultantne deformacije prečnega prereza. Osne deformacije v poljubni točki prereza so tako določene z resultantno osno deformacijo  $\gamma_{G1}$  in resultantnima upogibnima deformacijama  $\kappa_{G2}$  in  $\kappa_{G3}$ . Predpostavimo kar linearen potek deformacij po prerezu

$$\epsilon(y, z) = \gamma_{G1} - y\kappa_{G3} + z\kappa_{G2}. \quad (2.22)$$

Po modelih (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) potem določimo osne napetosti  $\sigma(y, z)$  v vsaki točki prereza. Ker v računskem modelu nosilca nastopajo le resultantne notranje sile in momenti prereza, je potrebno



Slika 2.4: Konstitucijski model za polimerni material in za les.  
Figure 2.4: Constitutive model of composite and timber.

osne napetosti integrirati po prerezu. Integrale

$$N_{G1} = \int_A \sigma(y, z) dA \quad (2.23)$$

$$M_{G2} = \int_A z \sigma(y, z) dA \quad (2.24)$$

$$M_{G3} = - \int_A y \sigma(y, z) dA. \quad (2.25)$$

izračunamo numerično.

Za preostale notranje sile obdržimo linearno zvezo med rezultatnimi deformacijami in rezultatnimi silami

$$N_{G2} = GA_s \gamma_{G2} \quad (2.26)$$

$$N_{G3} = GA_s \gamma_{G3} \quad (2.27)$$

$$M_{G1} = GJ_t \kappa_{G1}. \quad (2.28)$$

V enačbah (2.26)–(2.28) predstavlja  $G$  strižni modul,  $A_s$  strižni prerez in  $J_t$  torzijski moment prečnega prereza.

### 2.3.5 Konsistenčne enačbe

Notranje sile, dobljene iz ravnotežnih in konstitucijskih enačb se morajo ujemati. Zaradi izražave enačb v različnih bazah je potrebno opraviti le koordinatno transformacijo (glej (2.1)):

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{R} \mathbf{N}_G \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{R} \mathbf{M}_G. \quad (2.30)$$

Pri numeričnem reševanju enačb nosilcev pa lahko pride do precejšnjega odstopanja med notranjimi silami, ki zadoščajo ravnotežnim in tistimi, ki zadoščajo konstitucijskim enačbam. Posebnost t.i. konsis-

tenčnih formulacij (Vratanar in Saje (1997), Saje s sodelavci (1997), Zupan in Saje (2003b)) je eksplicitno zadoščanje enakosti ravnotežnih in konsistenčnih notranjih sil:

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{R}\mathbf{N}_G^C \quad (2.31)$$

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{R}\mathbf{M}_G^C. \quad (2.32)$$

Enačbi (2.31) in (2.32) imenujemo konsistenčni enačbi in umestimo v celoten nabor enačb prostorskega nosilca.

### 2.3.6 Enačbe nosilca

Celoten nabor enačb nosilca tako predstavljajo kinematične (2.7), (2.8), ravnotežne (2.12), (2.13), konstitucijske (2.14), (2.15) in konsistenčne enačbe (2.31), (2.32):

$$\mathbf{r}'_g - \mathbf{R}(\gamma_G - \mathbf{c}_G) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}'_g - \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\kappa}_G - \mathbf{d}_G) = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{N}'_g - \mathbf{n}_g = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{M}'_g + \mathbf{r}' \times \mathbf{N}_g - \mathbf{m}_g = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{N}_G^C = \mathcal{C}_N(\gamma_G, \boldsymbol{\kappa}_G) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_G^C = \mathcal{C}_M(\gamma_G, \boldsymbol{\kappa}_G) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{R}\mathbf{N}_G^C \quad (2.39)$$

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{R}\mathbf{M}_G^C. \quad (2.40)$$

Enačbam moramo dodati še pripadajoče robne pogoje pri  $x = 0$  in  $x = L$ :

$$\mathbf{N}_g(0) = \mathbf{S}^0 \quad \mathbf{N}_g(L) = \mathbf{S}^L \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M}_g(0) = \mathbf{P}^0 \quad \mathbf{M}_g(L) = \mathbf{P}^L. \quad (2.42)$$

Enačbe (2.35)–(2.38) tvorijo sistem štirih matričnih navadnih diferencialnih enačb prvega reda. Če so  $\mathbf{n}_g$ ,  $\mathbf{m}_g$ ,  $\gamma_G$  in  $\boldsymbol{\kappa}_G$  znane funkcije, lahko rešitev teh enačb zapišemo kot

$$\mathbf{r}_g(x) = \mathbf{r}_g^0 + \int_0^x \mathbf{R}(\xi)(\gamma_G(\xi) - \mathbf{c}_G(\xi)) d\xi \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_g(x) = \boldsymbol{\vartheta}_g^0 + \int_0^x \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\vartheta}_g(\xi))(\boldsymbol{\kappa}_G(\xi) - \mathbf{d}_G(\xi)) d\xi \quad (2.44)$$

$$\mathbf{N}_g(x) = \mathbf{N}_g(0) - \int_0^x \mathbf{n}_g(\xi) d\xi \quad (2.45)$$

$$\mathbf{M}_g(x) = \mathbf{M}_g(0) + \int_0^x [\mathbf{N}_g(\xi) \times \mathbf{R}(\xi)(\gamma_G(\xi) - \mathbf{c}_G(\xi)) - \mathbf{m}_g(\xi)] d\xi, \quad (2.46)$$

pri tem smo  $\mathbf{r}'$  v enačbi (2.36) nadomestili v skladu z enačbo (2.33). Umestitev končnega elementa v konstrukcijo zahteva eksplicitno izpolnitev kinematičnih enačb na desnem robu končnega elementa ( $x = L$ ):

$$\mathbf{r}_g(L) - \mathbf{r}_g^0 - \int_0^L \mathbf{R}(\xi)(\gamma_G(\xi) - \mathbf{c}_G(\xi)) d\xi = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_g(L) - \boldsymbol{\vartheta}_g^0 - \int_0^L \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\vartheta}_g(\xi))(\boldsymbol{\kappa}_G(\xi) - \mathbf{d}_G(\xi)) d\xi = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

Enačbam (2.43)–(2.46) lahko vsaj formalno vedno zadostimo, zato jih izločimo iz osnovnega sistema enačb. Uporabimo jih kot pomožne enačbe, saj nam za vsako konfiguracijo nosilca, podano z zveznima deformacijskima količinama  $\gamma_G(x)$  in  $\kappa_G(x)$  ter robnimi vrednostmi  $N_g^0$ ,  $M_g^0$ ,  $r_g^0$  in  $\vartheta_g^0$ , določajo potek pomikov, zasukov in notranjih sil vzdolž nosilca. Potem, ko enačbi (2.37) in (2.38) vstavimo v (2.39) in (2.40) in upoštevamo še (2.45) in (2.46), se končni sistem enačb glasi:

$$f_1 = \mathbf{RC}_N(\gamma_G, \kappa_G) - N_g^0 + \int_0^x \mathbf{n}_g(\xi) d\xi = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

$$f_2 = \mathbf{RC}_M(\gamma_G, \kappa_G) - M_g^0 - \int_0^x [(\mathbf{N}_g^0 - \int_0^\eta \mathbf{n}_g(\eta) d\eta) \times \mathbf{R}(\xi)(\gamma_G(\xi) - \mathbf{c}_G(\xi)) - \mathbf{m}_g(\xi)] d\xi = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

$$f_3 = \mathbf{r}_g^L - \mathbf{r}_g^0 - \int_0^L \mathbf{R}(\gamma_G - \mathbf{c}_G) dx = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

$$f_4 = \vartheta_g^L - \vartheta_g^0 - \int_0^L \mathbf{T}^{-T}(\vartheta_g)(\kappa_G - \mathbf{d}_G) dx = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

$$f_5 = \mathbf{S}_g^0 + N_g^0 = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

$$f_6 = \mathbf{P}_g^0 + M_g^0 = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

$$f_7 = \mathbf{S}_g^L - N_g^0 + \int_0^L \mathbf{n}_g dx = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

$$f_8 = \mathbf{P}_g^L - M_g^0 - \int_0^L [\mathbf{N}_g \times \mathbf{R}(\gamma_G - \mathbf{c}_G) - \mathbf{m}_g] dx = \mathbf{0}. \quad (2.56)$$

Enačbi (2.49) in (2.50) moramo zadostiti v vsaki točki referenčne osi. To sta konsistenčni enačbi. Preostale enačbe sestavljajo kinematični in statični robni pogoji. Matriki  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{T}$ , ki nastopata v osnovnih enačbah, določimo iz izraza (2.44) z upoštevanjem (2.2), (2.3) in (2.9).

Enačbe (2.49)–(2.56) tvorijo sistem osmih algebrskih enačb nosilca za osem neznank: (i) kinematične vektorje na obeh robovih  $\mathbf{r}_g^0$ ,  $\vartheta_g^0$ ,  $\mathbf{r}_g^L$ ,  $\vartheta_g^L$ , (ii) ravnotežno notranjo silo in moment na levem robu  $N_g^0$ ,  $M_g^0$ , in (iii) deformacijska vektorja  $\gamma_G(x)$  in  $\kappa_G(x)$  vzdolž celotne osi nosilca.

Sistem enačb je nelinearen, zato ga običajno ne znamo rešiti analitično. Uporabimo iterativne metode, ki pa zahtevajo linearizacijo enačb.

## 2.4 Linearizacija enačb

### 2.4.1 Osnovne ideje

Enačbe (2.49)–(2.56) predstavljajo 24 skalarnih funkcionalov, ki so odvisni od neznank  $\mathbf{r}_g^0$ ,  $\vartheta_g^0$ ,  $N_g^0$ ,  $M_g^0$ ,  $\mathbf{r}_g^L$ ,  $\vartheta_g^L$ ,  $\gamma_G(x)$ , in  $\kappa_G(x)$ . Osnovno idejo iterativnih metod prikažimo na skalarni funkciji ene spremenljivke  $f(y)$ . Razvijmo to funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog  $y_0$ :

$$f(y) = f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0) + \text{členi višjega reda.}$$



Če za  $y$  velja  $f(y) = 0$  in zanemarimo člene višjega reda, je

$$0 = f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0),$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} \Delta y = -f(y_0). \quad (2.57)$$

Seveda za nelinearne enačbe rešitve s takim približkom nismo dobili, zato shemo (2.57) iterativno nadaljujemo:

$$y^{[1]} = y_0 + \Delta y,$$

$$y^{[n]} = y_0^{[n-1]} + \Delta y^{[n+1]}$$

dokler ne dosežemo zadostne natančnosti.

V primeru linearizacije skalarnega funkcionala običajen odvod nadomestimo s smernim odvodom:

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{y}_0; \delta \mathbf{y}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{y}_0 + \alpha \delta \mathbf{y}) - \mathcal{F}(\mathbf{y}_0)}{\alpha} = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \mathcal{F}(\mathbf{y}_0 + \alpha \delta \mathbf{y}), \quad (2.58)$$

kjer smo z  $\mathbf{y}$  označili celoten vektor neznanek. Ker pa vektor  $\mathbf{y}$  ni abstrakten, temveč poznamo njegove komponente  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , lahko smerni odvod zapišemo kot linearno kombinacijo parcialnih odvodov:

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{y}_0; \delta \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_j} \right|_{\mathbf{y}_0} \delta y_j. \quad (2.59)$$

Pri linearizaciji vektorskega funkcionala,  $\mathcal{F}(\mathbf{y}) = (\mathcal{F}_1(\mathbf{y}), \mathcal{F}_2(\mathbf{y}), \dots, \mathcal{F}_n(\mathbf{y}))$  gornjo enačbo ponovimo za vsako komponento posebej.

Shema iterativnih metod v večrazsežnih prostorih je tako sledeča

$$\sum_j \left. \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y_j} \right|_{\mathbf{y}_0} \delta y_j = -\mathcal{F}_i(\mathbf{y}_0) \quad (2.60)$$

ali krajše

$$\mathbf{K}|_{\mathbf{y}_0} \delta \mathbf{y} = -\mathcal{F}_i(\mathbf{y}_0), \quad (2.61)$$

kjer je  $\mathbf{K}$  matrika parcialnih odvodov vseh funkcionalov po vseh spremenljivkah,  $\delta \mathbf{y}$  je variacija vektorja neznanek,  $\mathcal{F}_i$  je residualni vektor.

V linearnih konfiguracijskih prostorih lahko linearni del spremembe - variacijo  $\delta \mathbf{y}$  prištejemo začetnemu približku  $\mathbf{y}_0$ , potem pa postopek nadaljujemo do zadostne natančnosti.

Konfiguracijski prostor prostorskih nosilcev sestavljajo tudi prostorske rotacije, ki pa so izrazito nelinearne. Zato moramo linearizacijo rotacij opraviti po osnovni abstraktni definiciji (2.58). Linearizacijo rotacij izpeljemo posebej.

## 2.4.2 Linearizacija rotacijske matrike

Rotacijska matrika  $\mathbf{R}$  je izražena z rotacijskim vektorjem (glej (2.2) in (2.3)). Iščemo smerni odvod rotacijskega operatorja v odvisnosti od spremembe  $\vartheta_g$ . Spremembo  $\vartheta_g$  označimo z  $\alpha \delta \vartheta_g$ . Za rotacijsko matriko potem velja

$$\mathbf{R}(\vartheta_g \oplus \alpha \delta \vartheta_g) = \mathbf{R}(\alpha \delta \vartheta_g) \mathbf{R}(\vartheta_g),$$

pri tem smo upoštevali, da moramo spremenjeno (perturbirano) rotacijsko matriko pomnožiti z osnovno rotacijo. Z oznako “ $\oplus$ ” pa poudarjamo, da rotacijski vektorji niso aditivni, torej spremembe nismo dodali v običajnem smislu. Potem, ko poznamo perturbirano rotacijsko matriko, lahko uporabimo kar izraz (2.58):

$$\delta \mathbf{R} = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \mathbf{R}(\alpha \delta \boldsymbol{\vartheta}_g) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g). \quad (2.62)$$

Iz (2.2) in (2.3) neposredno sledi

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \mathbf{R}(\alpha \delta \boldsymbol{\vartheta}_g) = \delta \boldsymbol{\Theta},$$

kjer je

$$\delta \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \vartheta_3 & \delta \vartheta_2 \\ \delta \vartheta_3 & 0 & -\delta \vartheta_1 \\ -\delta \vartheta_2 & \delta \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

antisimetrična matrika, sestavljena iz komponent vektorja  $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g$ . Variacijo rotacijske matrike torej lahko zapišemo kot

$$\delta \mathbf{R} = \delta \boldsymbol{\Theta} \mathbf{R}. \quad (2.63)$$

Linearizirane enačbe želimo zapisati kot linearno kombinacijo variacij osnovnih neznank. V primeru rotacijske matrike je to  $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g$ , zato zapis (2.63) preoblikujemo. Vpeljemo oznako za antisimetrično matriko  $\mathbf{S}(\mathbf{v})$ , ki je sestavljena iz komponent vektorja  $\mathbf{v}$ . Vektorski produkt,  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ , med poljubnima vektorjema  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{u}$  potem lahko zapišemo kot matrični produkt  $\mathbf{S}(\mathbf{v})$  in  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{u}. \quad (2.64)$$

Če enačbo (2.63) pomnožimo s poljubnim vektorjem  $\mathbf{u}$ , po (2.64) sledi

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\Theta} \mathbf{R} \mathbf{u} = \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g) \mathbf{R} \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{R} \mathbf{u} = -\mathbf{R} \mathbf{u} \times \delta \boldsymbol{\vartheta}_g = -\mathbf{S}(\mathbf{R} \mathbf{u}) \delta \boldsymbol{\vartheta}_g. \quad (2.65)$$

Pri linearizaciji osnovnih enačb nosilca (2.49) – (2.56) je za rotacijsko matriko potrebno upoštevati izraz (2.65). Opozorimo še na eno posebnost deformacijske teorije. Ker sta osnovni neznanki problema  $\gamma_G$  in  $\kappa_G$ , je potrebno variacijo rotacijskega vektorja nadomestiti z variacijo osnovnih spremenljivk. Z integriranjem enačbe (2.6) dobimo

$$\delta \boldsymbol{\vartheta}_g(x) = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g^0 + \int_0^x \mathbf{R}(\xi) \delta \kappa_G(\xi) d\xi. \quad (2.66)$$

Ko vstavimo (2.66) v (2.65) smo variacijo rotacijske matrike izrazili z variacijo osnovnih neznank:

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{u} = -\mathbf{S}(\mathbf{R} \mathbf{u}) \delta \boldsymbol{\vartheta}_g^0 - \mathbf{S}(\mathbf{R} \mathbf{u}) \int_0^x \mathbf{R}(\xi) \delta \kappa_G(\xi) d\xi; \quad (2.67)$$

za vsak vektor  $\mathbf{u}$ .

### 2.4.3 Linearizirane enačbe nosilca

Ostale smerne odvode lahko zaradi linearnosti prostora ostalih spremenljivk izračunamo z običajnimi parcialnimi odvodi. Z neposredno linearizacijo enačb (2.49)–(2.56) ob upoštevanju (2.67) dobimo

$$\begin{aligned} \delta f_1(x) = & -\mathbf{S}(\mathbf{RC}_N) \delta \vartheta_g^0 - \mathbf{S}(\mathbf{RC}_N) \int_0^x \mathbf{R} \delta \kappa_G d\xi \\ & + \mathbf{RC}_{\gamma\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{RC}_{\gamma\kappa} \delta \kappa_G - \delta \mathbf{N}_g^0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \delta f_2(x) = & -\mathbf{S}(\mathbf{RC}_M) \delta \vartheta_g^0 - \mathbf{S}(\mathbf{RC}_M) \int_0^x \mathbf{R} \delta \kappa_G d\xi \\ & + \mathbf{RC}_{\kappa\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{RC}_{\kappa\kappa} \delta \kappa_G - \delta \mathbf{M}_g^0 \\ & + \mathbf{S} \left( \int_0^x \mathbf{R} (\gamma_G - c_G) d\xi \right) \delta \mathbf{N}_g^0 + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) d\xi \delta \vartheta_g^0 \\ & + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) \int_0^\xi \mathbf{R} \delta \kappa_G d\eta d\xi - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{R} \delta \gamma_G d\xi \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \delta f_3 = & \delta \mathbf{r}_g^L - \delta \mathbf{r}_g^0 + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) dx \delta \vartheta_g^0 \\ & + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) \int_0^x \mathbf{R} \delta \kappa_G d\xi dx - \int_0^L \mathbf{R} \delta \gamma_G dx \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\delta f_4 = \delta \vartheta_g^L - \delta \vartheta_g^0 - \int_0^L \mathbf{R} \delta \kappa_G dx \quad (2.71)$$

$$\delta f_5 = \delta \mathbf{N}_g^0 \quad (2.72)$$

$$\delta f_6 = \delta \mathbf{M}_g^0 \quad (2.73)$$

$$\delta f_7 = -\delta \mathbf{N}_g^0 \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \delta f_8 = & \mathbf{S} \left( \int_0^L \mathbf{R} (\gamma_G - c_G) dx \right) \delta \mathbf{N}_g^0 + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) dx \delta \vartheta_g^0 \\ & - \delta \mathbf{M}_g^0 - \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{R} \delta \gamma_G dx \\ & + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{N}_g) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\gamma_G - c_G)) \int_0^x \mathbf{R} \delta \kappa_G d\xi dx. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Pri tem smo s  $\mathbf{C}_{\gamma\gamma}$ ,  $\mathbf{C}_{\gamma\kappa}$ ,  $\mathbf{C}_{\kappa\gamma}$  in  $\mathbf{C}_{\kappa\kappa}$  označili matrike, dobljene z odvajanjem konstitucijskih enačb  $\mathcal{C}^N$  in  $\mathcal{C}^M$  po komponentah  $\gamma_G$  in  $\kappa_G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^N}{\partial \gamma_j} \right], & \mathbf{C}_{\gamma\kappa} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^N}{\partial \kappa_j} \right] \\ \mathbf{C}_{\kappa\gamma} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^M}{\partial \gamma_j} \right], & \mathbf{C}_{\kappa\kappa} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^M}{\partial \kappa_j} \right]. \end{aligned}$$

Matriko  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} & \mathbf{C}_{\gamma\kappa} \\ \mathbf{C}_{\kappa\gamma} & \mathbf{C}_{\kappa\kappa} \end{bmatrix}$  imenujemo konstitucijska matrika prečnega prereza.

### 2.4.4 Diskretizacija

Linearizirane enačbe (2.68)–(2.75) so še vedno prezahtevne, da bi jih lahko rešili. Namesto zvezne rešitve  $\gamma_G(x)$ ,  $\kappa_G(x)$  bomo iskali družino diskretnih vrednosti  $\gamma_G^i$  in  $\kappa_G^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Tako zvezni

neznanki problema nadomestimo z linearno kombinacijo diskretnih vrednosti in oblikovnih funkcij

$$\gamma_G(x) \approx \sum P_i(x) \gamma_G^i, \quad (2.76)$$

$$\kappa_G(x) \approx \sum P_i(x) \kappa_G^i. \quad (2.77)$$

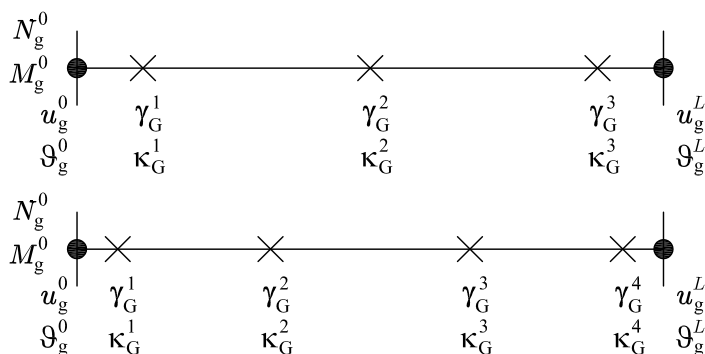
Točke  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), v katerih iščemo diskretne rešitve, so lahko poljubne. V nalogi smo izbrali Gaussove integracijske točke na intervalu  $[0, L]$ . Taka izbira je smiselna, saj je potrebno integrale v enačbah (2.49)–(2.56) in (2.68)–(2.75) iz vrednotiti numerično. Za numerične integrale uporabimo Gaussova kvadratura pravila. Za oblikovne funkcije uporabimo standardne Langrangeve polinome skozi Gaussove točke. Seveda je število diskretizacijskih točk  $N$  lahko različno. Tako imamo na voljo celotno družino končnih elementov različnih redov. Večji red elementa sicer poveča število prostostnih stopenj, vendar so taki elementi točnejši (Zupan (2003a)).

Z diskretizacijo neznank je smiselno izvesti tudi diskretizacijo enačb. Zvezni enačbi (2.49) in (2.50) lahko diskretiziramo na različne načine. V nalogi uporabimo kolokacijsko metodo, kjer  $f_1$  in  $f_2$  zadosimo v diskretnih Gaussovih točkah  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ );

$$f_1(x_i) = 0, \quad (2.78)$$

$$f_2(x_i) = 0. \quad (2.79)$$

Tako smo poenotili integracijske, kolokacijske in interpolacijske točke, kar se je pri numeričnem reševanju izkazalo za zelo učinkovito (glej Zupan (2003a)). Shemi tri in štiri-točkovnega elementa prikazujemo na sliki 2.5.



Slika 2.5: Shemi 3 in 4-točkovnega končnega elementa.

Figure 2.5: Scheme of finite elements with 3 and 4 internal points.

## 2.4.5 Iterativno reševanje enačb nosilca

Po linearizaciji in diskretizaciji smo problem prevedli v obliko

$$\mathbf{K}|_{y_d} \delta y_d = -f_d, \quad (2.80)$$

kjer je  $y_d$  vektor diskretnih neznank problema

$$y_d = [ \delta r_g^0 \quad \delta v_g^0 \quad \delta r_g^L \quad \delta v_g^L \quad \delta N_g^0 \quad \delta M_g^0 \quad \delta \kappa_G^i \quad \delta \gamma_G^i ]^T, \quad i = 1, \dots, N$$

$\mathbf{f}_d$  je diskretni vektor desnih strani

$$\mathbf{f}_d = [ f_1(x_1) \dots f_2(x_N) \quad f_2(x_1) \dots f_2(x_N) \quad f_3 \dots f_8 ]$$

in  $\mathbf{K}$  tangenta togostna matrika. Elemente tangentne matrike dobimo z neposrednim upoštevanjem (2.78), (2.79), (2.76) in (2.77) v lineariziranih enačbah (2.68)–(2.75). Zaradi obsega jih posebej ne navajamo.

Iteracijo pričnemo z začetnim, kinematično dopustnim stanjem  $\mathbf{y}_d^{[0]}$ . Nove približke dobimo z ustreznim upoštevanjem “prirastkov”  $\delta \mathbf{y}_d$ .

Zaradi nelinearnosti konfiguracijskega prostora je pravilno upoštevanje popravkov zelo zapleteno. Osnovno vodilo je, da moramo s popravki dobiti kinematično dopustno konfiguracijo. To je še posebej pomembno pri uskladitvi popravkov robnih zasukov in popravkov deformacij.

Robne sile, izražene v fiksni bazi, in deformacijski vektor  $\boldsymbol{\gamma}$ , izražen v pomični bazi so aditivne vektorske količine, zato velja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_G^{i[n+1]} &= \boldsymbol{\gamma}_G^{i[n]} + \Delta \boldsymbol{\gamma}_G^i, \quad i = 1, \dots, N \\ \mathbf{N}_g^{0[n+1]} &= \mathbf{N}_g^{0[n]} + \Delta \mathbf{N}_g^0 \\ \mathbf{M}_g^{0[n+1]} &= \mathbf{M}_g^{0[n]} + \Delta \mathbf{M}_g^0, \end{aligned}$$

pri čemer so  $\Delta \boldsymbol{\gamma}_G^i = \delta \boldsymbol{\gamma}_G^i$ ,  $\Delta \mathbf{N}_g^0 = \delta \mathbf{N}_g^0$ ,  $\Delta \mathbf{M}_g^0 = \delta \mathbf{M}_g^0$ . Torej za te količine popravke preprosto prištejemo.

Povsem drugače pa je s popravki rotacijske matrike. Novo rotacijo dobimo kot produkt popravka rotacije in prejšnje rotacije

$$\mathbf{R}^{[n+1]} = \Delta \mathbf{R} \mathbf{R}^{[n]}.$$

Popravek rotacije ni osnovna količina, temveč je odvisen od popravka rotacijskega vektorja  $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g$ :

$$\Delta \mathbf{R} = \text{Rod}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g).$$

Tako smo utemeljili popravke robnih rotacijskih vektorjev

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}_g^{0[n+1]} &= \text{Spurr} \left[ \text{Rod}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^0) \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{0[n]}) \right] \\ \boldsymbol{\vartheta}_g^{L[n+1]} &= \text{Spurr} \left[ \text{Rod}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^L) \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{L[n]}) \right], \end{aligned}$$

kjer s Spurr označujemo Spurrerjev algoritem, z Rod pa Rodriguesovo formulo. Popravki rotacijskih deformacij-ukrivljenosti  $\boldsymbol{\kappa}_G$  prav tako niso preprosti, saj jih moramo uskladiti z robnimi zasuki. V skladu s šibko in krepko obliko kinematičnih enačb (2.6) in (2.8) sledi

$$\Delta \mathbf{K}_G^i = \mathbf{T}^T(\Delta \boldsymbol{\vartheta}_g^i) \delta \mathbf{K}_G^i, \quad i = 1, \dots, N$$

kjer je

$$\Delta \boldsymbol{\vartheta}_g^i = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g^0 + \int_0^{x_i} \mathbf{R} \left( \sum P_j \delta \boldsymbol{\kappa}_G^j \right) d\xi.$$

Popravke potem prištejemo trenutnim vrednostim

$$\mathbf{K}_G^{i[n+1]} = \mathbf{K}_G^{i[n]} + \Delta \mathbf{K}_G^i.$$

## 2.4.6 Reševanje enačb na nivoju konstrukcije

Predstavljeni deformacijski končni elementi imajo  $18 + 6N$  prostostnih stopenj. Za umestitev končnega elementa v konstrukcijo ne potrebujemo vseh prostostnih stopenj. Tako ločimo: (i) notranje prostostne stopnje elementa in (ii) zunanje prostostne stopnje, s katerimi se element povezuje v konstrukcijo. Zunanje prostostne stopnje elementa predstavljajo robni pomiki in zasuki elementa  $\begin{bmatrix} r_g^0 & \vartheta_g^0 & r_g^L & \vartheta_g^L \end{bmatrix}$ , ostale prostostne stopnje so notranje.

Notranje prostostne stopnje kondenziramo na nivoju elementa. Tako je sistem enačb na nivoju konstrukcije manjši, lažja pa je tudi povezava elementov različnih tipov. Pri kondenzaciji moramo podobno kot neznanke ločiti tudi enačbe. Na nivoju konstrukcije predstavljajo bistvene enačbe robni pogoji (2.53)–(2.56), saj le tako lahko ustrezno upoštevamo zunanje točkovne sile in momente.

Kondenzacijo lahko izvedemo po naslednji shemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nk} & \mathbf{K}_{nn} \\ \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{k} \\ \delta \mathbf{n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1-4} \\ \mathbf{f}_{5-8} \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

kjer smo s  $\mathbf{k}$  označili vektor robnih kinematičnih neznank,  $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} r_g^0 & \vartheta_g^0 & r_g^L & \vartheta_g^L \end{bmatrix}$ , z  $\mathbf{n}$  vektor notranjih količin elementa,  $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} N_g^0 & M_g^0 & \kappa_G^1, \dots, \kappa_G^N & \gamma_G^1, \dots, \gamma_G^N \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{f}_{1-4}$  del diskretnega stolpca desnih strani, ki pripada enačbam elementa  $\mathbf{f}_{1-4} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(x_1), \dots, \mathbf{f}_1(x_N) & \mathbf{f}_2(x_1), \dots, \mathbf{f}_2(x_N) & \mathbf{f}_3 & \mathbf{f}_4 \end{bmatrix}$  in  $\mathbf{f}_{5-8}$  stolpec statičnih robnih pogojev  $\mathbf{f}_{5-8} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_5 & \mathbf{f}_6 & \mathbf{f}_7 & \mathbf{f}_8 \end{bmatrix}$ . Matrike  $\mathbf{K}_{nk}$ ,  $\mathbf{K}_{nn}$ ,  $\mathbf{K}_{kk}$  in  $\mathbf{K}_{kn}$  predstavljajo ustrezne bloke v tangenti matriki elementa.

Enačbo (2.81) sestavljata dve bločni matrični enačbi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{nk} \delta \mathbf{k} + \mathbf{K}_{nn} \delta \mathbf{n} &= -\mathbf{f}_{1-4} \\ \mathbf{K}_{kk} \delta \mathbf{k} + \mathbf{K}_{kn} \delta \mathbf{n} &= -\mathbf{f}_{5-8}. \end{aligned}$$

Iz prvih enačb izrazimo  $\delta \mathbf{n}$  in ga ustavimo v druge enačbe. Po preurejanju dobimo

$$(\mathbf{K}_{kk} - \mathbf{K}_{kn} \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{K}_{nk}) \delta \mathbf{k} = -\mathbf{f}_{5-8} + \mathbf{K}_{kn} \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{f}_{1-4} \quad (2.82)$$

in

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{K}_{nn}^{-1} (-\mathbf{f}_{1-4} - \mathbf{K}_{nk} \delta \mathbf{k}). \quad (2.83)$$

Krajše izraz (2.82) zapišemo kot

$$\mathbf{K}_E \delta \mathbf{k}_E = -\mathbf{f}_E. \quad (2.84)$$

Enačbe (2.84) zložimo v sistem enačb na nivoju konstrukcije.

Na nivoju konstrukcije so neznanke kinematične količine v vozliščih konstrukcije, ki predstavljajo natanko vse robne točke vseh elementov. Neznanke na nivoju konstrukcije označimo s  $\mathbf{k}_C$ . Togostno matriko konstrukcije označimo s  $\mathbf{K}_C$ , pripadajoči residual pa z  $\mathbf{f}_C$ :

$$\mathbf{K}_C \delta \mathbf{k}_C = -\mathbf{f}_C. \quad (2.85)$$

Umeščanje kondenziranih enačb elementa (2.84) v enačbe konstrukcije je preprosto. Za levo in desno vozlišče elementa določimo lego v stolpcu neznank na nivoju konstrukcije  $\mathbf{k}_C$ . Prve tri elemente vektorja  $\mathbf{f}_E$  prištejemo na prava mesta, ki pripadajo levemu vozlišču elementa v stolpcu vozliščnih neznank konstrukcije. Podobno druge tri elemente prištejemo na ustrezna mesta desnega vozlišča. Matriko  $\mathbf{K}_E$  razstavimo na bloke velikosti  $3 \times 3$  in vpišemo v  $\mathbf{K}_C$  glede na pare indeksov vozlišč.

Blok levo zgoraj prištejemo v vrstice in stolpce, ki pripadajo levemu vozlišču. Blok desno zgoraj v vrstice, ki pripadajo levemu, in v stolpce, ki pripadajo desnemu vozlišču. Analogno postopamo za ostala bloka. Shemo prikazujemo na sliki 2.6.



## 3 METODA LOČNE DOLŽINE

### 3.1 Uvod

Iz zgodovine poznamo kar nekaj primerov (npr.: porušitev mostu v Quebecu 1907, porušitev ovalne jeklene konstrukcije v Timisoari 1951, porušitev 14 nadstropne stavbe Pino Suarez, Mexico City 1985), kjer je bila porušitev konstrukcije posledica globalne nestabilnosti. Govorimo o primerih, kjer se nestabilnost konstrukcije (uklon) zgodi preden se konstrukcija poruši po materialu. Vendar pa uklon posameznega elementa v konstrukciji ne pomeni nujno porušitev celotnega sistema. Porušitev konstrukcije kot posledica izgube stabilnosti je zelo zapleten in zahteven pojav, kjer se srečamo s fenomeni kot so postkritično obnašanje elementov konstrukcije v kombinaciji z različnimi nepopolnostmi. Največji prispevek k kompleksnosti problematike, pa je prav analiza prostorskega obnašanja konstrukcije v kritičnem in postkritičnem stanju ob geometrijski in materialni nelinearnosti. Za opisovanje takih pojavov imamo na razpolago več različnih metod, katerih zanesljivost je odvisna od vhodnih parametrov posameznega primera, ki ga obravnava. Na obnašanje konstrukcije v postkritičnem stanju najbolj vplivajo obtežni faktor, ter minimalna geometrijska odstopanja – nepopolnosti. Sodobni pristopi nelinearne analize, ki temeljijo na metodah sledenja krivuljam obnašanja konstrukcije nam omogočajo vedno bolj natančen vpogled v postkritična območja. Omejitev natančnosti raziskav se pojavlja zaradi vpliva nepopolnosti (materialnih in geometrijskih), ki lahko bistveno spremenijo obnašanje konstrukcije ob znani obtežbi.

### 3.2 Pregled stanja na področju sledenja obtežno deformacijskim putem

Za sledenje obtežno deformacijskim putem uporabljamo t.i. inkrementalno iterativne metode. Osnovna predpostavka teh metod je, da izhajamo iz poznanega trenutnega ravnotežnega stanja pri nekem nivoju obtežbe za iskanje naslednjega ravnotežnega stanja na obtežno deformacijski poti. Pri nelinearnih analizah konstrukcij avtorji večinoma uporabljajo dve vrsti metod: energijske metode in metode ločne dolžine. Prve so preprostejše za formulacije, lahko pa se izkažejo za problematične v območju kritičnih točk (glej npr. Widjaja (1998)). Zaradi nedvoumnosti, aplikativnosti in računske zanesljivosti se je metoda ločne dolžine izkazala za bolj učinkovito.

Idejni pobudnik in utemeljitelj metode ločne dolžine je Riks (1979), vendar je metodo bistveno izboljšal in priredil za metodo končnih elementov Crisfield (1981). Kasneje avtorji razvijejo različne modifikacije Crisfieldove metode ločne dolžine za linijske in ploskovne elemente. Lam in Morley (1990) predstavita modificirano metodo ločne dolžine, za prehod preko limitnih točk. Fafard in Massicotte (1993) predstavita modificirano metodo ločne dolžine, izpeljane iz Crisfield-ove (1981) in Ramm-ove (1980) metode ločne dolžine. Qi in Tiangi (1995) nadgradita Riksovo in Crisfieldovo metodo s pri-



lagodljivim parametrom, ki služi za oceno ravnotežnega stanja na obtežno deformacijski poti v območju preskokov. Deng (1996) metodo ločne dolžine priredi za učinkovito določanje obtežno deformacijskih poti elastičnih pravokotnih tankih plošč z bisekcijo. Teng in Lou (1998) modificirata Crisfieldovo metodo ločne dolžine s takšno kontrolo prirastka inkrementov obtežbe, da dobimo rezultate pri vseh vnaprej določenih obtežbah. Crisfieldov osnovni algoritem metode ločne dolžine Hellweg in Crisfield (1998) izboljšata in tako odpravita konvergenčne probleme v območju ostrih zavojev in skokov obtežno deformacijske poti. Szyszkowski in Husband (1999) uporabita ukrivljenosti obtežno deformacijske poti za boljšo napoved naslednjega koraka. Geers (1999a in 1999b) predstavi metodo za sledenje obtežno deformacijskim krivuljam s samodejnim določanjem inkrementov obtežbe. Zhu in Chu (2002) izboljšata metodo ločne dolžine z ekstrapolacijo znanih točk na obtežno deformacijski krivulji. Meek in Xue (1998) v svojem delu uporabita metodo ločne dolžine v kombinaciji z modificirano Newton-Rapsonovo iteracijsko metodo in ekstrapolacijsko tehniko za izboljšanje konvergence. Po doseženi kritični točki začne z dinamično analizo, ki temelji na povprečnih pospeških Newmarkovega algoritma. Postkritično obnašanje konstrukcije torej obravnava z dinamičnega stališča.

Metode ločne dolžine se uporabljajo za reševanje različnih problemov. Uporabljajo jo za analizo kompozitnih konstrukcij in konstrukcij pod temperaturno obtežbo (Huang in Tauchert (1991), Oh in Lee (2001), Alfano in Crisfield (2001, 2003), Lee s sodelavci (2002b), Liew s sodelavci (2004), Freddi in Savoia (2008) in drugi). Prav tako je primeren za reševanje kontaktnih problemov (Koo in Kwak (1996), Alart s sodelavci (2004), Kanno in Martins (2006)). Yang in Chen (2004) uporabita različne metode ločne dolžine za analizo razpok v konstrukcijah. May in Duan (1997) in kasneje Lorenz in Badel (2004) jo priredijo za analiziranje mehčanja materiala. Bruns s sodelavci (2002) modificirano metodo ločne dolžine uporabi za optimizacijo oblik konstrukcij.

Metodo ločne dolžine in njene izpeljanke uporabljajo še številni drugi avtorji, ki metodo prilagodijo svojim končnimi elementom in obravnavanim konstrukcijam. Znano je, da je lahko določena izpeljanka metode ločne dolžine natančna in učinkovita za določene primere, za drugačne konstrukcije pa morda neprimerna. Zato v literaturi zasledimo veliko primerjav metod sledenja obtežno deformacijskim potem za različne konstrukcije (npr. Clarke in Hancock (1990), Carrera (1994), Ragon s sodelavci (2002), Yang in Proverbs (2004), Li in Shen (2004), Ritto-Correa in Camotim (2008) in drugi). Ritto-Correa in Camotim (2008) v prispevku poudarita, da absolutna metoda, ki bi bila učinkovita za vse konstrukcije ne obstaja. Vsaka izpeljanka ima določene prednosti in pomanjkljivosti.

V disertaciji bomo izhajali iz metode ločne dolžine, kot so jo predstavili Feng s sodelavci (1995, 1996), Neto in Feng (1999). Njihova dela predstavljajo razširitev osnovne metode ločne dolžine Riksa (1979) in Crisfielda (1981). Ena izmed prednosti teh metod je, da omogočajo uporabniku nadzor nad velikostjo koraka v odvisnosti od trenutne in želene konvergence. Algoritem se je izkazal za robustnega in učinkovitega zato predstavlja smiselno osnovo za nadgradnjo našega prostorskega linijskega deformacijskega elementa.

### 3.3 Sledenje obtežno-deformacijski krivulji

Ravnotežne enačbe na nivoju konstrukcije lahko formalno zapišemo kot

$$f(u, \lambda) = g(u) - \lambda p = 0, \quad (3.1)$$

kjer  $u$  predstavlja vektor vozliščnih pomikov,  $f$  stolpec ravnotežnih enačb,  $p$  vektor fiksne zunanje obtežbe,  $g$  stolpec ravnotežnih notranjih sil in momentov. Faktor  $\lambda$  imenujemo **obtežni faktor**. Za

$\lambda = 1$  smo enačbe izpeljali že v prejšnjem poglavju. Prav tako lahko enačbe (3.1) rešimo za vsako fiksno vrednost parametra  $\lambda$ . Če parameter  $\lambda$  spreminjamo, predstavljajo enačbe (3.1) krivuljo (oziroma družino krivulj v primeru večkratne rešitve) imenovano obtežno-deformacijska krivulja. Za določitev točk na tej krivulji potrebujemo dodatno vezno skalarno enačbo

$$h(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (3.2)$$

Kadar želimo spremljati "potovanje" delca po krivulji je potrebno vpeljati ustrezno parametrizacijo. V metodah sledenja obtežno deformacijskim potem imenujemo ta parameter **ločna dolžina** ali splošneje parameter poti. Tako lahko rešitev enačb (3.1) in (3.2) zapišemo kot

$$\mathbf{x}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

kjer je  $s$  parameter poti. Z uvedbo take parametrizacije lahko sledimo obtežno deformacijski krivulji. V diskretnem smislu to pomeni: če je  $s_K < s_{K+1}$ , je  $\mathbf{x}(s_K)$  prejšnja,  $\mathbf{x}(s_{K+1})$  pa naslednja točka na krivulji.

Za vezno enačbo (3.2) lahko uporabimo različne možnosti. V naši formulaciji bomo uporabili naslednjo obliko vezne enačbe

$$h_{K+1}(\mathbf{u}, \lambda, s) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_K) + (\lambda - \lambda_K)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} - (s - s_K)^2. \quad (3.4)$$

S ' $K$ ' smo označili indeks obtežnega koraka in je naravno število.  $\mathbf{u}_K$  so pomiki ob doseženem ravnotežju (končani iteraciji) koraka z oznako  $K$ .  $\lambda_K$  in  $s_K$  sta pripadajoči obtežni faktor in parameter poti v obtežnem koraku  $K$ . Enačba (3.4) torej predstavlja vezno enačbo v koraku  $K + 1$ . Razvidno je tudi, da je vezna enačba odvisna od prejšnjega koraka, torej se z obtežbo spreminja. Matriki  $\mathbf{W}$  in  $\mathbf{H}$  sta poljubni simetrični matriki velikosti  $n \times n$ , kjer je  $n$  dimenzija vektorja  $\mathbf{u}$ . Različna izbira  $\mathbf{W}$  in  $\mathbf{H}$  predstavlja različne sheme metod ločne dolžine. Kot so že poročali (Schweizerhof in Wriggers (1986)) je izbira prave sheme metode ločne dolžine lahko bistvenega pomena za robustnost algoritma. Izkaže se, da je lahko neka shema učinkovita le za določene numerične primere, medtem ko je za ostale primere neuporabna. Izbira neprimerne sheme metode ločne dolžine se navadno odraža v slabi konvergenci ali celo divergenci. Izbira prave sheme pride še posebno do izraza pri vgraditvi algoritmov v končne elemente komercialnih programov, kjer mora biti postopek izbire sheme avtomatiziran. Problem izbire sheme je torej zanimiv in večkrat obravnavan. Nekateri avtorji predlagajo preklapljanje med različnimi shemami vzdolž obtežno-deformacijske poti (npr. Bellini in Chulya (1987)). To se izkaže za potrebno pri nekaterih posebnih numeričnih primerih. Kot poročajo drugi (Cardona in Huespe (1998)), za večino primerov preklapljanje med shemami vzdolž obtežno deformacijske poti ni potrebno. V našem algoritmu je izbira matrike  $\mathbf{W}$  in  $\mathbf{H}$  poljubna za vsak posamezni obtežni korak v metodi ločne dolžine. S tem omogočimo, da bi lahko v vsakem obtežnem koraku matriki  $\mathbf{W}$  in  $\mathbf{H}$  prilagodili trenutnim razmeram. Izkaže se, da v naših primerih spreminjanje sheme med različnimi koraki metode ločne dolžine ni potrebno. Še več, v večini primerov je ustrezna izbira kar identiteta za matriko  $\mathbf{W}$  in ničelna matrika za  $\mathbf{H}$ . V kolikor v numeričnih primerih posebej ne omenjamo, smo za račun uporabili taki matriki.

Sistem enačb (3.1) in (3.4) rešujemo iterativno. Sistem moramo najprej linearizirati. Linearizacijo prvega člena v enačbah (3.1) smo že spoznali. Ker je  $\mathbf{g}$  neodvisen od  $\lambda$ , je to natanko tangentska togostna matrika konstrukcije, pomnožena z variacijo vozliščnih neznank. Če upoštevamo še, da je obtežba  $\mathbf{p}$  fiksna in da sta fiksni tudi vrednosti  $\mathbf{u}_K$  in  $\lambda_K$ , dobimo

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \delta \mathbf{u} - \mathbf{p} \delta \lambda. \quad (3.5)$$

Z linearizacijo (3.4) pa dobimo

$$\begin{aligned}\delta h_{K+1} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{W} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_K) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W} \delta \mathbf{u} + 2(\lambda - \lambda_K)^2 \delta \lambda \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \\ &= 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W} \delta \mathbf{u} + 2(\lambda - \lambda_K) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \delta \lambda \\ &= \mathbf{m}_{K+1} \delta \mathbf{u} + \alpha_{K+1} \delta \lambda,\end{aligned}\quad (3.6)$$

kjer sta

$$\mathbf{m}_{K+1}(\mathbf{u}) = 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W}, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{K+1}(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_K) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \quad (3.8)$$

funkciji nekega stanja  $[\mathbf{u}, \lambda]$ , pri čemer smo pri prvem členu upoštevali komutativnost skalarnega produkta.

Linearizirani enačbi (3.5) in (3.6) predstavljata osnovo za iterativno reševanje (poglavje 2.4.5), vendar pa moramo upoštevati, da je stanje  $K$  uravnoteženo stanje, določeno z  $\mathbf{u}_K$  in  $\lambda_K$ . Preden rešimo enačbe novega stanja ( $K + 1$ ), se pravi nove točke na obtežno deformacijski krivulji, se moramo iz stanja  $K$  premakniti. Tej fazi pravimo **prediktor**, saj predstavlja primeren začetni približek. Začetni približek v drugi fazi, imenovani **korektor**, z iterativnimi metodami približujemo ravnotežju do zelene natančnosti.

### 3.3.1 Prediktor

Če iz vrednotimo  $\mathbf{m}_{K+1}$  in  $\alpha_{K+1}$  v točki  $(\mathbf{u}_K, \lambda_K)$ , dobimo singularnost, zato postopamo drugače. Ker so v stanju  $K$  enačbe (3.1) uravnotežene, velja

$$\mathbf{K}|_{\mathbf{u}_K} \delta \mathbf{u} - \mathbf{p} \delta \lambda = 0. \quad (3.9)$$

Torej je v tem primeru

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} \delta \lambda. \quad (3.10)$$

Zveza (3.10) predstavlja osnovo začetnega približka stanja  $K + 1$ , ki ga v linearnem konfiguracijskem prostoru definiramo kot

$$\mathbf{u}_{K+1}^{[0]} = \mathbf{u}_K + \Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[0]}, \quad (3.11)$$

$$\lambda_{K+1}^{[0]} = \lambda_K + \Delta \lambda_{K+1}^{[0]}. \quad (3.12)$$

Iz enačbe (3.10) potem sledi:

$$\Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[0]} = \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} \Delta \lambda_{K+1}^{[0]}. \quad (3.13)$$

Ker pa mora začetni približek zadoščati tudi enačbi (3.4), sledi

$$\Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[0]T} \mathbf{W} \Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[0]} + \Delta \lambda_{K+1}^{[0]2} \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} - (s_{K+1} - s_K)^2 = 0. \quad (3.14)$$

Ko vstavimo (3.13) v (3.14), dobimo

$$\Delta \lambda_{K+1}^{[0]2} \mathbf{p}^T \mathbf{K}_K^{-T} \mathbf{W} \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + \Delta \lambda_{K+1}^{[0]2} \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} = \Delta s_{K+1}^2 \quad (3.15)$$

torej je

$$\Delta \lambda_{K+1}^{[0]} = \pm \frac{\Delta s_{K+1}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{K}_K^{-T} \mathbf{W} \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}}}. \quad (3.16)$$

Izbrati moramo pravi predznak začetnega prirastka. Načinov je več. Tu uporabimo zahtevo (Feng s sodelavci (1994)), da mora biti predznak  $\Delta\lambda_{K+1}^{[0]}$  enak predznaku ustrezne komponente tangente na celotno deformacijsko krivuljo  $\frac{\delta\lambda}{\delta s}$ .

Odvode po parametru poti dobimo s posrednim odvajanjem, saj je  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$  in  $\lambda = \lambda(s)$ :

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \mathbf{p} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{dh_{K+1}}{ds} = 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + 2(\lambda - \lambda_K) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \frac{d\lambda}{ds} - 2(s - s_K) = 0. \quad (3.18)$$

Iz prve enačbe izrazimo  $\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta s}$  in vstavimo v drugo:

$$\frac{dh_{K+1}}{ds} = \left[ 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)^T \mathbf{W} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} + 2(\lambda - \lambda_K) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \right] \frac{d\lambda}{ds} - 2(s - s_K) = 0. \quad (3.19)$$

V dobljeni enačbi so  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$ ,  $s$ ,  $\mathbf{K}$  količine nekega stanja. Ker poljubnega stanja ne poznamo, je smiselno, da uporabimo prejšnje in predprejšnje stanje ( $K$  in  $K-1$ ). Tako lahko odvod vezne enačbe  $h_K$  izvednotimo v točki  $\mathbf{u}_K, \lambda_K$ :

$$\left. \frac{dh_K}{ds} \right|_{(\mathbf{u}_K, \lambda_K)} = \left[ 2(\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_{K-1})^T \mathbf{W} \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + 2(\lambda_K - \lambda_{K-1}) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \right] \frac{d\lambda}{ds} - 2(s_K - s_{K-1}) = 0. \quad (3.20)$$

Če preoblikujemo prejšnji izraz, sledi

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\Delta s_K}{(\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_{K-1})^T \mathbf{W} \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + (\lambda_K - \lambda_{K-1}) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}} \\ &= \frac{2\Delta s_K}{\mathbf{m}_K (\mathbf{u}_K)^T \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + \alpha_K (\lambda_K)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ker je korak vedno pozitiven, je predznak določen z izrazom v imenovalcu. Torej je

$$\text{sign} \left( \lambda_{K+1}^{[0]} \right) = \text{sign} \left( \mathbf{m}_K (\mathbf{u}_K)^T \mathbf{K}_K^{-1} \mathbf{p} + \alpha_K (\lambda_K) \right). \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Korektor

Po končani prediktorski fazi, iterativno rešujemo sistem enačb (3.1) in (3.4). Shemo iterativne metode lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]} & \mathbf{p} \\ \mathbf{m}_{K+1} (\mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]}) & \alpha_{K+1} (\lambda_{K+1}^{[n-1]}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[n]} \\ \Delta \lambda_{K+1}^{[n]} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f} (\mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]}, \lambda_{K+1}^{[n-1]}) \\ h_{K+1} (\mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]}, \lambda_{K+1}^{[n-1]}) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}_{K+1}^{[n]} = \mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]} + \Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[n]} \quad (3.24)$$

$$\lambda_{K+1}^{[n]} = \lambda_{K+1}^{[n-1]} + \Delta \lambda_{K+1}^{[n]}, \text{ za } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Vrednosti razširjene tangentne matrike in residuala torej izvednotimo v trenutnem iterativnem stanju. Začetno stanje pri  $\mathbf{u}_{K+1}^{[0]}, \lambda_{K+1}^{[0]}$  je izvednoteno v prediktorski fazi. Postopek nadaljujemo do želene natančnosti

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K+1}^{[n]} \\ \Delta \lambda_{K+1}^{[n]} \end{bmatrix} \right\| &\leq \text{tol} \\ \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ h_{K+1} \end{bmatrix} \right\| &\leq \text{tol}. \end{aligned}$$

### 3.3.3 Kontrola koraka

Iz enačbe (3.4) je razvidno, da imamo v vsakem obtežnem koraku možnost prilagajanja prirastka parametra poti  $\Delta s_{K+1}$ . Prirastek parametra poti določamo glede na razmerje med doseženim in želenim številom iteracij korekcijske faze:

$$\Delta s_{K+1} = \left( \frac{I}{I_K} \right)^\beta \Delta s_K. \quad (3.26)$$

V enačbi (3.26) predstavlja  $I$  število zelenih iteracij,  $I_K$  število iteracij v prejšnjem obtežnem koraku. Koeficient  $\beta$  vpliva na hitrost spreminjanja parametra poti, običajno izberemo  $\beta = 1/2$ . Algoritem je zasnovan tako, da lahko v vsakem koraku spremenimo želeno število iteracij  $I$  in eksponent  $\beta$ . Torej lahko v vsakem obtežnem koraku vplivamo na velikost prirastka parametra in na hitrost spreminjanja le tega. Za zahtevne numerične primere je nadzor nad prirastkom poti ključnega pomena, saj se lahko v območju kritičnih točk pomiki in zasuki konstrukcije hipno povečajo.

Iz enačbe (3.26) je razvidno, da lahko začetni prirastek poti  $\Delta s_1$  poljubno izberemo. Začetni prirastek poti si le težko predstavljamo, zato raje podamo začetni obtežni korak  $\lambda_1^{[0]}$ . Oglejmo si zvezo med obema količinama. Privzemimo, da v začetnem stanju velja  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\lambda_0 = 0$  in  $s_0 = 0$ . Potem je

$$h_1(\mathbf{u}_1, \lambda_1, s_1) = \mathbf{u}_1^T \mathbf{W} \mathbf{u}_1 + \lambda_1^2 \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} - (\Delta s_1)^2 = 0. \quad (3.27)$$

Vrednosti  $\mathbf{u}_1$  ne poznamo, lahko pa jo ocenimo po linearni teoriji (3.10)

$$\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{p} \lambda_1. \quad (3.28)$$

Če enačbo (3.28) vstavimo v (3.27), sledi

$$\lambda_1^{[0]} \approx \frac{\Delta s_1}{\sqrt{\mathbf{p} \mathbf{K}_0^{-T} \mathbf{W} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}}}. \quad (3.29)$$

Začetni približek poti tako izrazimo iz danega faktorja obtežbe kot

$$\Delta s_1 = \sqrt{\mathbf{p} \mathbf{K}_0^{-T} \mathbf{W} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}} \lambda_1^{[0]}, \quad (3.30)$$

kjer je  $\mathbf{K}_0$  tangentna matrika konstrukcije v začetnem, neobremenjenem stanju.

### 3.3.4 Metoda ločne dolžine na nelinearnih konfiguracijskih prostorih

Osnovna shema metode ločne dolžine temelji na predpostavki, da je konfiguracijski prostor, v katerem se nahajajo stanja  $\mathbf{u}$ , linearen vektorski prostor. V takem primeru lahko popravke preprosto prišteveno in računamo običajno razliko med količinami v različnih korakih. Metodo ločne dolžine bomo aplicirali na sistem globalnih ravnotežnih enačb na nivoju konstrukcije (2.85). Globalne neznanke na nivoju konstrukcije so vozliščni pomiki in zasuki. V prejšnjem poglavju smo večkrat opozorili na nelinearnost rotacij in to ustrezno upoštevali pri linearizaciji in popravkih iterativnega reševanja. Podobno je potrebno postopati tudi pri uporabi shem sledenja obtežno-deformacijskim potem. Vektor  $\mathbf{k}_C$  vozliščnih neznank na nivoju konstrukcije razdelimo na aditivne in neaditivne količine:

$$\mathbf{k}_C = [ \mathbf{k}_u \quad \mathbf{k}_\vartheta ]^T. \quad (3.31)$$

Aditivne količine so vozliščni pomiki, neaditivne pa rotacijski vektorji. Za neaditivni del neznank moramo upoštevati posebnosti pri izvrednotenju vezne enačbe (3.4), njene variacije (3.6), prediktorja in korektorja.

V izrazih za  $h_{K+1}$  in  $m_{K+1}$  nastopa faktor  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_K)$ . V našem modelu razliko izvedemo le za  $k_u$ . Za neaditivni del pa upoštevamo, da je 'razlika' rotacij le sprememba med staro in novo rotacijo. Če je

$$\mathbf{R}^{[n+1]} = \Delta \mathbf{R} \mathbf{R}^{[n]}, \quad (3.32)$$

sledi

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^{[n+1]} \mathbf{R}^{[n]T}. \quad (3.33)$$

Naj bo rotacija  $\mathbf{R}^{[n]}$  določena z rotacijskim vektorjem  $\boldsymbol{\vartheta}^{[n]}$  in podobno  $\mathbf{R}^{[n+1]}$  z  $\boldsymbol{\vartheta}^{[n+1]}$ . Sprememba rotacij je torej

$$\text{Rod}(\Delta \boldsymbol{\vartheta}) = \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}^{[n+1]}) \cdot \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}^{[n]})^T. \quad (3.34)$$

Če izluščimo rotacijski vektor, pa velja

$$\Delta \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^{[n+1]} \ominus \boldsymbol{\vartheta}^{[n]} = \text{Spurr} \left( \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}^{[n+1]}) \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}^{[n]})^T \right). \quad (3.35)$$

Pri tem smo s simbolom ' $\ominus$ ' poudarili, da ne gre za običajno razliko.

Enačbo (3.35) potrebujemo v prediktorski fazi za pravilno določitev predznaka (izraz  $m_K(\mathbf{u}_K)$  v enačbi (3.21)). Pri začetnem popravku vozliščnih zasukov (enačba (3.11)) pa moramo podobno kot v poglavju dodati inkremente zasukov v skladu z lastnostmi prostorskih rotacij:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{K+1}^{[0]} = \text{Spurr} \left[ \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta} \mathbf{u}_{K+1}^{[0]}) \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}_K) \right] \quad (3.36)$$

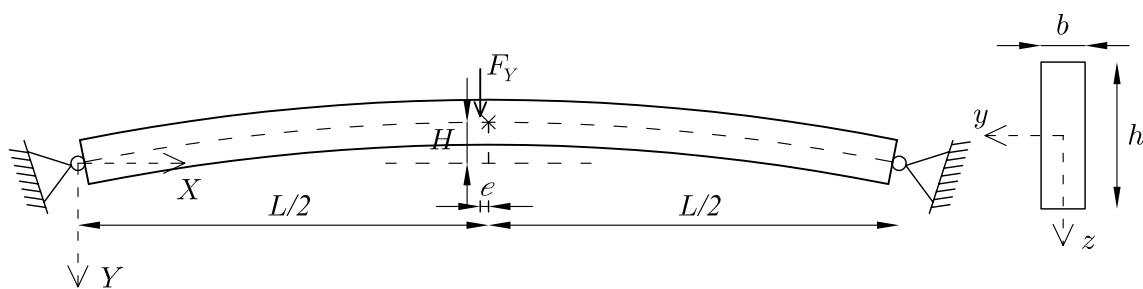
V korektorski fazi uporabimo (3.35) za izračun  $m_{K+1}(\mathbf{u}_{K+1}^{[n-1]})$ , pri upoštevanju popravkov pa postopamo v skladu s poglavjem 2.4.5.

## 3.4 Numerični primeri

Zaenkrat se omejimo na elastične, bočno podprte prostorske konstrukcije. Take konstrukcije imajo enolično določeno obtežno deformacijsko pot, kar pomeni, da so kritične točke prevojne. Natančnost izpeljanega algoritma ločne dolžine bomo preverili za konstrukcije pri velikih deformacijah. Prikazali bomo primerjavo naših rezultatov z drugimi avtorji. Analizirali bomo tudi vpliv nekaterih parametrov, kot sta dolžina koraka in tip elementa na konvergenco in na natančnost sledenja obtežno-deformacijskim potem.

### 3.4.1 Vpeti krožni lok

Členkasto vpete krožne loke so obravnavali številni avtorji, med njimi Jeusette s sodelavci (1989), El-Ghazaly in Monforton (1989), Gjelsvik in Bodner (1962), Shao (1990), Al-Rasby (1991) in Zhiliang (1994). V tem razdelku se osredotočimo na primer, ki sta ga objavila Bellini in Chulya (1987). Gre za obojestransko členkasto vpeti lok (obok), ki je na sredini obremenjen z ekscentrično točkovno silo  $F$ . Med avtorji, ki obravnavajo ta primer so tudi Clarke in Hancock (1990) in Feng s sodelavci (1995).

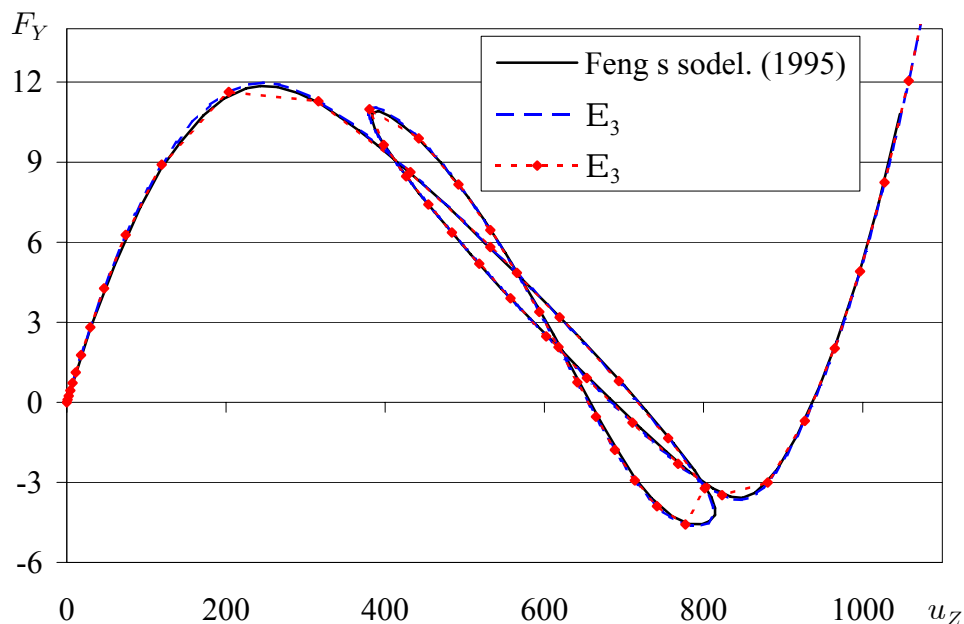


Slika 3.1: Vpeti krožni lok z asimetrično obtežbo.  
Figure 3.1: Circular arch subjected to asymmetric force.

Geometrija konstrukcije je prikazana na sliki 3.1. Vhodni parametri, ki so povzeti po Feng (1995), znašajo: višina loka  $H = 500$ , razpon loka  $L = 10^4$ , radij ukrivljenosti loka  $R = 25250$ , ekscentričnost obtežbe  $e = 100$ , višina prečnega prereza  $h = \sqrt{1.2 \cdot 10^5}$ , širina prečnega prereza  $b = 10^4 / \sqrt{1.2 \cdot 10^5}$ , elastični modul  $E = 200$ .

Lok zaradi asimetričnosti obtežbe modeliramo s 50 ukrivljenimi elementi enakih dolžin. Uporabili smo elemente različnih redov. Pri tako gosti mreži red elementa ne vpliva bistveno na rezultate obtežno-deformacijske krivulje, zato smo uporabili hitreje elemente tipa  $E_3$ .

Na sliki 3.2 primerjamo naše rezultate, z rezultati, kot jih podaja Feng s sodelavci (1995). Kljub za-



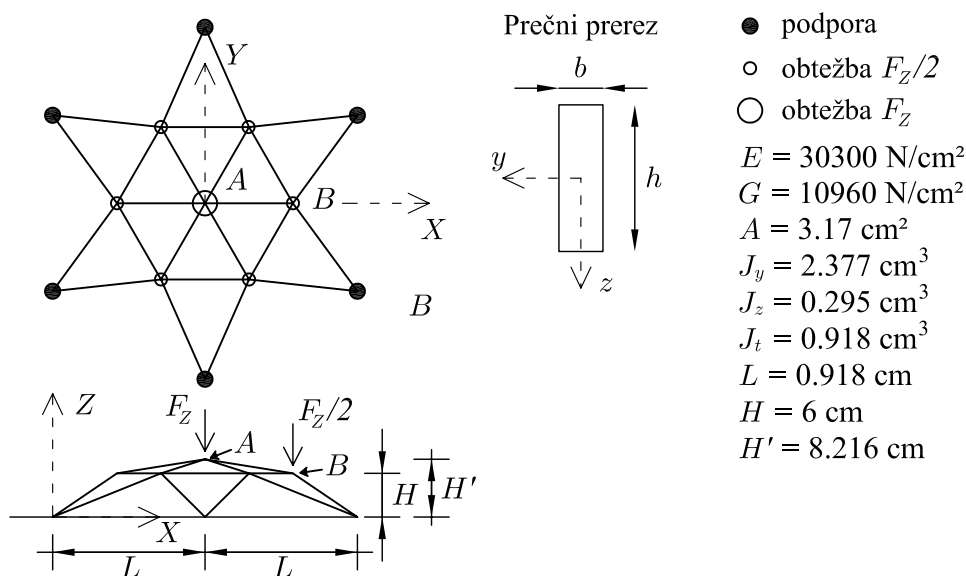
Slika 3.2: Obtežno deformacijska krivulja središnje točke, pomik v vertikalni smeri.  
Figure 3.2: Load deflection path, vertical deflection of midpoint.

htevnosti problema zaradi ekscentričnosti točkovne obtežbe, ki povzroči, da se lok asimetrično hipno deformira, je ujemanje rezultatov zelo dobro. Rezultate smo izračunali s srednje velikim korakom  $\Delta s \approx 50$ , kar je pomenilo, da smo želeno natančnost ravnotežne lege dosegali v največ štirih Newtonovih iteracijah. Nato smo algoritem testirali še za daljše korake (lomljena črta z markerjem), za zadoščanje želene natančnosti za konvergenco pa smo potrebovali do šest korakov. Kljub razmeroma velikim ko-

rakom, največje velikosti koraka so bile  $\Delta s \approx 400$ , smo za konvergenco potrebovali relativno nizko število iteracij, za celotno krivuljo pa smo potrebovali manj kot 50 korakov. Dobljene točke so povsem enakovredne rezultatom, dobljenim z manjšim korakom. Velikost koraka je še posebno pomembna v območju hipnih sprememb smeri krivulje, kot so o tem poročali drugi avtorji. V primeru, da je korak prevelik ne najdemo rešitve na ravnotežni veji, kar se izkaže kot divergenca oz. preskok na drugo, napačno vejo obtežno deformacijske poti. Ker v naši formulaciji prilagajamo velikost koraka trenutnim pogojem, to je zelenemu številu iteracij in doseženemu številu iteracij v prejšnjih korakih, se lahko tem težavam uspešno izognemo.

### 3.4.2 Postkritično obnašanje zvezdaste kupole

Obravnavamo kupolo v obliki zvezde, ki je obremenjena z različnimi vertikalnimi točkovnimi silami (slika 3.3). V vpetiščih je vrtljivo nepomično podprta. To konstrukcijo je v svojih delih obravnavalo veliko avtorjev (Chan (1992), Meek (1984), Hsiao s sodelavci (1987), Papadrakakis s sodelavci (1981) in drugi). Materialni in geometrijski parametri prečnih prereзов so enaki za vse elemente konstrukcije in so prikazani na sliki 3.3.

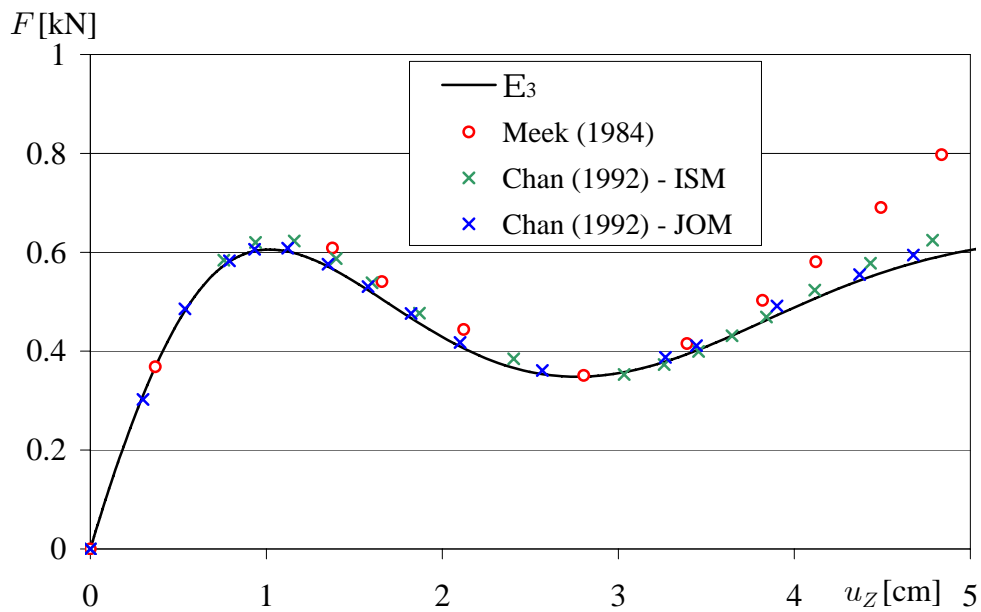


Slika 3.3: Geometrijski in materialni podatki zvezdaste kupole.  
 Figure 3.3: Geometrical and material parameters of the star-shaped frame.

Posamezen konstrukcijski element kupole je modeliran z enim samim končnim elementom. Računski model tako sestavlja 24 elementov tipa  $E_3$ , ki so med seboj togo povezani. Spremljamo obtežno deformacijsko ravnotežno pot v stabilnem in v postkritičnem območju za vozlišči, ki sta izpostavljeni vertikalni obtežbi (točki A in B, slika 3.3). Dobljene rezultate za zvezo med silo in pomiki primerjamo z rezultati, objavljenimi v literaturi.

Na sliki 3.4 prikazujemo vertikalne pomike točke A, in primerjamo z rezultati, ki jih predstavljata Chan (1992) in Meek (1984). Kljub relativno nizki stopnji elementa opazimo odlično ujemanje rezultatov. Medtem, ko smo za posamezen nosilec uporabili le en kvadratičen element  $E_3$ , Chan za posamezen nosilec uporablja dva elementa. Rezultati iz vira Chan (1992) so predstavljeni za dva različna postopka. Točnejši je postopek JOM ('Joint orientation method'), ki se tudi bolje ujema z našimi rezultati. Rezultati

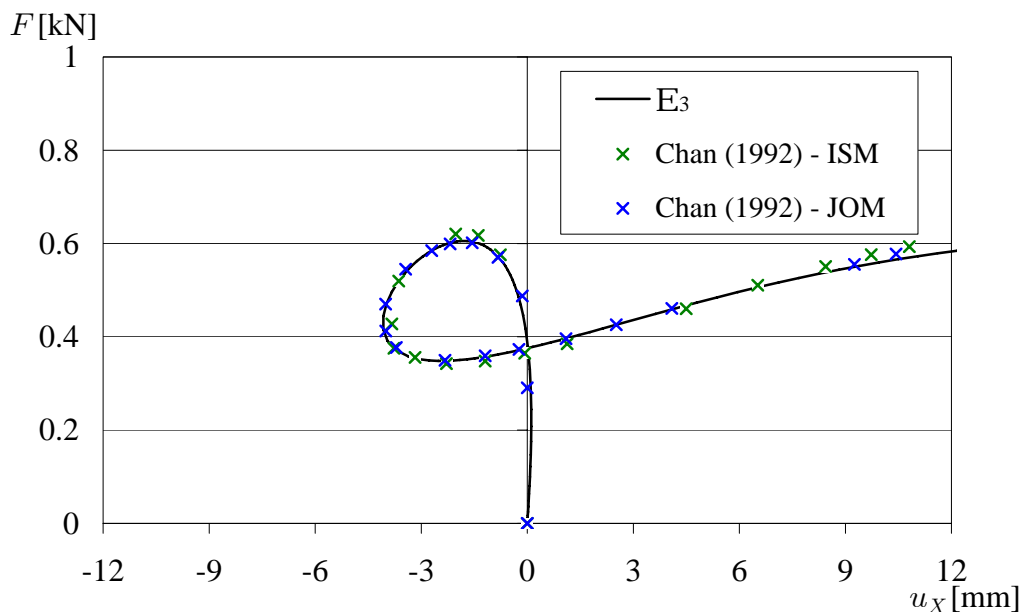




Slika 3.4: Zveza med silo in pomiki sredinske točke zvezdaste kupole.  
Figure 3.4: Load deflection path at the midpoint of the star-shaped frame.

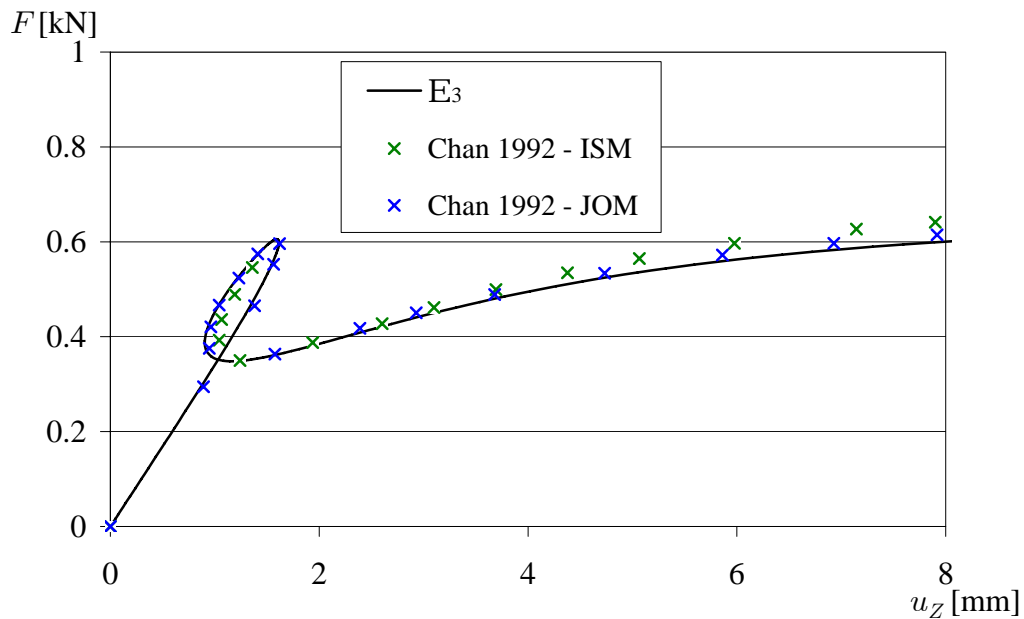
po viru Meek (1984) so manj natančni, vendar večinoma vseeno primerljivi z našimi.

Za prikaz zmogljivosti in verodostojnosti prostorske formulacije v postkritičnem območju, na slikah 3.5 in 3.6 podajamo še rezultate za horizontalne in vertikalne pomike točke *B*.



Slika 3.5: Zveza med silo in horizontalnimi pomiki točke *B* zvezdaste kupole.  
Figure 3.5: Load deflection path at the point *B* on the star-shaped frame. Horizontal direction.

Grafi na slikah 3.5 in 3.6 kažejo na ujemanje naših rezultatov z rezultati, ki ji podaja Chan (1992), že za elemente nizke stopnje. Natančnost rezultatov uporabljenega kvadratičnega elementa smo potrdili

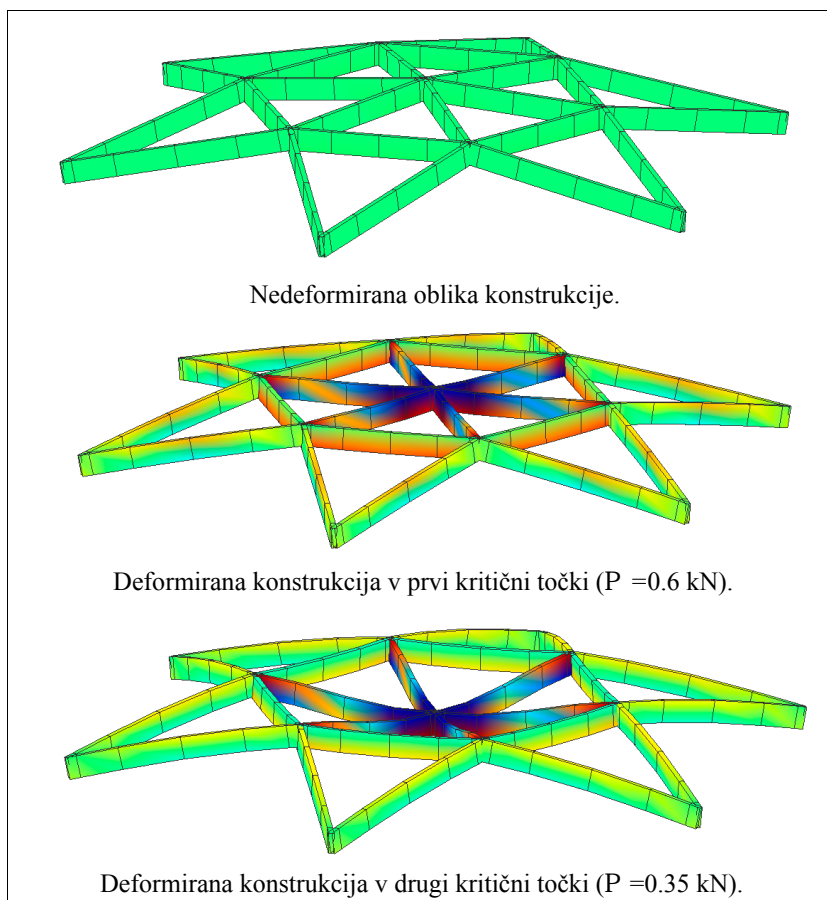


Slika 3.6: Zveza med silo in vertikalnimi pomiki točke B zvezdaste kupole.

Figure 3.6: Load deflection path at the point B on the star-shaped frame. Vertical direction.

tudi z analizo z našimi elementi višjih redov. Pomiki konstrukcije so se izkazali za enake, zato v tem delu omenjenih rezultatov ne prikazujemo. Zaključimo lahko, da je uporabljeni algoritem robusten ter učinkovit tudi pri uporabi manj elementov z nižjo stopnjo integracije.

Na sliki 3.7 prikazujemo deformirane oblike zvezdaste kupole. Kupola je obtežena z obtežbami  $P = 0$  (nedeformirana oblika),  $P = 0.6$  kN (prva kritična točka) in  $P = 0.35$  kN (druga kritična točka). Pomiki na sliki 3.7 so povečani za faktor 2. Zvezdasta kupola se v prvi in drugi kritični točki deformira predvsem v sredinskem delu. V prvi kritični točki so sredinski elementi v vodoravnem položaju, potem pa začne sila padati (glej tudi graf na sliki 3.4). Najnižja sila je v drugi kritični točki, ko pride do uklona sredinskih elementov. Potem začne sila spet naraščati, saj začnejo odpor nuditi stranski elementi.



Slika 3.7: Deformirane oblike zvezdaste kupole.  
Figure 3.7: Deformed shapes of the star-shaped frame.

## 4 KRITIČNE TOČKE

### 4.1 Uvod

Pri analizi konstrukcije je pomembno, da opazujemo njen nelinearen odziv v kritičnem in postkritičnem območju. Pred porušitvijo se lahko na konstrukciji pojavijo veliki pomiki. Pri takih konstrukcijah je izguba stabilnosti pogost pojav, stabilnostne analize so zato ključnega pomena. V splošnem lahko krivulja odziva (obtežba/pomik) konstrukcije zajema stabilno in nestabilno območje ter kritične točke. Krivulja ni nujno enolično določena. Kritične ali tudi singularne točke lahko razdelimo v dva sklopa. Prve so limitne ali prevojne točke. Določanje teh je lažje, saj je v teh točkah krivulja odziva pravokotna z osjo obtežbe. Na krivulji odziva pa se lahko pojavi tudi viličenje oz. bifurkacija krivulje. Od te točke naprej obstajata po krivulji dve ali več poti. Določanje teh točk največkrat izvajamo s pomočjo t.i. testnih funkcij kritičnih točk. To je bodisi opazovanje predznaka determinante tangentne togostne matrike, opazovanje minimuma lastnih vrednosti togostne matrike konstrukcije ali minimuma diagonalne matrike  $\mathbf{D}$ , ki jo dobimo s faktorizacijo togostne matrike  $\mathbf{K}=\mathbf{LDL}^T$ . Bifurkacijske točke so lahko enostavne ali večkratne. Enostavne bifurkacijske točke so pri gradbenih konstrukcijah pogostejše. Določanje takih bifurkacijskih točk je zato v literaturi širše obravnavano (glej npr. Fujikake (1985), Fujii in Choong (1992), Onate in Matias (1996), Wriggers in Simo (1990), Magnusson in Svensson (1998), Planinc in Saje (1999) in druge). Določevanje večkratnih bifurkacijskih točk je zahtevnejša naloga. Zaradi večkratnih lastnih vrednosti tangentne togostne matrike lastni vektor ni enolično določen. V tem primeru je koristno opazovati rang tangentne togostne matrike. Večkratne bifurkacijske točke v svojih delih obravnavajo med drugimi tudi Dellnitz in Werner (1989), Fujii s sodelavci (2000), Noguchi in Fujii (2003) in Rezaiee-Pajand in Vejdani-Noghereiyan (2006). V nalogi se bomo posvetili pretežno enostavnim bifurkacijskim točkam, saj za obravnavane primere večkratne bifurkacijske točke niso tipične.

Bolj kot samo določanje kritične točke je za naše delo pomembno iskanje nadaljnjih poti, z upoštevanjem vseh možnih razvejanj (Fujikake (1985), Fujii in Ramm (1997), Fujii in Okazawa (1997)). Ključna koraka stabilnostne analize sta torej klasifikacija kritičnih točk in formulacija postopka iskanja vej v območju bifurkacije. Osnova je izračun lastnega vektorja matrike  $\mathbf{K}_C$  v kritični točki in rešitev bifurkacijske enačbe.

### 4.2 Določanje kritičnih točk

Eden od možnih pristopov za določitev kritičnih točk je iskanje ničle determinante globalne tangentne togostne matrike:  $\det \mathbf{K}_C = 0$ . Ta pristop se pogosto uporablja pri inženirskem določanju kritičnih točk. To zvezo je obravnaval Abbott (1978) pri določanju netrivialnih bifurkacijskih točk z uporabo

linearne konvergentne metode. Določanje kritičnih točk simetričnih bifurkacij je z ekspanzijsko metodo je predstavil Magnusson (2001). Kvadratično konvergentno metodo za določanje ničle determinante tangentne togostne matrike je uporabil Planinc s sodelavci (1998). V nalogi se s hitro konvergentnimi algoritmi za iskanje kritičnih točk ne ukvarjamo. Za določitev kritične točke uporabimo pogoj

$$\boxed{\det \mathbf{K}_C = 0}, \quad (4.1)$$

za metodo iskanja pa uporabimo bisekcijo. Ker smo v našo formulacijo vgradili kontrolo koraka pri spreminjanju obtežno deformacijske poti, lahko algoritem iskanja neposredno vključimo v metodo ločne dolžine. V vsakem koraku metode ločne dolžine spremljamo dva kriterija: (i) predznak determinante tangentne togostne matrike konstrukcije ( $\text{sign}(\det \mathbf{K}_C)$ ). Ob spremembi predznaka determinante, se vrnemo korak nazaj. Nato s spremenjeno dolžino naslednjega koraka zopet izračunamo predznak determinante za novo ravnotežno lego. Dolžino koraka prilagajamo z bisekcijo. V zadostni bližini ničle je postopek povsem učinkovit. (ii) Spremljamo tudi relativno velikost determinante tangentne togostne matrike. Velikost trenutne determinante tangentne togostne matrike primerjamo z vrednostjo determinante za začetno, nedeformirano konstrukcijo. V primeru, da je v trenutnem koraku razmerje med vrednostjo trenutne in začetne determinante manjše od želene tolerance, postopek ustavimo. S tako kontrolo lahko zaznamo tudi večkratne bifurkacijske točke, saj se pri teh determinanta togostne matrike lahko samo približa ničli in ne spremeni nujno predznaka.

### 4.3 Klasifikacija kritične točke

Ko smo kritično točko natančno določili, jo moramo klasificirati. Klasifikacija kritične točke je zahteven problem, o katerem govori veliko avtorjev. Vrsta kritične točke pogojuje tudi nadaljevanje obtežno deformacijske poti v postkritičnem območju in način izbire prave poti. Za klasifikacijo kritičnih točk uporabimo algoritem, ki sta ga predstavila Fujii in Ramm (1997).

Pri klasifikaciji izhajamo iz metode ločne dolžine, enačbe (3.1) in (3.4), kjer smo vektor neznank  $\mathbf{x}(s) = [\mathbf{u}(s), \lambda(s)]$  ustrezno parametrizirali s parametrom poti.

V točki izgube stabilnosti (pojava kritične točke) je tangentna matrika sistema ravnotežnih enačb singularna. Zanima nas vpliv te singularnosti na tangento (ali tangente) na obtežno deformacijsko krivuljo v kritični točki. Izrazimo prvi in drugi odvod ravnotežnih enačb po parametru poti:

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \mathbf{p} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{K}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{K} \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} - \mathbf{p} \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0. \quad (4.3)$$

Naj bo  $\mu_1$  najmanjša lastna vrednost pozitivno definitne matrike  $\mathbf{K}$  in  $\phi_1$  pripadajoči lastni vektor. Potem je

$$\mathbf{K}\phi_1 = \mu_1\phi_1. \quad (4.4)$$

Če je determinanta matrike  $\mathbf{K}$  enaka 0, je najmanjša lastna vrednost enaka nič in sledi

$$\mathbf{K}\phi_1 = \mathbf{0} \text{ in } \phi_1^T \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Če enačbi (4.2) in (4.3) pomnožimo z leve s  $\phi_1^T$  in upoštevamo (4.5), sledi

$$\phi_1^T \mathbf{p} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (4.6)$$

$$\phi_1^T \frac{d\mathbf{K}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \phi_1^T \mathbf{p} \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0. \quad (4.7)$$

Prva enačba predstavlja kriterij za klasifikacijo kritične točke. Pogoj (4.6) je izpolnjen v dveh primerih

(i) Če je  $\frac{d\lambda}{ds} = 0$  obstaja le ena tangenta na krivuljo. Kritična točka je **prevojna**.

(ii) Če je  $\phi_1^T \mathbf{p} = 0$  in  $\frac{d\lambda}{ds} \neq 0$  obstaja več možnih tangent na krivuljo. Kritična točka je **bifurkacijska**.

Pri klasifikaciji kritične točke znotraj numerične metode enačbe  $\phi_1^T \cdot \mathbf{p} = 0$  ne moremo povsem zadostiti. Zaradi numeričnega iskanja lastnega vektorja  $\phi_1$ , se pojavi neodstranljiva numerična napaka. Zaradi tega pogoj za klasifikacijo bifurkacijske točke  $\phi_1^T \cdot \mathbf{p} = 0$  nekoliko omilimo:

$$\phi_1^T \cdot \mathbf{p} < tol, \quad (4.8)$$

kjer  $tol$  predstavlja velikost tolerance.

### 4.3.1 Nadaljevanje po kritični točki

Če smo kritično točko klasificirali kot prevojno, se vrnemo v algoritem metode ločne dolžine in nadaljujemo po obtežno deformacijski krivulji. Tangenta je v tem primeru ena sama in je pravokotna na os obtežbe.

Če smo kritično točko klasificirali kot bifurkacijsko, sklepamo, da je za nadaljevanje po krivulji možnih več tangent. V disertaciji se bomo omejili na pogostejše primere, kjer sta v kritični točki možni dve tangenti. Zanimata nas smeri obeh tangent.

Pozitivno definitno matriko  $\mathbf{K}$  lahko razcepimo kot

$$\mathbf{K} = \sum \mu_i \phi_i \phi_i^T, \quad (4.9)$$

kjer je  $\mu_i$  lastna vrednost in  $\phi_i$  pripadajoči lastni stolpec. Razcep uporabimo pri reševanju enačbe (4.2). Ker nas zaradi iterativnega reševanja ne zanima velikost ampak le smer tangente, bomo reševali sorodno enačbo

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{p}. \quad (4.10)$$

Z uporabo razcepa (4.9) in ob upoštevanju, da so lastni vektorji ortogonalni, lahko rešitev (4.10) zapišemo kot

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \sum \frac{1}{\mu_i} \phi_i \phi_i^T \mathbf{p} = \sum \frac{\phi_i^T \mathbf{p}}{\mu_i} \phi_i. \quad (4.11)$$

Kadar postane matrika  $\mathbf{K}$  singularna, prvi člen enačbe (4.11) ni določen. Singularnosti se izognemo z uporabo stabilizirane tangentne matrike

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \alpha \phi_1 \phi_1^T. \quad (4.12)$$

Ob tako spremenjeni matriki je sistem enačb (4.10) nesingularen. Rešitev stabiliziranega sistema označimo z  $\mathbf{u}^*$ :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{p}. \quad (4.13)$$

Rešitev nadomestnega sistema se od prvotnega razlikuje le po partikularni rešitvi v smeri lastnega vektorja  $\phi_1$ . Torej lahko rešitev enačbe (4.10) zapišemo v obliki

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1, \quad (4.14)$$

kjer sta koeficienta  $\xi_0$  in  $\xi_1$  zaenkrat še neznan. Razcep  $\frac{d\lambda}{ds}$  iz enačbe (4.14) neposredno določa velikost  $\frac{d\lambda}{ds}$ . Če (4.14) vstavimo v (4.2), sledi

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1) &= \frac{d\lambda}{ds} \mathbf{p} \\ \xi_0 \mathbf{K} \mathbf{u}^* &= \frac{d\lambda}{ds} \mathbf{p} \\ \xi_0 &= \frac{d\lambda}{ds}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Za določitev koeficientov  $\xi_0$  in  $\xi_1$  uporabimo drugi odvod ravnotežnih enačb po parametru poti (4.7), pri čemer upoštevamo, da je v bifurkacijski točki  $\phi_1^T \mathbf{p} = 0$ .

Torej velja

$$\phi_1^T \frac{d\mathbf{K}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0. \quad (4.16)$$

Odvod tangentne matrike po parametru poti izračunamo kot

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \delta \mathbf{K}_u \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \xi_0 \delta \mathbf{K}_u \mathbf{u}^* + \xi_1 \delta \mathbf{K}_u \phi_1 = \xi_0 \delta \mathbf{K}_{u^*} + \xi_1 \delta \mathbf{K}_{\phi_1}, \quad (4.17)$$

kjer smo s  $\delta \mathbf{K}_{u^*}$  in  $\delta \mathbf{K}_{\phi_1}$  označili smerna odvoda v smereh  $\mathbf{u}^*$  in  $\phi_1$ . Odvodov ne računamo točno, temveč uporabimo približni diferenčni enačbi

$$\delta \mathbf{K}_{u^*} = \frac{1}{\varepsilon_u} [\mathbf{K}(\mathbf{u}(1 - \varepsilon_u) + \varepsilon_u \mathbf{u}^*) - \mathbf{K}(\mathbf{u})] \quad (4.18)$$

$$\delta \mathbf{K}_{\phi_1} = \frac{1}{\varepsilon_1} (\mathbf{K} + \varepsilon_1 \alpha \phi_1 \phi_1^T - \mathbf{K}) = \alpha \phi_1 \phi_1^T. \quad (4.19)$$

V enačbo (4.16) vstavimo izraza (4.14) in (4.17):

$$\phi_1^T (\xi_0 \delta \mathbf{K}_{u^*} + \xi_1 \delta \mathbf{K}_{\phi_1}) (\xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1) = 0$$

in uredimo

$$\xi_0^2 \phi_1^T \delta \mathbf{K}_u \cdot \mathbf{u}^* + \xi_0 \xi_1 \phi_1^T \delta \mathbf{K}_u \phi_1 + \xi_1 \xi_0 \phi_1^T \delta \mathbf{K}_{\phi_1} \mathbf{u}^* + \xi_1^2 \phi_1^T \delta \mathbf{K}_{\phi_1} \phi_1 = 0. \quad (4.20)$$

Enačba (4.20) je **algebrajska bifurkacijska enačba**, ki jo krajše zapišemo kot

$$a \xi_0^2 + b \xi_0 \xi_1 + c \xi_1^2 = 0, \quad (4.21)$$

kjer so

$$a = \phi_1^T \delta \mathbf{K}_{u^*} \mathbf{u}^* \quad (4.22)$$

$$b = \phi_1^T (\delta \mathbf{K}_u \phi_1 + \delta \mathbf{K}_{\phi_1} \mathbf{u}^*) \quad (4.23)$$

$$c = \phi_1^T \delta \mathbf{K}_{\phi_1} \phi_1. \quad (4.24)$$

Če enačbo (4.21) delimo s  $\xi_0^2$  in uvedemo neznanko  $\eta = \xi_1/\xi_0$ , dobimo navadno kvadratno enačbo ene spremenljivke:

$$a\eta^2 + b\eta + c = 0. \quad (4.25)$$

Iskani smeri nadaljevanja po kritični točki sta tangenti oblike  $\left(\frac{d\mathbf{u}}{ds}, \frac{d\lambda}{ds}\right) = (\xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1, \xi_0)$ . Smer tangente uporabimo za začetni korak iz kritične točke

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1 \\ \xi_0 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Pri tem  $\xi_0$  in  $\xi_1$  izberemo tako, da je norma vektorja  $\Delta \mathbf{x}$  enaka 1:

$$\|\Delta \mathbf{x}\| = \sqrt{\xi_0^2 \|\mathbf{u}^*\|^2 + \xi_1^2 \|\phi_1\|^2 + \xi_0^2} = 1 \quad (4.27)$$

$$= \sqrt{\xi_0^2 \|\mathbf{u}^*\|^2 + \xi_1^2 \eta^2 + \xi_0^2} = 1. \quad (4.28)$$

Torej je

$$\xi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1 + \|\mathbf{u}^*\|}} \quad (4.29)$$

$$\xi_1 = \pm \eta \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1 + \|\mathbf{u}^*\|}}. \quad (4.30)$$

Začetni približek za nadaljevanje po kritični točki je potem

$$\mathbf{u}^{K+1} = \mathbf{u}^K + \xi_0 \mathbf{u}^* + \xi_1 \phi_1. \quad (4.31)$$

Na razpolago imamo torej štiri smeri po doseženi bifurkacijski točki. Prvi dve smeri sledita v pozitivni oz. negativni smeri primarne krivulje, tretja in četrta možnost sta izbira sekundarne bifurkacijske krivulje.

### 4.3.2 Posebnosti zaradi neaditivnih zasukov

O neaditivnosti rotacij smo že govorili. Podobno kot v poglavjih 2.4.5 in 3.3.4 moramo neaditivnost popravkov zasukov upoštevati tudi sedaj. Posebnosti moramo upoštevati pri enačbah (4.18) in (4.31). Izraz  $(1 - \varepsilon_u) \mathbf{u} + \varepsilon_u \mathbf{u}^*$  se za rotacijske količine izračuna po shemi

$$(1 - \varepsilon_u) \boldsymbol{\vartheta} \oplus_{\varepsilon_u} \boldsymbol{\vartheta}^* = \text{Spurr}(\text{Rod}(\varepsilon_u \boldsymbol{\vartheta}^*) \cdot \text{Rod}((1 - \varepsilon_u) \boldsymbol{\vartheta})). \quad (4.32)$$

Začetni približek prav tako ustrezno priredimo nelinearnosti zasukov:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{[K+1]} = \text{Spurr}(\text{Rod}(\xi_0 \boldsymbol{\vartheta}^* + \xi_1 \phi_1) \cdot \text{Rod}(\boldsymbol{\vartheta}^{[K]})). \quad (4.33)$$

Pri tem poudarimo, da lahko za izraz  $\xi_0 \boldsymbol{\vartheta}^* + \xi_1 \phi_1$  uporabimo običajno vsoto, saj sta  $\boldsymbol{\vartheta}^*$  in  $\phi_1$  elementa tangentnega prostora, ki pa je linearen vektorski prostor.

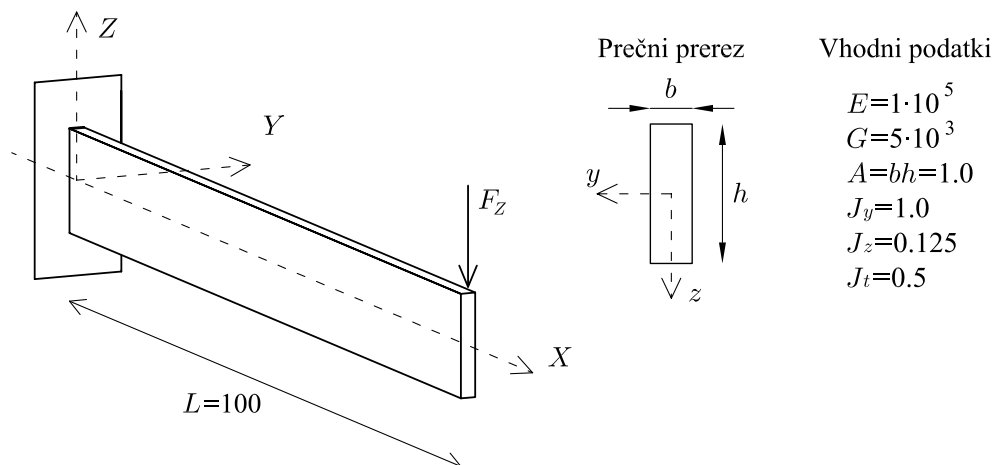
## 4.4 Numerični primeri

Učinkovitost, natančnost in robustnost izpeljanega algoritma bomo prikazali na nekaj zanimivih numeričnih primerih. Verifikacijo modela bomo izvedli s primerjavo naših rezultatov (za različne tipe elementov in velikosti korakov metode ločne dolžine) z drugimi avtorji. Obravnavali bomo konstrukcije, ki se obnašajo prostorsko. Obravnavali bomo tudi zahtevne začetne oblike, kot so ukrivljeni nosilci in osno zaviti nosilci. Poudarek je na konstrukcijah, katerih obtežno deformacijske krivulje vsebujejo bifurkacijske točke. V tem poglavju se še vedno omejimo na linearno-elastični materialni model.



#### 4.4.1 Bočna zvrnitev visokega previsnega nosilca

Problem bočne zvrnitve visokega previsnega nosilca so obravnavali številni avtorji, glej Argyris (1978b), Chan (1992), Feng in Perić (1995), Nadler in Rubin (2004), in reference v teh delih. Previsni nosilec je togo vpet na enem in točkovno obremenjen v prostem krajišču, geometrijski in materialni podatki pa so predstavljeni na sliki 4.1. Razmerje med širino in višino preseza je izredno veliko (glej sliko 4.1).



Slika 4.1: Geometrijski in materialni podatki visokega previsnega nosilca.

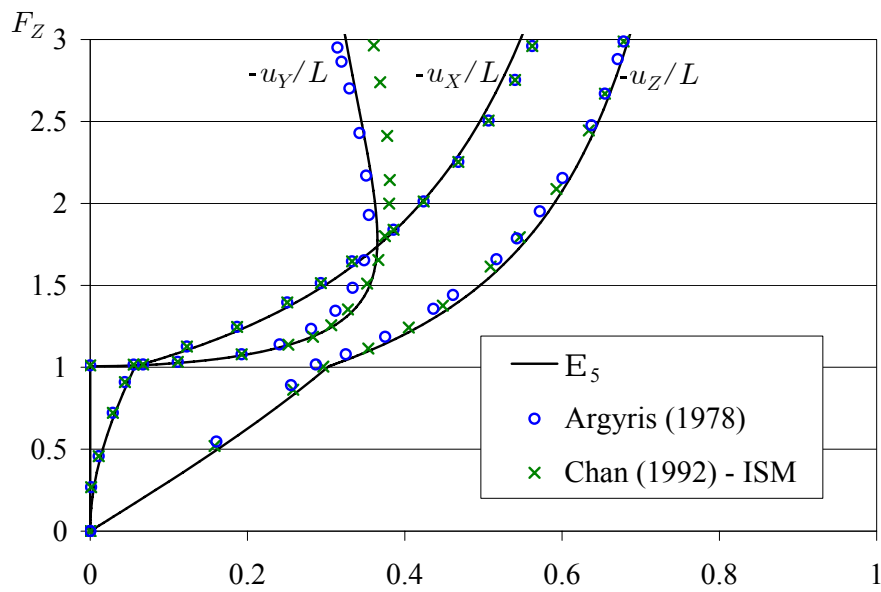
Figure 4.1: Geometrical and material data of high cantilever.

Zaradi narave vhodnih podatkov je problem zelo zahteven, saj je nosilec v območju kritične točke izredno deformiran in se v tej legi tudi hipno zasuče. Rezultate našega algoritma primerjamo z rezultati, ki jih v svojih delih podajata Argyris (1978b) in Chan (1992).

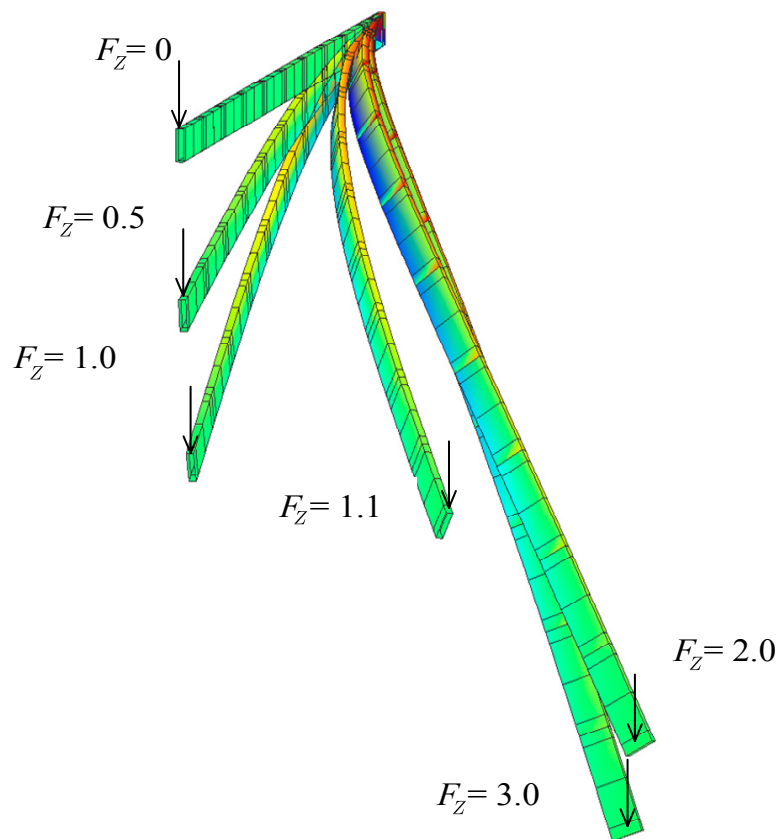
Podobno kot Chan (1992), smo nosilec modelirali z desetimi elementi četrtega reda  $E_5$ . Po določitvi kritične točke smo za nadaljevanje izbrali sekundarno pot, to je uklon iz ravnine. Natančna določitev mesta kritične sile nosilca, nam je omogočila enostaven prehod iz primarne na sekundarno vejo, ter nadaljevanje po željeni postkritični poti. Poudarimo, da za razliko od Chan-a (1992), kjer je bila za določanje obtežno deformacijske poti uporabljena inkrementna sekantna metoda, za uklon iz ravnine nismo potrebovali motnje v smeri iz ravnine, saj želena pot po bifurkaciji izberemo s pomočjo lastnih vektorjev.

Na sliki 4.2 prikazujemo zvezo med silo  $F_Z$  in pomiki iz ravnine vpetega previsnega nosilca, dobljeno z našo metodo, in vrednosti povzete po Argyris (1978b) in Chan (1992). Primerjava kaže odlično ujemanje rezultatov. Na sliki 4.3 prikazujemo deformirano konstrukcijo za različne obtežne faktorje. Opozorimo, da pomiki na sliki 4.3 niso faktorizirani. Tako so razvidne velike deformacije nosilca, v postkritičnem območju pa tudi torzijska rotacija okrog osi nosilca. Element tipa  $E_5$  se je izkazal za učinkovitega, natančnega in hitrega saj so za zahtevano natančnost pri Newtonovi iteraciji večinoma zadoščali le trije koraki.

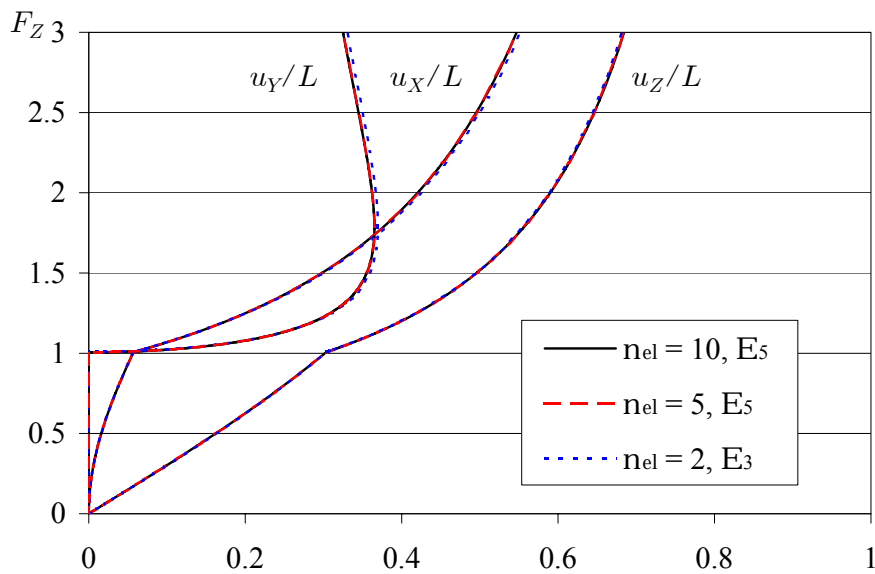
Analizo določanja kritične točke in postkritične obtežno deformacijske poti opravimo tudi za redkejšo mrežo elementov in elemente nižjega reda. Na sliki 4.4 prikazujemo obtežno deformacijske poti različno gostih mrež elementov stopnje  $E_3$  in  $E_5$ . Z  $n_{el}$  smo označili število elementov v mreži. Iz grafov, prikazanih na sliki 4.4, lahko razberemo, da je algoritem natančen že za redke mreže elementov nizkega reda. Do opaznega odstopanja pride le pri mreži z dvema elementoma, vendar razlika v vrednosti kritične obtežbe glede na 10 elementov višjega reda znaša le 0.23 %, razlika med največjimi pomiki iz ravnine



Slika 4.2: Zveza med silo in pomiki prostega konca previsnega nosilca.  
Figure 4.2: Load deflection path of a free end of a cantilever.



Slika 4.3: Deformiran previsni nosilec za različne obtežne faktorje.  
Figure 4.3: Deformed shape of the cantilever for different loading factors.



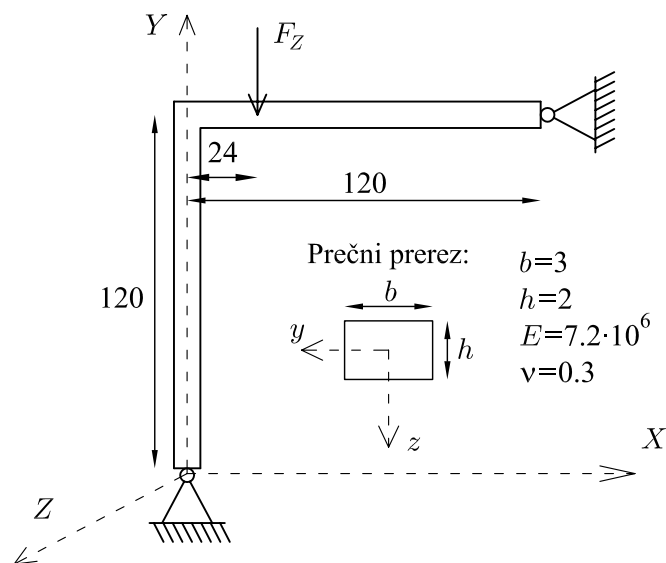
Slika 4.4: Obtežno deformacijske poti za različno število elementov.

Figure 4.4: Load deflection paths for various mesh densities.

pa je le 1.2 %. To potrjuje, da so za določanje obtežno deformacijskih poti uporabne tudi redkejša mreža naših elementov zmerne reda.

#### 4.4.2 Analiza kolenastega nosilca

Kolenasti nosilec, ki sta ga predstavila Neto in Feng (1999), je kljub ravninski zasnovi izvrsten primer za testiranje prostorske formulacije. Konstrukcijo predstavlja okvir, ki je v obeh podporah členkasto vpet, izpostavljen pa je konzervativni točkovni obtežbi v svoji ravnini. Materialni in geometrijski parametri



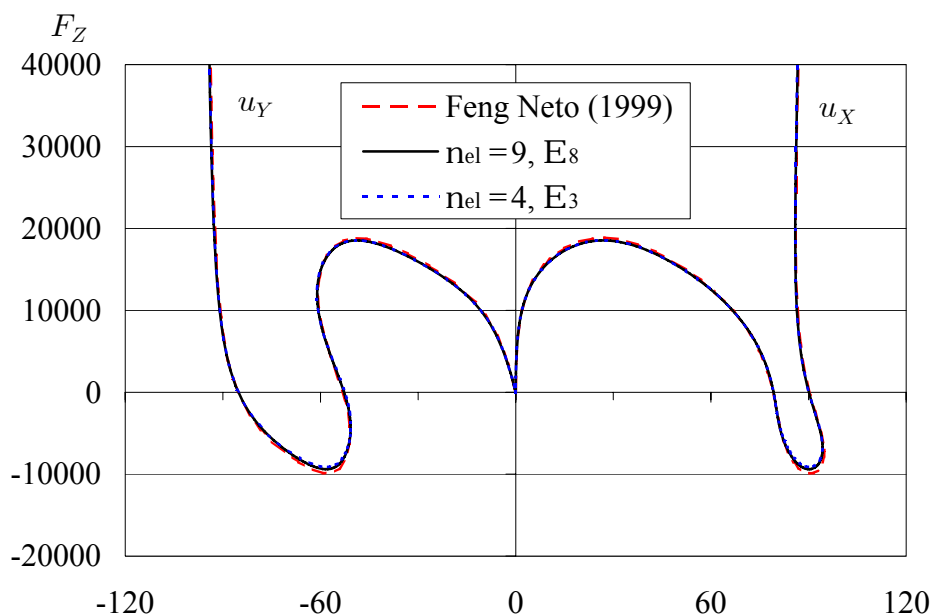
Slika 4.5: Kolenasti nosilec pod konservativno obtežbo.

Figure 4.5: Right-angle frame under conservative loading.

prečnega prereza so predstavljeni na sliki 4.5.

Pri obravnavani konstrukciji je razmerje med širino in višino prečnega prereza kar  $b/h = 1.5$ . Tako bomo analizirali postkritične obtežno deformacijske poti, saj vitkost konstrukcije povzroči uklon konstrukcije izven ravnine in s tem velike pomike iz ravnine. Raziskali bomo tudi natančnost določanja poti za različne rede elementov in gostote mrež končnih elementov ( $n_{el}$  označuje število uporabljenih elementov). Zanimala nas je natančnost našega modela tudi pri modeliranju konstrukcije z manj elementi nižjih redov in konvergenca rezultatov z višanjem stopnje in zgoščanjem mreže elementov. Zato smo konstrukcijo modelirali z različnimi mrežami elementov različnih stopenj.

Najprej primerjamo rezultate za obtežno deformacijske poti iz članka Neto in Feng (1999) z rezultati, dobljenimi z našo formulacijo. Na sliki 4.6 prikazujemo naše rezultate za deset elementov visokega reda  $E_8$  in štiri elemente tipa  $E_3$ . Po določitvi izgube stabilnosti konstrukcije smo nadaljevali deformacijsko pot po osnovni poti in s tem dosegli t.i. 'ravninsko' obnašanje konstrukcije.

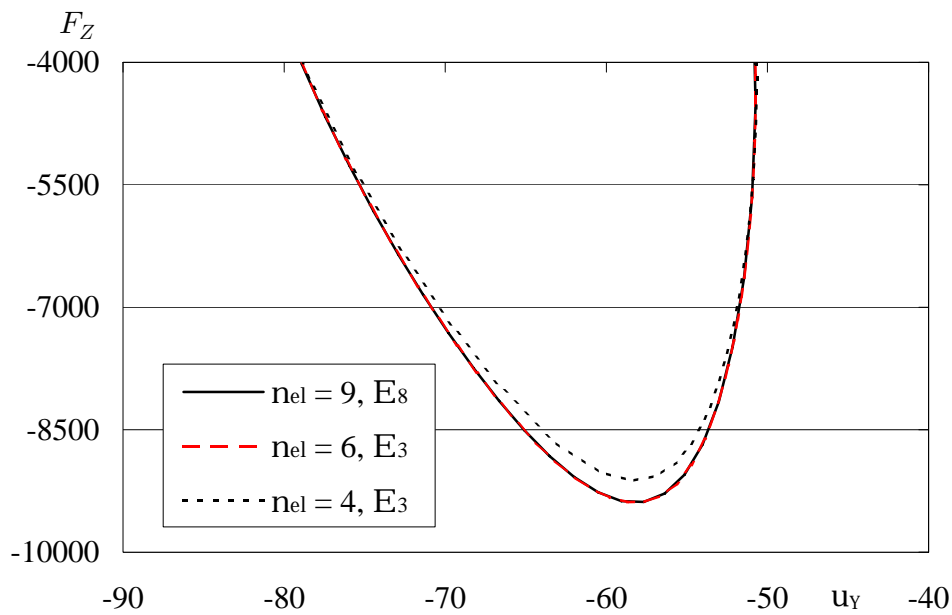


Slika 4.6: Obtežno deformacijska pot obtežene točke na nosilcu za smeri X in Y.  
Figure 4.6: Load deflection path of a loading point. X and Y direction.

Pomiki v  $Z$  smeri so torej enaki nič. Kljub temu, da je bila konstrukcija po Neto in Feng (1999) modelirana z 20 elementi, opazimo dobro ujemanje pomikov z našim elementom že v primeru samo štirih elementov nizkega reda. Razlika med gostejšo mrežo 9 elementov tipa  $E_8$  in redkejšo 4 elementov kvadratnih elementov  $E_3$  je zanemarljivo majhna, še največja je v območju prevojnih točk na spodnjem delu grafa.

Da še nazornejše predstavimo vpliv reda in števila uporabljenih elementov formulacije, na sliki 4.7 prikazujemo še segment obtežno deformacijske poti za spodnji del, kjer je razlika med rezultati za elemente različnih redov največja. Rezultati kažejo, da je formulacija izredno robustna, saj na obtežno deformacijsko pot ne vplivata bistveno niti majhna gostota mreže niti nižji red elementa. V vseh primerih smo razbrali kvadratično konvergenco Newtonove metode. Ravnotežno lego smo numerično predpisano toleranco določili z evklidsko normo stolpca popravkov neznank in desnih strani. Zahtevano toleranco, ki je bila postavljena na  $10^{-8}$ , smo za korake srednjih dolžin dosegali večinoma v treh oz. štirih koraki.

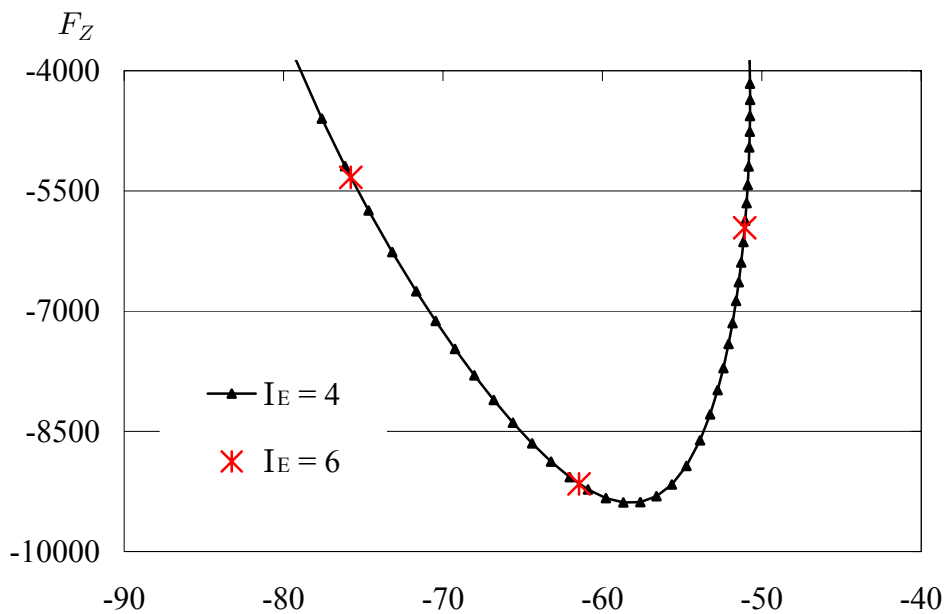
Ugotovimo lahko, da so rezultati natančni tudi pri večjih korakih parametra poti. Na sliki 4.8 smo za



Slika 4.7: Del obtežno deformacijske poti. Primerjava mrež in elementov.

Figure 4.7: Part of the load deflection path. Comparison of various meshes and element types.

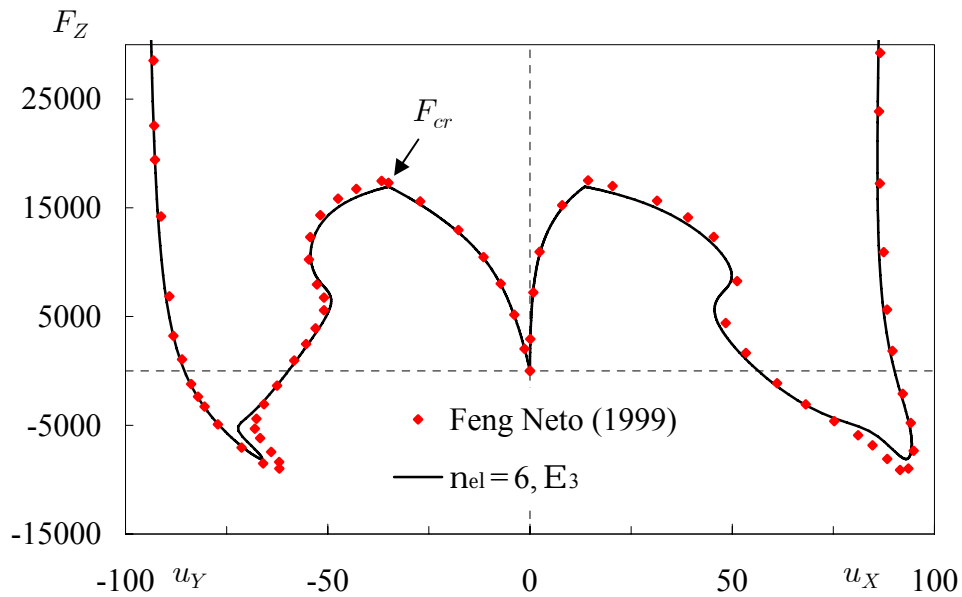
konstrukcijo iz šestih kvadratičnih elementov prikazali dve obtežno deformacijski krivulji. V prvem primeru (črna krivulja) smo ravnotežne lege dosegli v štirih korakih. V drugem primeru pa smo zeleno število iteracij povečali na 6 in s tem povečali dolžino koraka (krivulja z rdečim markerjem). Iz rezultatov na sliki 4.8 lahko razberemo, da so točke na obtežno deformacijski krivulji dobljene natančno tudi v primeru večje dolžine korakov.



Slika 4.8: Del obtežno deformacijske poti. Primerjava za različni velikosti korakov.

Figure 4.8: Part of the load deflection path. Comparison of two different step sizes.

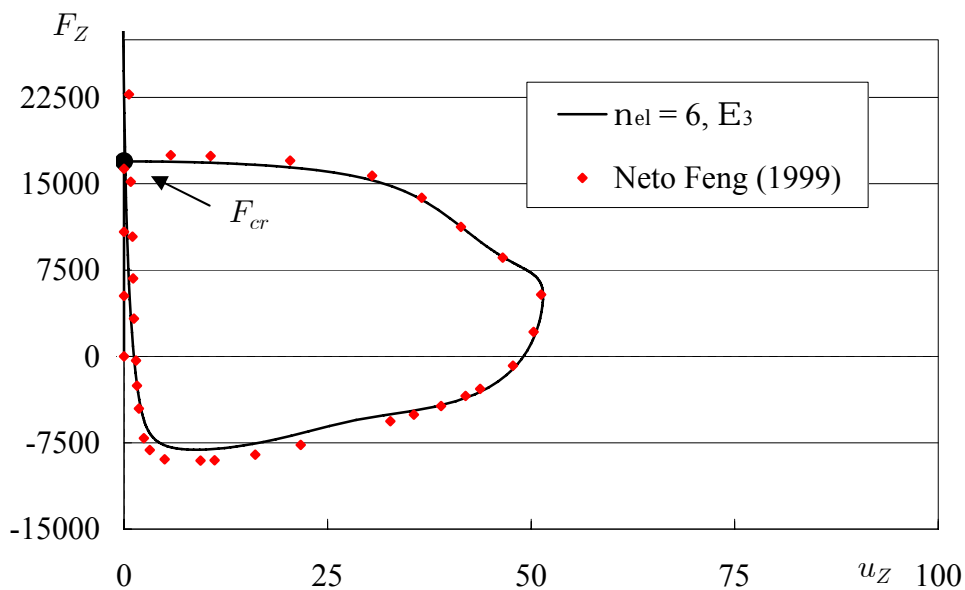
V prvem delu analize smo izbrali ravninsko vejo postkritičnega obnašanja. Po določitvi kritične točke se lahko odločimo, da iz kritične točke krenemo po primarni ali po sekundarni veji. Na voljo so torej



Slika 4.9: Sekundarna veja obtežno-deformacijske poti kolenastega nosilca.

Figure 4.9: Bifurcation path of the right-angle frame.

štiri poti, po dve v vsaki smeri. Na sliki 4.9 predstavljamo obtežno deformacijsko pot, kjer se pri izbiri poti po določitvi prve kritične točke  $F_{cr}$  odločimo za sekundarno vejo (uklon iz ravnine). Prikazujemo obtežno deformacijski krivulji za pomika v smereh osi  $X$  in  $Y$ . Na sliki 4.9 predstavljamo tudi rezultate, ki jih za uklon iz ravnine podajata Neto in Feng (1999). Ujemanje z našimi rezultati je zadovoljivo. Možen vzrok za odstopanja je, da Neto in Feng (1999) uklon iz ravnine dosežeta z uporabo majhne



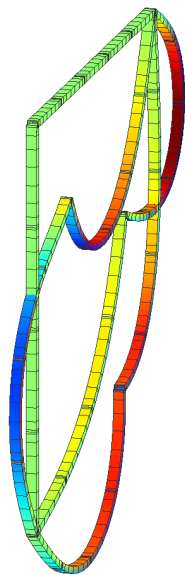
Slika 4.10: Obtežno deformacijska pot za pomike iz ravnine.

Figure 4.10: Load deflection path for displacements in out-of-plane direction.

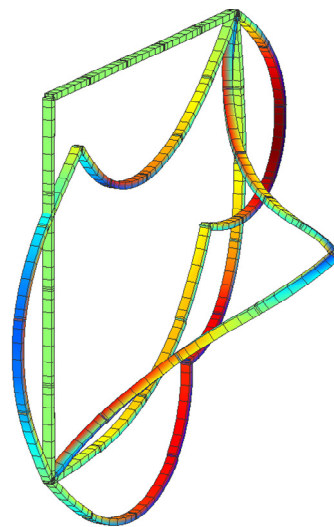
motnje v smeri iz ravnine konstrukcije. Konstrukcija z začetno nepopolnostjo se izkloni v smeri začetne sile, medtem ko lahko z našo formulacijo smer po bifurkaciji izbiramo. Na sliki 4.10 prikazujemo še obtežno deformacijsko pot za pomike iz ravnine. Po doseženi kritični točki ( $F_{cr} \approx 16900$ ) se hipno pojavijo pomiki iz ravnine. Po doseženi drugi prevojni točki sila v obremenjenem vozlišču zopet narašča, konstrukcija je od tu naprej deformirana podobno kot v primeru primarne poti.

Na sliki 4.11 prikazujemo deformirane lege konstrukcije po primarni in sekundarni veji. Zanimivi so predvsem pomiki iz ravnine, ki se po doseženi kritični sili izredno hitro povečajo. Z večanjem sile pa se postopoma spet zmanjšajo.

Primarna pot:



Sekundarna pot:



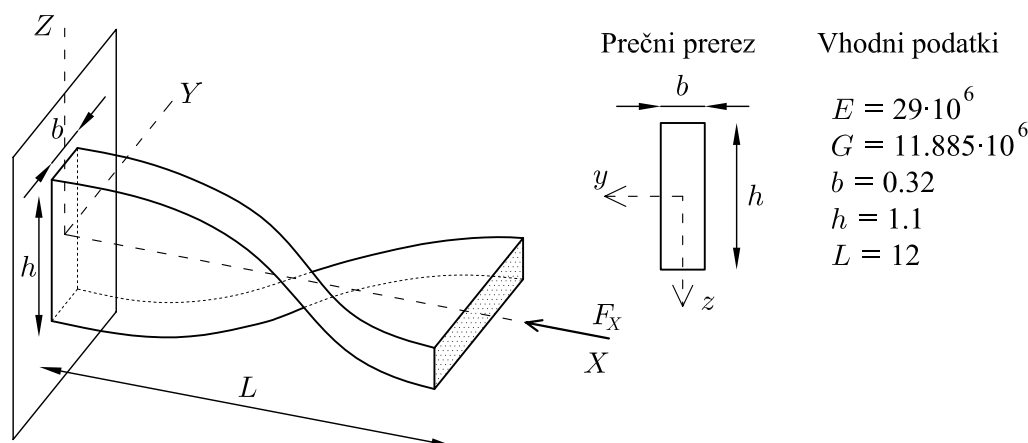
Slika 4.11: Deformirane lege kolenastega nosilca po primarni in sekundarni veji.  
Figure 4.11: Deformed shapes of right-angle frame for primary and bifurcation path.

### 4.4.3 Zviti previsni nosilec

Predstavljena formulacija poleg poljubne začetne ukrivljenosti osi prereza omogoča tudi začetne zasuke prerezov okrog težiščne osi. Taki nosilci so še posebej zanimivi, saj se v praksi uporabljajo za različne turbine in vijake. Začetna zavrtost je odličen pokazatelj zmogljivosti končnih elementov, zato sta tak nosilec MacNeal in Harder (1985) uvrstila med standardne testne primere. Njun testni primer je bil pogosto obravnavan, glej npr. Tabarrok s sodelavci (1988), Dutta in White (1992), Ibrahimbegović in Frey (1993), Madhudsana s sodelavci (1995), Zupan in Saje (2006) in številni drugi.

Začetna geometrija je prikazana na sliki 4.12. En konec je togo vpet, drugi pa prost in zavrten za kot  $\psi$  glede na prvega. Vmes je potek zasukov okrog osi nosilca linearen. Na sliki 4.12 so prikazani tudi ostali geometrijski in materialni parametri.

Natančnost deformacijskih končnih elementov za enotske prečne sile na zvitem nosilcu je bila predstavljena že v Zupan (2003), zato tokrat ne povzemamo obtežbe po MacNeal in Harder (1985). Ker nas zanimajo predvsem kritične točke in postkritično obnašanje, nosilec obremenimo s točkovno obtežbo v



Slika 4.12: Zviti previsni nosilec s točkovo obtežbo na prostem koncu.  
Figure 4.12: Twisted beam with point load at the free end.

smeri osi. Analizirali bomo vpliv začetne, zavite oblike nosilca na velikost kritične sile ter postkritično obnašanje nosilca. Ob nespremenjenih materialnih parametrih in geometriji prečnega prereza bomo obravnavali različno navite nosilce. Vpliv velikosti zasuka na velikost kritične obtežbe in postkritično obnašanje nosilca bo prikazan za nosilce, ki so zaviti za kote  $\psi = 0, \pi/2, \pi, 2\pi, 3\pi, 5\pi, 10\pi, 20\pi, 30\pi$ . Nosilec je obremenjen le s točkovno obtežbo  $F_X$ , ki deluje na njegovem prostem koncu v smeri globalne osi  $X$ . Zaviti nosilec smo modelirali z različnim številom elementov tipa  $E_5$ , ki so v predkritičnem območju dosegali ravnotežna stanja večinoma v dveh Newtonovih iteracijah. V postkritičnem območju smo za doseg želene natančnosti ravnotežnega stanja večinoma potrebovali tri Newtonove iteracije. V preglednici 4.1 so prikazane normirane uklonske sile za nosilec, ki je predhodno zavito za različne kote  $\psi$  v odvisnosti od števila elementov  $n_{el}$ . Kritične uklonske sile so normirane glede na Eulerjevo (1744) analitično uklonsko silo za raven, nezavito previsni nosilec. Eulerjevo uklonsko silo določimo po enačbi

$$F_{cr,eu} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_u^2} = 1492.6. \quad (4.34)$$

Manjša razlika med Eulerjevo uklonsko silo in kritično silo za raven nosilec (drugi stolpec preglednice 4.1) nastane zaradi konsistentnega upoštevanja striga in deformacij na uklonsko nosilnost naših elementov. Normirane uklonske sile predhodno zavitih nosilcev so višje od rezultatov za kritične sile ravnega nosilca. Zavitost nosilca okrog svoje osi povzroči, da je nosilec bolj tog v svoji šibki smeri. Za nosilec,

Preglednica 4.1: Normirane uklonske sile za predhodno zavite nosilce v odvisnosti od števila elementov.

Table 4.1: Normalized buckling loads for twisted beam vs. rotation angle and number of elements.

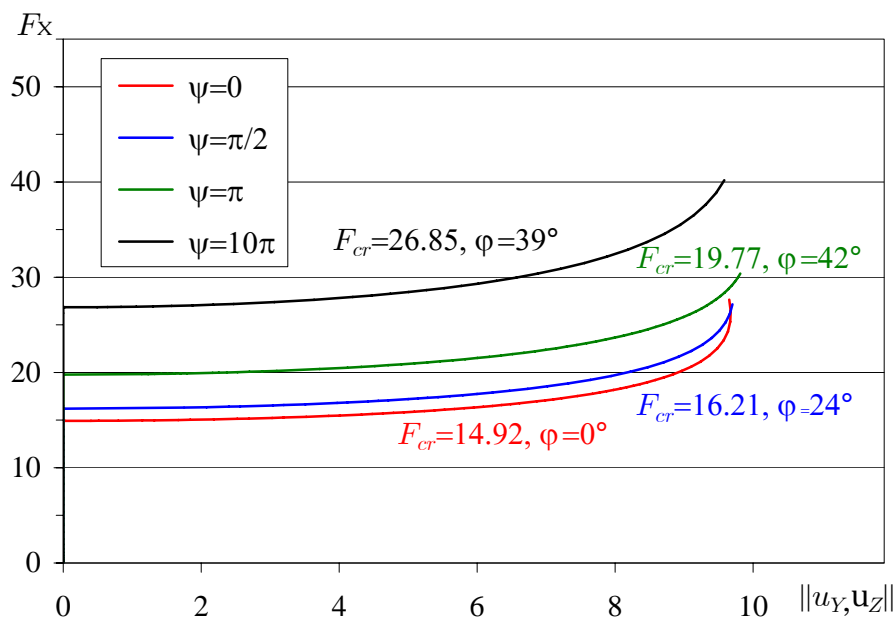
$n_{el}$	$\psi$								
	0	$\pi/2$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$5\pi$	$10\pi$	$20\pi$	$30\pi$
6	0.9998	1.0858	1.3248	1.5943	1.6796	1.7479	1.7987	1.7354	1.8806
10	0.9998	1.0857	1.3247	1.5938	1.6785	1.7451	1.7939	1.8072	1.8278
16		1.0857	1.3247	1.5937	1.6783	1.7447	1.7943	1.8191	1.8272
25				1.5937	1.6783	1.7447	1.7941	1.8189	1.8271
40							1.7941	1.8187	1.8270
50								1.8187	1.8270



zavit za kot  $\psi = 2\pi$ , se uklonska sila poveča za 60 % glede na ravnega. Če nosilce večkrat zavijemo, se normirane uklonske sile še povečujejo. Natančnost rezultatov normiranih uklonskih sil je predstavljena na štiri decimalke. Za doseg take natančnosti je za manj zavite nosilce ( $\psi < 2\pi$ ) potrebnih približno 10 elementov. Za želeno natančnost v primeru nosilcev z več navoji potrebujemo gostejše mreže. Osno zaviti nosilci se od ravninskih razlikujejo tudi po obnašanju v postkritičnem območju. Podobno kot v primeru ravninskih nosilcev je tudi pri zavutih nosilcih prva kritična točka bifurkacijska. Iz te točke se po obtežno deformacijski krivulji lahko pomaknemo v smeri primarne stabilne poti oz. v smeri sekundarne nestabilne poti. Primarna pot nas tukaj ne zanima. Slika 4.13 prikazuje pomike prostega konca nezavitega nosilca ( $\psi = 0$ ) in nosilca, zavitega za različne kote. Diagrame sila-pomik prikazujemo za velikost pomika v ravnini  $YZ$ . Na absciso torej nanašamo normo vektorja

$$\|u_Y, u_Z\| = \sqrt{u_Y^2 + u_Z^2}. \quad (4.35)$$

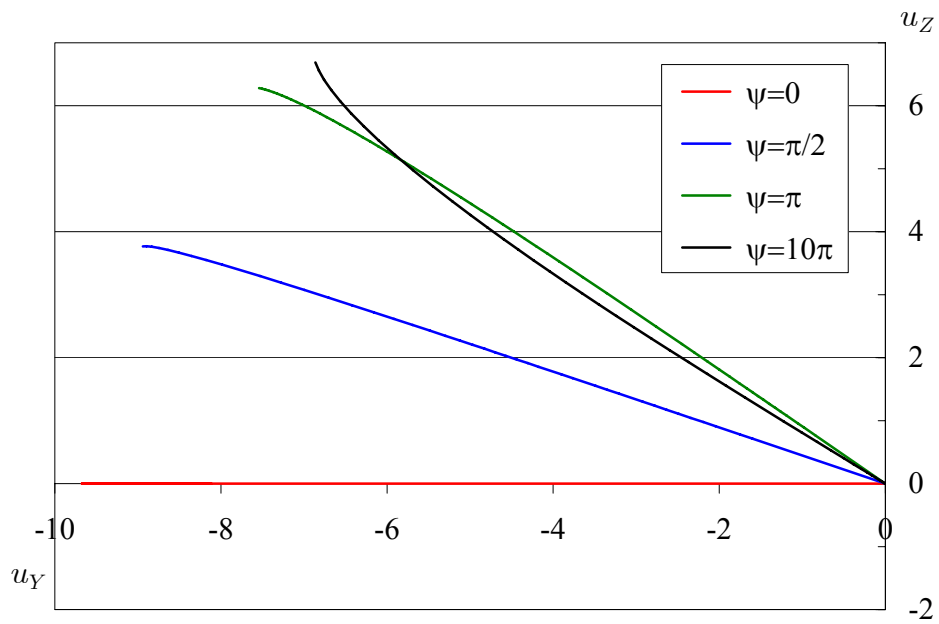
Na sliki 4.13 prikažemo še velikosti kritičnih sil  $F_{cr}$  in kot  $\varphi$ , pod katerim se nosilec ukloni, v odvisnosti od začetnega zasuka. V primeru ravnega nosilca ( $\psi = 0$ ) so pomiki obteženega vozlišča v postkritičnem stanju le v smeri osi  $Y$ . Raven nosilec se po preseženi Eulerjevi kritični sili (glej preglednico 4.1) ukloni okrog svoje šibke osi ( $\varphi = 0^\circ$ ). V primeru predhodno osno zavutih nosilcev, se po preseženi kritični sili  $F_{cr}$  nosilec ukloni prostorsko. Smer pomika je odvisna od kota, za katerega smo nosilec predhodno zavili. Pri nosilcih, ki so zaviti za majhne kote, dominirajo pomiki v smeri šibke osi ravnega nosilca. Z navijanjem se kot uklona po doseženi kritični točki spreminja. Neposredna relacija med kotom navitja  $\psi$  in kotom uklona po kritični točki  $\varphi$  pa ni razvidna. Z navijanjem togost nosilcev narašča, manj zavit nosilec je bolj podajen od nosilca zavitega za večje kote. Da bi smer prečnih pomikov prikazali še bolj nazorno, na sliki 4.14 prikazujemo pomike v ravnini  $YZ$ .



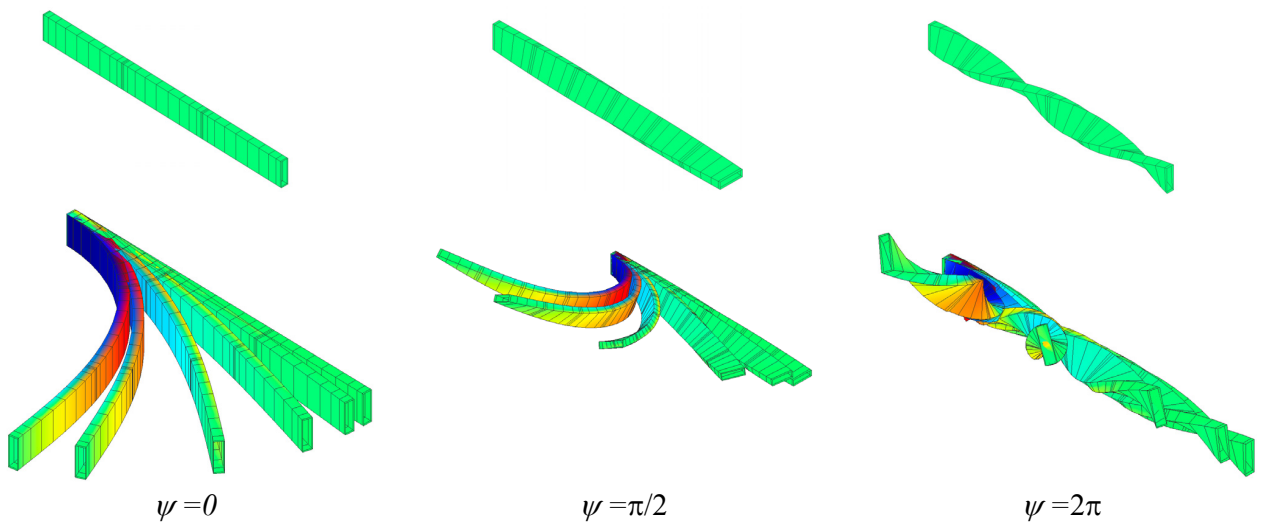
Slika 4.13: Obtežno deformacijska pot zavutih nosilcev.

Figure 4.13: Load-deflection path at the free end of a twisted beam.

Postkritično obnašanje ravnega in predhodno zavitega nosilca še bolj nazorno ponazorimo s tridimenzionalnim prikazom deformiranih leg konstrukcije (slika 4.15). Slike deformirane konstrukcije so prikazane za kote  $\psi = 0, \pi/2$  in  $2\pi$ . Vidno je, da se ravninski nosilec ukloni zgolj v smeri šibke osi (ravninski



Slika 4.14: Pomiki v ravnini  $YZ$  osno obremenjenih zavrtih nosilcev.  
Figure 4.14: Displacements in  $YZ$  plane for axially loaded twisted beam.

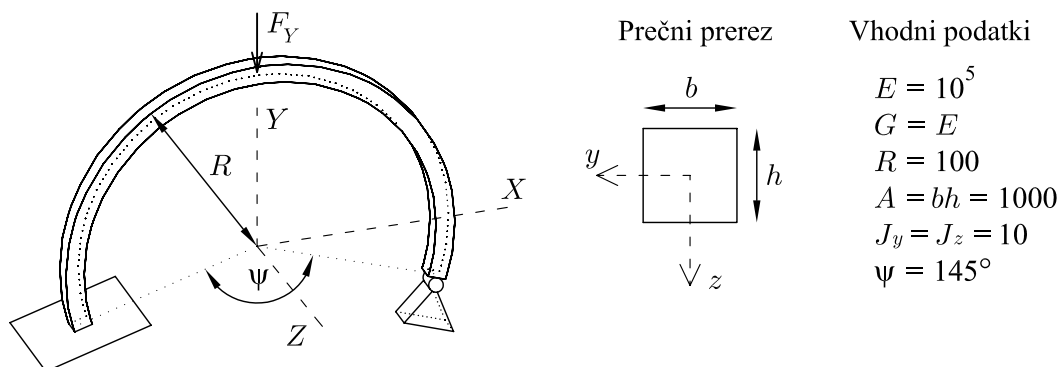


Slika 4.15: Postkritične deformirane oblike osno obremenjenih zavrtih nosilcev.  
Figure 4.15: Deformed shapes of twisted beams.

pomiki). Predhodno zavita nosilca ( $\psi = \pi/2$  in  $2\pi$ ) pa se po kritični sili deformirata prostorsko, v smereh osi  $Y$  in  $Z$ .

#### 4.4.4 Krožni lok

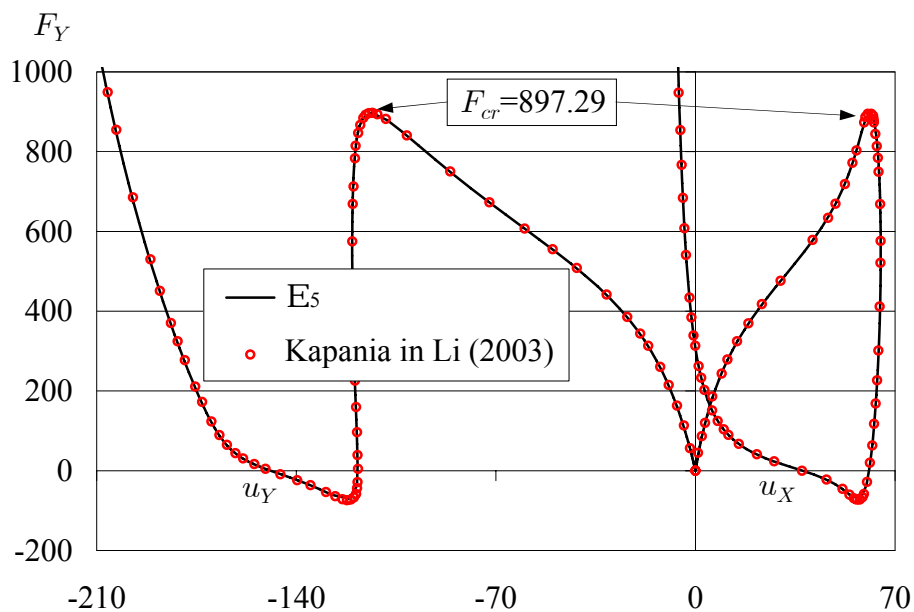
Zvrnitev krožnega loka sta leta 1975 obravnavala DaDeppo in Schmidt (1975), kasneje pa je primer obravnavalo še mnogo avtorjev. Med njimi so Simo in Vu-Quoc (1986), Ibrahimbegović (1995), Saje s sodelavci (1995) in drugi. V tem primeru obravnavamo krožni lok s podatki, povzetimi po viru Kapania in Li (2003). Konstrukcija je skupaj z geometrijskimi in materialnimi parametri, prikazana na sliki 4.16.



Slika 4.16: Bočna zvrnitev krožnega loka.  
Figure 4.16: Lateral buckling of circular arch.

Krožni lok je obremenjen s konservativno točkovno silo v središču razpona. Silo povečujemo do kritične obtežbe. Pri tem opazujemo pomike vozlišča, v katerem deluje obtežba. Nosilec smo modelirali z različnim številom elementov različnih stopenj.

Rezultate prikazujemo za mrežo šestih pet-točkovnih končnih elementov  $E_5$ . Najprej prikazujemo ravninsko analizo krožnega loka. Konstrukcijo obravnavamo ravninsko tako, da v kritičnih točkah konstrukcije za nadaljevanje obtežno deformacijske poti izberemo primarno vejo. Konstrukcija se v tem

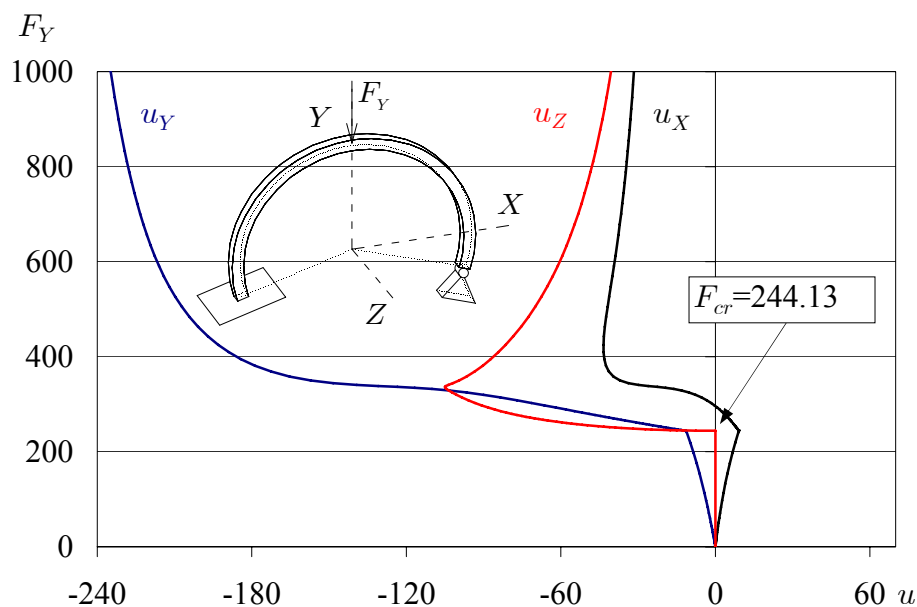


Slika 4.17: Obtežno deformacijska pot za krožni lok.  
Figure 4.17: Load deflection path at the midpoint of circular arch.

primeru ne izkloni iz ravnine. Podobne rezultate oz. učinek bi lahko dosegli z dodajanjem bočnih podpor na krožnem loku, ki bi preprečevale pomik konstrukcije izven ravnine. Rezultate obtežno deformacijske poti obremenjenega vozlišča prikazuje slika 4.17. Na istem grafu so prikazani pomiki srednje točke v smereh  $X$  in  $Y$ .

Velikost kritične obtežbe, na grafu označene s  $F_{cr}$ , določimo na pet mest natančno že po nekaj korakih bisekcije. Učinkovitost formulacije v postkritičnem območju potrjuje ujemanje obtežno deformacijske poti, dobljene z našo formulacijo, in rezultati, kot jih podajata Kapania in Li (2003).

Še bolj zanimiva je obtežno deformacijska pot v primeru, ko se konstrukcija izkloni iz ravnine. V prvi kritični točki gremo v smeri lastnega vektorja, ki kaže v smeri iz ravnine. Na sliki 4.18 prikazujemo obtežno deformacijske krivulje pri uklonu iz ravnine. Pomiki iz ravnine so enaki nič do kritične sile  $F_{cr} = 244.13$ , potem pa se hipno povečajo. Sila se pri tem le malo spreminja. Šele ko dosežemo maksimalen pomik iz ravnine, začne obtežba ponovno hitreje naraščati.

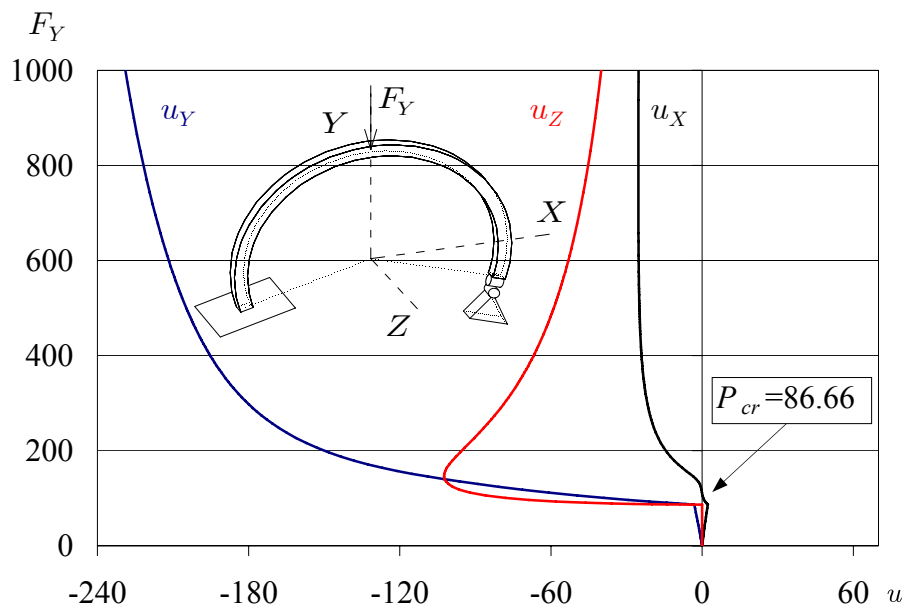


Slika 4.18: Obtežno deformacijska pot za krožni lok. Sekundarna veja.  
 Figure 4.18: Load deflection path at the midpoint of circular arch. Bifurcation path.

Velikost kritične sile prostorskega krožnega loka je odvisna od robnih pogojev. Obravnavani krožni lok je na enem koncu togo vpet, na drugem pa podpora dopušča le zasuk okrog globalne osi  $Z$ . Oglejmo si še rezultate za krožni lok, kjer druga podpora dopušča tudi zasuke okrog osi  $X$ . Obtežno deformacijska krivulja za ta primer je predstavljena na sliki 4.19, deformirane oblike konstrukcije pa so predstavljene na sliki 4.20.

Deformirano obliko krožnega loka, s podporo, vrtljivo le okrog osi  $Z$ , prikazujemo na levi strani slike 4.20. Deformirana konstrukcija je narisana pri referenčnih obtežbah  $F = 0$  (nedeformirana konstrukcija),  $F = 244$  (kritična sila, pri kateri se konstrukcija izkloni iz ravnine),  $F = 300$  (največji pomik v smeri izven ravnine) ter  $F = 897$  (kritična sila, pri kateri bi se enaka, vendar bočno podprta konstrukcija uklonila v ravnini). Na desni strani so prikazane deformirane lege za konstrukcijo s podporo, vrtljivo okrog osi  $Z$  in  $X$ . Za ta primer so deformirane lege narisane pri referenčnih obtežbah  $F = 0$  (nedeformirana konstrukcija),  $F = 87$  (kritična sila, pri kateri se konstrukcija izkloni iz ravnine),  $F = 145$  (največji pomik v smeri izven ravnine) ter  $F = 897$  (kritična sila, pri kateri bi se sicer bočno podprta

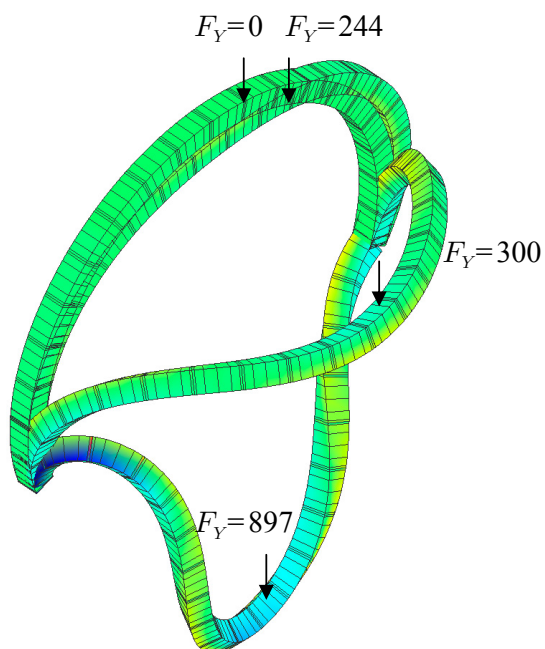
konstrukcija izklonila v ravnini).



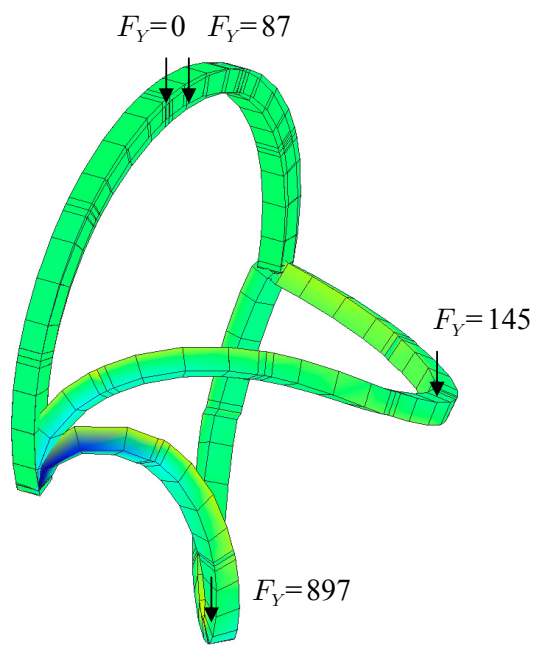
Slika 4.19: Obtežno deformacijska pot srednje točke krožnega loka. Desna podpora vrtljiva okrog osi X in Z.

Figure 4.19: Load deflection path at the midpoint of circular arch. Allowed rotations in two directions at one end.

desna podpora nevtljiva okrog osi X



desna podpora vrtljiva okrog osi X



Slika 4.20: Deformirane oblike za različno podprta krožna loka.

Figure 4.20: Deformed shapes of arches with different supports.

Iz slik 4.18 in 4.19 razberemo, da je kritična sila v primeru, da podpora dopušča zasuke okrog dveh osi,

manjša od primera, v katerem je zadnja podpora vrtljiva le okrog globalne osi  $Z$ . Uklonska sila znaša le tretjino uklonske sile krožnega loka, podprtega vrtljivo le okrog osi, pravokotne na ravnino.

## 5 DELAMINACIJE

### 5.1 Uvod

Razpoke v materialih se zaradi lastnosti materialov, obtežno deformacijskega obnašanja konstrukcij in tehnoloških postopkov izvedbe konstrukcij pojavljajo na različne načine. Pri linijskih elementih običajno obravnavamo dve skupini razpok. Prva je razpokanost prereza elementa, kjer lahko smatramo, da se oslabitev pojavi na določeni omejeni dolžini prereza. Vpliv take razpoke običajno modeliramo z vzmetmi na mestu razpoke oz. plastičnimi členki. Druga skupina razpok je razpokanost elementa v smeri osi elementa in je v literaturi največkrat omenjena kot delaminiranost, saj razpoka povzroči razpad elementa na med seboj ločene lamele. Poznamo več tipov delaminiranosti. Pri materialih, ki so sestavljeni z več tanjših slojev, lahko pride do t.i. uklona tankega filma ('thin film buckling'), za katerega so izpeljane tudi analitični izrazi. Število študij in raziskav nam potrjuje dejstvo, da je prisotnost tankih delaminacij resen problem v gradbeni praksi. Z naraščanjem uporabe polimernih materialov se je povečalo zanimanje za obnašanje elementov z več tankimi razpokami. Take razpoke se lahko pojavijo že v sami tehnologiji izdelave elementov (pri lepljenju lamele lahko pride do pomanjkanja lepila, pojavijo se lahko zračni mehurčki, ...), lahko nastanejo zaradi nezgodne obtežbe na elementu, z razpoko pa lahko modeliramo že samo lokalno nepravilnost v materialu. V primeru, da je delaminacija krajše dolžine v središču prereza elementa, pa ne pride le do uklona tankega filma, takrat govorimo o globalni izgubi stabilnosti. Takrat so rezultati za kritične sile najbolj podobni Eulerjevimi uklonskim silam. V primeru daljših plitvih delaminacij pa govorimo o lokalnem tipu uklona. Poznamo tudi mešani tip uklona, kjer se ukloni celoten element hkrati z lokalnim izklonom lamele, ter simetričen uklon, kjer se lameli izklonita vsaka v svojo smer. Glede števila razpok lahko ločimo tudi uklon elementa z eno delaminacijo in uklon elementa z več delaminacijami (na primer Chai in soavtorji (1981), Simites s sodelavci (1985), Kardomateas in Schumueser (1988) in drugi). Zavedati se moramo, da je delaminiranost elementov izredno pomemben pojav, saj ne vpliva le na nivo kritične uklonske sile, temveč tudi na porušni mehanizem celotne konstrukcije. Delaminirani elementi so tudi veliko bolj izpostavljeni ekscentrični obtežbi, saj ekscentričnost v kombinaciji z delaminacijo še dodatno zniža kritično uklonsko silo. Ko pridemo do prve uklonske točke, je potrebna podrobna analiza. V večini primerov je začetna (prva) kritična sila le indikacija, da je na konstrukciji prišlo do začetka postkritičnega območja, ki ga je potrebno še dodatno raziskati.

Raziskovanje delaminiranosti zasledimo v literaturi že v začetku sedemdesetih let. Takrat se raziskovalci posvečajo predvsem delaminiranosti jeklenih nosilcev (Almond (1970)) in lupin (Kulkarni in Frederic (1973)). Kasneje se modeliranju razpok posveti več avtorjev. Chai s sodelavci (1981) je eden prvih, ki se ukvarja z delaminiranimi nosilci z eno delaminacijo. Za delaminirane ploskovne elemente razvije enodimenzionalni model, ki temelji na energiji loma, s katero avtor odkriva ali se razpoka širi. Podoben model kot Chai (1981) uporabi tudi Simites s sodelavci (1985), ki se osredotoči na prostoležeče nosilce s tanjšimi delaminacijami. Simites s sodelavci (1985) proučuje vpliv dolžine in lege delaminacije na uk-

lonske sile. Za tem Yin s sodelavci (1986) predstavi preprost model za določanje uklonskih sil nosilcev z eno delaminacijo. Kardomateas in Schmueser (1988) razvijeta formulacijo, ki upošteva tudi strižni vpliv na kritične sile delaminiranih prerezov. S formulacijo, ki temelji na Eulerjevih uklonskih silah, analizirata predvsem materiale, pri katerih je vpliv upoštevanja striga znaten (elemente iz kevlarja, grafita in steklenih vlaken). Podobno formulacijo predstavi tudi Chen (1991), le da uporabi variacijski princip za upoštevanje striga. Chen (1991) obravnava nosilce z dvema delaminacijama, za katere numerične rezultate tudi eksperimentalno podpre. Moradi in Taheri (1999) isti problem rešita s kvadratično diferenčno metodo. Vsi ti pristopi sicer upoštevajo strig, vendar s korekcijskimi faktorji, osne deformacije niso upoštevane. Sheinman in Soffer (1989) proučujeta postkritično obnašanje delaminiranega nosilca z začetno nepopolnostjo. Njuno delo temelji na Von Karmanovem kinematičnem kriteriju za spremembo režima v mejni plasti, ki omogoča upoštevanje začetnih nepopolnosti in nelinearne geometrije na nelinearno obnašanje. Omejeta se na vitke ravninske nosilce pri začetni delaminiranosti in zanemarita strižni vpliv na obnašanje v postkritičnem stanju. Obtežbo nanašata na predhodno delaminiran element.

Med prvimi, ki se ukvarjajo s problemom večjega števila razpok (element z več delaminacijami), sta Kapania in Wolfe (1989). Njuno delo nadaljujejo mnogi avtorji, med njimi tudi Somers s sodelavci (1991). Lim in Parson (1993) za analizo nosilcev z dvema delaminacijama uporabita energijsko metodo, pri kateri za iskanje rešitev predpostavita pomike. Kutlu in Chang (1992) izvedeta eksperimentalno študijo nosilcev iz kompozitnega materiala z dvema delaminacijama. Obnašanje nosilcev računsko analizirata z metodo končnih elementov. Podobno z metodo končnih elementov proučujejo nosilce z delaminacijami tudi Hwang in Mao (1999, 2001) in Hwang in Liu (2001). Pri tem opazujejo vpliv delaminacij na uklonsko obnašanje nosilcev. V analizi predpostavijo ekvidistantne delaminacije enakih dolžin, ki so na nosilec postavljene centrično (simetrično). MsRao s sodelavci (2004a, 2004b, 2004c, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2006c, 2007) v svojih objavah analizira delaminirane nosilce iz dveh, treh in več slojev. Pri tem uporabi Euler-Bernoulli-jevo teorijo nosilcev in predstavi brezdimenzijski parameter efektivne vitkosti, ki vpliva na velikost uklonskih sil. Ukvarja se tudi s problemom prekrivanja. Zanimivo študijo nosilcev z več delaminacijami predstavi Lee s sodelavci (2002a), ki primerja vpliv delaminacije na uklonske sile in lastne frekvence delaminiranega nosilca. Za osnovo uporabi klasično teorijo.

Analitične izraze za točne uklonske sile v literaturi zasledimo šele nedavno. Shu (1998) predstavi točno uklonsko analizo za nosilce z dvema delaminacijama. Huang in Kardomateas (1998) izpeljeta eksplicitne enačbe za določanje uklonskih sil z več centričnimi delaminacijami. Analitične rešitve nosilcev z dvema delaminacijama predstavita tudi Numary in Haddad (2001). V vseh zgoraj omenjenih primerih je bila uporabljena klasična teorija nosilcev, ki vpliva striga ne upošteva.

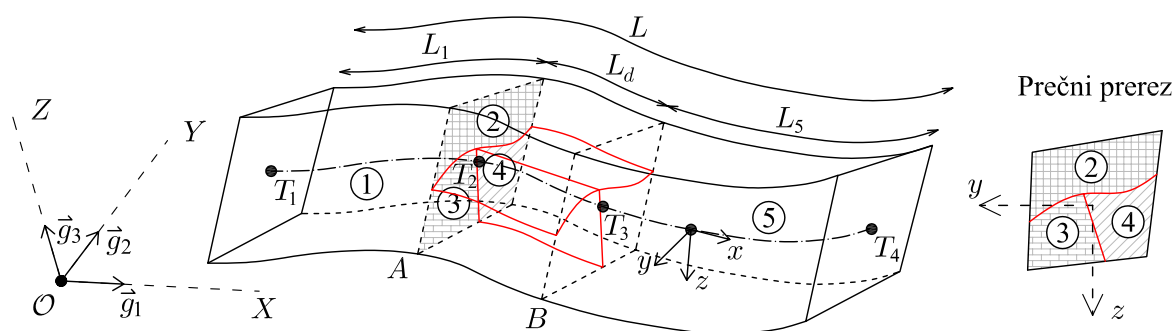
Vsi navedeni modeli so večinoma zelo preprosti. Avtorji za določanje obnašanja delaminiranih elementov praviloma uporabljajo teorijo prvega ali drugega reda, ter obravnavajo le ravninske nosilce. Klasične teorije zanemarijo vpliv striga (ali pa ga avtorji upoštevajo v poenostavljeni obliki), zanemarjene so tudi osne deformacije ob izgubi stabilnosti. Običajno je uporabljen linearen konstitucijski model za material. To je dodaten razlog za prostorsko formulacijo, ki temelji na modelu, opisanem v poglavju 3. Tako bomo lahko, za razliko od ostalih avtorjev, tudi za delaminirane nosilce obravnavali prostorske fenomene, kot sta bočna zvrnitev in torzija. Poudariti moramo, da je predlagana formulacija zasnovana na geometrijsko točni teoriji. Lamele nosilcev modeliramo z ločenimi elementi, za katere veljajo enačbe osnovne formulacije. Naš pristop tako ni omejen na tip razpoke in velja tako za razpoke na površju kot za razpoke, ki se nahajajo bližje osi nosilca. Obravnavamo lahko kombinacijo različnih nepopolnosti na nosilnost in obnašanje nosilca. To je še posebej pomembno, saj imajo delaminacije skupaj z geometrijskimi nepopolnostmi izrazito neugoden vpliv na nosilnost konstrukcij. Za razliko od večine avtorjev, ki se ukvarjajo z delaminiranimi nosilci iz linearno elastičnega materiala, lahko proučujemo delaminirane nosilce iz nelinearnega materiala.



## 5.2 Računski model delaminiranega nosilca

Predpostavimo, da je delaminacija ali več delaminacij znanih v začetnem stanju in da se razpoke ne širijo. Delaminiran nosilec modeliramo s končnimi elementi, opisanimi v prejšnjih poglavjih. V tem poglavju se omejimo na nosilce, kjer so lamele povsem ločene. Problematiko nelinearnega obnašanja stika med lamelami obravnavamo kasneje, v poglavju 6. Nosilec z začetno delaminacijo ali več delaminacijami razpade na dele, ki jih opišemo z mrežami deformacijskih končnih elementov, predstavljenih v poglavju 3. Pri tem je potrebno pravilno upoštevati robne pogoje na začetkih in koncih delaminacij.

Geometrijski model nosilca z dvema delaminacijama je prikazan na sliki 5.1. Začetna referenčna os nosilca je poljubna, delaminacije pa lahko potekajo le vzporedno z referenčno osjo. Ponavadi za referenčno os vzamemo kar težiščno os celotnih prereзов, ni pa nujno. Pri modeliranju posameznih delov nismo omejeni s številom elementov. Vsak del posebej lahko modeliramo z različno gostimi mrežami elementov različnih stopenj. Zaradi kasnejšega upoštevanja konstitucijskih zakonov na stiku med lamelami pa je smiselno uporabiti enako goste mreže za vse delaminirane elemente. Omejiti se moramo glede opisa elementov. Vse elemente ob delaminaciji opišemo glede na skupno referenčno os. V točkah, kjer se deli stikajo ( $A$  in  $B$  na sliki 5.1) je potrebno zagotoviti enakost pomikov in zasukov. To dosežemo z ustrežno gradnjo tangentne togostne matrike konstrukcije. Model delaminiranega nosilca, ki je prikazan na sliki 5.1, že upošteva možnost več delaminacij enake dolžine  $L_d$ , ki so postavljene pod različnimi koti glede na lokalne osi prereza. Prečni prerez delaminiranega dela nosilca je lahko sestavljen iz več zaključenih poligonov poljubnih oblik. Poudarimo, da so osi delaminiranih elementov (elementi 2, 3 in 4) vzporedne med sabo in referenčni osi nosilca.

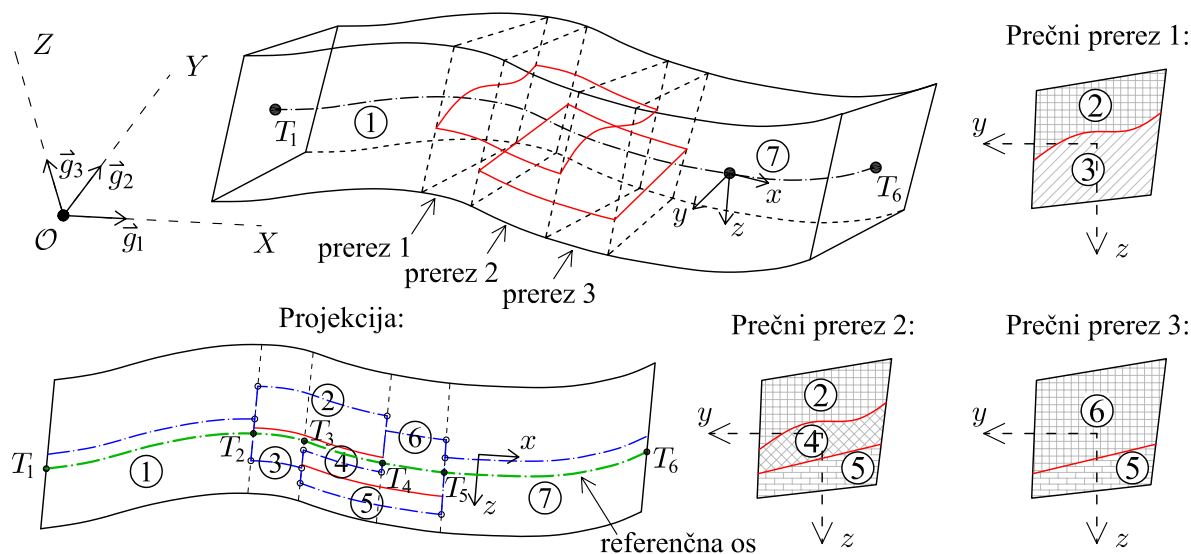


Slika 5.1: Model nosilca z dvema delaminacijama enake dolžine.

Figure 5.1: Beam with two equidistant delaminations.

Zaradi pogostosti pojava in obravnave v literaturi, vpeljimo še ustrezen model za vzdolžno zamaknjene delaminacije. Numerično zahtevnejši primer delaminacij z zamiki z našo formulacijo z lahko opišemo. Na sliki 5.2 prikazujemo nosilec z dvema, vzdolžno zamaknjenima delaminacijama, ki razdelita nosilec na sedem delov. Prvi in zadnji del sta nedelaminirana. Osrednje območje pa z delaminacijami razpade na dele, ki so med sabo povezani le v krajiščih. Na sliki 5.2 smo v projekciji na ravnino  $XZ$  z modro barvo označili osi posameznih lamel nosilca. Vendar lamel zaradi robnih pogojev ne opisujemo glede na težiščno os, temveč glede na skupno referenčno os. Točke v krajiščih lamel so poenotene. Točke vzdolž lamel pa so na nivoju konstrukcije ločene, čeprav predstavljajo isto točko referenčne osi, kot prikazuje slika 5.2.

Shema povezav med elementi in sestavljanje tangentne togostne matrike je za oba modela prikazana na sliki 5.3. Shema predstavljamo za najpreprostejši primer modeliranja, pri katerem je vsak del opisan z



Slika 5.2: Model nosilca z zamaknjenima delaminacijama.

Figure 5.2: Beam with two overlapping delaminations.

enim samim deformacijskim elementom. Na nivoju konstrukcije so v tem primeru vozliščne neznanke pomiki in zasuki v točkah  $T_1 - T_4$  pri enakoležnih in  $T_1 - T_6$  pri zamaknjenih delaminacijah. Kadar so deli modelirani z več elementi se lahko zgodi, da dve robni točki elementa ležita na istem mestu na referenčni osi. Kadar ti dve točki nista krajišči delaminacij, ju na nivoju konstrukcije obravnavamo kot različni točki. Za točke, ki so krajišča delaminacij, pa uporabimo shemo iz slike 5.3.

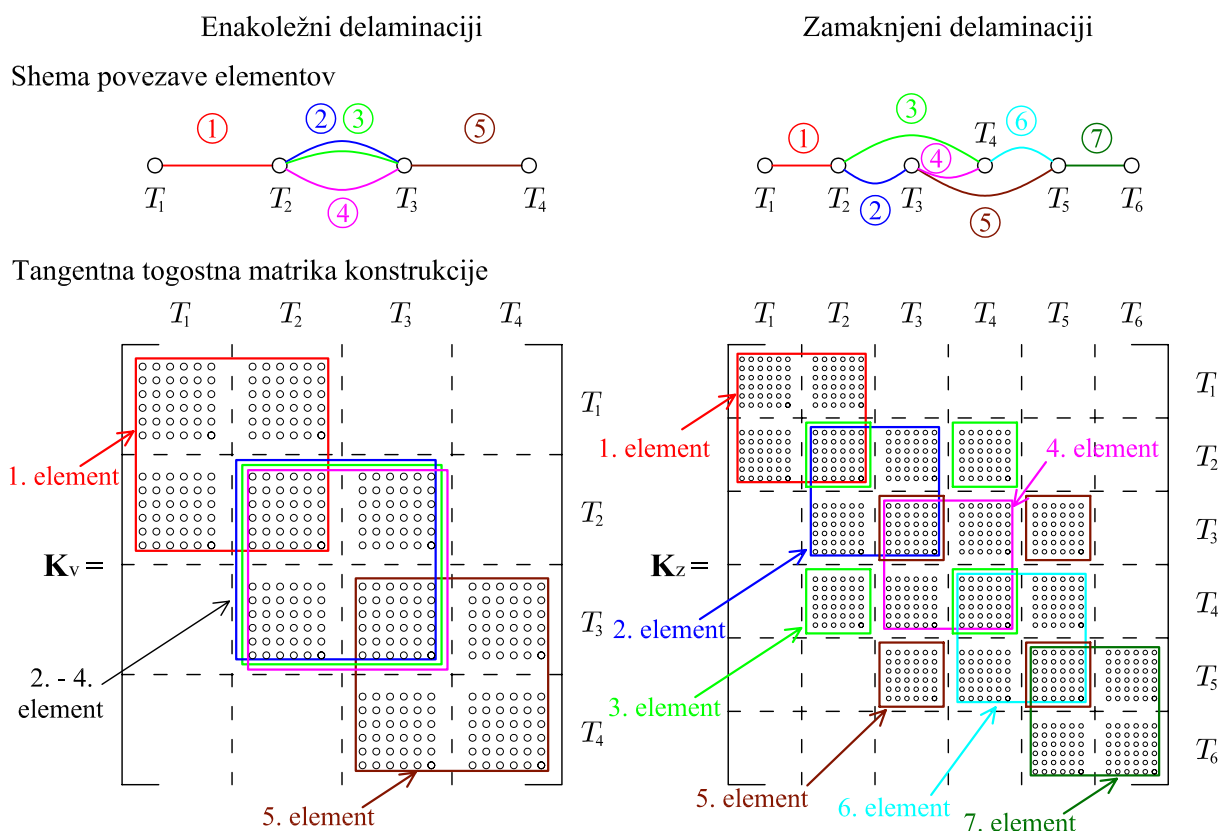
### 5.3 Analitična rešitev uklonskih sil

Najboljša potrditev natančnosti in učinkovitosti numerične metode je primerjava z analitičnimi rezultati, če seveda le-te poznamo. V tem poglavju tako izpeljemo analitični postopek določanja kritičnih sil delaminiranih nosilcev, kjer pa za razliko od drugih avtorjev uporabimo Reissnerjev model nosilca (glej poglavje 2) z upoštevanjem strižnega vpliva. Omejimo se le na ravninski nosilec konstantnega prečnega prereza, katerega osrednji del z  $n$  delaminacijami razpade na  $n - 1$  lamel enake dolžine (slika 5.4). Dolžina nosilca  $L$  je tako sestavljena iz treh delov.  $L_1$  je dolžina prvega, nedelaminiranega dela,  $L_d$  ( $i = 2, \dots, n + 2$ ) predstavlja dolžino delaminiranega dela ter je enaka za vse delaminacije, dolžina zadnjega nedelaminiranega segmenta je označena z  $L_{n+3}$ . Debelina  $i$ -te lamele je označena z  $d_i$ , njena relativna vertikalna lega pa z  $r_i$ . Podpor zaenkrat ne prikazujemo, saj lahko obravnavamo različne tipe podpiranja, pri vseh pa mora biti preprečen osni pomik točke  $T_1$  in dovoljen osni pomik točke  $T_4$ .

Zaradi preglednosti vpeljemo še oznaki:  $l_d$  za relativno dolžino delaminacije in  $l_1$  za relativno dolžino prvega nedelaminiranega dela nosilca. Potrebovali bomo tudi pojem vitkosti nosilca, ki ga definiramo kot

$$\lambda_y = L \sqrt{\frac{A}{J_y}}$$

Nosilec obremenimo s tlačno osno silo  $F$ , iščemo pa vrednosti, pri katerih pride do izgube stabilnosti. Ta sila je uklonska sila delaminiranega nosilca.



Slika 5.3: Zlaganje togostne matrike pri vzporednih in zaporednih delaminacijah.

Figure 5.3: Tangent stiffness matrix for beam with parallel and overlapping delaminations.

Enačbe nosilca smo že izpeljali, poenostavimo jih za primer, ko se nosilec deformira le v ravnini  $XZ$ , težiščna os v referenčni legi pa je ravna in leži vzdolž osi  $Y$ . V tem primeru je

$$\mathbf{r}_g(x) = \begin{bmatrix} x + u_X(x) \\ 0 \\ u_Z(x) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

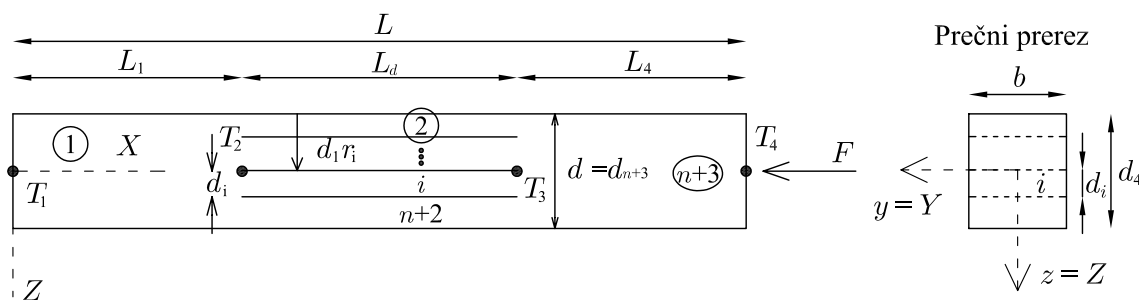
kjer smo z  $u_X$  označili horizontalne pomike v smeri osi  $X$ , z  $u_Z$  pomike v smeri  $Z$  in s  $\varphi$  zasuke okrog osi  $Y$ .

Enačbi (5.1) in (5.2) upoštevamo v (2.49)–(2.56), pri čemer zaradi omejitve na ravnino upoštevamo še ustrezno obliko zunanjih sil

$$\mathbf{n}_g = \begin{bmatrix} n_X \\ 0 \\ n_Z \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ m_Y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} S_X \\ 0 \\ S_Z \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ P_Y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po Rodriguesovi formuli (2.3) izrazimo ustrezno rotacijsko matriko, ki pripada ravninski rotaciji  $\varphi(x)$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$



Slika 5.4: Model ravnega nosilca z vzporednimi delaminacijami.

Figure 5.4: Straight beam with parallel delaminations.

Vstavljanje poenostavitev v kinematične enačbe pokaže, da so za take primere druga komponenta vektorja  $\gamma_G$  ter prva in tretja komponenta vektorja  $\kappa_G$  identično enaki 0. Za neničelne komponente uporabimo naslednje oznake

$$\varepsilon = \gamma_G(1) \quad \gamma = \gamma_G(3) \quad \kappa = \gamma_G(2) .$$

Podobno iz ravnotežnih enačb sledijo le tri neničelne komponente notranjih sil. Zanje uporabimo oznake

$$\begin{aligned} R_X &= N_g(1) & R_Z &= N_g(3) & M &= M_g(2) \\ N &= N_G(1) & Q &= N_G(3) & M &= M_G(2) \end{aligned} .$$

Ob omejitvi na ravnino in z uporabo zgornjih oznak se osnovne enačbe nosilca glasijo

$$1 + u'_X = (1 + \varepsilon) \cos \varphi + \gamma \sin \varphi \quad (5.4)$$

$$u'_Z = -(1 + \varepsilon) \sin \varphi + \gamma \cos \varphi \quad (5.5)$$

$$\varphi' = \kappa, \quad (5.6)$$

$$R'_X + n_X = 0 \quad (5.7)$$

$$R'_Z + n_Z = 0 \quad (5.8)$$

$$M' - (1 + \varepsilon)Q + \gamma N - m_Y = 0 \quad (5.9)$$

$$N = R_X \cos \varphi - R_Z \sin \varphi \quad (5.10)$$

$$Q = R_X \sin \varphi + R_Z \cos \varphi. \quad (5.11)$$

Notranje sile  $N$ ,  $Q$  in  $M$  povežemo z deformacijskimi količinami, kot smo že pokazali v enačbah linearno-elastičnega materiala (poglavje 2.3.4):

$$N = E \int_A (\varepsilon + z\kappa) dA \quad (5.12)$$

$$Q = GA_s \gamma \quad (5.13)$$

$$M = E \int_A z (\varepsilon + z\kappa) dA. \quad (5.14)$$

Dodatno se omejimo na ravne nosilce ( $\varphi_0(x) = 0$ ) brez porazdeljene obtežbe ( $n_X = 0$ ,  $n_Z = 0$ ,  $m_Y = 0$ ). Linearizirane enačbe smo tudi že izpeljali (glej poglavje 2.4). V poenostavljeni obliki za

ravnino ob upoštevanju ravne referenčne lege in zgolj točkovnih obtežb pa imajo naslednjo obliko:

$$\delta u'_X - \delta \varepsilon = 0 \quad (5.15)$$

$$\delta u'_Z + (1 + \varepsilon) \delta \varphi - \delta \gamma = 0 \quad (5.16)$$

$$\delta \varphi' - \delta \kappa = 0 \quad (5.17)$$

$$\delta R'_X = 0 \quad (5.18)$$

$$\delta R'_Z = 0 \quad (5.19)$$

$$\delta M' + R_X \delta u'_Z - (1 + \varepsilon) \delta R_Z = 0 \quad (5.20)$$

$$C_{\varepsilon\varepsilon} \delta \varepsilon + C_{\varepsilon\kappa} \delta \kappa - \delta R_X = 0 \quad (5.21)$$

$$GA_s \delta \gamma - R_X \delta \varphi - \delta R_Z = 0 \quad (5.22)$$

$$C_{\kappa\varepsilon} \delta \varepsilon + C_{\kappa\kappa} \delta \kappa - \delta M = 0. \quad (5.23)$$

Pri tem so:

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = EA \quad (5.24)$$

$$C_{\varepsilon\kappa} = \frac{\partial N}{\partial \kappa} = E \int_A z dA = ES_y \quad (5.25)$$

$$C_{\kappa\varepsilon} = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = E \int_A z dA = ES_y = C_{\varepsilon\kappa} \quad (5.26)$$

$$C_{\kappa\kappa} = \frac{\partial M}{\partial \kappa} = E \int_A z^2 dA = EJ_y. \quad (5.27)$$

Opozorimo, da statični moment prereza  $S_y$  ni enak nič, če os elementa ne sovpa s težiščno osjo celotnega nosilca.

Enačbe (5.15)–(5.20) predstavljajo sistem šestih navadnih diferencialnih enačb. Algebrajske enačbe (5.21)–(5.23) so linearizirane konstitucijske enačbe prečnega prereza. Sistem devetih enačb (5.15)–(5.23) lahko prevedemo na sistem dveh diferencialnih enačb višjega reda za dve neznaniki  $\delta u_X$  in  $\delta u_Z$ . Če uporabimo odvod enačb (5.16) in (5.22) in ob tem upoštevamo (5.19), dobimo:

$$\delta u''_Z = \left[ -(1 + \varepsilon) + \frac{R_X}{GA_s} \right] \delta \varphi' = \left[ -(1 + \varepsilon) + \frac{R_X}{GA_s} \right] \delta \kappa \quad (5.28)$$

in

$$\delta u_Z^{(iv)} = \left[ -(1 + \varepsilon) + \frac{R_X}{GA_s} \right] \delta \kappa''. \quad (5.29)$$

Drugi odvod  $\delta M$  izrazimo iz (5.23) in (5.20) ob upoštevanju (5.19):

$$\delta M'' = C_{\kappa\varepsilon} \delta \varepsilon'' + C_{\kappa\kappa} \delta \kappa'' = -R_X \delta u''_Z \quad (5.30)$$

$$C_{\kappa\varepsilon} \delta \varepsilon'' + C_{\kappa\kappa} \delta \kappa'' + R_X \delta u''_Z = 0. \quad (5.31)$$

Ko vstavimo (5.21) in (5.29) v (5.31), dobimo

$$\delta u_Z^{(iv)} + \frac{R_X}{d} \left[ -(1 + \varepsilon) + \frac{R_X}{GA_s} \right] \delta u''_Z = 0, \quad (5.32)$$

kjer smo z  $d$  označili

$$d = \frac{C_{\varepsilon\varepsilon} C_{\kappa\kappa} - C_{\varepsilon\kappa} C_{\kappa\varepsilon}}{C_{\varepsilon\varepsilon}}. \quad (5.33)$$

Ker predpostavimo tlačno osno zunanjo silo  $F$ , je  $R_X$  negativna količina. Koeficient pri  $\delta u_Z''$  je torej pozitiven, zato vpeljemo oznako

$$k^2 = -\frac{R_X}{d} \left[ (1 + \varepsilon) - \frac{R_X}{GA_s} \right]. \quad (5.34)$$

Koeficient  $k$  imenujemo uklonski koeficient. Z vpeljavo uklonskega koeficienta dobi enačba (5.32) obliko

$$\delta u_Z^{(iv)} + k^2 \delta u_Z'' = 0, \quad (5.35)$$

njeno rešitev pa zapišemo kot

$$\delta u_Z(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D. \quad (5.36)$$

Iz prvega odvoda (5.21) z upoštevanjem (5.15) in (5.18) dobimo

$$C_{\varepsilon\varepsilon} \delta u_X'' + C_{\varepsilon\kappa} \delta \kappa' = 0,$$

z odvajanjem (5.28) in upoštevanjem (5.18) in (5.21) pa

$$\frac{C_{\varepsilon\varepsilon}}{C_{\varepsilon\kappa}} \left[ -(1 + \varepsilon) + \frac{R_X}{GA_s} \right] \delta u_X'' + \delta u_Z''' = 0.$$

Ko vstavimo rešitev za  $\delta u_Z$  (enačba (5.36)), preoblikujemo prejšnji izraz v navadno diferencialno enačbo drugega reda za eno neznanko  $\delta u_X$ :

$$\delta u_X'' = \frac{R_X C_{\varepsilon\kappa}}{d C_{\varepsilon\varepsilon}} k (A \cos kx - B \sin kx). \quad (5.37)$$

Rešitev enačbe (5.37) je oblike

$$\delta u_X(x) = \alpha + \beta x - \frac{R_X C_{\varepsilon\kappa}}{k d C_{\varepsilon\varepsilon}} (A \cos kx - B \sin kx). \quad (5.38)$$

Ob danih predpostavkah smo poiskali splošno rešitev za deformirano obliko okrog ravne referenčne lege. Določajo jo izraza (5.36) in (5.38). V (5.36) in (5.38) nastopa 6 parametrov  $A, B, C, D, \alpha$  in  $\beta$ , ki jih določajo robni pogoji posameznih elementov. Zaradi splošnosti pristopa je oblika rešitev (5.36) in (5.38) enaka za vse dele delaminiranega nosilca ( $i = 1, \dots, n + 3$ ), parametri  $A_i, B_i, C_i, D_i, \alpha_i$  in  $\beta_i$  pa se razlikujejo, saj so odvisni od robnih pogojev. Zaradi upoštevanja robnih pogojev je smiselno tudi ostale količine nosilca  $\delta\varphi, \delta R_X, \delta R_Z, \delta M$  izraziti kot linearno kombinacijo šestih parametrov. Če nastavka za rešitvi (5.36) in (5.38) vstavimo v enačbe (5.15)–(5.23) s preoblikovanjem in združevanjem izrazov dobimo:

$$\delta\varphi = \frac{R_X}{k d} (A \cos kx - B \sin kx) - \frac{1}{1 + \varepsilon} C \quad (5.39)$$

$$\delta R_X = C_{\varepsilon\varepsilon} \beta \quad (5.40)$$

$$\delta R_Z = \frac{R_X}{1 + \varepsilon} C \quad (5.41)$$

$$\delta M = C_{\kappa\varepsilon} \beta - R_X (A \sin kx + B \cos kx). \quad (5.42)$$

Rešitev, izražena z enačbami (5.36), (5.38), (5.39)–(5.42) je rešitev konsistentno lineariziranega problema. Linearizirali smo okrog referenčne lege nosilca, ki je lahko deformirana, vendar mora biti os nosilca ravna. Torej smo linearizirali okrog lege, ki dopušča začetne osne deformacije  $\varepsilon$ , kar je usklajeno

s predpostavljeno centrično osno obtežbo  $F$ . Rešitve za posamezen del  $i$  so odvisne od osne deformacije  $\varepsilon_i$  in osne sile  $R_{X_i}$  tega dela v referenčnem stanju. Preden združujemo rešitve za dele v celoto moramo najprej ugotoviti razporeditev osnih deformacij in sil v referenčnem stanju. Za raven nosilec, izpostavljen le osni obtežbi, lahko enačbo (5.4) zapišemo kot

$$u'_X = \varepsilon \quad (5.43)$$

$$u_X(x) = u_X(0) + \varepsilon x. \quad (5.44)$$

Začetni osni pomiki v točkah  $T_2$  in  $T_3$  morajo biti enaki, zato je

$$\begin{aligned} u_{X,1}(L_1) &= u_{X,i}(0) \\ u_{X,i}(L_d) &= u_{X,n+3}(0). \end{aligned}$$

Po 5.44 pa sledi

$$u_{X,1}(L_1) + \varepsilon_i L_d = u_{X,n+3}(0).$$

Torej so osne deformacije vseh lamel enake

$$\varepsilon_d = \varepsilon_i = \varepsilon_j, \quad i, j \in \{2, \dots, n+2\}, \quad (5.45)$$

kjer smo z  $\varepsilon_d$  označili osno deformacijo lamel. V točkah  $T_2$  in  $T_3$  zapišemo še ravnotežna pogoja za osne sile

$$\sum_{i=2}^{n+2} R_{X,i} = R_{X,1} \quad (5.46)$$

$$\sum_{i=2}^{n+2} R_{X,i} = R_{X,n+3}. \quad (5.47)$$

Za raven, osno obremenjen nosilec so osne sile produkt osne togosti in deformacije

$$R_{X,i} = EA_i \varepsilon_i, \quad \text{za } i = 1, \dots, n+3. \quad (5.48)$$

Z vstavljanjem (5.48) v (5.46)–(5.47) in upoštevanjem (5.45) dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n+2} EA_i \varepsilon_d &= EA_1 \varepsilon_1 \\ \sum_{i=2}^{n+2} EA_i \varepsilon_d &= EA_{n+3} \varepsilon_{n+3}. \end{aligned}$$

Predpostavili smo konstanten prečni prerez, zato je  $\sum_{i=2}^{n+2} A_i = A_1 = A_{n+3} = A$  in sledi enakost osnih deformacij po celotni dolžini

$$\varepsilon = \varepsilon_i = \text{konst.}, \quad \text{za } i = 1, \dots, n+3. \quad (5.49)$$

Ker so osne deformacije za naš primer konstantne, sedaj zlahka ugotovimo, kako se delijo osne sile po lamelah. Iz (5.48) sledi

$$R_{X,i} = EA_i \varepsilon, \quad \text{za } i = 1, \dots, n+3. \quad (5.50)$$

Ravnotežni pogoj na desnem robu je enak

$$R_{X,n+3} + F = 0, \quad (5.51)$$

zato je

$$\varepsilon = -\frac{F}{EA}. \quad (5.52)$$

Potem ko osno deformacijo vstavimo v izraze (5.50), dobimo

$$R_{X,i} = -\frac{A_i}{A}F, \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2, \quad (5.53)$$

$$R_{X,1} = -F. \quad (5.54)$$

Po pričakovanju so osne sile v lamelah v referenčnem stanju sorazmerne deležu ploščine prečnih prere-zov lamel glede na celotno ploščino prereza.

Robne pogoje  $n + 3$  delov delaminiranega nosilca razdelimo na dva sklopa: Robne pogoje na obeh koncih, kjer upoštevamo različne podpore, in pogoje ob koncu delaminacij, kjer upoštevamo zveznost pomikov in ravnotežje notranjih sil.

Na koncih delaminiranega dela ( $T_2$  in  $T_3$ ) morajo linearizirane rešitve zadostiti enakosti pomikov in ravnotežnim pogojem za notranje sile v obeh diskretnih točkah:

$$\delta u_{X,1}(L_1) = \delta u_{X,i}(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2 \quad (5.55)$$

$$\delta u_{Z,1}(L_1) = \delta u_{Z,i}(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2 \quad (5.56)$$

$$\delta \varphi_1(L_1) = \delta \varphi_i(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2 \quad (5.57)$$

$$\delta R_{X,1}(L_1) = \sum_{i=2}^{n+2} \delta R_{X,i}(0) \quad (5.58)$$

$$\delta R_{Z,1}(L_1) = \sum_{i=2}^{n+2} \delta R_{Z,i}(0) \quad (5.59)$$

$$\delta M_1(L_1) = \sum_{i=2}^{n+2} \delta M_i(0) \quad (5.60)$$

$$\sum_{i=2}^{n+2} \delta R_{X,i}(L_d) = \delta R_{X,n+3}(0) \quad (5.61)$$

$$\sum_{i=2}^{n+2} \delta R_{Z,i}(L_d) = \delta R_{Z,n+3}(0) \quad (5.62)$$

$$\sum_{i=2}^{n+2} \delta M_i(L_d) = \delta M_{n+3}(0) \quad (5.63)$$

$$\delta u_{X,i}(L_d) = \delta u_{X,n+3}(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2 \quad (5.64)$$

$$\delta u_{Z,i}(L_d) = \delta u_{Z,n+3}(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2 \quad (5.65)$$

$$\delta \varphi_i(L_d) = \delta \varphi_{n+3}(0), \quad \text{za } i = 2, \dots, n+2. \quad (5.66)$$

Obravnavajmo še pogoje v robnih točkah  $T_1$  in  $T_4$  (glej sliko 5.5). Linearizacija robnih pogojev v smeri osi nosilca je oblike:

$$\delta u_{X,1}(0) = 0 \quad (5.67)$$

$$\delta R_{X,n+3}(L_{n+3}) = 0. \quad (5.68)$$



Enačbi (5.67) in (5.68) veljata za vse tipe podpiranja. Preostale enačbe pa predstavimo za vsak tip podpiranja posebej:

(a) konzolno vpeti nosilec

$$\delta u_{Z,1}(0) = 0, \quad \delta \varphi_1(0) = 0, \quad \delta R_{Z,n+3}(L_{n+3}) = 0, \quad \delta M_{n+3}(L_{n+3}) = 0. \quad (5.69)$$

(b) prostoležeče vpeti nosilec

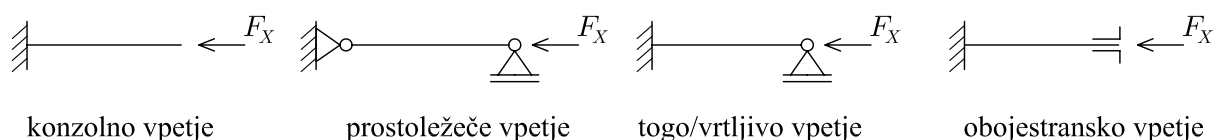
$$\delta u_{Z,1}(0) = 0, \quad \delta u_{Z,n+3}(L_{n+3}) = 0, \quad \delta M_1(0) = 0, \quad \delta M_{n+3}(L_{n+3}) = 0. \quad (5.70)$$

(c) togo vpeti na eni in vrtljivo vpeti na drugi strani

$$\delta u_{Z,1}(0) = 0, \quad \delta \varphi_1(0) = 0, \quad \delta u_{Z,n+3}(L_{n+3}) = 0, \quad \delta M_{n+3}(L_{n+3}) = 0. \quad (5.71)$$

(d) obojestransko vpeti nosilec

$$\delta u_{Z,1}(0) = 0, \quad \delta \varphi_1(0) = 0, \quad \delta u_{Z,n+3}(L_{n+3}) = 0, \quad \delta \varphi_{n+3}(L_{n+3}) = 0. \quad (5.72)$$



Slika 5.5: Različni tipi podpiranja delaminiranega nosilca.

Figure 5.5: Supporting types of delaminated beam.

Za določitev koeficientov  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  in  $D_i$  ( $i = 1, \dots, n + 3$ ) moramo torej rešiti  $6n$  enačb za zveznost pomikov, 6 ravnotežnih enačb in 6 robnih pogojev. Dobimo torej sistem  $6(n + 3)$ , ki ga formalno lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (5.73)$$

kjer  $\mathbf{K}$  predstavlja matriko  $6(n + 3) \times 6(n + 3)$  koeficientov in  $\boldsymbol{\alpha}$  vektor  $6(n + 3)$  neznanek. Iščemo tisto vrednost sile  $F$ , pri kateri ima sistem (5.73) netrivialno rešitev  $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ . Sistem homogenih linearnih enačb (5.73) ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je enaka nič determinanta sistema  $\det \mathbf{K} = 0$ . Analitični izrazi za determinanto so prezapleteni, zato determinanto določamo numerično neposredno iz analitično dobljene matrike  $\mathbf{K}$ .

## 5.4 Numerični primeri

V tem poglavju bomo prikazali natančnost in učinkovitost predstavljene numerične metode. Numerične rezultate bomo primerjali z rezultati drugih avtorjev in z lastnimi analitičnimi rešitvami. Opazovali bomo tako stabilno kot tudi postkritično obnašanje delaminiranih nosilcev. Pri tem bomo opozorili na problematiko modela, kjer lahko pride do prekrivanja lamel. Ta težava je karakteristična za vse klasične modele. Našo rešitev predstavimo v poglavju 6, tukaj pa se s tem zaenkrat še ne ukvarjamo. Poleg tega se zaradi primerjav omejimo na delaminirane nosilce iz linearno-elastičnih materialov. Posebej prikazujemo vpliv razmerja med elastičnim in strižnim modulom na obnašanje delaminiranih nosilcev in izpostavimo vpliv strižnih deformacij na uklonske sile.

### 5.4.1 Primerjava z analitičnimi rešitvami

Zaradi primerjave z rešitvami klasičnih teorij in našo lastno po Reissnerjevi teoriji nosilcev se omejimo na ravninski model delaminiranega nosilca z  $n$  delaminacijami enakih dolžin (slika 5.4, poglavje 5.2). Omejimo se na prostoležeče podprti ravni nosilec pod tlačno osno silo. Naše numerične rezultate uklonskih sil bomo primerjali z rezultati, dobljenimi s klasičnimi teorijami delaminiranih stebrov: Simitses s sodelavci (1985), Lim in Parson (1993), ter z lastnimi analitičnimi rešitvami, ki so v skladu z numeričnim modelom (glej poglavje 5.3). V vseh primerih primerjamo normirano uklonsko silo, ki je definirana kot razmerje med kritično silo delaminiranega stebra in standardno Eulerjevo uklonsko silo  $F_{cr}/F_{eu}$ . Eulerjevo uklonsko silo za nedelaminiran nosilec izračunamo z enačbo

$$F_{eu} = \frac{E J_y \pi^2}{L_u^2}, \quad (5.74)$$

kjer  $L_u$  predstavlja uklonsko dolžino elementa. Opozorimo, da klasične teorije delaminiranih stebrov ne upoštevajo povezanega vpliva osnih in strižnih deformacij. Primerljive rezultate lahko torej dobimo le z določenimi poenostavitvami v našem modelu. Tako z našim modelom obravnavamo tudi strižno in osno tog material ( $G = \infty$  in  $\varepsilon = 0$ ).

Prvi računski primer predstavlja prostoležeči nosilec z eno vzdolžno simetrično delaminacijo štirih različnih relativnih dolžin  $l_d$ , ki je postavljena na relativni višini  $r_d = 0.4$ . Privzeti so bili naslednji geometrijski parametri: višina  $d_1 = 0.3$  m, širina  $b = 0.4$  m in dolžina  $L = 3.0$  m. Vitkost nosilca znaša  $\lambda_y = L \sqrt{A/J_y} = 34.64$ , za elastični modul pa smo privzeli vrednost  $E = 3 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>. Strižni modul je v poenostavljenih primerih  $G = \infty$ , v ostalih primerih pa je strižni modul  $G = E/6$ . V preglednici 5.1 predstavljamo analitične rešitve kritičnih uklonskih sil za delaminiran nosilec brez upoštevanja osnih deformacij, z upoštevanjem osnih deformacij ( $G = \infty$ ) ter z upoštevanjem striga ( $G = E/6$ ). Eulerjeva uklonska sila za naš primer znaša  $F_{eu} = 29.609$  kN.

Numerične rešitve so bile izračunane z elementi tipa  $E_5$ . Uporabili smo po en element za vsak del nosilca, kar pomeni skupaj 4 elemente. Za primerjavo pa prikazujemo tudi rezultat za gostejšo mrežo s po dvema elementoma na vsakem delu (skupaj 8 elementov).

V poenostavljenem primeru, ko je zanemarjen vpliv striga in osnih deformacij, lahko opazimo popolno ujemanje naših rezultatov s klasičnimi teorijami delaminacij. Upoštevanje osnih deformacij ob zanemaritvi striga ( $G = \infty$ ) kaže, da so klasični rezultati konzervativni. Ko pa v analizi upoštevamo strižne materialne karakteristike, tipične za kompozitne materiale, opazimo, da je relativna uklonska sila bistveno manjša kot po klasičnih teorijah. Vpliv je največji pri krajših delaminacijah.

Naša numerična formulacija konsistentno upošteva vpliv osnih deformacij, zato pričakovano opazimo manjša odstopanja med rešitvami drugih avtorjev in našimi analitičnimi in numeričnimi rezultati. Ob ustreznem upoštevanju osnih deformacij pa se naši analitični rezultati povsem ujemajo z numeričnimi že za redko mrežo končnih elementov. To velja tako za strižno tog material ( $G = \infty$ ), kot tudi realnejše vrednosti strižnega modula. Manjša odstopanja med numeričnimi in analitičnimi rezultati opazimo le pri daljših delaminacijah in uporabi redkejših mrež. Če uporabimo gostejšo mrežo (po 2 elementa), se rezultati povsem ujemajo z analitičnimi.

Tudi za delaminirane nosilce z **dvema** delaminacijama lahko najdemo rezultate po klasični teoriji. V preglednici 5.2 predstavljamo primerjavo med analitičnimi in numeričnimi rešitvami za uklonske sile po Lim in Parson (1993), našimi analitičnimi rezultati z upoštevanjem striga in osnih deformacij in našimi numerično dobljenimi rezultati. Analiziran je obojestransko vpeti nosilec, geometrijski in materialni parametri pa so enaki kot v primeru nosilca z eno delaminacijo.

Preglednica 5.1: Normirane uklonske sile prostoležečega nosilca z eno delaminacijo.

Table 5.1: Normalized buckling loads of a simply supported beam with one delamination.

$l_d$	Lim in Parson (1993) - en. met.	Lim in Parson (1993) - Abaqus	Simitses s sodelavci (1985)	Anali- tična poen.	Anali- tična $G = \infty$	Anali- tična $G = E/6$	Num. 1 el. $G = \infty$	Num. 1 el. $G = E/6$	Num. 2 el. $G = E/6$
0.2	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	1.0081	0.9534	1.0081	0.9534	0.9534
0.4	0.9902	0.9902	0.9902	0.9902	0.9984	0.9447	0.9984	0.9447	0.9447
0.6	0.9198	0.9197	0.9198	0.9198	0.9269	0.8803	0.9268	0.8802	0.8803
0.8	0.7264	0.7264	0.7264	0.7264	0.7308	0.7013	0.7301	0.7007	0.7013

Preglednica 5.2: Normirane uklonske sile obojestransko vpetega nosilca z dvema delaminacijama.

Table 5.2: Normalized buckling loads of a clamped beam with two delaminations.

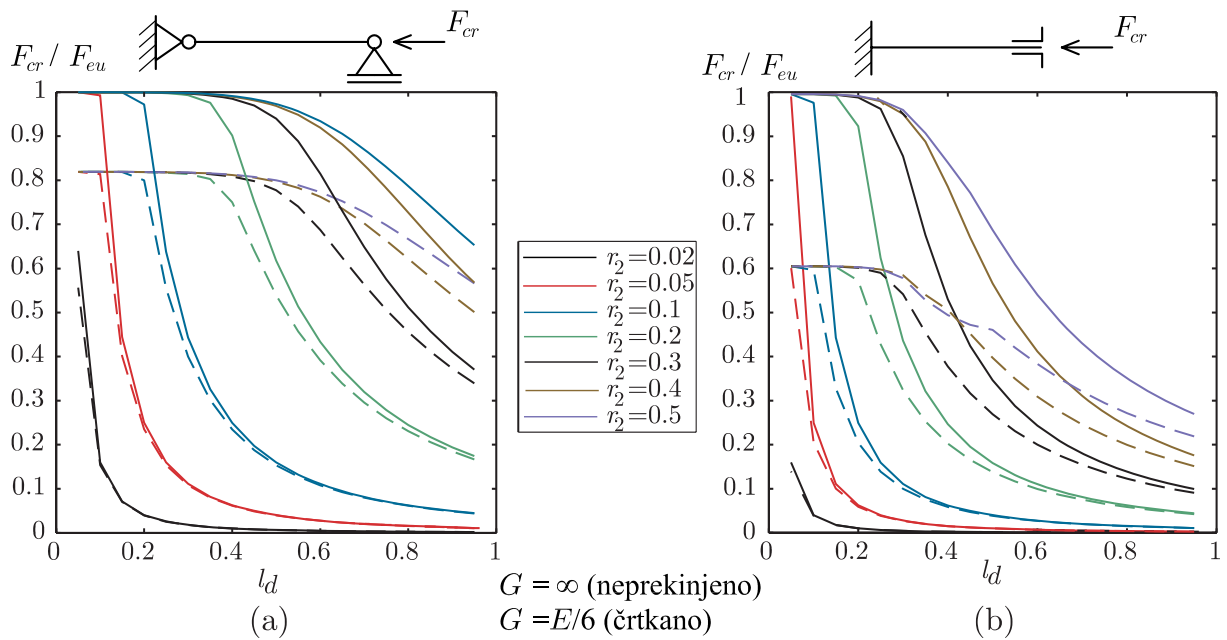
$l_d$	Lim in Parson (1993) - en. met.	Lim in Parson (1993) - Abaqus	Analit. poen.	Analit. $G = \infty$	Analit. $G = E/6$	Num. $G = \infty$	Num. $G = E/6$
0.2	0.8939	0.8940	0.8938	0.8945	0.8894	0.8946	0.8894
0.4	0.5054	0.5056	0.5054	0.5058	0.5037	0.5041	0.5027
0.6	0.2374	0.2375	0.2374	0.2375	0.2371	0.2363	0.2360
0.8	0.1374	0.1375	0.1374	0.1374	0.1373	0.1367	0.1366

Primerjava rezultatov uklonskih kritičnih sil ponovno potrди točnost naše numerične formulacije. Kritične sile po numeričnem modelu se od analitičnih rezultatov nosilca z delaminacijami višjih relativnih dolžin razlikujejo šele na četrtem decimalnem mestu. Manjše odstopanje med rezultati, ki jih podajata Lim in Parson (1993) lahko pripišemo dvema vplivoma. Prvi je konsistentno upoštevanje osnih deformacij, ki ga v svoji formulaciji avtorja ne zajameta. Drugi razlog za manjše odstopanje pa je pomanjkanje podatkov. V literaturi niso podani vsi geometrijski in materialni vhodni podatki. Podani so le rezultati normiranih uklonskih sil in pozicije ter dolžine delaminacij. Naše analize pa kažejo, da za različne vitkosti nosilcev lahko dobimo manjša odstopanja med normiranimi uklonskimi silami.

## 5.4.2 Vpliv dolžine in lege delaminacije; ena delaminacija

V tem primeru prikazujemo vpliv dolžine in lege delaminacije pri nosilcu z eno delaminacijo. Pri tem se v našem modelu, tako analitičnem kot numeričnem, ni potrebno omejiti glede debeline lamel. Zaradi možnosti primerjav numeričnih rezultatov z analitičnimi se omejimo na ravninski model (slika 5.4). Poleg same lege delaminacije prikazujemo tudi vpliv striga, ki je lahko bistven za kompozitne materiale, kjer je razmerje med elastičnim in strižnim modulom precej večje kot pri klasičnim materialih.

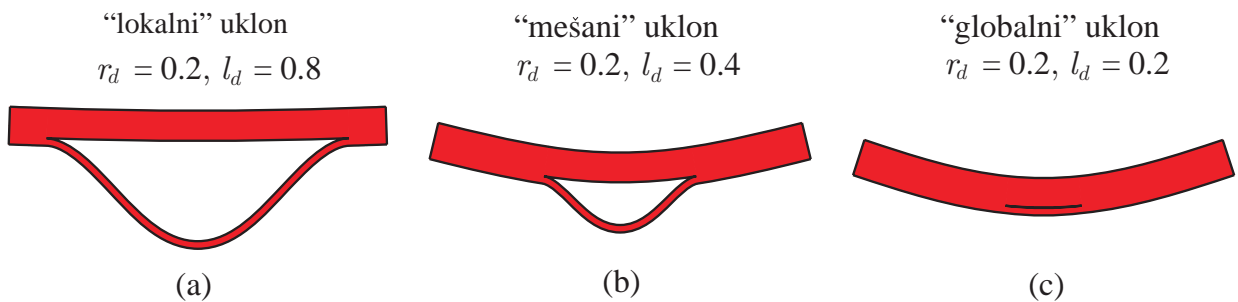
Obravnavali bomo prostoležeči in nevrtiljivo vpeti ravni nosilec z vitkostjo  $\lambda_y = 45$ . Privzeti elastični modul je  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Steber je vzdolžno simetrično delaminiran z eno samo delaminacijo različnih relativnih dolžin  $l_d$  in različnih prečnih leg  $r_2$ . Relativna vertikalna lega delaminacije tudi neposredno določa debelino posamezne lamele sredinskih elementov stebra.



Slika 5.6: Normirane uklonske sile za (a) prostoležeči in (b) nevtljivo vpeti nosilec z eno delaminacijo v odvisnosti od relativne dolžine delaminacije  $l_d$ .

Figure 5.6: Normalized buckling loads for simply supported beam (a) and clamped beam (b) with one delamination vs. relative delamination height  $l_d$ .

Rezultati na sliki 5.6 prikazujejo normirane uklonske sile za dva različna strižna modula (strižni modul za nestisljiv material ter strižni modul za kompozitni material). Z večanjem dolžine delaminacije  $l_d$  normirana uklonska sila  $F_{cr} / F_{eu}$  pada. Krajše delaminacije s prečno lego bližje osi nosilca ( $0.3 < r_2 < 0.5$ ) ne vplivajo bistveno na uklonsko silo. Nasprotno lahko trdimo za delaminacije, ki se nahajajo bližje robu ( $r_2 < 0.3$ ). V tem primeru je opazen znaten padec normirane uklonske sile že pri delaminacijah krajše relativne dolžine. Da bi prikazali vpliv striga na uklonsko obnašanje, so poleg rezultatov strižno nestisljivega materiala (označeni grafi) prikazani še rezultati, pri katerih je bil upoštevan strižni modul, tipičen za kompozitni material (črtkani grafi). Kvalitativno uklonsko obnašanje nosilca iz strižno nestisljivega materiala je podobno obnašanju nosilca iz kompozitnega materiala, vendar je opazno veliko kvantitativno razhajanje v rezultatih. Normirana uklonska sila je ob upoštevanju striga znatno manjša. Razlika med normiranimi uklonskimi silami je večja za kratke delaminacije ter delaminacije, ki se nahajajo bližje referenčni osi stebra.



Slika 5.7: Uklonske oblike prostoležečega stebra z eno delaminacijo,  $r_2 = 0.2$ .

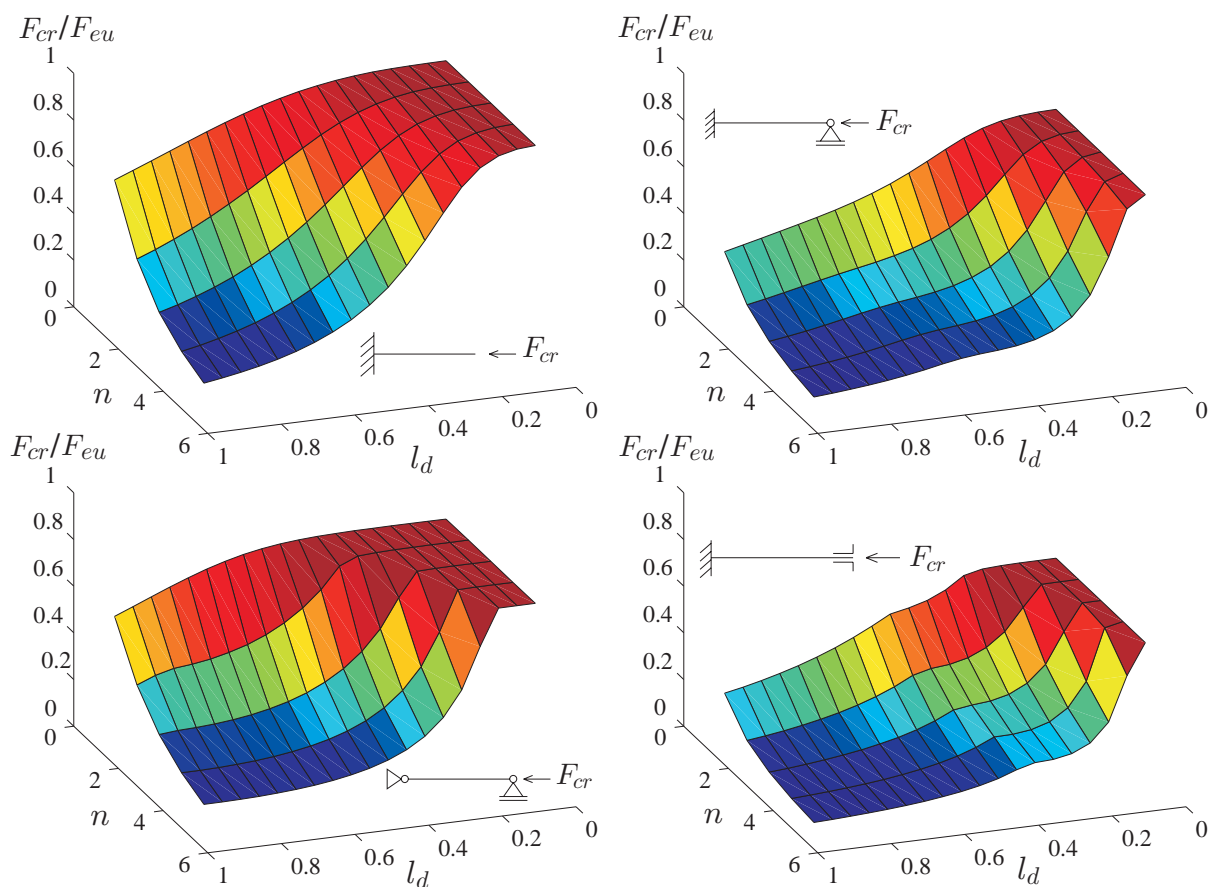
Figure 5.7: Buckling modes of a simply supported beam with one delamination,  $r_2 = 0.2$ .

Dolžina in relativna prečna lega delaminacije močno vplivata tudi na uklonsko obliko nosilca, kot prikazuje slika 5.7. Za dolge tanke lamele (a) je značilen lokalni uklon lamel, za kratke in čokate lamele je značilen globalni uklon (c) (v tem primeru je uklonska sila podobna uklonski sili nedelaminiranega nosilca), običajno pa na uklonsko obliko vplivata lokalni in globalni uklon, pojavi se t.i. mešani uklon (slika 5.7b). Poudarimo še, da dobimo povsem enake rezultate tako z analitično kot z numerično metodo.

### 5.4.3 Vpliv števila delaminacij

Kot referenčni model za določanje vpliva števila delaminacij na uklonsko silo smo izbrali raven, osno obremenjen nosilec z naslednjimi materialnimi in geometrijskimi karakteristikami:  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $G = E/6$ ,  $\lambda_y = 32$ . Obravnavali smo steber, ki ima različno število delaminacij ( $n = 1, \dots, 5$ ) z različnimi relativnimi dolžinami ( $l_d = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ). Vz dolžna lega delaminacij je simetrična, relativne prečne lege delaminacij pa so izbrane tako, da so vse lamele enakih debelin.

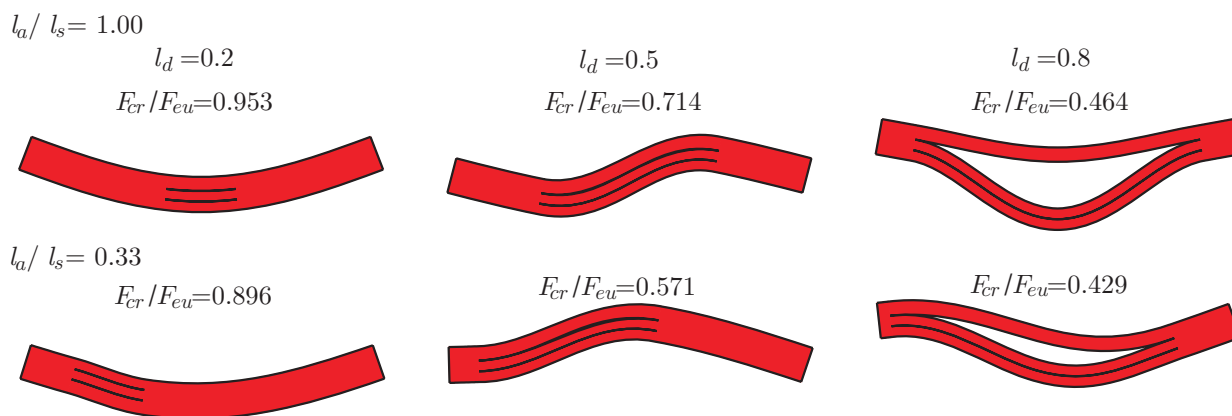
Na sliki 5.8 prikazujemo odvisnost normiranih uklonskih sil od dolžine delaminacij za različno število delaminacij. Iz slike 5.8 je razvidno, da normirana uklonska sila z naraščanjem števila delaminacij pada. Ta pojav je najizrazitejši pri delaminacijah večjih relativnih dolžin. Normirana uklonska sila prostoležečega stebra z eno delaminacijo dolžine  $l_d = 0.6$  je 60% večja od normirane uklonske sile enakega stebra z dvema delaminacijama.



Slika 5.8: Normirane uklonske sile v odvisnosti od dolžine delaminacije  $l_d$  in števila delaminacij  $n$ .  
Figure 5.8: Normalized buckling load vs. length of delamination  $l_d$  and number of delaminations  $n$ .

Pojav strmega padanja normirane uklonske sile z večanjem števila delaminacij je značilen za srednje dolge in dolge razpoke. V primeru nevrtiljivo vpetega stebra se pri delaminacijah srednjih relativnih dolžin hitrost padanja uklonske sile upočasnjuje. Ponovno lahko poudarimo, da dobimo rezultate enake tako pri numeričnem, kot pri analitičnem postopku.

Število delaminacij pomembno vpliva tudi na uklonske oblike nosilca. Nekaj značilnih primerov je prikazanih na sliki 5.9, kjer prikazujemo uklonske oblike prostoležečega nosilca z dvema delaminacijama. Razvidna je razlika med vzdolžno simetričnimi in asimetričnimi delaminacijama. Asimetričnost delaminacije opišemo kot razmerje med dolžino prvega (nedelaminiranega) dela nosilca za simetričen primer in asimetričen primer ( $l_a/l_s$ ). Še posebno so zanimive oblike nosilcev z delaminacijami srednjih dolžin. V določenem območju dolžin delaminacije (okoli  $l_d = 0.5$ ) je uklonska oblika podobna črki 'S'. Vzdolžna lega delaminacije ima znaten vpliv na velikost kritične sile in uklonsko obliko. Vzdolžna ekscentričnost vpliva na znižanje uklonske nosilnosti najbolj v primeru delaminacij srednjih dolžin. Vpliv ekscentričnosti na uklonsko obliko je posebej razviden pri nosilcu z daljšo delaminacijo ( $l_d = 0.8$ ). Nosilec s simetrično delaminacijo se ukloni v eni smeri, medtem ko se enak nosilec z asimetrično delaminacijo, ukloni v obliki črke 'S'. Pojav uklona v obliki črke 'S' je nasploh značilen za nosilce z več delaminacijami.



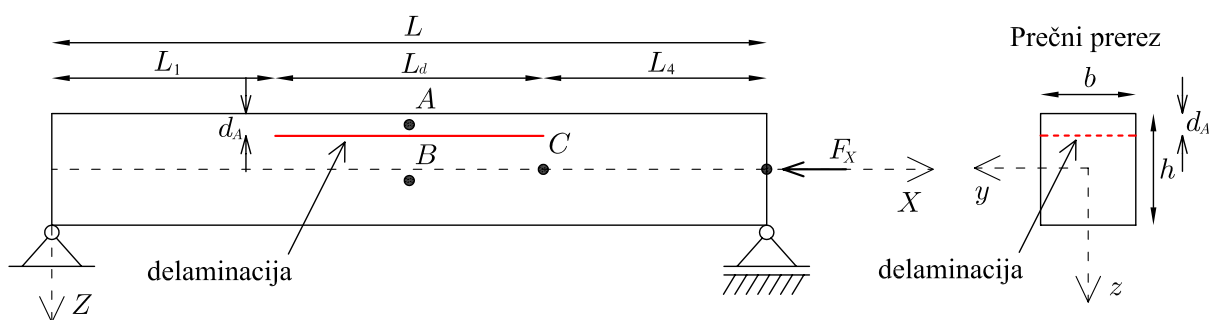
Slika 5.9: Uklonske oblike in normirane uklonske sile prostoležeče podprtih stebrov z dvema delaminacijama različnih relativnih dolžin.

Figure 5.9: Buckling shapes and normalized buckling loads of a simply supported beam with two delaminations of different relative lengths.

#### 5.4.4 Postkritično obnašanje prostoležečega delaminiranega stebra

Predstavljena analitična metoda je omejena na določitev kritične sile, postkritičnega obnašanja tako ne moremo zajeti. Po drugi strani pa naša numerična metoda nima teh omejitev. Z numerično metodo izračunamo postkritično obnašanje delaminiranih nosilcev, povzetih po Sheinmann in Soffer (1989).

Geometrija nosilca je predstavljena na sliki 5.10. Nosilci so delaminirani z eno delaminacijo in so prostoležeče podprti. Obtežbo predstavlja točkovna tlačna sila v smeri osi elementa. Geometrijski in materialni podatki so: dolžina nosilca  $L = 4.0$  m, širina prereza  $b = 0.04$  m, višina nosilca  $h = 0.08$  m, debelina zgornje lamele je  $d_A = 0.01$  m, elastični modul  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> in Poissonov količnik  $\nu = 0.3$ . V vseh obravnavanih primerih je bila relativna dolžina delaminacije  $l_d = L_d/L = 0.375$ . Po dolžini je bila delaminacija postavljena simetrično ( $L_1 = L_4$ ).



Slika 5.10: Model delaminiranega nosilca.  
Figure 5.10: Model of a delaminated beam.

Opazovali smo pomike referenčnih točk na nosilcu, označenih z  $A$ ,  $B$  in  $C$  (slika 5.10). Točka  $C$  predstavlja težišče prereza na stiku med lamelama in desnim koncem nosilca. Točki  $A$  in  $B$  ležita v težiščih prečnih prerezov obeh lamel na sredini razpona. Sheinmann in Soffer (1989) sta postkritično analizo opravila z upoštevanjem različnih začetnih nepopolnosti. Začetno nepopolnost sta modelirala z začetno ukrivljenostjo nosilca oblike

$$u_Z(x) = a_i h \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (5.75)$$

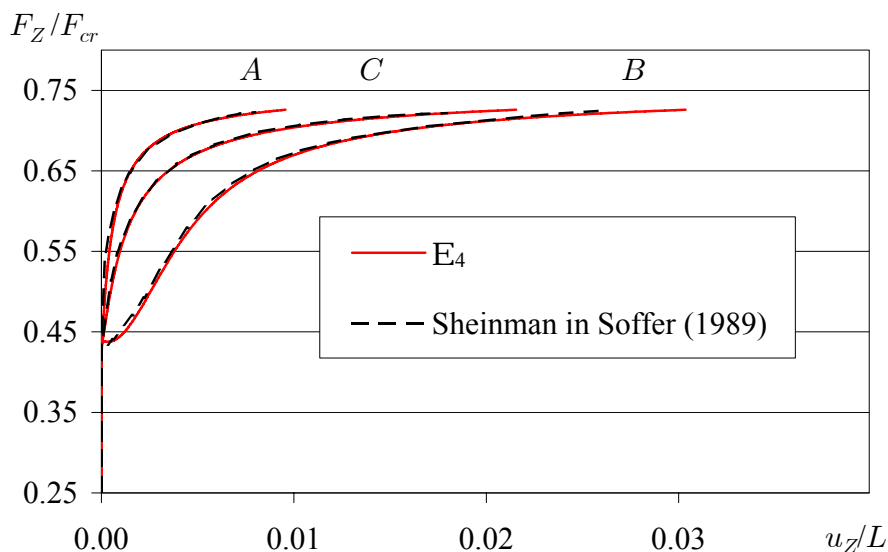
Za parameter  $a_i$  sta obravnavala tri možnosti

$$a_1 = 0.001, \quad (5.76)$$

$$a_2 = -0.00125, \quad (5.77)$$

$$a_3 = -0.0625. \quad (5.78)$$

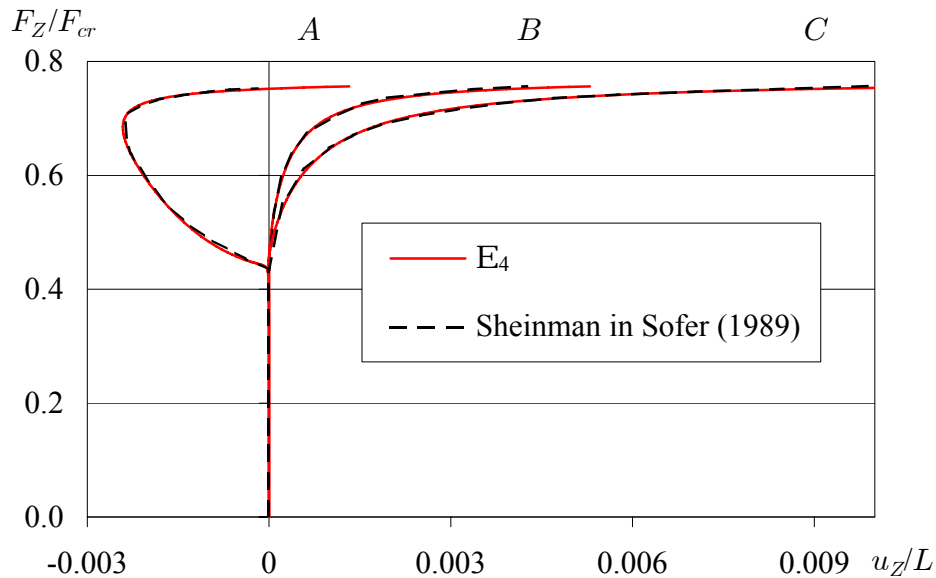
Začetne nepopolnosti povzamemo tudi v našem numeričnem modelu, kjer smo uporabili skupno 22 elementov tipa  $E_4$ . Na sliki 5.11 prikazujemo primerjavo rezultatov za  $a_1 = 0.001$ . Nosilec, ki je na



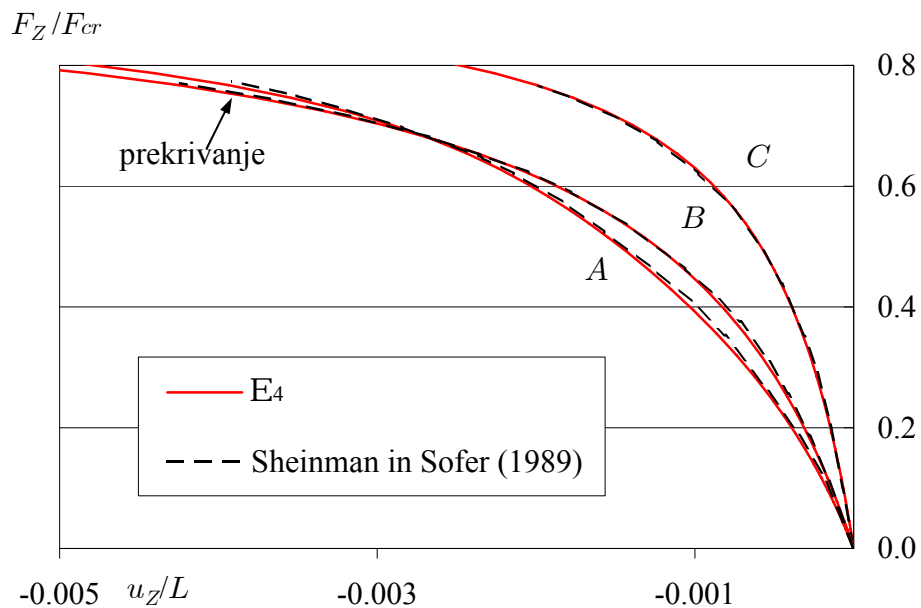
Slika 5.11: Obtežno deformacijska postkritična pot karakterističnih točk na delaminiranem nosilcu.  
Figure 5.11: Load deflection paths of characteristic points of delaminated beam.

začetku rahlo ukrivljen v pozitivni vertikalni smeri se po doseženi kritični sili izkloni v smeri nepopolnosti. Grafi, ki jih v svojem članku podajata Sheinman in Sofer (1989) in grafi, dobljeni z našo numerično formulacijo, se popolnoma ujemajo v stabilnem in postkritičnem območju.

Na slikah 5.12 in 5.13 predstavljamo rezultate vertikalnih pomikov karakterističnih točk v odvisnosti od relativnega obtežnega faktorja še za primer, ko je začetna nepopolnost v negativni smeri vertikalne osi  $a_2 = -0.00125$  in  $a_3 = -0.00625$ .



Slika 5.12: Obtežno deformacijska pot karakterističnih točk za drugi tip nepopolnosti.  
 Figure 5.12: Load deflection paths for the second type of initial imperfection.



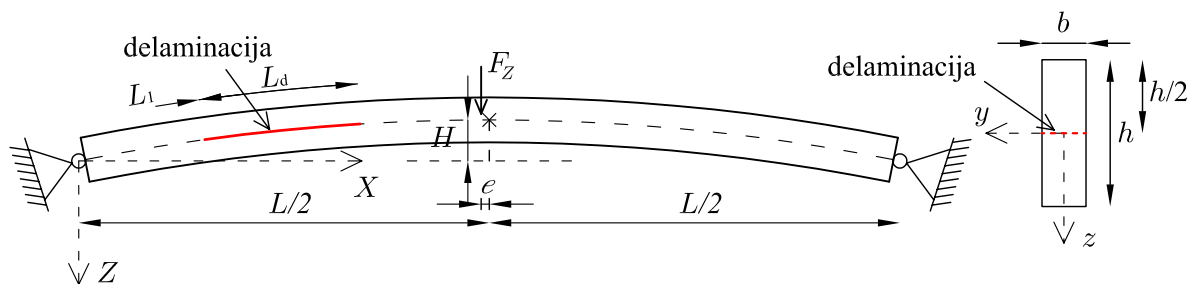
Slika 5.13: Obtežno deformacijska pot karakterističnih točk za tretji tip nepopolnosti.  
 Figure 5.13: Load deflection paths for the third type of initial imperfection.



Iz obeh slik lahko ponovno razberemo dobro ujemanje dobljenih pomikov, izračunanih z našimi elementi tipa  $E_8$ , in pomiki, ki jih podajata Sheinman in Soffer (1989). Zanimivo je obnašanje delaminiranega stebra v primeru manjše in večje začetne nepopolnosti v negativni navpični smeri. Dokler je velikost nepopolnosti relativno majhna ( $a_2 = -0.00125$ ), se nosilec po doseženi kritični sili ukloni v nasprotni smeri, kot smo dodali začetno nepopolnost. Vzrok je seveda v relativni legi delaminacije. V primeru večje začetne nepopolnosti ( $a_3 = -0.0625$ ) pa o pojavu uklona ne moremo govoriti. Pomiki v tem primeru monotonno naraščajo v začetni (negativni) smeri. Opozorimo, da so rezultati za pomike točk  $A$  in  $B$  nerealni, saj pride do prekrivanja lamel. Zaradi primerjave s Sheinman in Soffer (1989) smo tudi v našem modelu uporabili lameli brez medsebojnih vezi.

### 5.4.5 Delaminirani krožni lok

V tem primeru obravnavamo vpliv delaminacij na kritične uklonske sile krožnega vpetega loka in njegovo postkritično obnašanje. Preiskali bomo vpliv lege in velikosti delaminacije na loku. Seveda se pri numerični metodi ni potrebno omejiti na osne sile kot pri prejšnjih primerih. Tako sedaj obravnavamo krožni lok z ekscentrično vertikalno obtežbo.



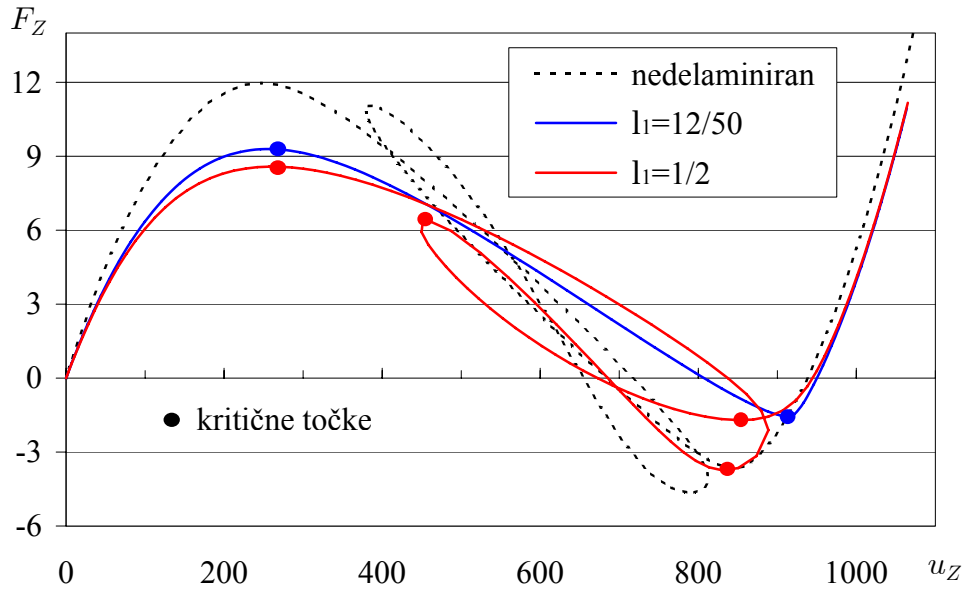
Slika 5.14: Krožni lok z začetno delaminacijo.

Figure 5.14: Arch with initial delamination.

Krožni lok s polmerom  $R = 25250$  in središčnim kotom  $\phi = 22.84$  je na obeh koncih podprt nepomično vrtljivo (slika 5.14). Ostale geometrijske in materialne podatke vzamemo enake kot v poglavju 3.4.1: višina loka  $H = 500$ , razpon loka  $L = 10^4$ , višina prečnega prereza  $h = \sqrt{1.2 \cdot 10^5}$ , širina prečnega prereza  $b = 10^4 / \sqrt{1.2 \cdot 10^5}$ , ploščina prečnega prereza  $A = 10^4$ , vztrajnostni moment  $J_y = 10^8$ , elastični modul  $E = 200$ . Sila  $F$  deluje v vertikalni smeri, njeno prijemališče pa je premaknjeno za  $e = 1/50$  središčnega kota. Delaminacija dolžine  $L_d$  poteka vzdolž osi loka na različni relativni oddaljenosti od levega krajišča  $L_1$  (glej sliko 5.14). Relativna dolžina  $l_d$  ima enak pomen kot v prejšnjih poglavjih ( $l_d = L_d/L$ ), relativna lega pa določa pozicijo delaminacije na nosilcu ( $l_1 = L_1/L$ ). Obravnavali bomo dve možnosti: delaminacijo dolžine  $l_d = 12/50$  krožnega loka in delaminacijo dolžine  $l_d = 24/50$  krožnega loka. V obeh primerih razdeli delaminacija prečne prereze po višini na dva enaka dela. Rezultate primerjamo z nedelaminiranim krožnim lokom. Krožni lok smo modelirali s 50 elementi nižjega reda  $E_3$ , ki dajejo rezultate povsem zadovoljivo natančnosti (glej poglavje 3.4.1).

Obravnavamo dve različni relativni legi delaminacije. Pri prvi ( $l_1 = 12/50$ ) je delaminacija levo od prijemališča sile, pri drugi ( $l_1 = 1/2$ ) pa je delaminacija desno od krone loka. Na sliki 5.15 predstavljamo obtežno-deformacijsko krivuljo za krajšo delaminacijo dolžine  $l_d = 12/50$  za dve različni legi delaminacije ( $l_1 = 12/50$  in  $l_1 = 1/2$ ). Iz grafa na sliki 5.15 opazimo, da znaša kritična uklonska sila v primeru delaminacije približno 75 % kritične uklonske sile za nedelaminiran krožni lok. Delaminacija na levi ( $l_1 = 12/50$ ) je manj neugodna, vendar pa povsem spremeni obnašanje konstrukcije v postkritičnem

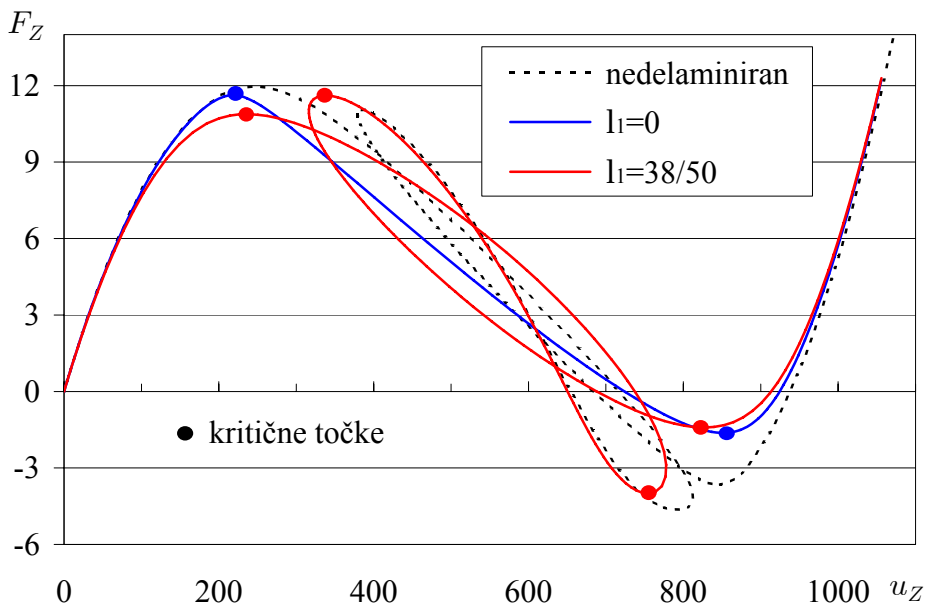
območju. V primeru delaminacije desno od točkovne obtežbe ( $l_1 = 1/2$ ) konstrukcija v postkritičnem območju obtežno deformacijske poti še vedno opiše podobno pot kot nedelaminirana. Pri tem zaznamo 4 prevojne kritične točke. V primeru delaminacije na levi pa na obtežno deformacijsko poti določimo le dve prevojni kritični točki.



Slika 5.15: Obtežno deformacijska krivulja loka, delaminacije ob kroni loka.

Figure 5.15: Load deflection path of the arch, delamination at the middle.

Grafi na sliki 5.16 predstavljajo vertikalne pomike krone loka za delaminacije enake relativne dolžine  $l_d = 12/50$ , le da sta tokrat delaminaciji postavljeni poleg podpor. Relativni razdalji od levega krajišča

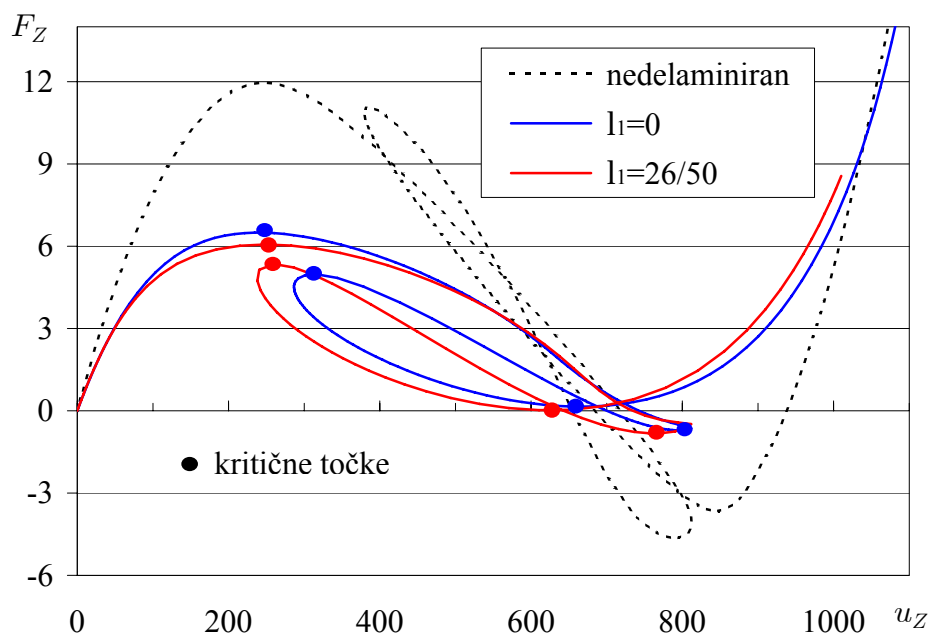


Slika 5.16: Obtežno deformacijska krivulja loka, delaminacije ob podporah.

Figure 5.16: Load deflection path of the arch, delamination near supports.

sta torej  $l_1 = 0$  in  $l_1 = 38/50$ . Če je delaminacija ob podporah, je razlika med kritičnimi silami delaminiranega in nedelaminiranega nosilca manjša. Torej lega delaminacije bistveno vpliva na velikost kritične sile. Tudi v tem primeru je opazna razlika med kritično silo za delaminacijo ob levi oz. desni podpori. Podobno kot v prejšnjem primeru ima obtežno-deformacijska krivulja za delaminacijo ob levi podpori dve prevojni točki, za delaminacijo ob desni podpori pa štiri prevojne točke.

Oglejmo si še rezultate za daljšo delaminacijo relativne dolžine  $l_d = 24/50$ , predstavljene na sliki 5.17. Iz grafa na sliki 5.17 opazimo, da je razlika med kritično obtežbo nedelaminiranega in delaminiranega nosilca za daljšo delaminacijo še večja (približno 50 %). Prav tako kot v prejšnjih primerih je ugodnejša lega delaminacije na levem delu konstrukcije, saj je kritična obtežba v tem primeru večja od obtežbe za delaminacijo na desnem delu loka. Zaradi večje dolžine delaminacije je vpliv lege delaminacije manj izrazit. Za delaminacije večje dolžine je število kritičnih točk na obtežno deformacijski krivulji za obe legi delaminacije enako - obe krivulji imata 4 prevojne točke.



Slika 5.17: Obtežno deformacijska krivulja loka, daljša delaminacija.

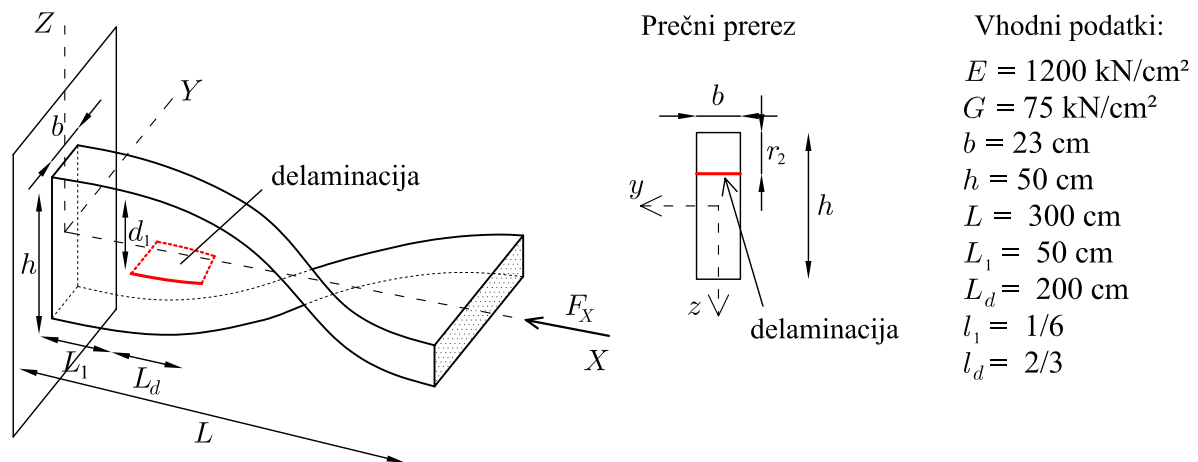
Figure 5.17: Load deflection path of the arch, longer delamination.

#### 5.4.6 Delaminirani zaviti nosilec

Postkritično obnašanje zavitega nosilca smo že obravnavali (poglavje 4.4.3). Ob nespremenjeni geometriji dodamo delaminacijo dela nosilca, kot je prikazano na sliki 5.18. Na sliki 5.18 so prikazane tudi geometrijske in materialne karakteristike zavitega nosilca.

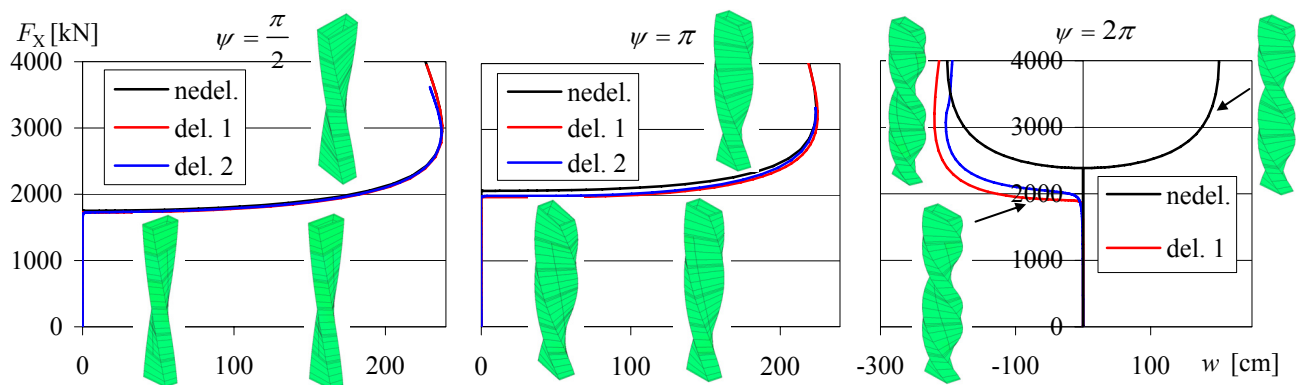
Obravnavali smo nosilce z začetno delaminacijo relativne dolžine  $l_d = 2/3$ , na dveh različnih vertikalnih višinah  $r_2 = 14$  cm in  $r_2 = 24$  cm. Na sliki 5.18 prikazujemo obtežno deformacijske poti prostega krajišča nosilca, za nosilce, zavite za kote  $\psi = \pi/2$ ,  $\psi = \pi$  in  $\psi = 2\pi$ .

Kot je razvidno iz diagramov, prečna delaminacija ne vpliva bistveno na uklonsko obnašanje nosilcev, zavutih za manjši kot ( $\psi = \pi/2$ ). V primeru nosilca, zavitega za kot  $\psi = 2\pi$  pa delaminacija bistveno zniža uklonsko nosilnost nosilca. Delaminacija, ki prečni prežez nosilca razdeli na dva neenaka dela,

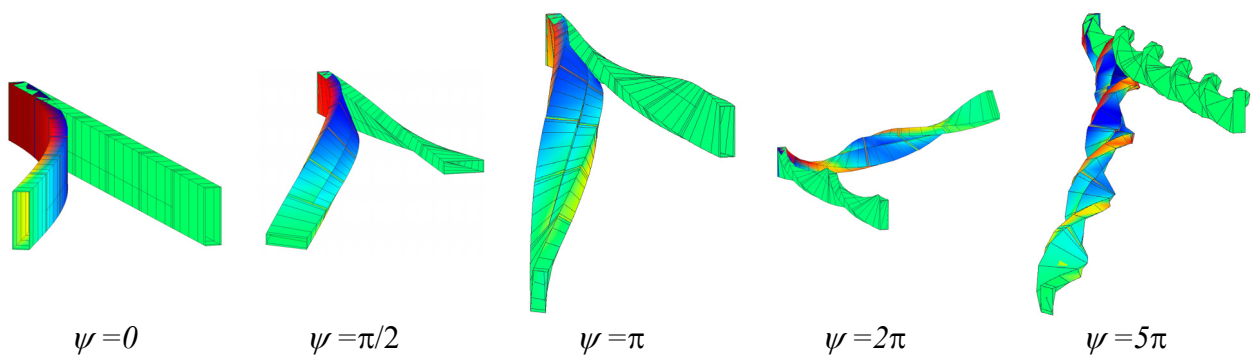


Slika 5.18: Model zavitega delaminiranega nosilca.  
 Figure 5.18: Model of a pretwisted delaminated column.

povzroči tudi asimetričnost konstrukcije. To je razvidno tudi v predznaku pomikov v smeri osi  $Z$ , ki so nasprotni kot v primeru manj zavitega nosilca.



Slika 5.19: Obtežno deformacijske krivulje zavitih nosilcev.  
 Figure 5.19: Load deflection paths for twisted columns.



Slika 5.20: Postkritične oblike deformiranih zavitih nosilcev.  
 Figure 5.20: Postcritical deformed shapes of twisted columns.

Začetno navitje prečnih prerezov nosilca okrog svoje osi ugodno vpliva na uklonsko togost nosilca. Kritične sile za zavite nosilce so večje od kritičnih sil ravnih nosilcev. Pri predhodno zavutih nosilcih je vpliv delaminacij večji, največji je pri večkrat zavutih nosilcih. Delaminacije v zavutih nosilcih povzročijo, da problem postane asimetričen, kar se odraža v eni sami obtežno deformacijski veji.

Na sliki 5.20 prikazujemo postkritične oblike zavutih nosilcev. Opazimo lahko, da začetna oblika bistveno vpliva na smer pomikov v postkritičnem območju.

## 6 DISKRETNE NELINEARNE VEZI

### 6.1 Uvod

Ne glede na materialni model lahko na nivoju prereza linijskega elementa dodatno modeliramo nelinearne pojave, s katerimi opišemo razpokanost elementa, obnašanje veznega sredstva na stiku med lamelama ali določene fizikalne omejitve, kot je preprečitev prekrivanja lamel. V tem delu se omejimo na diskreten opis lokalnih nelinearnih zakonov na nivoju prerezov. V numerično metodo dodamo nelinearne vezi, ki povezujejo pomike in/ali zasuke diskretnih vozlišč konstrukcije. Tak pristop je splošen, saj vezi dodamo na nivoju konstrukcije in ni potrebno posegati v enačbe končnega elementa. Tako modeliramo nelinearno obnašanje točkovnih podpor, nelinearno diskretno obnašanje določenih prerezov konstrukcije (plastični členki) in diskretne nelinearne vezi (žebliji, mozniki) med sloji. Ob dovolj gosti mreži pa je model učinkovit tudi za nelinearne linijske podpore in nelinearen zakon na stiku med lamelami.

Obnašanje na stiku med lamelami je v splošnem zelo zapleteno. Pri deformiranju lameliranega nosilca se lahko pojavi zdrs lamel in s tem povezane sile trenja, pri razmiku lamel se pojavijo t.i. kohezijske sile, prekrivanje lamel preprečujejo reakcijske sile. Pri kompozitih je potrebno upoštevati konstitucijski zakon veznega sredstva. Ker so vsi ti dejavniki slabo poznani, se odločimo za preprost a robusten model, kjer omenjene pojave modeliramo z diskretnimi vezmi. Osnovna predpostavka diskretne vezi je, da pomike dveh točk konstrukcije poleg ostalih enačb omejuje dodatna zveza. To zvezo zapišemo kot zakon, ki povezuje relativne pomike točk in ustrezne sile. Kadar je zveza linearna, sorazmernostni koeficient imenujemo koeficient vzmeti. V splošnem je zveza nelinearna, vendar za veliko praktičnih primerov zadošča že bilinearni model, ki loči raztezke od skrčkov, kot je opisan v nadaljevanju.

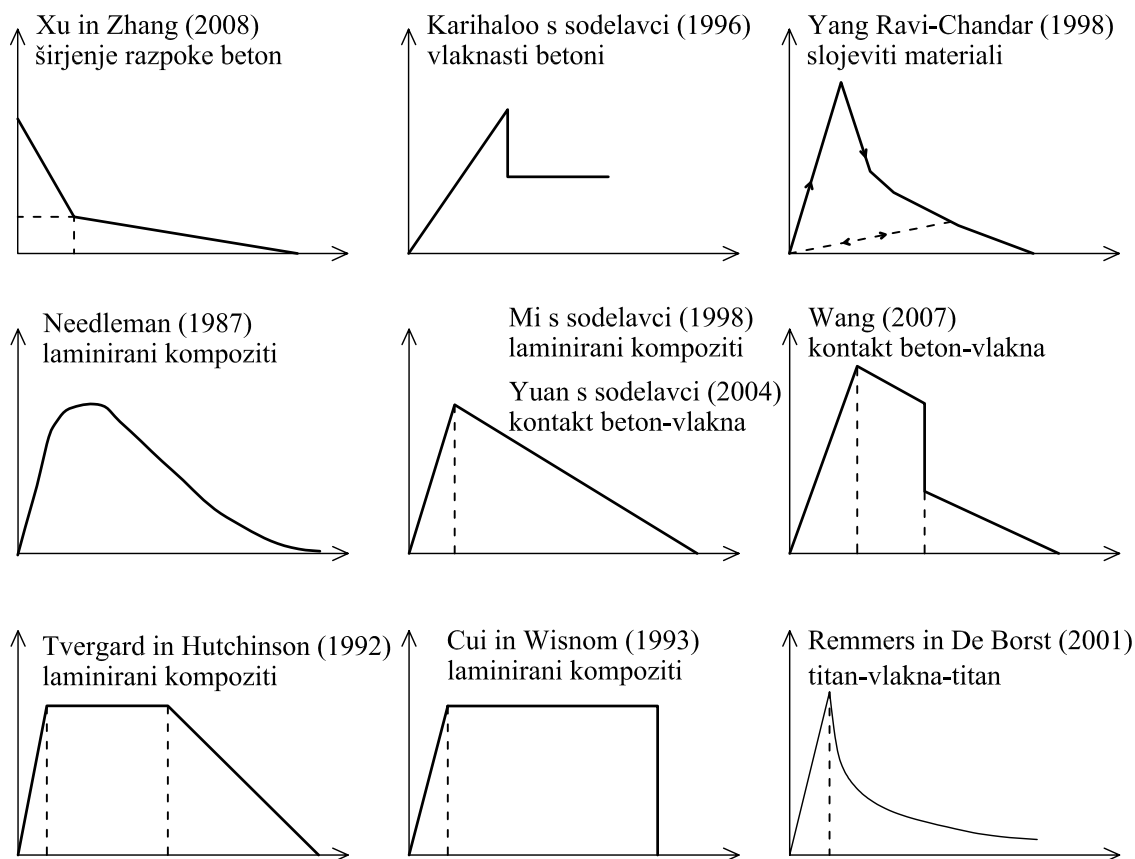
Model nelinearne vezi je neposredno uporaben tudi za opis podajnih točkovnih in linijskih podpor. V tem primeru je točka, ki predstavlja podporo, fiksna. Torej na silo vplivajo le pomiki točke, ki je na podporo pripeta prek vezi. Preostali pristop pa je povsem analogen.

### 6.2 Pregled stanja na področju modeliranja kontaktnih problemov

V gradbeni mehaniki uporabljamo različne konstitucijske zveze za različne kontaktne probleme. Nekaj takšnih zvez je prikazanih na sliki 6.1. Količine, ki na ordinatah in abscisah na sliki 6.1 niso prikazane, so različne, odvisne so od obravnavane problematike. Padmarajaiah in Ramaswamy (2002) z diskretnimi linearnimi vzmetmi modelirata povezavo med betonom in vlaknastimi jeklenimi delci za prednapete nosilce. Diagram konstitucijske zveze med vlakni in betonom povzameta iz eksperimentalno dobljenih krivulj, ki sta jih objavila Nammer in Naaman (1989). S podobnimi vzmetmi modelirata tudi zdrs med prednapeto armaturo in nosilci, le da v tem primeru povzameta eksperimentalno dobljeno krivuljo iz

Edwards in Yannopoulos (1979). Tong in Sun (2007) proučujeta vpliv kontakta med betonom in armaturo vzdolžnih razpokanih nosilcev, pri tem za vpliv strižne armature uporabita elastičen in linearno elasto-plastičen diagram za stik. Povezavo med trakovi iz karbonskih vlaken in betonom modeliramo z vzmetmi, ki jim pripišemo nelinearne ali odsekoma linearne konstitucijske diagrame. Avtorji predlagajo različne modele, ki so dobljeni s pomočjo eksperimentalnih raziskav (glej Yuan s sodelavci (2004), Pan in Leung (2007), Ferracuti s sodelavci (2006), Wang (2007) in reference v delih). Ojačitve iz različnih polimernih trakov lahko uporabimo tudi za utrjevanje lesenih nosilcev. Johnson s sodelavci (2006) analizira lepljene lesene nosilce, ojačene s karbonskimi vlakni. Borri s sodelavci (2005) naredi eksperimentalno in numerično raziskavo navadnih lesenih nosilcev, ojačanih s karbonskimi trakovi. Z vzmetmi se modelirajo tudi žebljani stiki lesenih kompozitnih nosilcev (Planinc s sodelavci (2008)) ali možniki iz titana v plošči iz karbonskih vlaken (Cartie s sodelavci (2004)). Z vzmetmi avtorji modelirajo tudi kontakt pri povezavi med vlakni v materialih, ki se obnašajo kot mreže. To so največkrat tkanine iz materialov visoke trdnosti, ki so primerne za ojačitve poškodovanih konstrukcij. Dadkhah s sodelavci (1995) predstavi numerično analizo tkanin iz kompozitnih materialov pri monotoni obtežbi. He in Cox (1998) predstavita podoben numerični model za izračun ukrivljenih šivanih kompozitnih nosilcev. Analizo tkaninastih vzorcev spojeno z različnimi šivi iz kevlarja predstavita tudi Mouritz in Cox (2000). Šive v območju delaminacij modelirata z nelinearnimi vzmetmi. Brandinelli in Massabo (2003) preiskujeta dinamični odziv delaminiranih nosilcev iz materialov z visokim razmerjem med trdnostjo in težo. Kontakt na delaminaciji modelirata z linearnimi, enakomerno porazdeljenimi vzmetmi. Modeliranje stika z vzmetmi je priročno tudi pri analizah slojevitih struktur iz različnih materialov. Take strukture se uporabljajo v letalski industriji, odlikuje jih visoka trdnost zunanjih slojev in povezava v notranjosti manjše trdnosti, kar rezultira v drugih ugodnih lastnostih materiala, kot je dušenje zvoka in vibracij. Konstrukcije iz slojev aluminija, ki je med seboj povezan polietilenom preučuje npr. Xu s sodelavci (2003a, 2003b). Siegmund (2004) in Tilbrook (2007) obravnavata slojevite nosilce iz plasti aluminija, ki jih povezuje epoksidna smola.

Pri kratkem pregledu literature opazimo, da je problematika kontakta dveh teles široko obravnavana. Upoštevanje kontakta je odvisno predvsem od materialov, iz katerih je konstrukcija. Ker so pogoji za vsak primer specifični, se jih navadno določa eksperimentalno za vsako kombinacijo materialov posebej. Numerično jih modeliramo s krivuljami, ki predstavljajo medsebojni vpliv teles. Nekaj diagramov za opis pogojev na stiku prikazujemo na sliki 6.1. V teoriji delaminacij se za te vezi pogosto uporablja angleški izraz 'bridging', saj eksperimenti kažejo, da lameli ob delaminaciji nista povsem neodvisni, temveč tudi pri razmiku medsebojno vplivata. Potem ko zapišemo matematični model pogojev na stiku, se je potrebno odločiti, kako bomo te pogoje upoštevali v numeričnih formulacijah. Ločimo dva glavna načina upoštevanja pogojev na stiku. Prvi način je t.i. zvezen ali 'razmazan' tip vzmeti (glej npr: De Borst (1987), Rots in De Borst (1987), Bazant in Lin (1988), Rots (1991), Yamaguchi in Chen (1990), Malvar (1993), Bolander in Hikosaka (1992), Foster s sodelavci (1996), Abdollahi (1996a), (1996b), Ali (1996), May in Duan (1997), Ožbolt in Reinhardt (2002)). Drugi tip je diskreten tip vzmeti (glej npr: Ingraffea in Gerstle (1984), Carpinteri (1989), Bocca s sodelavci (1990), (1991), Rots (1991), Gerstle in Xie (1992), Xie in Gerstle (1995), Cendon s sodelavci (2000), Galvez s sodelavci (2002), Yang in Proverbs (2004)). Oba načina upoštevanja zveze med količinami na stiku imata svoje prednosti in slabosti. Nekateri avtorji v svojih delih naredijo primerjavo med uporabo enega in drugega načina upoštevanja kontakta. Carpinteri in Massabo (1997) ugotovita, da oba teoretična modela konvergirata k istim globalnim rezultatom. Kljub temu pa lahko naštejemo nekaj prednosti diskretnega opisa pogojev na stiku. Diskretni model vzmeti je tudi preprostejše upoštevanje spreminjajočih se lastnosti veznih sredstev vzdolž osi linijskih konstrukcij.



Slika 6.1: Uporabljeni modeli za modeliranje kontakta iz literature.

Figure 6.1: Different bridging models from literature.

### 6.3 Računski model točkovne vzmeti

Konstrukcija se lahko med delovanjem obtežbe močno deformira, zato moramo model prirediti velikim pomikom in zasukom na nivoju konstrukcije. Tako je naravno opisati točkovno vzmet v lokalnih koordinatah. Vsaka vez povezuje le dve točki, zanju uporabimo indeksa  $I$  in  $II$ , pripadajoča pomika v lokalnih koordinatah pa sta  $\mathbf{u}_G^I$  in  $\mathbf{u}_G^{II}$ . Silo v vezi opišemo kot funkcijo razlike relativnih pomikov povezanih točk:

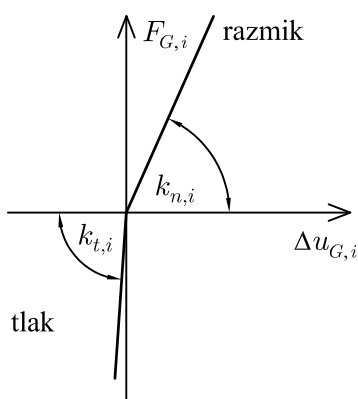
$$\mathbf{F}_G = \mathcal{V} (\mathbf{u}_G^I - \mathbf{u}_G^{II}) = \mathcal{V} (\Delta \mathbf{u}_G), \quad (6.1)$$

pri čemer smo z  $\Delta \mathbf{u}_G$  označili spremembo relativnih pomikov. V primeru linearne vezi dobi operator  $\mathcal{V}$  preprosto linearno obliko

$$\mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_G. \quad (6.2)$$

Bilinearna vez je razširitev (6.2), kjer so koeficienti  $k_i$  odvisni od predznaka pripadajoče komponente  $\Delta u_G$ . Shema bilinearne vzmeti je prikazana na sliki 6.2. V splošnem torej bilinearno vzmet določa šest konstant. Opozorimo, da že tako preprost model omogoča preprečitev prekrivanja lamel, kar dosežemo z velikimi togostmi za negativne vrednosti komponent  $\Delta u_G$  (tlačni deli diagramov), v model pa bomo vključili splošnejšo, odsekoma linearno vzmet.

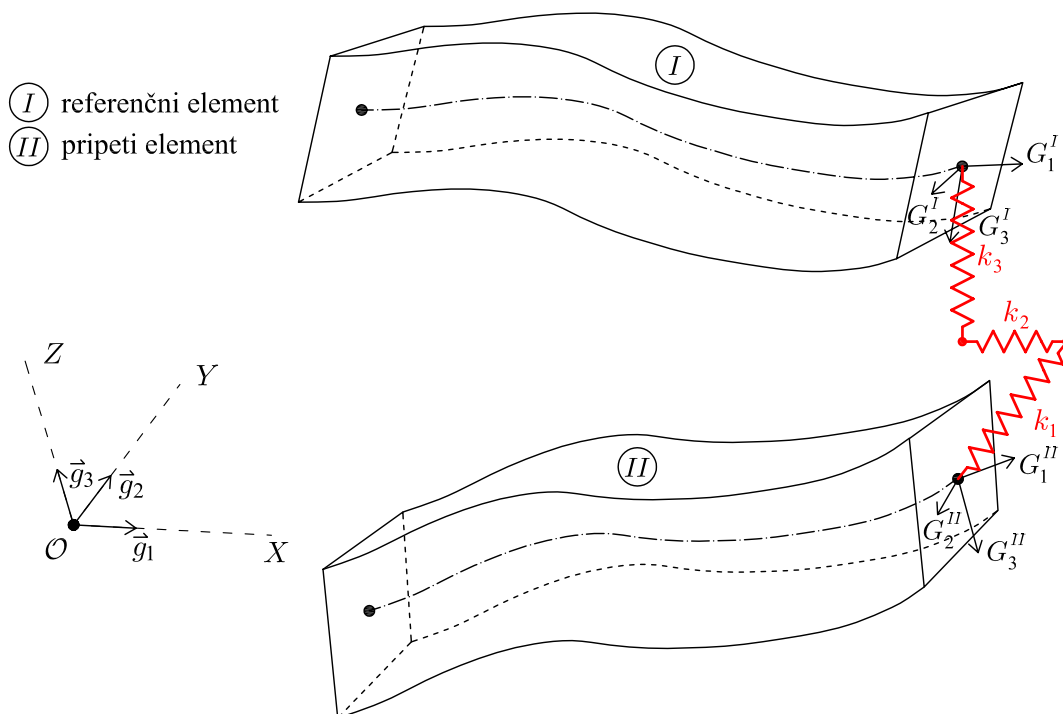




Slika 6.2: Odvisnost med relativnim pomikom in silo v vzmeti.

Figure 6.2: Bilinear spring model.

Če želimo enačbe vzmeti dodati enačbam konstrukcije, jih moramo zapisati v ustrezni obliki. Enačbe, ki jih rešujemo na nivoju konstrukcije predstavljajo ravnotežne enačbe vozlišč konstrukcije v fiksni bazi, pripadajoče neznanke pa so vozliščni pomiki in zasuki, prav tako zapisani v fiksni bazi. V splošnem je lahko lokalni koordinatni sistem prerezov, ki jima pripadata povezani točki različni. Zato se odločimo za jasno razdelitev obeh točk. Prva z oznako *I* naj bo referenčna, nanjo je vez togo pripeta. Torej se vzmet vrti skupaj z vrtenjem lokalnega koordinatnega sistema v točki *I*. Druga točka je zgolj pripeta na vzmet, lokalne koordinate v točki pa so neodvisne od lege vzmeti. Ilustracija računskega modela je prikazana na sliki 6.3. V smislu zgornje diskusije preoblikujemo enačbo (6.2). Razliko pomikov “merimo” v fiksni



Slika 6.3: Nosilca z vozliščema, povezanimi s prostorsko vzmetjo.

Figure 6.3: Separated beams, connected with spring.

bazi:

$$\Delta \mathbf{u}_g = \mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}, \quad (6.3)$$

vendar za uporabo koeficientov v naravni (lokalni bazi) to razliko transformiramo v skladu z lokalnim koordinatnim sistemom, pripetim na referenčno točko  $I$ . Po koordinatni transformaciji (2.1) dobimo:

$$\Delta \mathbf{u}_G = \mathbf{R}_I^T \Delta \mathbf{u}_g = \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}). \quad (6.4)$$

Če komponente  $\Delta \mathbf{u}_G$  pomnožimo z ustreznimi togostmi, dobimo sile v vezi, vendar izražene v lokalni bazi

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{k}_V \Delta \mathbf{u}_G, \quad (6.5)$$

pretvorba v fiksno bazo pa je določena z rotacijsko matriko v točki  $I$ :

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}_I \mathbf{F}_G = \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \Delta \mathbf{u}_G \quad (6.6)$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}). \quad (6.7)$$

Enačba (6.7) je sedaj v primerni obliki, usklajeni z ostalimi enačbami na nivoju konstrukcije. Na nivoju enačb tako (6.7) preprosto prištejemo na ustrezna mesta. Zaradi reševanja enačb z Newtonovo metodo pa moramo enačbo (6.7) še linearizirati in ustrezne člene dodati tangentni matriki konstrukcije.

Linearizacija mora ustrezno upoštevati nelinearnost prostorskih rotacij. Neposredna linearizacija enačbe (6.7) je oblike

$$\delta \mathbf{F}_g = \delta \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}) + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \delta \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}) + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}). \quad (6.8)$$

Če upoštevamo enačbo (2.62), lahko variacijo izrazimo z osnovnimi neznankami problema

$$\delta \mathbf{F}_g = \delta \Theta_I \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T \delta \Theta_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}) \quad (6.9)$$

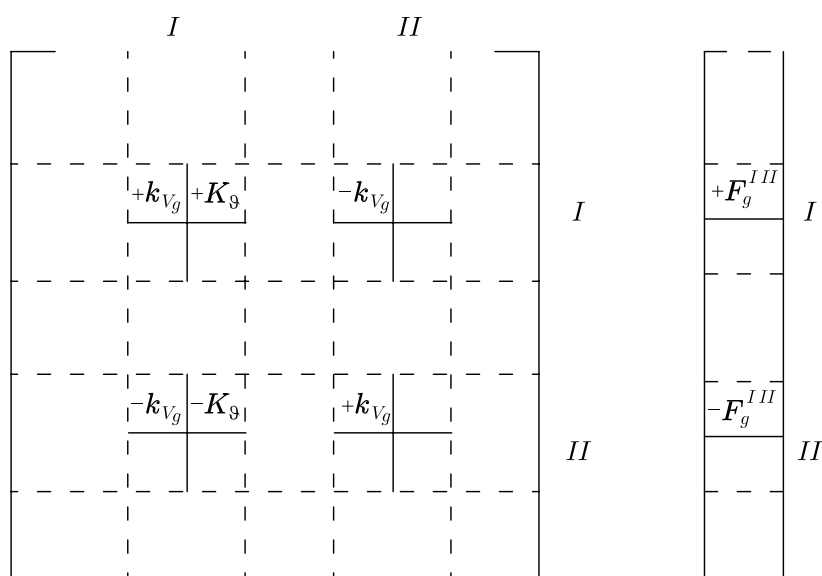
$$= \delta \Theta_I \mathbf{k}_{Vg} \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{k}_{Vg} \delta \Theta_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{k}_{Vg} (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}), \quad (6.10)$$

kjer smo s  $\mathbf{k}_{Vg}$  označili matriko togosti vzmeti v fiksni bazi. Z vpeljavo antisimetrične matrike v skladu z enačbo (2.64) lahko variacijo izrazimo z osnovnimi neznankami problema

$$\delta \mathbf{F}_g = -\mathbf{S} (\mathbf{k}_{Vg} \Delta \mathbf{u}_g) \delta \vartheta_g^I + \mathbf{k}_{Vg} \mathbf{S} (\Delta \mathbf{u}_g) \delta \vartheta_g^I + \mathbf{k}_{Vg} \delta \mathbf{u}_g^I - \mathbf{k}_{Vg} \delta \mathbf{u}_g^{II}. \quad (6.11)$$

Na kratko pojasnimo prispevek vezi k shemi tangentne matrike in desnih strani konstrukcije. Vez povezuje točki  $I$  in  $II$ . Če torej vozlišče  $II$  vpliva na vozlišče  $I$  s silo  $\mathbf{F}_g$ , vpliva prvo vozlišče na drugo z nasprotno enako silo  $-\mathbf{F}_g$ . Na mestih v vektorju  $\mathbf{f}_C$ , ki pripadajo indeksom pomikov vozlišča  $I$  torej prištejemo  $\mathbf{F}_g^{I II}$ . Na mestih, ki pripadajo indeksom pomikov vozlišča  $II$ , pa  $\mathbf{F}_g^{I II}$  odštejemo.

Podobno postopamo pri gradnji tangentne matrike, kjer v vrstice, ki pripadajo pomikom vozlišča  $I$ , v ustrezne stolpce dodamo bloke  $\mathbf{k}_{Vg}$ ,  $-\mathbf{k}_{Vg}$  in  $\mathbf{K}_g = -\mathbf{S} (\mathbf{k}_{Vg} \Delta \mathbf{u}_g) + \mathbf{k}_{Vg} \mathbf{S} (\Delta \mathbf{u}_g)$ . V vrstice, ki pripadajo vozlišču  $II$ , pa te bloke dodamo z nasprotnim predznakom. Shema je prikazana na sliki 6.4.



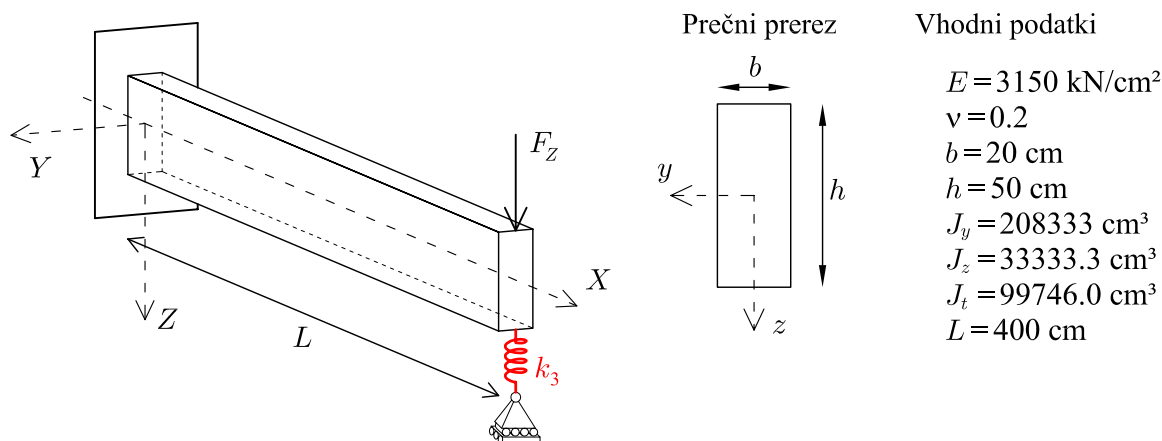
Slika 6.4: Shema upoštevanja vezi v togostni matriki konstrukcije in desnih straneh.

Figure 6.4: Additional elements in tangent-stiffness matrix due to bridging.

## 6.4 Računski primeri

### 6.4.1 Nosilec z elastično točkovno podporo

Previsni nosilec na prostem robu podpremo z vzmetjo v vertikalni smeri in obremenimo s točkovno vertikalno obtežbo. Materialni in geometrijski parametri so prikazani na sliki 6.5.



Slika 6.5: Konzolni nosilec s podajno podporo in obtežbo v prostem krajišču.

Figure 6.5: Cantilever beam with elastic support and loading at free end.

Nosilec smo modelirali s štirimi kvadratnimi elementi  $E_3$ , s katerimi smo dosegali ravnotežna stanja v dveh ali treh Newtonovih iteracijah. Opazovali smo pomike obremenjenega vozlišča v vertikalni smeri. Uporaba točnejših elementov tipa  $E_8$  pokaže odstopanja med rezultati šele na desetem decimalnem mestu. Za želeno natančnost deset decimalnih mest pa bi zadoščal le en element tipa  $E_3$ . Nosilec obremenimo z vertikalno silo  $F_Z = 5, 10$  in  $15 \text{ kN}$  in ugotavljamo vertikalne pomike za različne togosti

vzmeti. V preglednici 6.1 prikazujemo naše rezultate in rezultate, dobljene s komercialnim programom.

Preglednica 6.1: Vertikalni pomiki prostega krajišča konzole, podprte z vzmetjo različnih togosti.

Table 6.1: Vertical deflections of the free end of the cantilever with elastic support.

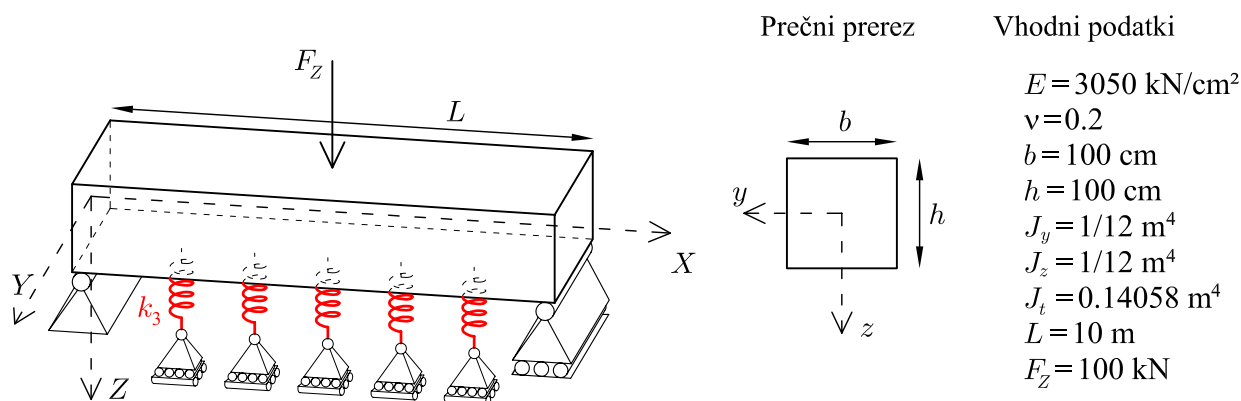
	$F_Z$	$k_3$						
		0	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$E_3$	5 kN	0.164	0.164	0.159	0.124	0.038	0.005	0.000
	15 kN	0.494	0.492	0.478	0.371	0.115	0.015	0.001
	30 kN	0.987	0.984	0.956	0.743	0.230	0.029	0.003
SAP	5 kN	0.164	0.164	0.159	0.124	0.038	0.005	0.000
	15 kN	0.493	0.491	0.477	0.371	0.115	0.015	0.001
	30 kN	0.986	0.983	0.955	0.742	0.230	0.029	0.003

Rezultati kažejo na izrazit vpliv togosti vzmeti na velikosti pomikov. Po pričakovanju se za  $k_3 = 0$  krajišče obnaša kot prosto, rezultati pa se povsem ujemajo z rezultati za konzolo. Z večanjem togosti vzmeti se pomiki manjšajo in so za velike togosti zanemarljivo majhni. Primerjava s programom SAP kaže na dobro ujemanje rezultatov.

## 6.4.2 Prostoležeči nosilec podprt z vzmetmi

Obravnavamo nosilec na elastični podlagi. Elastično podlago modeliramo z več diskretnimi vzmetmi ustrezne togosti, ki so razporejene po dolžini nosilca.

Nosilec kvadratnega prereza na sredini razpona obremenimo s točkovno silo  $F_Z$ , v vertikalni smeri. Materialni in geometrijski parametri so skupaj z modelom nosilca prikazani na sliki 6.6. Diskretne vzmeti delujejo zgolj v smeri lokalne osi  $z$ . Koeficienti vzmeti v ostalih smereh so enaki nič:  $k_1 = k_2 = 0$ .

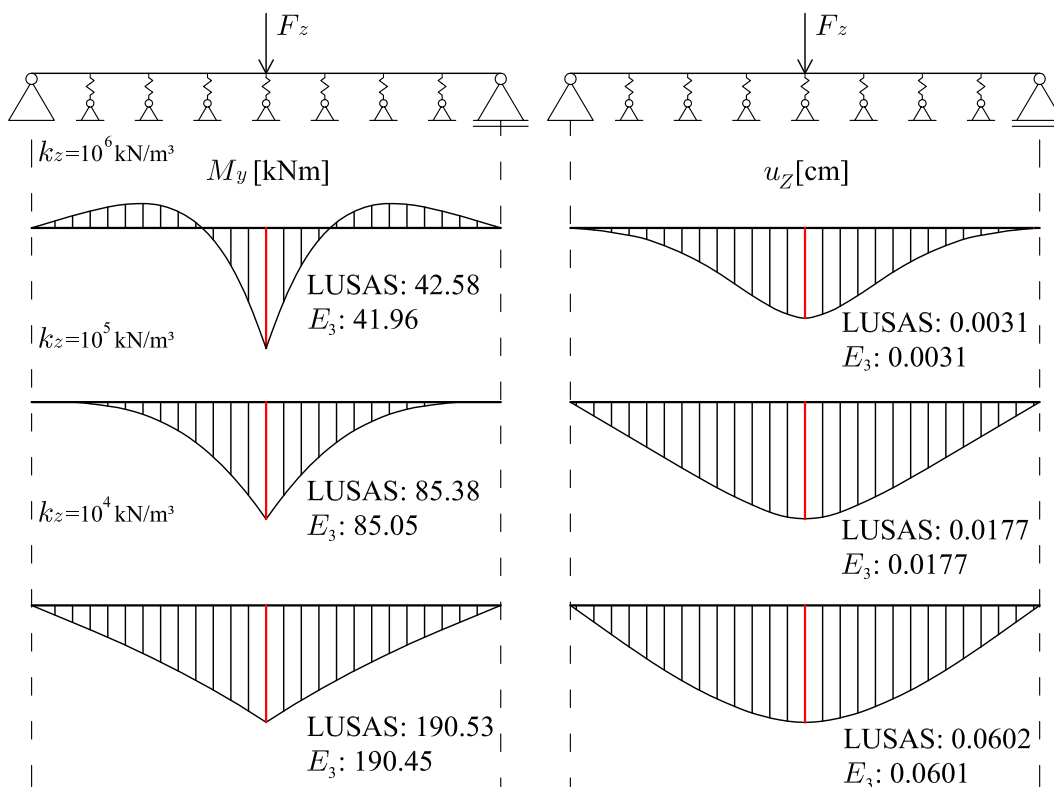


Slika 6.6: Skica prostoležečega nosilca podprtega z vzmetmi.

Figure 6.6: Simply supported beam model on elastic support.

Obravnavali bomo vzmeti treh različnih togosti  $k_3 = 10^4, 10^5, 10^6 \text{ kN/m}^3$ . Togosti vzmeti predstavljajo realne podatke za zemljine;  $k_3 = 10^4$  predstavlja mehko zemljino,  $k_3 = 10^6$  pa trdo podlago - skalo. Pri diskretizaciji linijske podpore moramo biti pozorni na število vzmeti in njihovo togost. Koeficient posamezne diskretne vzmeti dobimo tako, da togost zemljine delimo s pripadajočo površino vsake

vzeti. Ta je produkt širine linijskega elementa in razdalje med vzmetmi. Če z  $l_{vzm}$  označimo razdaljo med vzmetmi, lahko koeficient posamezne vzmeti izračunamo kot:  $k_{vzmeti} = \frac{k_3}{bl_{vzm}}$ . Nosilec modeliramo z 20 kvadratičnimi elementi. Naše rezultate primerjamo z rezultati, ki jih izračunamo s komercialnim programom LUSAS. V programu LUSAS nosilec modeliramo s 50 trotočkovnimi elementi, ki upoštevajo strig. Podlago modeliramo z zveznim modelom. Na sliki 6.7 prikazujemo momente  $M_y$  in pomike  $u_z$ , za tri različne togosti vzmeti  $k_3$ .



Slika 6.7: Diagrami notranjih momentov in pomikov nosilca na elastični podlagi.

Figure 6.7: Diagrams for moments and deflections of a simply supported beam.

V primeru togih vzmeti ( $k_3 = 10^6$  kN/m<sup>3</sup>), se nosilec deformira pretežno v sredini razpona, obremenjen je s pozitivnim momentom na sredini in negativnim momentom bliže podporam. Enak nosilec s podajnejšimi podporami ( $k_3 = 10^4$  kN/m<sup>3</sup>) pa se obnaša bolj podobno prostoležečemu nosilcu brez vmesnih podpor. Opazimo, da se naši rezultati za diskretne vzmeti in rezultati, izračunani s programom LUSAS-a ujemajo vsaj na tri decimalna mesta

V preglednici 6.2 prikazujemo vpliv števila elementov  $n_{el}$  in stopnje elementa ( $E_3$ ,  $E_5$  in  $E_8$ ) na pomike in momente sredine nosilca. Razberemo lahko veliko natančnost rezultatov tudi ob uporabi redkejših mrež z elementi nizkega reda. Zaradi velikega števila elementov stopnja elementa bistveno ne vpliva na rezultate. Rezultati za več elementov ali elemente višje stopnje se zelo hitro približujejo k rešitvam, ki jih dobimo s programom LUSAS.

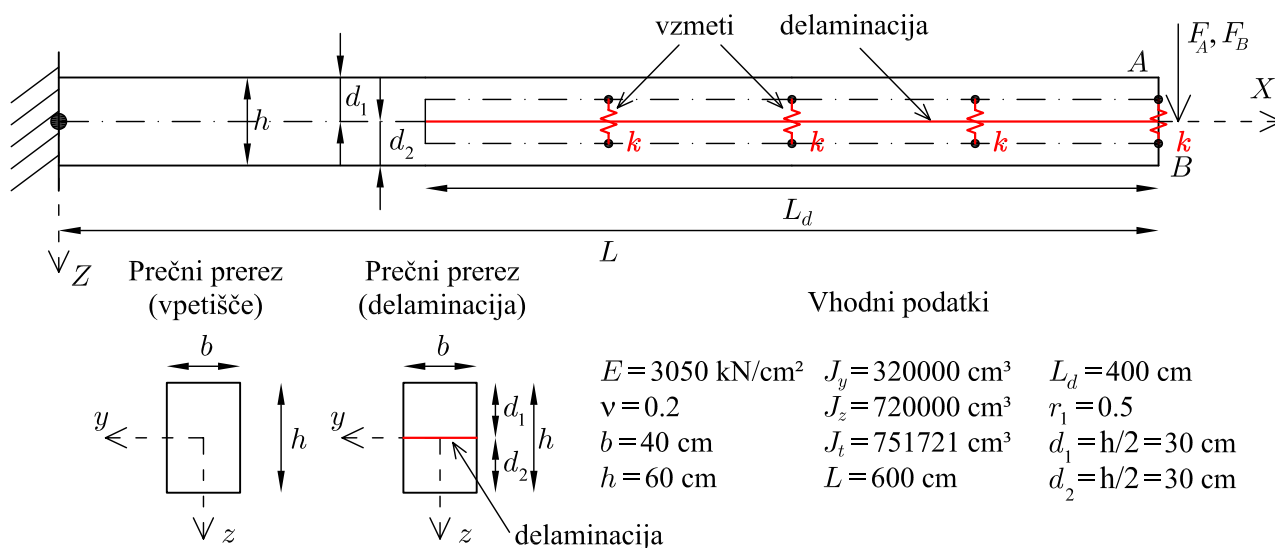
Preglednica 6.2: Pomiki in momenti v referenčni točki za različno stopnjo elementa in različne mreže.

Table 6.2: Deflections and moments of middle point of the beam for various type and number of elements.

		$n_{el}$		
		10	20	40
$u_z$	$E_3$	0.01764736942939	0.01766189975920	0.01770633501737
	$E_5$	0.01764736942938	0.01766189975949	0.01770633501763
	$E_8$	0.01764736942933	0.01766189975910	0.01770633501727
$M_y$	$E_3$	83.9055475145	85.0529676749	85.2544903889
	$E_5$	83.9055475145	85.0529676755	85.2544903895
	$E_8$	83.9055475144	85.0529676747	85.2544903887

### 6.4.3 Delaminirani konzolni nosilec

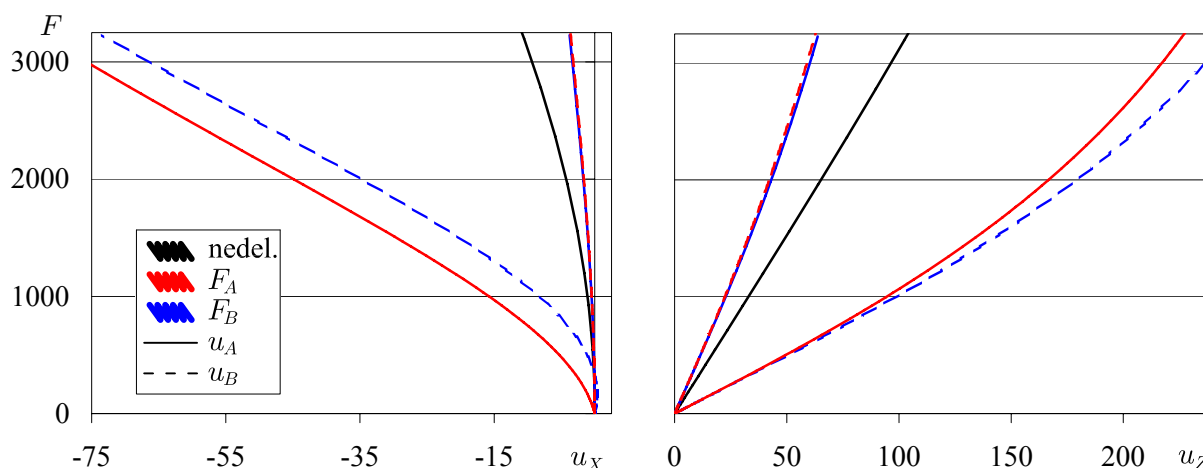
Zakon na stiku med lamelama je lahko bistven za obnašanje delaminirane konstrukcije. V tem primeru obravnavamo previsni nosilec z eno delaminacijo na prostem koncu, ki razdeli previsni del na dve lameli enake višine. Lameli sta povezani z vzmetmi različnih karakteristik. Obtežbo predstavlja točkovna sila  $F_Z$  v pozitivni smeri globalne osi  $Z$ , na prostem koncu nosilca. Obravnavamo dva obtežna primera glede na prijemališče sile:  $F_A$  sila deluje v težišču prereza zgornje lamele in  $F_B$  sila deluje v težišču spodnje lamele. Materialne in geometrijske parametre prikazuje slika 6.8.



Slika 6.8: Skica delaminirane konzole in vhodni podatki.

Figure 6.8: Delaminated beam with numerical data.

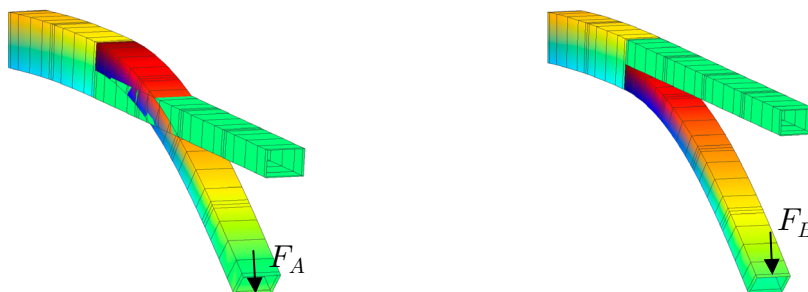
Konstrukcijo modeliramo z 10 elementi, od tega dva sestavljata nedelaminiran del nosilca, po 4 elemente pa smo uporabili za modeliranje posamezne lamele. Lameli povezujemo s 4 nelinearnimi vzmetmi. Uporabili smo natančne elemente tipa  $E_5$ . Spremljamo pomike referenčnih točk A in B (slika 6.8) na prostem koncu konzole. Obnašanje delaminirane konzole pa primerjamo tudi z rezultati za nedelaminirano konzolo. Najprej si oglejmo delaminirano konzolo brez vzmeti ( $k_i = 0$ ). Na sliki 6.9 prikazujemo obtežno-deformacijsko pot vozlišč na prostem koncu konzole (točki A in B) za oba obtežna primera ( $F_A$  in  $F_B$ ) skupaj z rezultati za nedelaminirano konzolo. Modri krivulji označujeta obtežni primer s



Slika 6.9: Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Prosti lameli.

Figure 6.9: Load deflection path of the cantilever. Free lamina.

silo na spodnji, rdeči pa s silo na zgornji lameli. Neprekinjena črta označuje pomike zgornje, črtkana pa pomike spodnje točke. Rezultati za delaminirano konzolo, se razlikujejo od nedelaminiranega primera. Nedelaminirana konzola je po pričakovanju bolj toga. Pomiki neobremenjenega vozlišča so manjši od pomikov obremenjenega vozlišča. Če obremenimo zgornjo lamelo, pride do prekrivanja lamel (slika 6.10, levo). Taki rezultati se seveda nerealni. Razlog za to je v neodvisnosti stika med zgornjo in spodnjo lamelo, kar predstavljajo izbrane ničelne togosti vzmeti. Prekrivanje preprečimo z ustrežno izbiro togosti vzmeti.



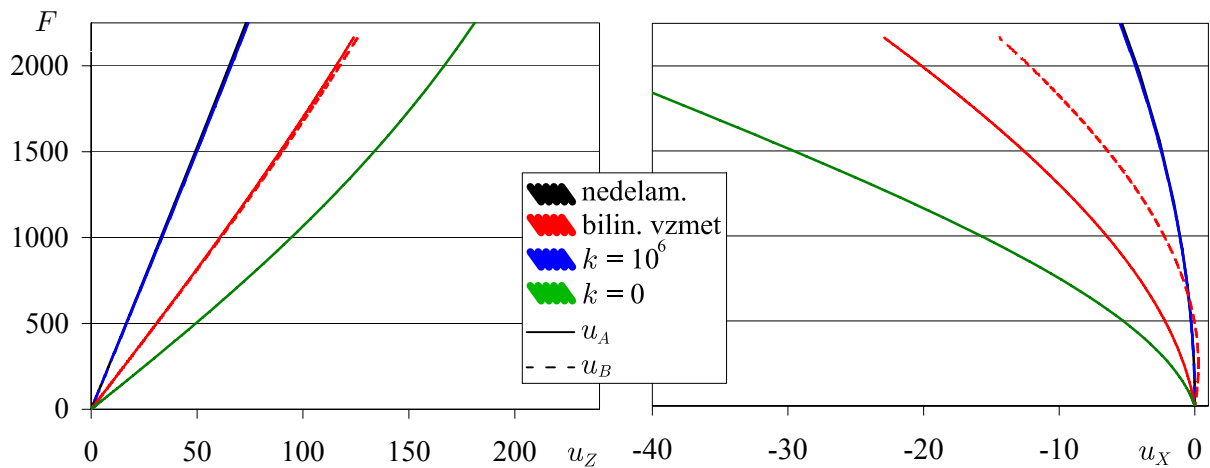
Slika 6.10: Skica deformirane delaminirane konzole. Prosti lameli.

Figure 6.10: Deformed shape of the delaminated cantilever. Free lamina.

Na sliki 6.11 prikazujemo rezultate za različne tipe vzmeti. Uporabimo dve novi togosti vzmeti. Prvo predstavlja tip vzmeti, ki deluje zgolj v smeri lokalne osi  $z$  ( $k_1 = k_2 = 0$ ). V natezni smeri je povsem podajna, v tlačni pa je zelo toga:

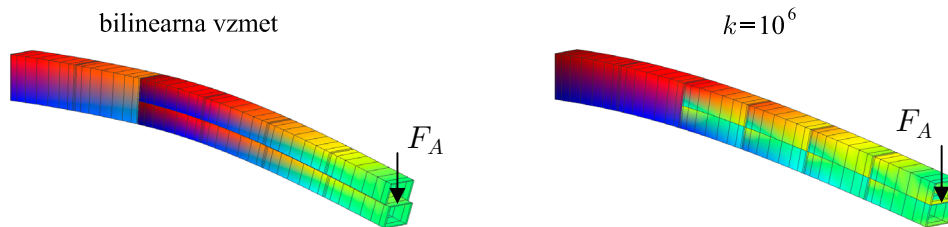
$$k_3 = \begin{cases} 0 & \Delta u_6 \geq 0 \\ 10^6 & \Delta u_6 < 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Na sliki 6.11 so rezultati za tak tip vzmeti označeni rdeče. Drugi tip predstavljajo linearne zelo toge vzmeti:  $k_1 = k_2 = k_3 = 10^6$ . Na sliki 6.11 so rezultati za take vzmeti prikazani modro. Obravnavamo torej zelo togo povezani lameli, lameli s preprečenim prekrivanjem, za primerjavo pa še prosti lameli in nedelaminiran nosilec. V vseh primerih prikazujemo pomike obeh referenčnih točk, omejimo pa se na obtežbo na zgornji lameli, saj smo le v tem primeru opazili pojav prekrivanja lamel.



Slika 6.11: Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Različne togosti vzmeti.  
 Figure 6.11: Load deflection path of a cantilever. Different spring stiffnesses.

Zelo toga povezava med lamelama daje skoraj povsem enake rezultate kot nedelaminirani nosilec. Pomiki spodnje in zgornje lamele se ujemajo, vrednosti pomikov pa so enake kot pri nedelaminiranem nosilcu. Togo obnašanje nosilca je razvidno tudi iz oblike deformiranega nosilca, prikazanega na sliki 6.12. Prezezi lamel ohranijo začetno relativno lego in se ne zamaknejo med seboj. Povezava, ki preprečuje prekrivanje lamel, sicer pa sta lameli prosti (rdeče krivulje) daje večje pomike, kot pri nedelaminiranem nosilcu. Seveda pa je togost takega nosilca večja od togosti nosilca v nerealnem modelu, kjer se lameli lahko prekrijeta (zelen graf). Pomiki delaminirane konzole so pri enaki obtežbi skoraj dvakrat večji od pomikov nedelaminirane konzole. Manjša togost je posledica prostega pomika lamel v smeri svoje osi. To opazimo tudi iz slike deformirane lege (slika 6.12), kjer je viden zamik lamel na prostem koncu.



Slika 6.12: Skica delaminirane konzole. Vzmeti različnih togosti.  
 Figure 6.12: Deformed shape of the cantilever. Different spring stiffnesses.

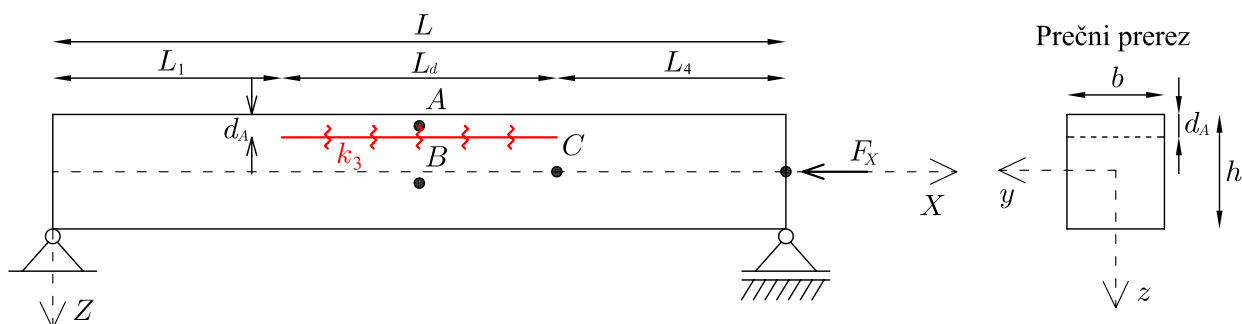
#### 6.4.4 Prostoležeci delaminirani nosilec z osno obtežbo

Primer, opisan v poglavju 5.4.4 ponovno rešimo. Vsi podatki so enaki, le prekrivanje lamel preprečimo z bilinearnimi vzmetmi. Med obe lameli ekvidistantno postavimo pet vzmeti, ki imajo neničelno togost le v smeri lokalne osi  $z$ . Tretjo diagonalno komponento matrike togostnih konstant  $k_3$  postavimo na nič za pozitivne pomike, za negativne pa vzamemo tako veliko togost, kot še dopušča numerični izračun

$$k_3 = \begin{cases} 0 & \Delta u_6 \geq 0 \\ 10^8 & \Delta u_6 < 0 \end{cases} \quad (6.13)$$



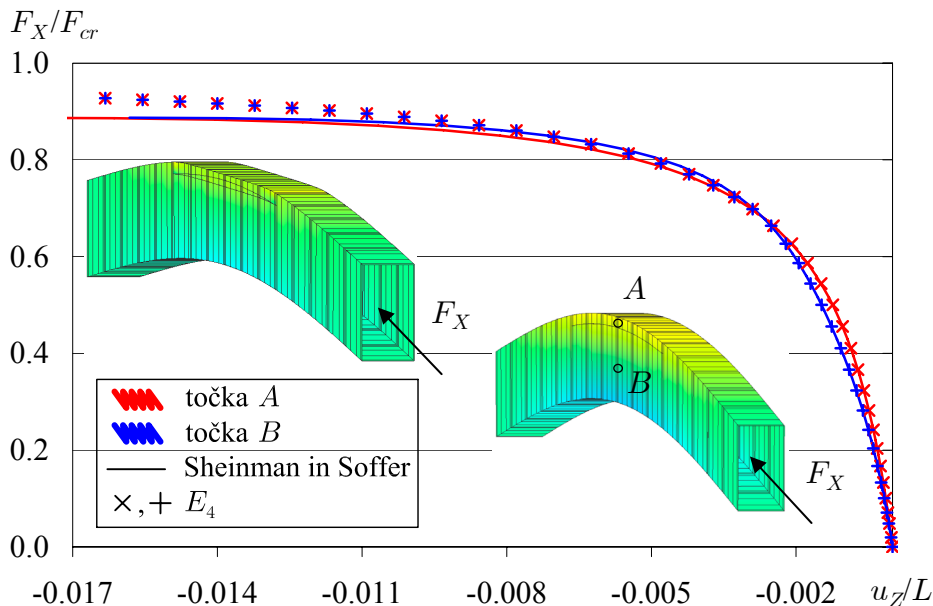
Shema delaminiranega nosilca z vzmetmi med lamelami je prikazana na sliki 6.13. Omejimo se na primer začetne nepopolnosti  $w(x) = -0.0625h \sin(\frac{\pi x}{L})$ , ko je pri prostih lamelah prišlo do prekrivanja.



Slika 6.13: Delaminirani nosilec z vzmetmi med lamelama.  
Figure 6.13: Delaminated beam with springs between layers.

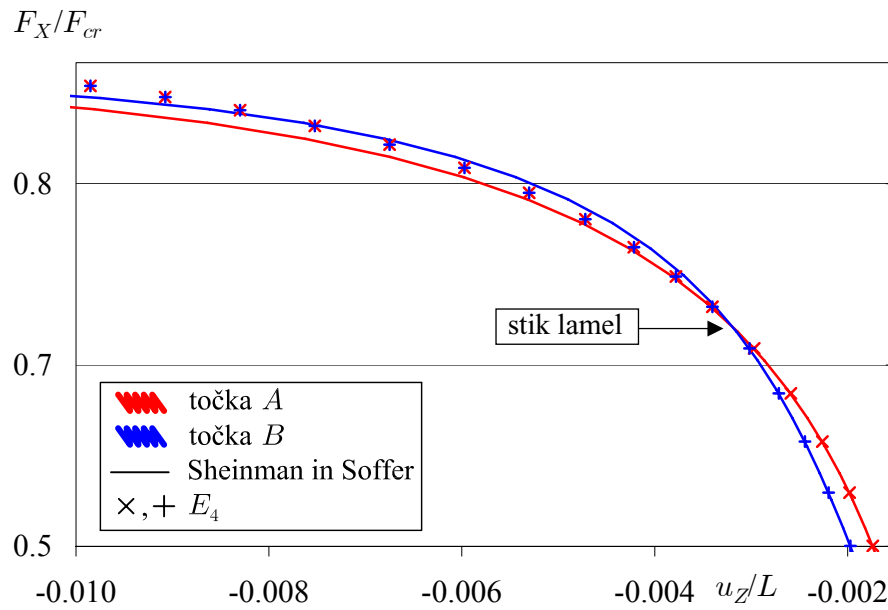
Nosilec modeliramo z 22 elementi tipa  $E_4$ , po 5 elementov sestavlja začetni in končni nedelaminiran del nosilca, dva nabora po 6 elementov pa sestavlja zgornjo in spodnjo lamelo na sredini nosilca. Elementi za lamele so enako dolgi, robne točke teh elementov, razen tistih ob obeh koncih delaminacije pa povežemo z vzmetmi.

Na sliki 6.14 prikazujemo obtežno deformacijski poti referenčnih točk A in B. Nепrekinjena črta označuje rezultate, povzete po Sheinmann in Soffer (1989), medtem ko točke označujejo rezultate modela z vzmetmi. Obtežno deformacijski krivulji se po pričakovanjih popolnoma ujemata v prvem delu,



Slika 6.14: Obtežno deformacijska pot prostoležeče podprtega nosilca z in brez upoštevanja kontakta.  
Figure 6.14: Load deflection path of a simply supported beam with/without springs.

ko se lameli medsebojno razmikata  $u_{Z,A} > u_{Z,B}$ . Pri pomikih okrog  $u_{Z,A} \approx u_{Z,B} \approx -0.00265$  pa se lameli dotakneta. Če lameli modeliramo neodvisno, sledi prekrivanje lamel. Če pa stik med lamelama ustrezno modeliramo, do prekrivanja ne pride. Lameli se stakneta in pomikata skupaj. Tako so pomiki točke A in B enaki od stika lamel dalje. Taka konstrukcija ima tudi večjo togost od nepovezane, saj sta



Slika 6.15: Del obtežno deformacijske poti prostoležečega nosilca z in brez upoštevanja kontakta.  
Figure 6.15: Part of the load deflection path of a simply supported beam with/without springs.

krivulji z vzmetni po prekrivanju ( $u_z < -0.00265$ ) višje od krivulje za nepovezано konstrukcijo. Poleg grafov, na sliki 6.14 prikazujemo tudi deformirani obliki konstrukcij, ko je pomik referenčne točke enak  $u_z/L \approx 0.01$ . Vidno je prekrivanje lamel v primeru neupoštevanja kontakta in pravilno deformiranje konstrukcije v primeru pravilnega modeliranja vezi med lamelama.

Na sliki 6.15 prikazujemo izsek iz obtežno deformacijske poti, v območju, kjer se lameli dotakneta. Referenčni točki *A* in *B* se po stiku ne ločita več.

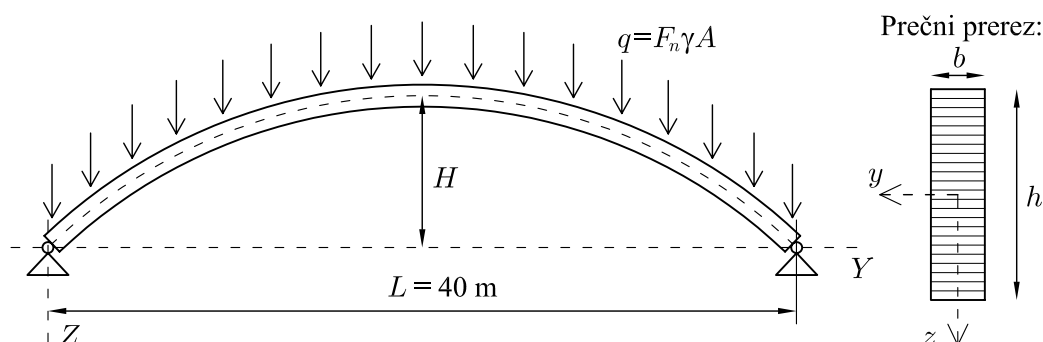
## 7 NUMERIČNE ŠTUDIJE

### 7.1 Uvod

V tem poglavju bomo predstavili rezultate nekaterih zahtevnejših numeričnih študij. Računski primeri so izbrani tako, da hkrati zajemajo več področji geometrijske in materialne nelinearnosti. S parametričnimi študijami bomo prikazali vpliv različnih nepopolnosti na nosilnosti, kritične sile in postkritično obnašanje konstrukcij. Poljubna začetna geometrija nam omogoča analiziranje stabilnosti zanimivejših primerov, zato se v tem delu posvetimo ukrivljenim in slojevitim nosilcem. Ker naša numerična metoda ni omejena z izbiro materialnega modela, numerične študije obsegajo primere iz različnih materialov, kot so les, armiran beton in kompozitni materiali. Na kompleksnejših primerih bomo prikazali učinkovitost postopka pri opazovanju različnih vplivov na nosilnost konstrukcij kot so lega bočnih podpor na uklonsko nosilnost lesenih lokov, zmanjšanje nosilnosti zaradi prisotnosti delaminacije na stiku med armiranobetonskim stebrom in dodano ojačitvijo, vpliv veznih sredstev na nosilnost sestavljenih lesenih nosilcev. Verodostojnost modela bomo podprli tudi s primerjavo numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi.

### 7.2 Bočna zvrnitev lesenega loka

Obravnavamo krožni lok razpona  $L = 40$  m in konstantnega pravokotnega prečnega prereza. Lok je obojestransko nepomično podprt; podpori dovoljujeta zasuk okoli osi, ki kaže iz ravnine loka, ostala dva zasuka pa sta preprečena (slika 7.1). Krožni lok je v svoji ravnini obtežen z enakomerno linijsko obtežbo



Slika 7.1: Krožni lok pod porazdeljeno vertikalno obtežbo.

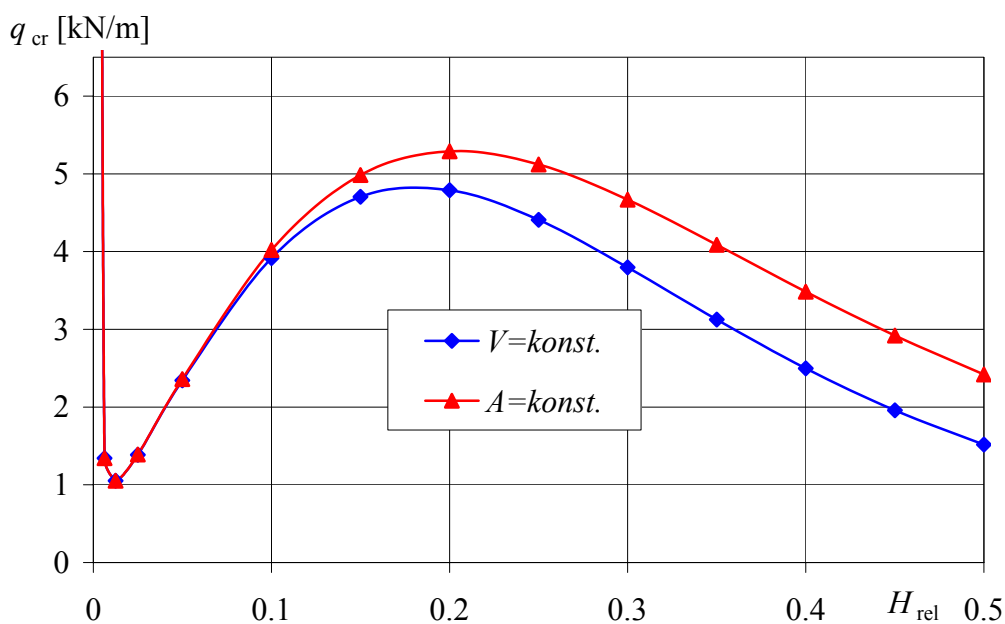
Figure 7.1: Geometrical and loading data.

na enoto dolžine nedeformirane osi. Označimo jo s  $q = F_n \gamma A$ , kjer je  $\gamma$  specifična teža,  $F_n$  je obtežni

faktor in  $A = bh$  je ploščina prereza. Seveda je  $q$  obtežba na enoto dolžine težiščne osi loka. Obtežbo  $q_{cr}$ , ki sproži bočno zvrnitev, imenujemo bočna nosilnost loka, pripadajoči obtežni faktor pa kritični in ga označimo s  $F_{cr}$ . Material je v analizah linearno-elastičen, vrednosti pa povzamemo po karakterističnih lastnostih lesa trdnostnega razreda C27: elastični modul paralelno z vlakni  $E = 1200 \text{ kN/cm}^2$ , strižni modul pravokotno na vlakna  $G = 80 \text{ kN/cm}^2$  in specifična teža lesa  $\gamma = 4.4 \text{ kN/m}^3$ .

Najprej bomo določili optimalno višino krožnega loka fiksne dolžine  $L = 40 \text{ m}$ , ki zagotavlja največjo bočno nosilnost. Določimo jo s parametričnimi analizami na dva načina. Pri prvem načinu ohranjamo prečni prerez loka  $A = bh = 20 \cdot 120 \text{ cm}^2$  ter spreminjamo relativno višino krožnega loka  $H_{rel} = H/L$  od 0 (raven nosilec) do 0.5 (polovica krožnega loka). Pri drugem načinu pa hkrati spreminjamo relativne višine loka in manjšamo (sicer po dolžini konstantno) višino prečnega prereza tako, da ostane prostornina loka (količina materiala) konstantna.

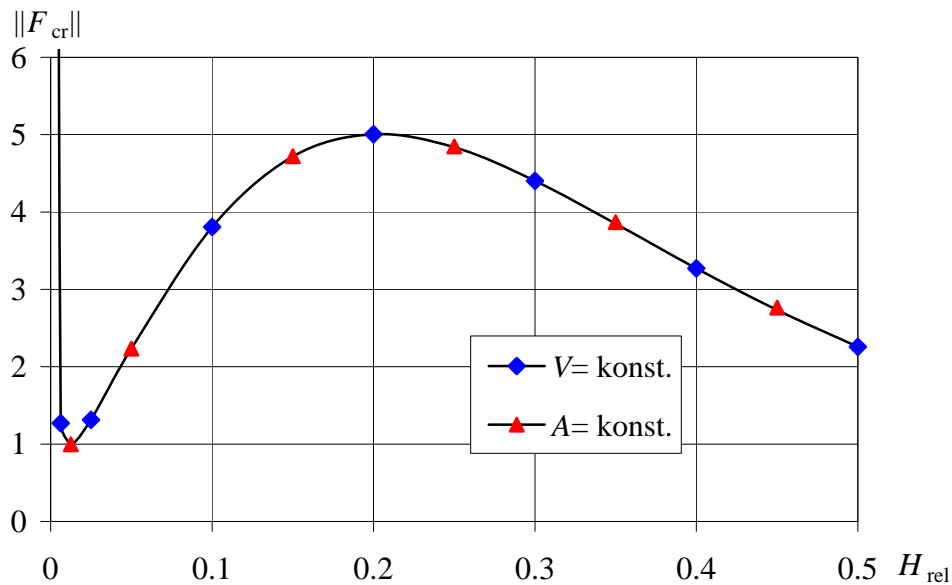
Na sliki 7.2 prikazujemo vpliv relativne višine krožnega loka  $H_{rel}$  na bočno nosilnost  $q_{cr}$  za krožne loke s konstantnim prečnim prerezom in loke s konstantno prostornino. Vidimo, da  $H_{rel}$  pomembno vpliva na bočno nosilnost krožnega loka. Optimalna oblika krožnega loka, dobljena po postopku s predpisano konstantno prostornino, ima relativno višino loka  $H_{rel} = 0.2$ , medtem ko je pri krožnem loku s predpisanim konstantnim prečnim prerezom optimalna relativna višina  $H_{rel} = 0.25$ . Višja bočna nosilnost krožnega loka, dobljena po postopku s konstantnim prečnim prerezom, je posledica večjega prečnega prereza.



Slika 7.2: Spreminjanje bočne nosilnosti z relativno višino loka.

Figure 7.2: Lateral buckling capacity vs. arch height.

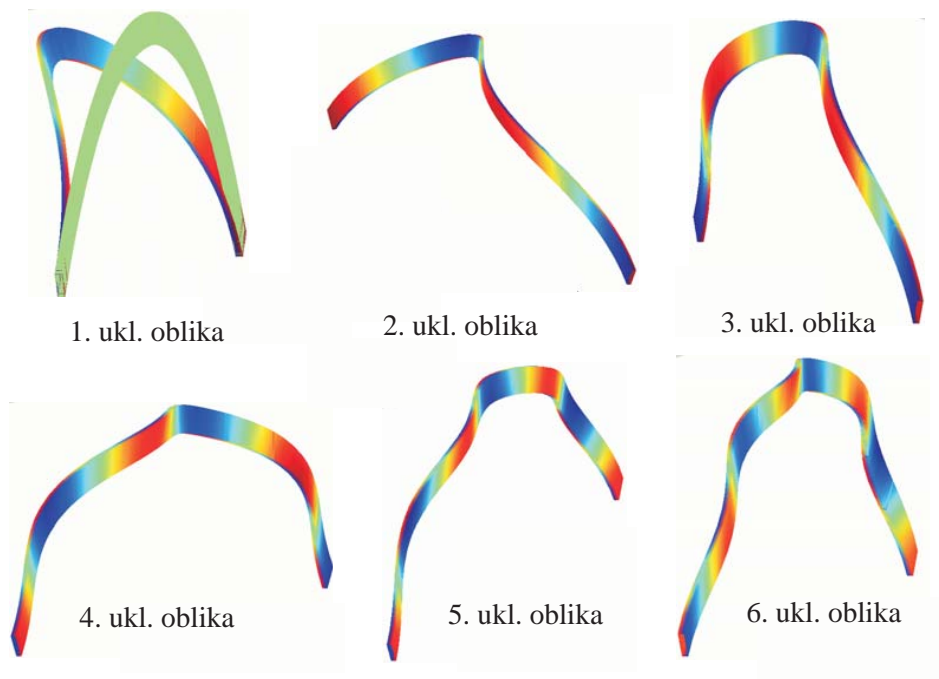
Boljšo primerjavo bočne nosilnosti oziroma pripadajočih kritičnih obtežnih faktorjev dobimo, če bočno nosilnost normiramo z lastno težo loka na enoto dolžine, torej  $\|F_{cr}\| = q_{cr}/(\gamma A)$ . To primerjavo prikazujemo na sliki 7.3. Sedaj sta obe krivulji bočne nosilnosti krožnih lokov skoraj enaki, kar pomeni, da ima največjo bočno nosilnost krožni lok z relativno višino  $H_{rel} = 0.2$ . V tem primeru je normirani kritični obtežni faktor kar petkratni faktor lastne teže. Za manj in bolj visoke krožne loke pa je normirani kritični obtežni faktor lahko bistveno manjši. Ta je najmanjši pri krožnem loku s  $H_{rel} = 0.0125$  ( $H = 50 \text{ cm}$ ), kjer je  $\|F_{cr}\| = 1.2$ .



Slika 7.3: Spreminjanje bočne nosilnosti z relativno višino loka.

Figure 7.3: Lateral buckling capacity vs. arch height.

Bočno nosilnost visokega krožnega loka lahko bistveno povečamo z dodatnimi bočnimi podporami. Pri tem lahko za vsako število bočnih podpor določimo njihovo optimalno lego. Rezultate prikazujemo za krožni lok z relativno višino  $H_{rel} = 0.2$  in s konstantnim prečnim prerezom  $bh = 20 \cdot 108.7$  cm. Optimalne lege vmesnih podpor določimo s pomočjo višjih uklonskih oblik krožnega loka. Na sliki 7.4



Slika 7.4: Prvih šest uklonskih oblik krožnega loka.

Figure 7.4: First six buckling modes of the arch.

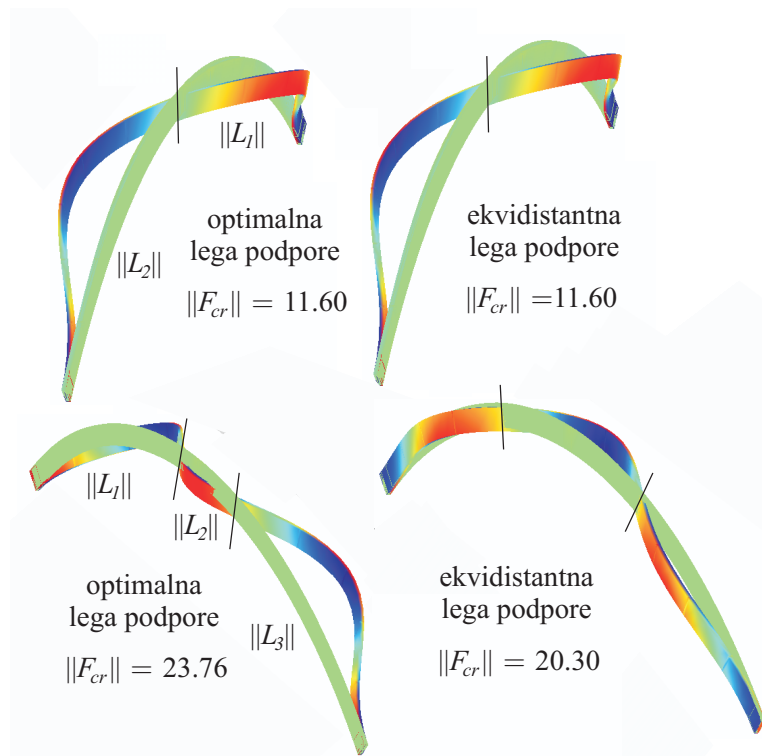
prikazujemo prvih šest uklonskih oblik krožnega loka v kritičnih točkah neizbočenega loka, v preglednici 7.1 pa pripadajoče normirane kritične obtežne faktorje.

Preglednica 7.1: Normirani kritični obtežni faktorji za prvih šest uklonskih oblik krožnega loka.

Table 7.1: Normalized buckling loads for the first six buckling modes.

ukl. obl.	1	2	3	4	5	6
$N_{podpor}$	0	1	2	3	4	5
$\ F_{cr}\ $	5.00	11.60	23.76	36.98	55.07	73.90

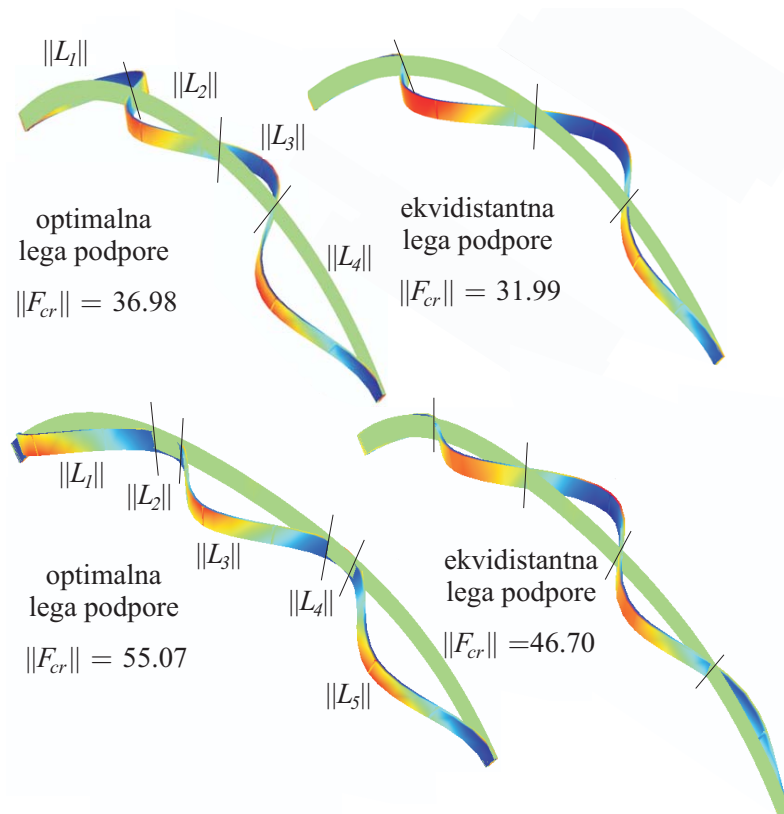
Iz slike 7.4 lahko razberemo, da so razdalje med prevojnimi točkami posameznih višjih uklonskih oblik neenake. Za dodatno ponazoritev, da so lege prevojnih točk res optimalne lege bočnih podpor, primerjamo bočne nosilnosti krožnih lokov z optimalno in z ekvidistantno razporejenimi bočnimi podporami. Primerjave za eno oz. dve bočni podpori prikazujemo na sliki 7.5, za tri oz. štiri bočne podpore pa na sliki 7.6. Slika 7.5 pove, da je sredina loka tudi optimalna lega edine dodatne bočne podpore, kar je pričakovano. Kadar pa je število vmesnih bočnih podpor večje od ena, se bočni nosilnosti krožnih lokov z optimalno in ekvidistantno lego podpor opazno razlikujeta. Tako se lahko bočna nosilnost krožnega loka z optimalno izbranimi dvema vmesnima bočnima podporama poveča do 20%.



Slika 7.5: Krožni lok s  $H_{rel} = 0.2$ . Uklonske oblike in normirani kritični obtežni faktorji za optimalno in ekvidistantno podprt lok (ena in dve podpori).

Figure 7.5: Arch with  $H_{rel} = 0.2$ . Buckling shapes and normalized buckling loads for optimal and equidistant supports (one and two supports).

V preglednici 7.2 podajamo optimalne lege vmesnih podpor obravnavanega krožnega loka. Rezultati v preglednici 7.2 dokazujejo, da se lege optimalno in ekvidistantno postavljenih bočnih podpor razlikujejo.



Slika 7.6: Krožni lok s  $H_{rel} = 0.2$ . Uklonske oblike in normirani kritični obtežni faktorji za optimalno in ekvidistantno podprt lok (tri in štiri podpore).

Figure 7.6: Arch with  $H_{rel} = 0.2$ . Buckling shapes and normalized buckling loads for optimal and equidistant supports (three and four supports).

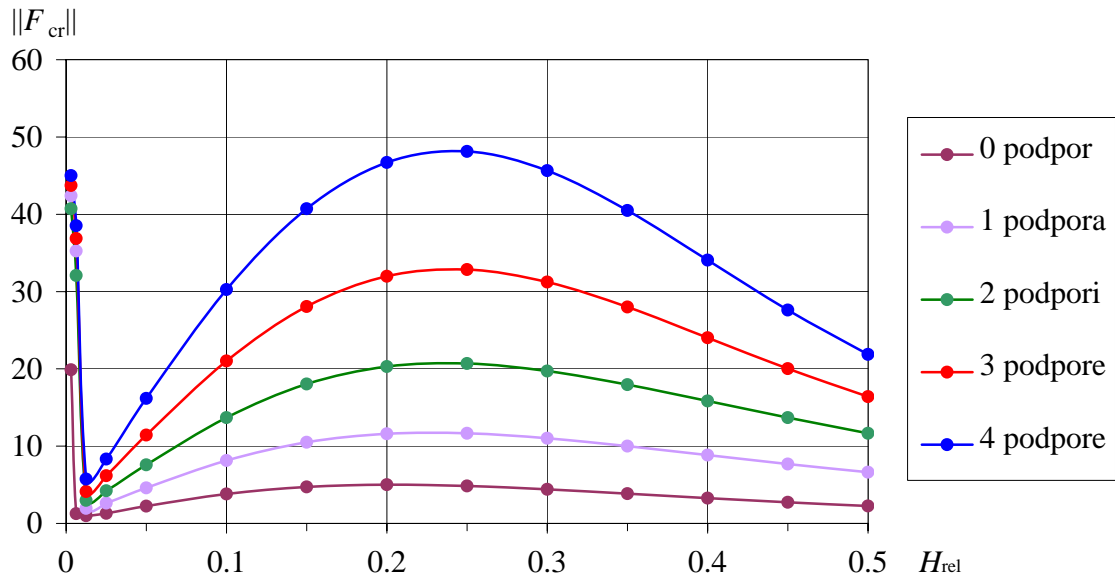
Preglednica 7.2: Krožni lok s  $H_{rel} = 0.2$ . Normirane razdalje med optimalno postavljenimi bočnimi podporami krožnega loka.

Table 7.2: Arch with height  $H_{rel} = 0.2$ . Normalized lengths between optimal supports.

Ločne razdalje med optimalno postavljenimi podporami					
št. dodatnih podpor	$\ L_1\ $	$\ L_2\ $	$\ L_3\ $	$\ L_4\ $	$\ L_5\ $
1	0.500	0.500			
2	0.466	0.067	0.466		
3	0.324	0.176	0.176	0.324	
4	0.305	0.052	0.287	0.052	0.305

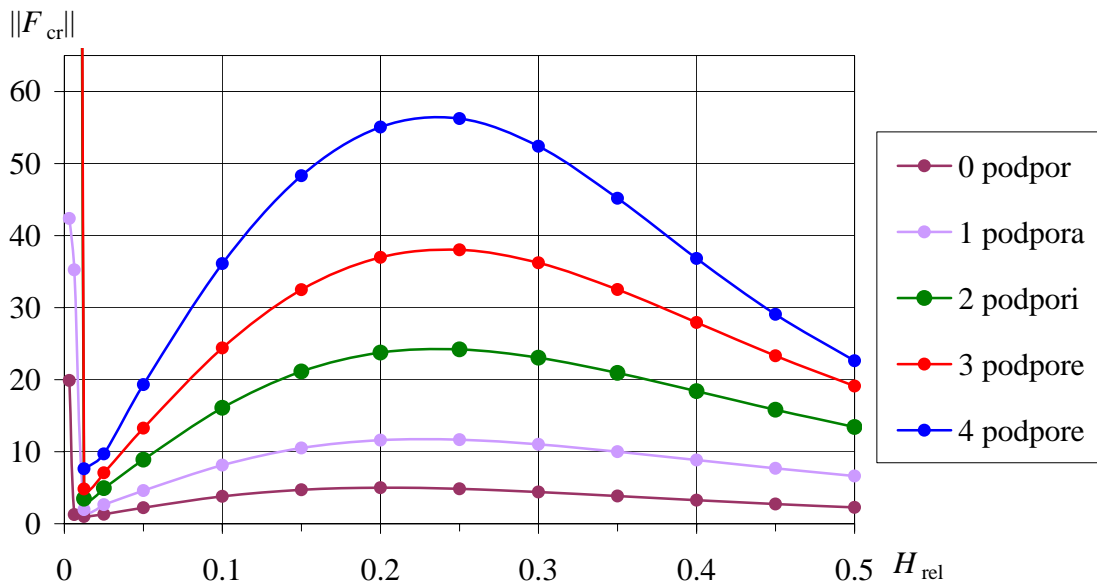
Razlika je največja za dve oz. štiri podpore. Zaradi simetrije loka so rezultati simetrični. Poudarimo izrazito neenakomerne razdalje med optimalnimi legami podpor, kar je posledica nelinearnosti problema. Optimalne lege bočnih podpor smo določili za krožni lok z optimalno relativno višino  $H_{rel} = 0.2$ . Ker je optimalna višina loka odvisna od števila vmesnih bočnih podpor, je smiselno določiti optimalne relativne višine tudi za različno bočno podprte krožne loke. Na sliki 7.7 najprej prikazujemo odvisnost  $F_{cr}$  od  $H_{rel}$  za krožne loke z ekvidistantnimi vmesnimi bočnimi podporami. Kot smo že ugotovili, je za bočno nepodprt krožni lok optimalna višina  $H_{rel} = 0.2$ . Z dodajanjem bočnih podpor se optimalna relativna

višina krožnega loka povečuje (slika 7.7). Tako je optimalna relativna višina krožnega loka s štirimi ekvidistantnimi podporami približno  $H_{rel} = 0.25$ . Tudi kritični obtežni faktor se z dodajanjem bočnih podpor večja. Večanje bočne nosilnosti je najbolj izrazito prav za krožne loke z optimalnimi relativnimi višinami.



Slika 7.7: Krožni lok z ekvidistantnimi bočnimi podporami. Odvisnost normiranega kritičnega obtežnega faktorja od relativne višine krožnega loka.

Figure 7.7: Arch with equidistant supports. Normalized buckling load vs. relative height.



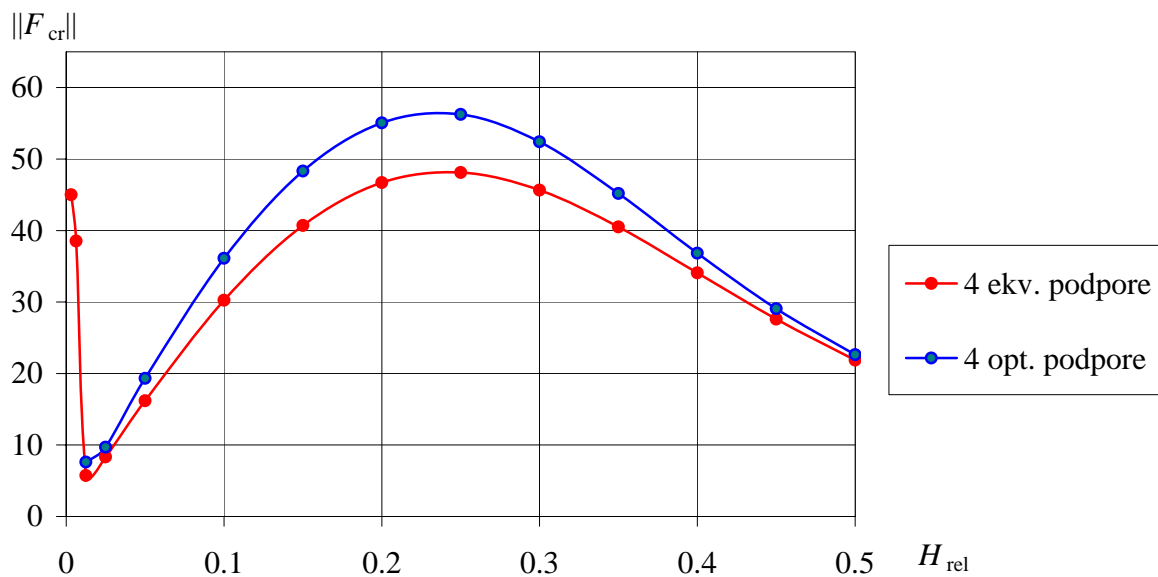
Slika 7.8: Krožni lok z optimalnimi legami bočnih podpor. Odvisnost normiranega obtežnega faktorja od relativne višine krožnega loka.

Figure 7.8: Arch with optimal supports. Normalized buckling load vs. relative height.

Optimalne višine krožnih lokov z optimalnimi vmesnimi bočnimi podporami so prav tako odvisne od



števila podpor (slika 7.8). Tudi pri optimalni razporeditvi bočnih podpore se s povečevanjem števila



Slika 7.9: Odvisnost kritičnega obtežnega faktorja od relativne višine loka za krožne loke s štirimi ekvidistantnimi in štirimi optimalno postavljenimi bočnimi podporami.

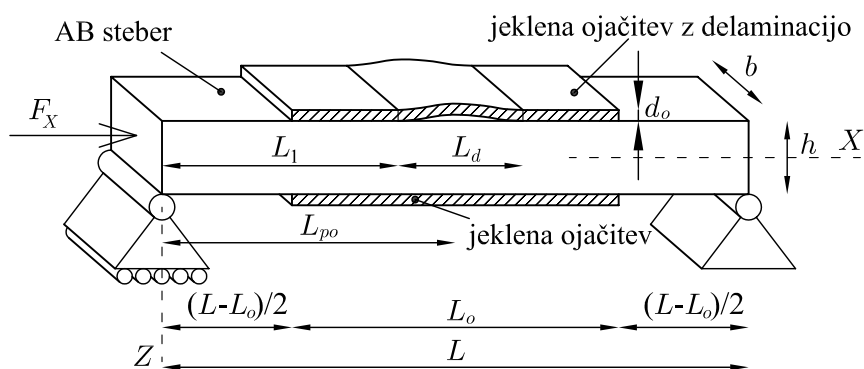
Figure 7.9: Buckling factor vs. relative arch height with four equidistant and optimal supports.

bočnih podpor povečuje optimalna relativna višina krožnega loka. Optimalna relativna višina za krožni lok s štirimi optimalno razporejenimi podporami je  $H_{rel} = 0.25$ , kar pomeni, da optimalna razporeditev podpor ne vpliva bistveno na optimalno relativno višino krožnih lokov. Kot vidimo na sliki 7.9, na kateri prikazujemo odvisnost  $\|F_{cr}\|$  od  $H_{rel}$  za krožne loke s štirimi vmesnimi bočnimi podporami, pa nezanemarljivo poveča njihovo bočno nosilnost.

### 7.3 Armiranobetonski nosilci, ojačeni z jeklenimi lamelami

V študiji obravnavamo ojačene armiranobetonске stebre, izpostavljene tlačni osni obtežbi. Ojačitev prispevajo vgrajene okrogle palice (klasična armatura) in enostransko oz. dvostransko dolepljene lamele različnih dimenzij. Analiziramo vpliv različnih tipov ojačitve na uklonsko nosilnost in postkritično obnašanje stebrov. Predstavljene so krivulje osna sila – prečni pomik ojačenih stebrov z začetnimi geometrijskimi nepopolnostmi in nepopolnostmi zaradi razslojevanja med primarnim nosilnim elementom in ojačitvijo.

Obravnavamo vitek raven armiranobetonski steber, ki je izpostavljen tlačni osni sili s prijemališčem v težišču betonskega prereza. Velikost sile povečujemo do izgube stabilnosti, nato pa sledimo deformaciji stebra do porušitve. Armiranobetonski steber ojačamo z dolepljenjem jeklenih lamel in opazujemo vpliv ojačitve na nosilnost stebra. Pri tem opazujemo vpliv različnih dejavnikov, kot so nepopolnost geometrijske oblike in delna delaminiranost ojačitve. Analizirali smo konzolno in prostoležeče podprte stebre.



Slika 7.10: Model ojačenega nosilca z delaminacijo.

Figure 7.10: Beam model with additional steel plate and delamination.

Na sliki 7.10 je prikazan model ojačenega stebra z geometrijskimi podatki: dolžina stebra  $L$ , širina prereza  $b$ , višina prereza  $h$ , dolžina ojačitve  $L_o$ , debelina ojačitve  $d_o$ , relativna dolžina ojačitve  $l_o = L_o/L$ , relativna lega ojačitve  $l_{po} = L_{po}/L$ , kjer  $L_{po}$  predstavlja razdaljo od roba nosilca do sredine ojačitve, dolžina delaminacije  $L_d$ , njena relativna dolžina  $l_d = L_d/L$  in njena relativna lega  $l_1 = L_1/L$ , kjer je  $L_1$  razdalja od roba nosilca do roba delaminacije. Jeklena ojačitev je modelirana z enakim, bilinearnim konstitucijskim modelom kot osnovna armatura (glej tudi poglavje 2.3.4.2). Oznake referenčnih vrednosti, ki definirajo materialne modele, so: (i) osnovna armatura: elastični modul  $E_j$ , plastični modul  $E_p$ , Poissonov količnik  $\nu$ , mejna elastična deformacija  $\varepsilon_y$ , največja deformacija  $\varepsilon_u$ ; (ii) beton: začetni elastični modul  $E_b$ , tlačna trdnost  $f_m$ , natezni deformaciji sta  $\varepsilon_r$  (ob največji natezni trdnosti) in  $\varepsilon_n$  (porušna deformacija v nategu), deformacija pri doseženi tlačni trdnosti  $\varepsilon_m$ , mejna tlačna deformacija  $\varepsilon_{cr}$ ; (iii) zunanja ojačitev: elastični modul  $E_{jo}$ , plastični modul  $E_{po}$ , mejna elastična deformacija  $\varepsilon_{yo}$  in največja deformacija  $\varepsilon_{uo}$ .

Najprej primerjamo uklonske sile elastičnega, nearmiranega in armiranega betonskega stebra z naslednjimi geometrijskimi in materialnimi podatki:  $L = 8$  m,  $b = 0.3$  m,  $h = 0.2$  m, armatura  $4\phi 16$ ,  $E_b = 3000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $f_m = 3.3$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_r = 0.000055$ ,  $\varepsilon_n = 0.0007$ ,  $\varepsilon_m = -0.0022$ ,  $\varepsilon_{cr} = -0.008$ ,  $E_j = 21000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $E_p = 4000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_y = 0.002$ ,  $\varepsilon_u = 0.01$ . V preglednici 7.3 so prikazani rezultati za analitične in numerične rešitve uklonskih sil elastičnega, betonskega in armira-

nobetonskega stebra.

Preglednica 7.3: Uklonske sile elastičnega, betonskega in armiranobetonskega nosilca.

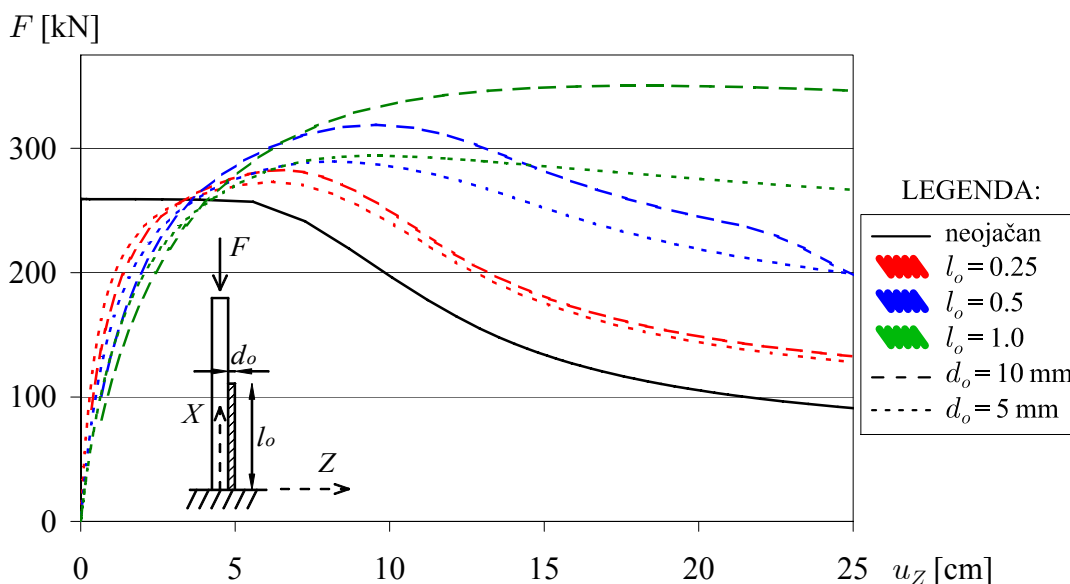
Table 7.3: Bukling loads of the elastic, concrete and reinforced concrete beam.

$F_{cr}$ [kN]	material	konzola	prostoležeči
ana.	lin. el.	231.32	925.28
num.	lin. el.	231.26	925.27
num.	AB	259.12	918.83
num.	B	228.93	807.39

Rezultati v preglednici 7.3 kažejo ujemanje numeričnih rešitev uklonskih sil z analitičnimi, dobljenimi po Eulerjevi formuli  $F_{cr} = EI\pi^2/L_u^2$  (preglednica 7.3, 1. vrstica) za linearno elastični materialni model (preglednica 7.3, 2. vrstica). Z upoštevanjem nelinearnosti materiala ugotovimo, da so rešitve za linearno elastičen material lahko precenjene. Na uklonske sile nosilcev ugodno vpliva upoštevanje armature, ki ima večji elastični modul od betona. Opazimo, da je zato kritična sila armiranobetonske konzole višja od kritične sile konzolnega nosilca iz elastičnega materiala. Uklonske sile za nearmiran betonski nosilec enakih dimenzij so po pričakovanju manjše od vrednosti za armiran nosilec in tudi vrednosti za elastičen material.

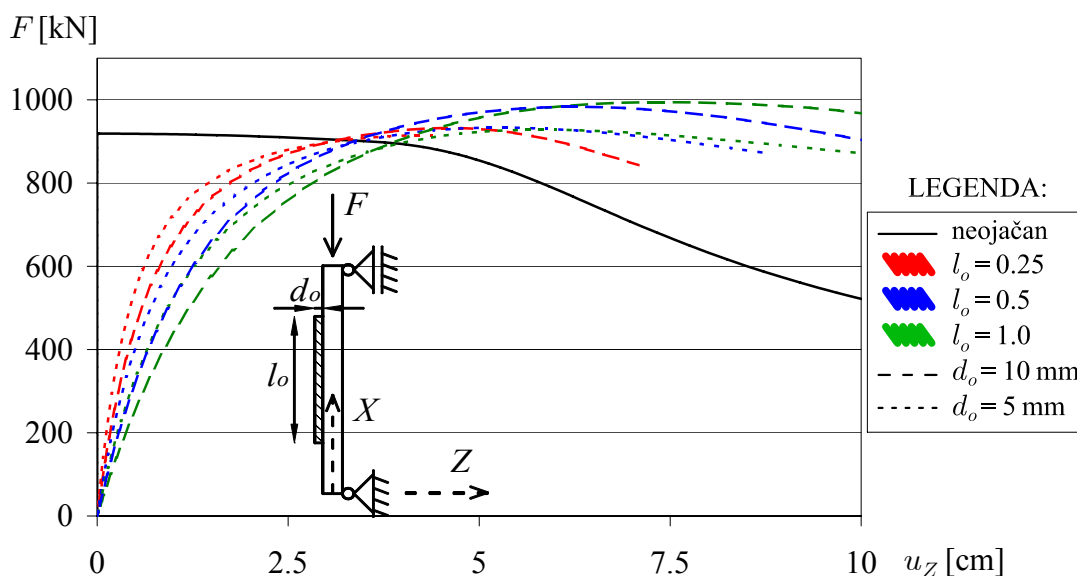
### 7.3.1 Vpliv enostranske ojačitve na postkritično obnašanje stebra

Nosilec ojačamo z jeklenim trakom relativne dolžine  $l_o$  in debeline  $d_o$ , ki je prilepljen le na eni strani stebra. Relativna lega ojačitve  $l_{po}$  je pri prostoležečem podpiranju enaka  $L/2$ , pri konzolnem pa  $l_{po} = l_o/2$ . Privzamemo popoln stik med trakom in stebrom. Krivulje osna sila – prečni pomik prostega konca konzolno vpetega nosilca in srednje točke prostoležečega nosilca so prikazane na slikah 7.11 in 7.12.



Slika 7.11: Obtežno-deformacijske krivulje konzole z različnimi tipi ojačitev.

Figure 7.11: Load deflection paths of the cantilever with additional reinforcement.



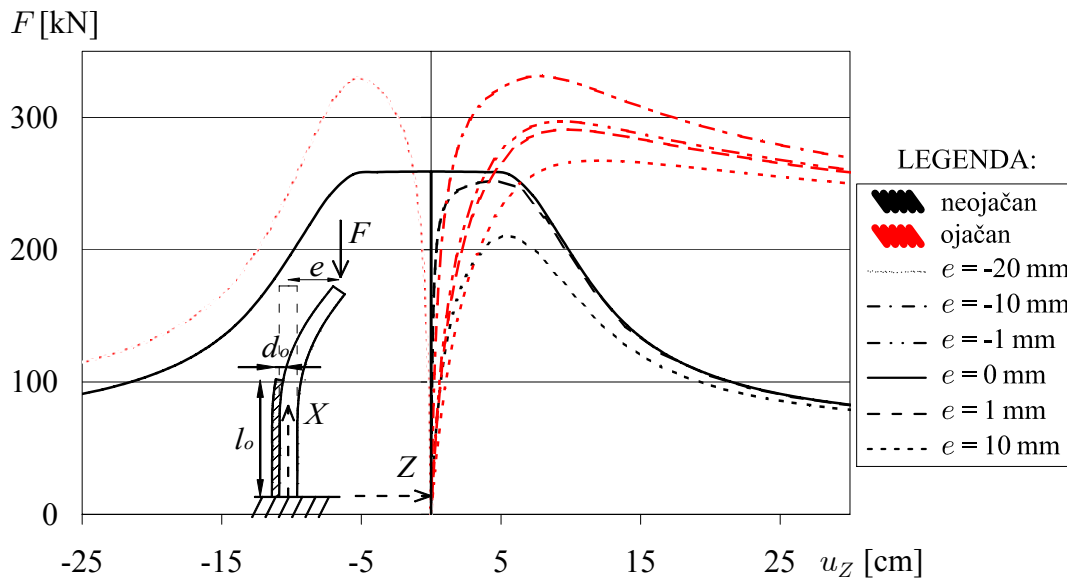
Slika 7.12: Obtežno-deformacijske krivulje prostoležečega nosilca z različnimi tipi ojačitev.  
Figure 7.12: Load deflection paths of the simply supported beam with additional reinforcement.

Enostranska ojačitev nosilca poleg ugodnega vpliva predstavlja tudi dodatno ekscentričnost. To se izraža v relativno velikih prečnih pomikih, še preden je dosežena največja osna obremenitev nosilca. Končna nosilnost ojačenega konzolnega nosilca ( $l_o = 0.5$ ,  $d_o = 5$  mm,  $F_{max} \approx 290$  kN) je nekoliko višja od nosilnosti neojačenega nosilca ( $F_{max} \approx 260$  kN). V primeru prostoležečega vpetja opazimo še večji vpliv ekscentričnosti ojačitve. Končna nosilnost nosilca s krajšo ojačitvijo ( $l_o = 0.25$ ,  $d_o = 5$  mm) približno enaka nosilnosti neojačenega nosilca. Prostoležeči nosilec z daljšo ojačitvijo ( $l_o = 1.0$ ,  $d_o = 10$  mm), pa ima višjo nosilnost od neojačenega za približno 10 %.

Ker lahko že majhna ekscentričnost bistveno zmanjša nosilnost stebrov, analiziramo še ojačene stebre z začetno nepopolnostjo. Začetno nepopolnost modeliramo z neravno začetno obliko osi stebra. Ta za konzolno vpetje poteka po kubični paraboli, določena pa je z največjim odmikom prostega konca  $e$ . Začetni odkim prostoležečega stebra poteka po kvadratni paraboli, z  $e$  pa je označen največji odkim na sredini stebra. Ostalih geometrijskih in materialnih parametrov ne spreminjamo.

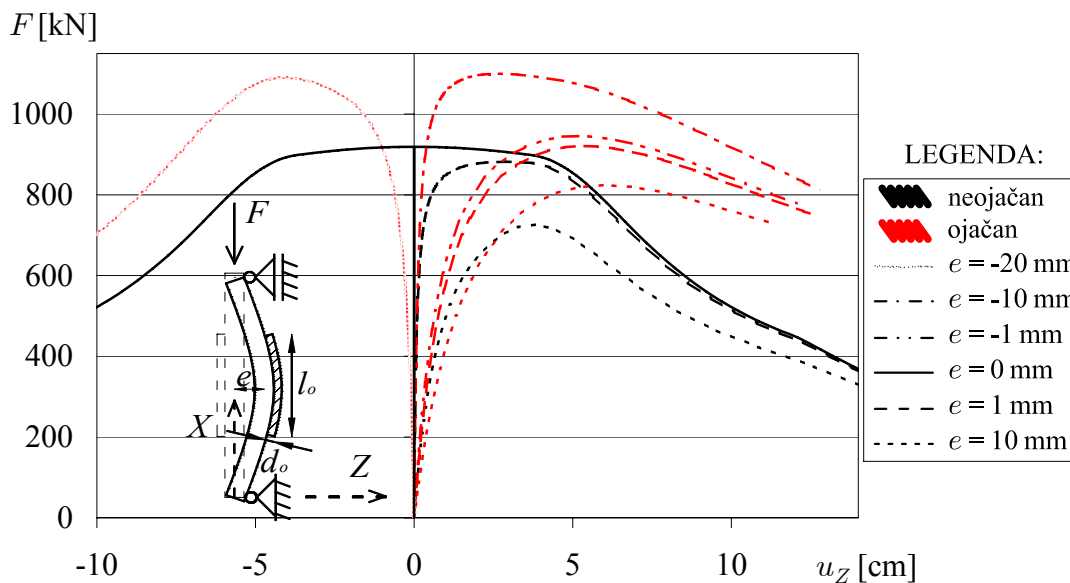
Zaradi preglednosti prikazujemo rezultate krivulje sila – pomik le za nekatere primere ojačenih konzolnih in prostoležečih stebrov. Na sliki 7.13 je prikazana primerjava med neojačeno armiranobetonsko konzolo, z različnimi začetnimi nepopolnostmi, ter podobno konzolo, ki je po celotni dolžini ( $l_o = 1.0$ ) ojačena z jeklenim trakom debeline 5 mm. Rezultati kažejo, da ojačitve v vseh primerih povečajo nosilnost stebra. V primeru ekscentričnosti v pozitivni smeri osi  $Z$  se nosilnost prereza zmanjša, kar pomeni, da je ta tip začetne nepopolnosti neugoden. Kljub neugodni smeri ekscentričnosti je končna nosilnost še vedno večja od nosilnosti enakega neojačenega stebra. V vseh primerih je povečana tudi duktilnost konstrukcije. Postkritično obnašanje stebra je stabilnejše kot v primeru neojačene konstrukcije. Kadar pa ima stebel veliko začetno nepopolnost v negativni  $Z$  smeri ( $e = -20$  mm), to povzroči prečne pomike v negativni smeri. Največja obremenitev je v tem primeru višja kot pri popolnem stebri, postkritični del krivulje pa kaže na hitrejše padanje sile, podobno kot pri neojačenem stebri.

Na sliki 7.14 prikazujemo primerjavo med neojačenim in ojačenim armiranobetonskim stebrom, ki je prostoležeče podprt. Ojačitev predstavlja lamela relativne dolžine  $l_o = 0.5$  in debeline  $d_o = 5$  mm, ki je postavljena na sredino razpona nosilca ( $l_{po} = 0.5$ ). Podobno kot v primeru konzole opazimo



Slika 7.13: Obtežno-deformacijske krivulje ojačene in neojačene konzole za različne začetne nepopolnosti.

Figure 7.13: Load deflection paths of the cantilever with/without additional reinforcement including imperfections.



Slika 7.14: Obtežno-deformacijske krivulje sredine ojačenega in neojačenega prostoležečega nosilca za različne začetne nepopolnosti.

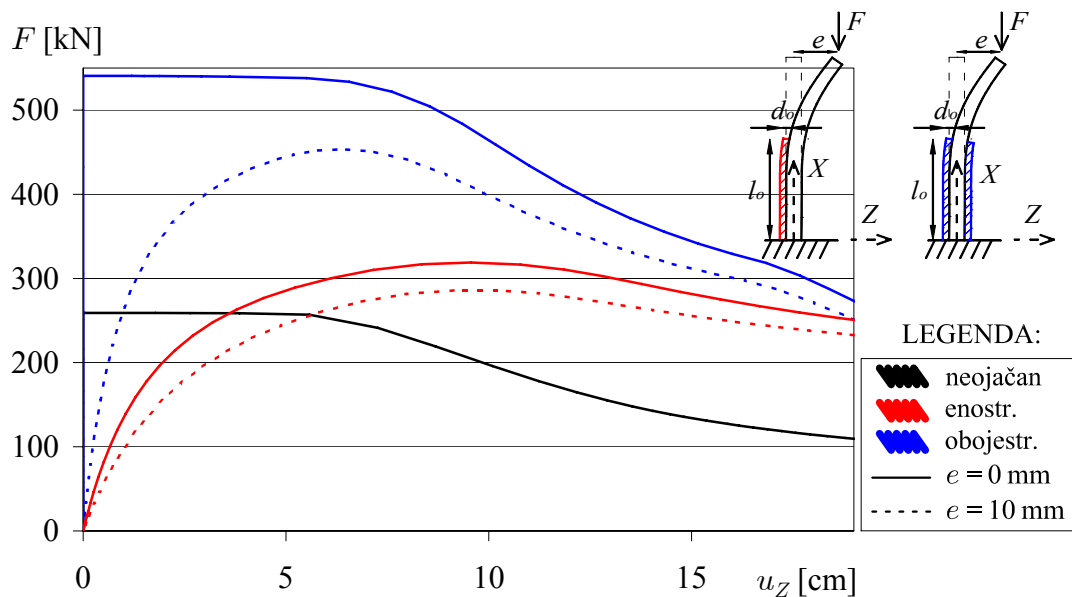
Figure 7.14: Load deflection paths of the simply supported beam with/without additional reinforcement including imperfections.

višjo nosilnost ojačene konstrukcije. Začetna nepopolnost tudi v tem primeru lahko deluje ugodno ali neugodno. V primeru neugodnega delovanja začetne nepopolnosti ( $e > 0$ ) je nosilnost prereza še vedno višja od enake neojačene konstrukcije, prednost ojačene konstrukcije pa je tudi bolj togo obnašanje v postkritičnem območju. V primeru dovolj velike začetne nepopolnosti v negativni  $Z$  smeri (v nasprotni

strani od lamele, npr.  $e = -15$  mm) se konstrukcija vendarle izkloni v negativno smer osi  $Z$ , togost konstrukcije v postkritičnem območju pa je v tem primeru manjša (ojačitev je tlačno obremenjena).

### 7.3.2 Vpliv obojestranske ojačitve

Obravnavali bomo vpliv obojestranske ojačitve stebrov. Na sliki 7.15 predstavljamo rezultate za konzolno vpeti stebel z in brez začetne nepopolnosti. Pri obeh obravnavanih tipih vpetja sta stebra ojačena z eno oziroma z dvema lamelama (obojestranska ojačitev) relativne dolžine  $l_o = 0.5$  in debeline  $d_o = 10$  mm. Materialni in geometrijski parametri so enaki kot prej.



Slika 7.15: Obtežno-deformacijske krivulje enostransko in obojestransko ojačene konzole za različne začetne nepopolnosti.

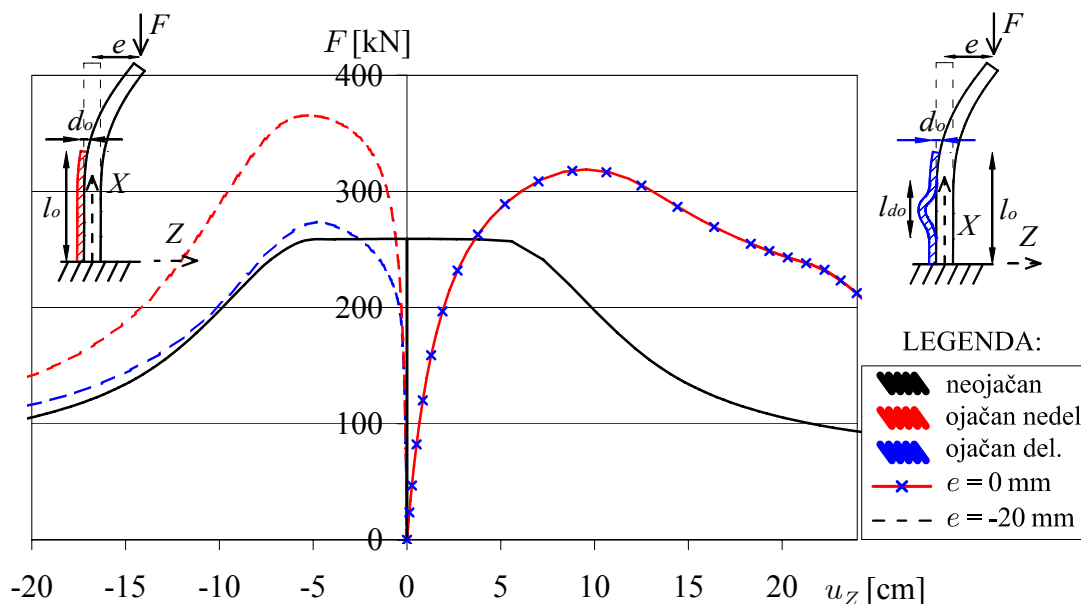
Figure 7.15: Load deflection paths of the cantilever with one-sided and both-sided additional reinforcement including imperfections.

Grafi obtežno deformacijske krivulje enostransko ojačenega, konzolno vpetega stebra, ponazarjajo asimetrično obnašanje konstrukcije ter ekscentrično delovanje lamele kot ojačitve na eni strani. V primeru dovolj majhne začetne nepopolnosti (npr.  $e = -10$  mm) se stebel izkloni v pozitivni smeri osi  $Z$  (rdeči grafi). Enak, vendar obojestransko ojačen stebel, je osno simetričen. Zato v primeru stebra brez začetne nepopolnosti dosežemo višjo nosilnost. Po določitvi bifurkacijske točke se odločimo za pot po obtežno deformacijski krivulji v pozitivni ali negativni smeri osi  $Z$  (polna modra krivulja). Zaradi preglednosti je na sliki 7.15 prikazana le krivulja za pozitivno smer. Obojestranska ojačitev vpliva na višjo nosilnost stebra tudi v primeru začetne nepopolnosti  $e = 10$  mm (črtkana modra krivulja). V primeru daljših ojačitev ( $l_o > 0.5$ ) je razlika med enostransko in obojestransko ojačitvijo še večja.

### 7.3.3 Vpliv delaminacije na ojačitev stebra

V prejšnjih primerih smo predpostavljali popolnost stika med stebrom in ojačitvijo. Zaradi različnih razlogov lahko na manjših odsekih stika med stebrom in ojačitvijo pride do razslojevanja. Tak, nepopoln

stik bomo modelirali z delaminacijo med osnovnim in dodanim elementom. Obravnavali bomo konzolno in prostoležeče podprti steber, ki sta ojačena bodisi z enostransko ali obojestranskima lamelama. Preučevali bomo vpliv delaminacije na eni strani nosilca za stebre z začetno geometrijsko nepopolnostjo. Slika 7.16 prikazuje krivulje sila – prečni pomik za enostransko ojačen konzolno vpeti steber z in



Slika 7.16: Obtežno-deformacijske krivulje konzole z nedelaminirano in delaminirano enostransko ojačitvijo.

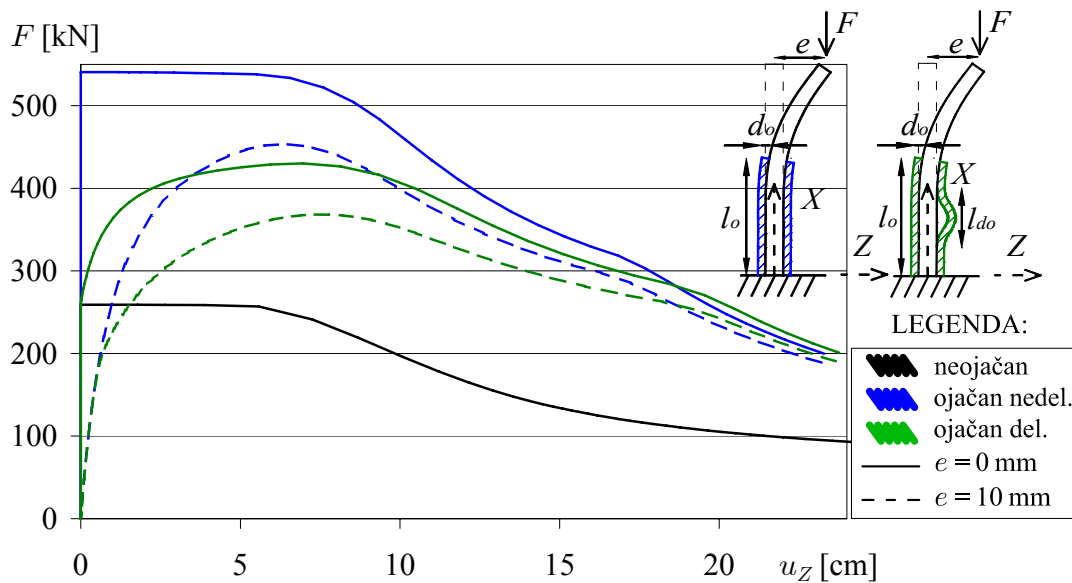
Figure 7.16: Load deflection paths of the cantilever with additional reinforcement with/without delamination.

brez delaminacije. Ojačitev je izvedena z lamelo, določeno s podatki:  $l_o = 0.5$ ,  $r_o = 0.25$ ,  $d_o = 10$  mm. Konzola je analizirana brez in z začetno nepopolnostjo osi  $e = -20$  mm. Delaminacija je relativne dolžine  $l_d = 0.25$ , lega pa je na četrtini dolžine  $l_{po} = 0.25$ .

V rdeči barvi so prikazane krivulje enostransko ojačenega stebra ob upoštevanju popolnega stika med stebrom in ojačitvijo. Raven nosilec (polna rdeča črta) se izkloni v smeri pozitivne osi  $Z$ , medtem ko zadostna nepopolnost v negativni smeri osi  $Z$  povzroči, da se steber izkloni v smeri proti ojačitvi. Z modro barvo prikazujemo rezultate za steber enakih karakteristik in ojačitve ob upoštevanju delaminacije na stiku med stebrom in lamelo. V primeru ravnega stebra (izklon poteka v pozitivni smeri osi  $Z$ ) je lamela ves čas v nategu. Delaminacija v tem primeru ne vpliva na potek obtežno deformacijske krivulje, rezultati za nedelaminiran in delaminiran nosilec so v tem primeru enaki. V primeru začetne nepopolnosti v negativni smeri osi  $Z$ , ki povzroči izklon proti ojačitvi, pa je nosilnost delaminirane konstrukcije bistveno nižja od nosilnosti v primeru popolnega stika. To je posledica lokalnega uklona tlačene lamele.

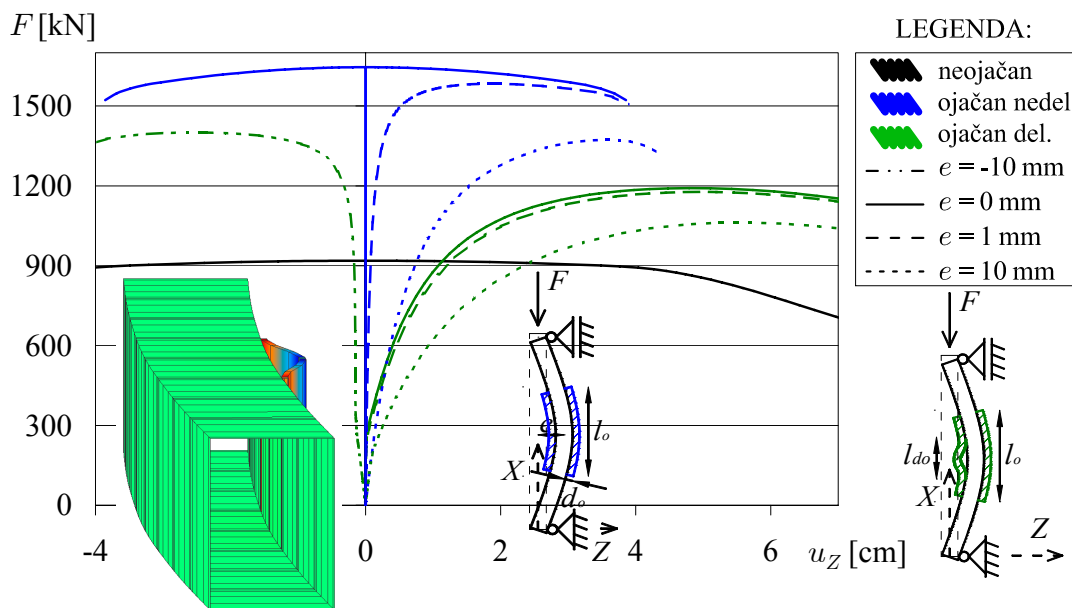
Na sliki 7.17 prikazujemo obtežno deformacijske poti za konzolno vpeti obojestransko ojačen steber. Podatki za lamele so:  $l_o = 0.5$ ,  $l_{po} = 0.25$ ,  $d_o = 10$  mm. Začetna geometrijska nepopolnost je  $e = 10$  mm, nepopolnost stika pa predstavlja delaminacija relativne dolžine  $l_d = 0.25$  in relativne lege  $l_1 = 0.25$ .

V tem primeru je ob upoštevanju popolnega stika moč zaslediti bifurkacijsko kritično točko, iz katere se lahko premaknemo v pozitivno oz. negativno  $Z$  smer (modra polna krivulja). Delaminacija na stiku med betonom in ojačitvijo tudi v primeru obojestransko ojačenega stebra povzroči, da se ob določeni



Slika 7.17: Obtežno-deformacijske krivulje konzole z nedelaminirano (modro) in delaminirano (zeleno) obojestransko ojačitvijo.

Figure 7.17: Load deflection paths of the cantilever with additional both-sided reinforcement with/without delamination.



Slika 7.18: Obtežno deformacijske krivulje sredine prostoležečega stebra z nedelaminirano (modro) in delaminirano (zeleno) obojestransko ojačitvijo.

Figure 7.18: Load deflection paths of the simply supported beam with additional both-sided reinforcement with/without delamination.

kritični sili, ki je veliko nižja od nosilnosti konstrukcije, trak izkloni. Obtežno deformacijska pot je zaradi delaminacije asimetrična, nosilnost stebra pa veliko nižja od nosilnosti za popolni stik (zeleno polna krivulja). Ob upoštevanju začetne geometrijske nepopolnosti opazimo takojšnje prečne pomike v smeri začetne nepopolnosti, nosilnost delaminiranega stebra pa je še vedno nižja od primera, kjer je

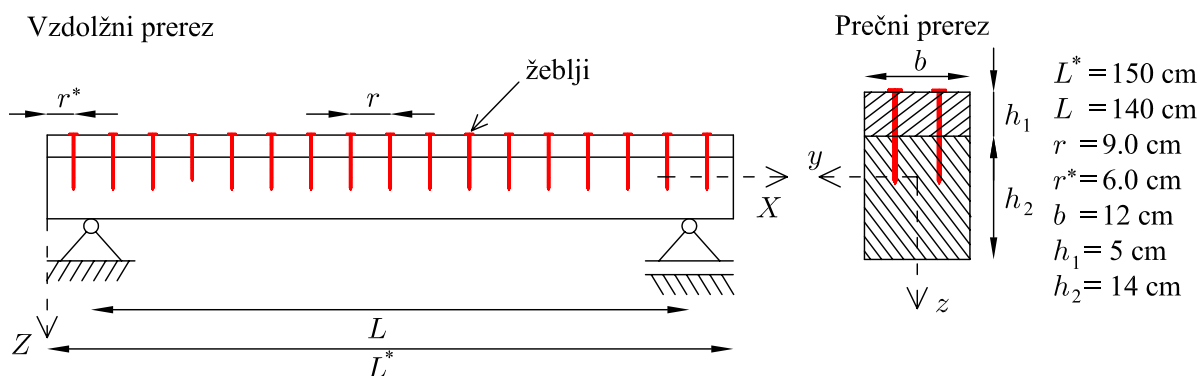


upoštevati popolni stik med betonom in ojačitvijo.

Podobne zaključke lahko povzamemo za primer prostoležeče podprtega stebra. Z upoštevanjem delaminacije sicer raven steber izgubi simetričnost in bifurkacijsko točko. Končna nosilnost stebra je v primeru delaminacije nižja od nosilnosti nedelaminiranega stebra. Nižjo nosilnost delaminiranega stebra je opaziti tudi v primeru enakega stebra z začetno geometrijsko nepopolnostjo. Na sliki 7.18 prikazujemo krivulje sila – pomik za prostoležeči steber, ojačen z lamelami  $l_o = 0.5$ ,  $l_{po} = 0.5$ ,  $d_o = 10$  mm. Začetno nepopolnost stika predstavlja delaminacija relativne dolžine  $l_{do} = 0.25$  in relativne lege  $r_{do} = 0.5$ .

## 7.4 Leseni kompozitni nosilec

Analiziramo prostoležeči nosilec, ki je sestavljen iz dveh elementov pravokotnega prečnega preseza. Sloja sta med seboj povezana z žebli, ki jih ekvidistantno zabijemo vzdolž nosilca. Nosilec na sredini razpona obremenimo s točkovno obtežbo, ki jo povečujemo do porušitve nosilca. Pri tem opazujemo vertikalne pomike nosilca ter vzdolžni zamik referenčnih točk v odvisnosti od velikosti obtežbe. Geometrijski podatki kompozitnega nosilca so prikazani na sliki 7.19.



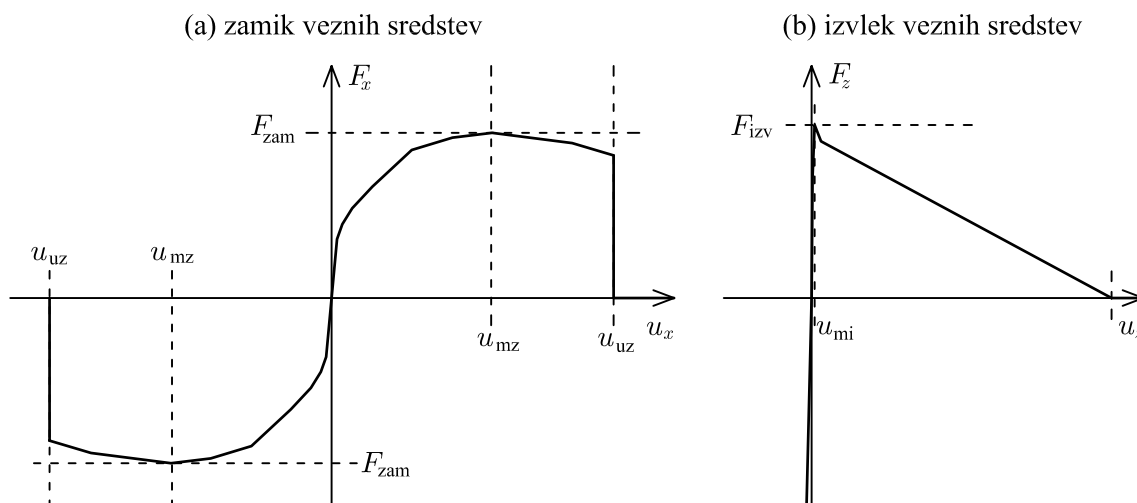
Slika 7.19: Leseni kompozitni nosilec in geometrijski vhodni podatki.

Figure 7.19: Timber composite beam and geometrical data.

### 7.4.1 Eksperiment

Za nosilec, prikazan na sliki 7.19, so bile v okviru diplomske naloge (Čas (1999)) narejene eksperimentalne raziskave. Preiskanih je bilo več kompozitnih nosilcev z različno postavitvijo veznih sredstev. Nosilci so bili obremenjeni z batom, ki je simuliral točkovno obtežbo. Obtežbo so povečevali do porušitve, pri tem pa merili vertikalne pomike treh referenčnih točk na nosilcu in zamike na stiku med nosilcema (dve merilni napravi; induktivni merilci 'IM' in konjički 'D'). Izmerjene so bile tudi tlačne in natezne trdnosti vzorcev ter opravljene strižne in natezne preiskave nosilnosti veznih sredstev.

Računska modela materiala in stika povzamemo po Čas (1999) in Planinc s sodelavci (2008). Za konstitucijski model lesa smo privzeli odsekoma linearen diagram, kot je prikazan v poglavju 2.3.4.2. Karakteristične vrednosti specifičnih deformacij so  $\varepsilon_{en} = 0.0032$ ,  $\varepsilon_{et} = -0.0035$ ,  $\varepsilon_{un} = 0.0065$ ,  $\varepsilon_{ut} = -0.0093$ , pripadajoči elastični moduli pa  $E_{n,l} = E_{t,l} = 1050$  kN/cm<sup>2</sup>,  $E_{n,u} = 0.1E_{n,l}$ ,  $E_{t,u} = 0.05E_{t,l}$ . Iz rezultatov raziskav podajnosti veznih sredstev (Čas (1999)) povzemamo diagrama za strižno in natezno nosilnost posameznega žeblja (slika 7.20). Konstitucijska modela, prikazana na sliki 7.20, sta odsekoma



Slika 7.20: Konstitucijski zakon za en žebelj v strigu in nategu.  
Figure 7.20: Constitutive law for one nail: shear and tension.

linearna diagrama, dobljena na osnovi povprečja eksperimentalnih rezultatov odziva enega žebelja. Vrednosti iz diagrama na sliki 7.20 prikazujemo v preglednici 7.4.

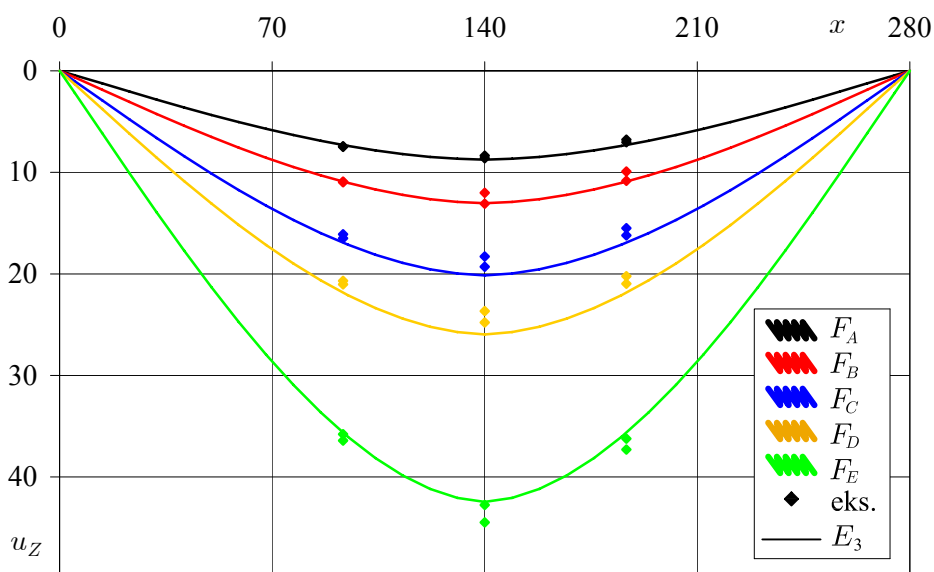
Preglednica 7.4: Vrednosti v konstitucijskem diagramu za zamik in izvlek enega veznega sredstva.  
Table 7.4: Constitutive law values for shear and tension of one nail.

Zamik enega veznega sredstva										
sila $F_x$ [kN]	0	0.0625	0.125	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	3.5
zamik $u_x$ [cm]	0	0.6885	0.8586	1.0617	1.3173	1.7478	1.8956	1.9456	1.8350	1.6925
Izvlek enega veznega sredstva										
sila $F_z$ [kN]	0	0.4020	0.5770	0.5246	0.0228					
zamik $u_z$ [cm]	0	0.01	0.03	0.1	4.0					

## 7.4.2 Numerična analiza

Pri numeričnem reševanju zaradi simetrije modeliramo le polovico konstrukcije. Za model smo uporabili skupno 36 elementov enake dolžine. Za večje število elementov se odločimo zaradi preprostejšega upoštevanja konstitucijskega zakona posameznega veznega sredstva. Nelinearne vzmeti torej postavimo v krajišča vseh elementov, saj se tam nahajajo vezna sredstva. Zaradi velikega števila elementov, se odločimo za elemente nižjega reda  $E_3$ .

Numerično analizo naredimo za pet obtežnih primerov ( $F_A = 7.624$  kN,  $F_B = 11.055$  kN,  $F_C = 16.123$  kN,  $F_D = 20$  kN in  $F_E = 30.25$  kN). Numerične rezultate pripadajočih vertikalnih pomikov osi nosilca prikazujemo na sliki 7.21 skupaj z rezultati dveh eksperimentov. Iz slike 7.21 lahko opazimo odlično ujevanje numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi za obtežbe  $F_{A-D}$ . Malo večja odstopanja numeričnih rezultatov od eksperimenta opazimo le v primeru obtežbe  $F_E$ , ki pa je tik pred poružitvijo nosilca. V bližini porušne obtežbe so običajna večja odstopanja pomikov že pri eksperimentih, zato so numerični rezultati dovolj natančni. Na rezultate pomembno vpliva izbrani konstitucijski model materiala in stika.

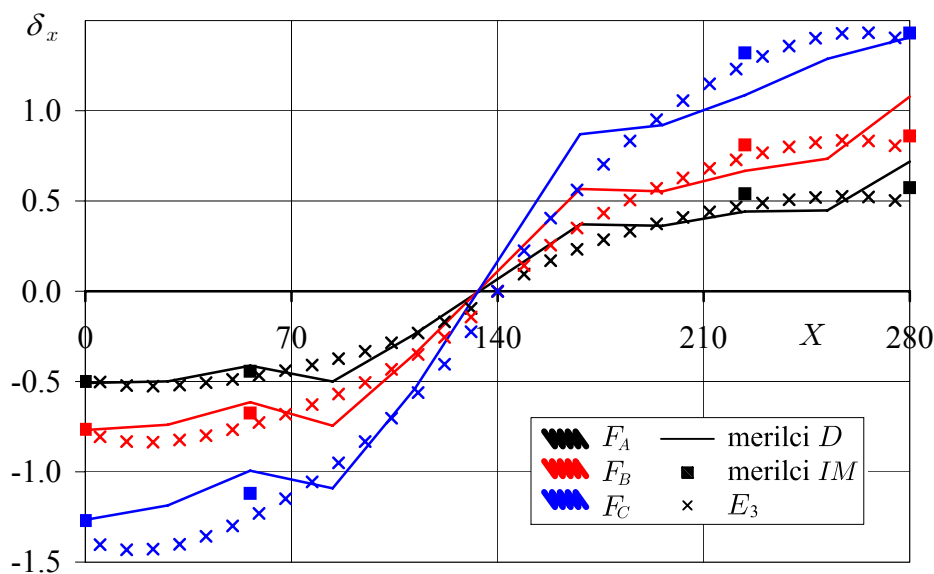


Slika 7.21: Vertikalni pomiki kompozitnega nosilca za različne obtežbe.  
Figure 7.21: Vertical deflections of a composite beam for various loads.

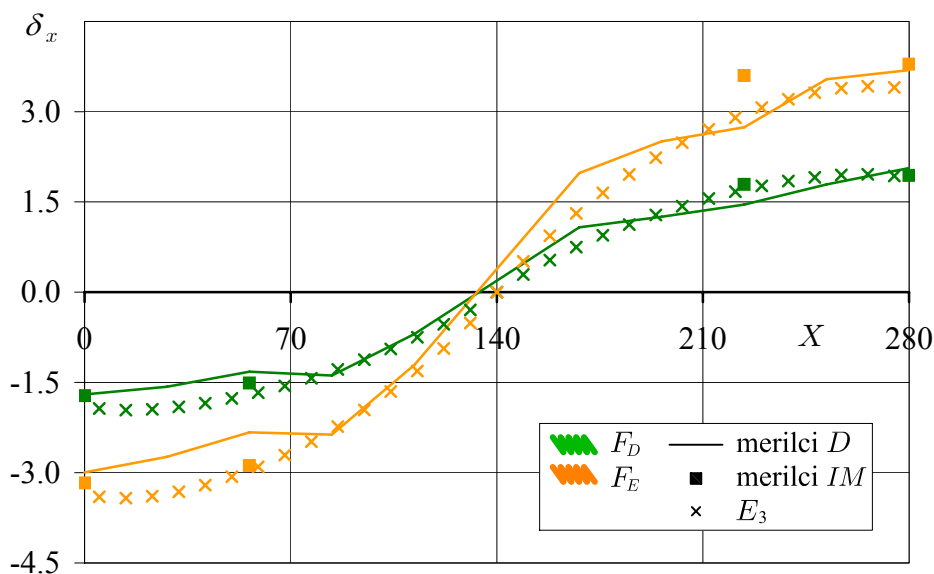
Pri rezultatih za vertikalne pomike je pomembnejši model materiala, ki je bil, kot kažejo rezultati, usrezen.

Konstitucijski model stika pa za izbrani primer dominira pri osnih pomikih. Zaradi podajnosti veznih sredstev se na stiku zgornjega in spodnjega elementa pojavijo zamiki. Na sliki 7.22 prikazujemo eksperimentalne rezultate za zamike na stiku skupaj z numerično določenimi.

Rezultati so prikazani za različne nivoje obtežbe  $F_A$ ,  $F_B$  in  $F_C$ . Ujemanje med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati je odlično, manjše odstopanje je vidno le ob podporah. Na sliki 7.23 prikazujemo



Slika 7.22: Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za različne nivoje obtežbe.  
Figure 7.22: Bond slip of a composite timber beam, various loads.



Slika 7.23: Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za večje obtežbe.  
Figure 7.23: Bond slip of a composite timber beam, higher loads.

rezultate še za obtežni primer  $F_D$ ,  $F_E$ . Tudi za ta dva obtežna primera opazimo ujemanje numeričnih in eksperimentalnih rezultatov, sploh če upoštevamo razliko med eksperimentalnimi vrednostmi, ki so izmerjene na različna načina. Odstopanja med obema načinoma meritev so večja kot med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati.

Ujemanje računskih in eksperimentalnih rezultatov na vseh nivojih obtežbe nam kaže na to, da je predstavljeni postopek primeren za analizo sestavljenih lesenih nosilcev. Na deformiranje nosilca in njegovo nosilnost ima največji vpliv izbira ustreznega konstitucijskega modela za material. V preglednici 7.5 prikazujemo še numerične in eksperimentalne rezultate sil, pri katerih se kompozitni nosilec poruši. Poleg kritičnih sil izpišemo še razliko med eksperimentalnimi in numeričnimi vrednostmi.

Preglednica 7.5: Porušna obtežba kompozitnega nosilca in pripadajoči pomiki.

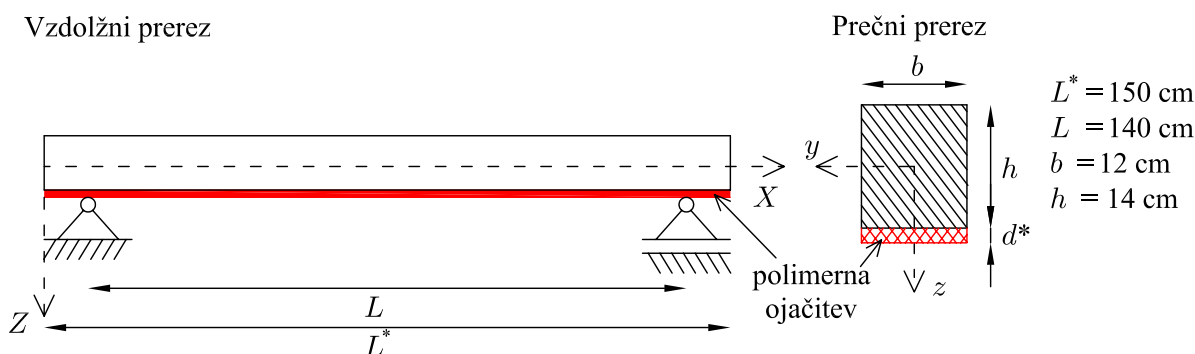
Table 7.5: Ultimate load and ultimate deflections for the composite beam.

	eksp. 1	eksp. 2	povp. eks.	num.	razlika [%]
$F_Z$ [kN]	31.37	30.25	30.81	30.64	0.55
$u_Z$ [mm]	50.10	42.75	46.425	43.38	6.56

Tudi v primeru porušnih sil opazimo odlično ujemanje numeričnih in eksperimentalnih rezultatov. Vrednosti končnih pomikov, dobljenih z numerično analizo, so med zgornjo in spodnjo vrednostjo eksperimentalnih rezultatov. Opozorimo še enkrat na precejšen raztros pomikov pri porušni obtežbi in posledično premajhno število eksperimentalnih rezultatov za dobro oceno. Iz ujemanja numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za naš primer, lahko zaključimo, da je naš numerični postopek primeren za analizo obravnavanih kompozitnih nosilcev.

### 7.4.3 Ojačitev lesenega nosilca s polimernimi trakovi

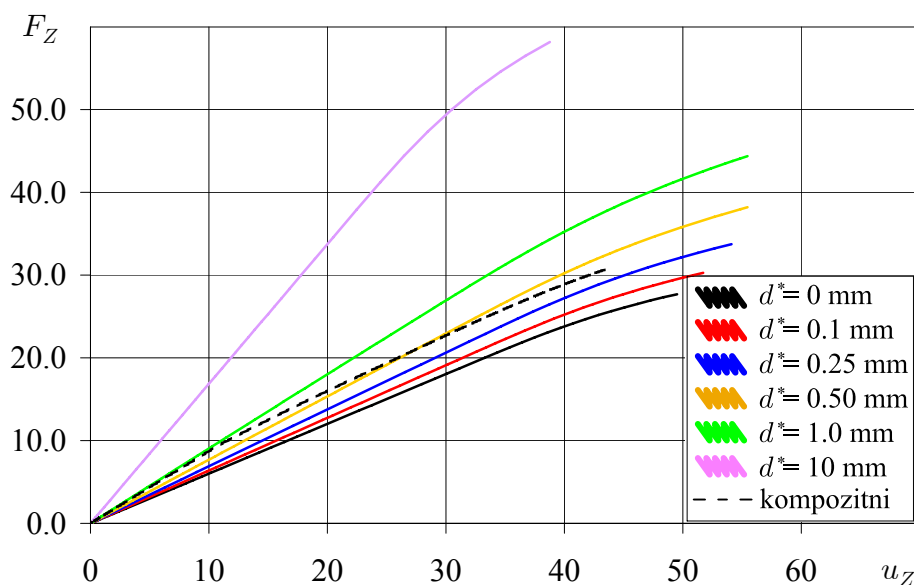
Za konec obravnavamo še lesen nosilec, ojačen s polimernimi trakovi. Dimenzije prečnega prereza smo vzeli enake kot za spodnji nosilec iz prejšnjega primera, saj nas zanima primerjava med nosilnostjo lesenega nosilca ojačenega z dodatnim žebeljanim lesenim nosilcem in nosilnostjo lesenega nosilca, ojačenega s polimernim trakom. Polimerni trak je nameščen po celotni dolžini na spodnji strani nosilca, predpostavljena je popolna povezava med osnovnim nosilcem in ojačitvijo. Materialne karakteristike lesa obdržimo iz prejšnjega primera, za polimerno ojačitev pa povzamemo obliko diagrama iz Zupan in Saje (2005). Karakteristična vrednost natezne in tlačne specifične deformacije je  $|\varepsilon_{mk}| = 0.01818$ , pripadajoča tlačna in natezna trdnost pa je so  $|f_{mk}| = 400 \text{ kN/cm}^2$ . Geometrijski podatki ojačenega lesenega nosilca so prikazani na sliki 7.24.



Slika 7.24: Ojačeni leseni nosilec in geometrijski vhodni podatki.

Figure 7.24: Reinforced timber beam and geometrical data.

Analogno kot v prejšnjem primeru, smo nosilec na sredini razpona obremenjevali s točkovno obtežbo do porušitve. Pri tem smo opazovali pomike osi nosilca in deformacije v nateznem polimernem traku. Numerično analizo smo ponovili za različne debeline ojačitve ( $d^* = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0$  in  $10 \text{ mm}$ ).



Slika 7.25: Obtežno deformacijske krivulja za lesen nosilec s polimerno ojačitvijo in kompozitni nosilec.

Figure 7.25: Load deflection path for beam with fiber-reinforcement and composite beam.

Na sliki 7.25 prikazujemo obtežno deformacijske krivulje v sredinski točki za različne debeline ojačitve skupaj z obtežno deformacijsko krivuljo kompozitnega nosilca iz prejšnjega primera.

Iz grafov na sliki 7.25 opazimo, da se z večanjem debeline polimerne ojačitve viša tudi nosilnost konstrukcije. Povečanje nosilnosti zaradi dodatne polimerne ojačitve se zgodi kljub dejstvu, da je porušitev nosilca nastopila zaradi preseženih tlačnih napetosti v lesu, medtem ko je bila natezna trdnost polimernega traku v večini primerov izkoriščena manj kot do polovice. Neojačen leseni nosilec ( $d^* = 0$ ) je po pričakovanjih podajnejši od kompozitnega, nižja je tudi njegova porušna obtežba. V primeru, da enak nosilec ojačamo s polimernim trakom debeline  $d^* > 0.1$  mm, pa je njegova nosilnost višja od nosilnosti kompozitnega nosilca. Nosilci, ojačeni s tanjšimi polimernimi trakovi, so podajnejši od kompozitnih nosilcev, v primeru debelejšega traku ( $d^* > 1.0$  mm), pa je tudi začetna togost takih nosilec višja od sestavljenih. To je razvidno tudi iz rezultatov sil in pripadajočih pomikov, pri katerih se ojačeni nosilci porušijo (preglednica 7.6). Pomiki ob poružitvi nosilca z močnejšo ojačitvijo ( $d^* = 10$  mm) so manjši od vseh ostalih pomikov, tudi od porušnih pomikov kompozitnega nosilca.

Preglednica 7.6: Porušna obtežba kompozitnega nosilca in pripadajoči pomiki.

Table 7.6: Ultimate load and ultimate deflections for the composite beam.

$d^*$ [kN]	0	0.1	0.25	0.50	1.0	10	kompozitni
$F_Z$ [kN]	27.69	30.28	33.74	38.20	44.38	58.17	30.64
$u_Z$ [mm]	49.50	51.71	54.10	55.45	55.46	38.76	43.38

## 8 ZAKLJUČKI

V disertaciji je predstavljena nova numerična metoda za analizo togosti, duktilnosti in nosilnosti materialno nelinearnih prostorskih linijskih konstrukcij ob vplivu materialnih in geometrijskih nepopolnosti. Metoda temelji na numerični formulaciji kinematično točne teorije nosilcev, kjer za osnovne neznanke problema izberemo deformacijske količine. Elemente povezujemo v konstrukcijo prek robnih pomikov in zasukov. Formulacija omogoča poljubno velike pomike in zasuke, kar je posebej pomembno za analizo v postkritičnem območju. Poleg tega omogoča poljubno začetno geometrijo elementov, kar pomeni da lahko že z majhnim številom elementov modeliramo tudi ukrivljene in osno zavite konstrukcije. Končni elementi omogočajo konsistenco ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil, s čimer dosežemo večjo natančnost in robustnost algoritma ob upoštevanju nelinearnosti materiala. Formulacija predstavlja primerno osnovo za analizo linijskih konstrukcij ob upoštevanju materialnih in geometrijskih nepopolnosti. Vendar pa taka analiza zahteva številne razširitve in dograditve ter prilagoditve nekaterih numeričnih metod. Spremljanje postkritičnega obnašanja smo omogočili z vključevanjem metod sledenja obtežno-deformacijskim potem in metod zaznavanja kritičnih točk. Te metode niso bile razvite za deformacijske končne elemente, zato smo jih ustrezno predelali in vgradili v numerično formulacijo. Težišče doktorskega dela je v numeričnem modeliranju delaminiranih nosilcev, pri čemer predstavljena metoda omogoča različne nelinearne konstitucijske modele na stiku med lamelami. Tako lahko uspešno modeliramo tako delaminirane kot slojevite nosilce. Nelinearen konstitucijski zakon na nivoju prereza ali med lamelami vključimo v model prek nelinearnih vzmeti na nivoju konstrukcije.

Poglavitne značilnosti predstavljene numerične metode so:

- Deformacijski končni elementi so primerni za postkritično analizo konstrukcij. Ob korektnem upoštevanju nelinearnosti prostorskih zasukov in kinematično dopustnih popravkov rotacijskih deformacijskih količin učinkovito sledimo obtežno-deformacijskim potem, zaznavamo kritične točke, jih klasificiramo in se odločamo za smer nadaljevanja v razvejiščih - bifurkacijah. Ohranjena je kvadratična konvergenca osnovnega končnega elementa tako v bližini kritične točke kot tudi v postkritičnem območju.
- Obtežno-deformacijskim potem lahko sledimo s prilagodljivim korakom pri tem pa dosegamo visoko natančnost rezultatov tudi pri velikih korakih poti. Naša metoda daje natančne rezultate tudi ob redkejših mrežah elementov nižjega reda. Brez težav lahko spremljamo ukrivljene in zvite začetne oblike nosilcev tudi v primeru velikih deformacij v postkritičnem območju.
- Pri sledenju obtežno deformacijskih poti poleg pomikov upoštevamo tudi prostorske zasuke. Tak pristop je splošnejši, vendar zahteva pravilno upoštevanje neaditivnosti prostorskih zasukov.
- Numerični model delaminiranih konstrukcij omogoča natančno in robustno analizo nosilcev z eno

ali več razpokami - delaminacijami vzdolž osi nosilca. Pri tem predstavljeni model omogoča upoštevanje strižnih deformacij in povezane obravnave osnih in upogibnih deformacij.

- Numerični rezultati za delaminirane konstrukcije se ob ustreznih zanemaritvah (strižni vplivi) dobro ujemajo s klasičnimi teorijami delaminacij. Še pomembneje pa je, da se kritične sile za delaminirane ravninske konstrukcije povsem ujemajo z našimi lastnimi analitičnimi rezultati, ki zajemajo strižni vpliv.
- Parametrične študije kažejo vpliv mnogih dejavnikov na kritično silo delaminiranih nosilcev. Tako so uklonske sile nosilcev iz strižno stisljivega materiala mnogo nižje kot strižno nestisljivega. Manj ugodne so daljše delaminacije bližje roba prereza in večje število delaminacij. Pomemben je tudi način podpiranja.
- Naša metoda omogoča tudi analizo konstrukcij s prisotnostjo delaminacij, ki so na začetku ukrivljene in/ali osno zavite. Prisotnost delaminacij lahko bistveno spremeni obnašanje takih konstrukcij, še posebej v postkritičnem območju. Praviloma pa delaminacije znatno znižajo nosilnost takih konstrukcij.
- Numerična metoda je učinkovita tudi ob spremljanju kritičnega in postkritičnega obnašanja delaminiranih konstrukcij z različnimi začetnimi nepopolnostmi. Začetne nepopolnosti pomembno vplivajo tako na kritično silo kot tudi na postkritično obnašanje delaminirane konstrukcije.
- Prekrivanje lamel ob delaminacijah preprečimo z uporabo diskretnih bilinearnih vzmeti. Zaradi splošnosti pristopa pa je metoda uporabna tudi za slojevite nosilce z različnimi veznimi sredstvi in nosilce na elastični podlagi.
- Diskretne vzmeti opišemo z različnimi odsekoma linearnimi zakoni v vseh treh smereh lokalne baze referenčne lamele. Tak pristop omogoča realistično spremljanje delaminiranih in kompozitnih konstrukcij tudi ob velikih pomikih in zasukih lamel.
- Natančnost in zmogljivost predstavljenega postopka ponazarjamo na številnih računskih primerih, posebej pa so prikazane tri obsežnejše parametrične študije:
  - Bočna zvrnitev lesenega krožnega loka je zelo zanimiv problem, ki vključuje zahtevno geometrijsko nelinearno analizo. S predstavljeno metodo določimo optimalno višino loka in optimalno razporeditev bočnih podpor.
  - Dodatne jeklene lamele bistveno izboljšajo nosilnost armiranobetonskih stebrov. Prikazan je vpliv ojačitev ob upoštevanju nepopolnosti in delaminacij za geometrijsko in materialno nelinearne stebre.
  - Analiza kompozitnega lesenega nosilca pokaže ujemanje eksperimentalnih in numeričnih rezultatov za pomik in zdrs med sloji ob upoštevanju nelinearnega konstitucijskega modela za les skupaj z nelinearnim modelom za vezna sredstva.



## 9 SUMMARY

The aim of the dissertation was to create a new numerical method for analysis of the ductility, bearing capacity and postcritical behaviour of materially nonlinear space beam structures. The method should be able to analyse the influence of different material and geometrical imperfections on the behaviour of beam structures. Imperfections include the study of cracks, delaminations of beams and columns and the contact problem between the lamina.

Our approach stems from the geometrically exact nonlinear formulation approach, developed by Reissner (1981), and its numerical formulation presented by Zupan (2003a, 2003b). The formulation employs strain measures as the primary variables. Theoretical work represents the implementation of the modified arc-length method on spatial beam element based on strain measures. Special care is taken in proper consideration of non-additive three-dimensional rotations. Our procedure proves to be very efficient at handling materially nonlinear structures.

Next problem we were handling, is the determination of critical points. We are dealing with both, classification of the critical points and switching between branches at the bifurcation points. Therefore, we are able to analyze the phenomena such as in-plane and out-of-plane buckling of straight and curved planar beams, torsional buckling of spatial beams and the combination of these phenomena. Buckling failure of bearing elements is even more substantial in case of structures with initial imperfections. Our numerical formulation allows us to take into consideration an arbitrary nonlinear material model, as well as other imperfections, such as delaminations.

Delaminations in structures are modeled in third part of dissertation as the separate elements for which the proper boundary conditions must be considered. We also derive the analytical solutions for buckling loads of planar beams with multiple delaminations. The results show that analytical solutions which take shear into consideration are in total agreement with the results from literature and with our numerical results.

In the last part of the dissertation the contact problem at delamination is resolved using spatial springs between delaminated elements. Nonlinear constitutive law for springs is assumed to describe the contact of the laminae. Different constitutive models can be used for each local direction at the cross-sections. An arbitrary constitutive spring model allows us to solve the problem of overlapping of delaminated layers and to model spatial composite structures. Spatial springs are implemented in such way, that they rotate together with the deformed shape of the beam element thus the model considers properly large deformations of the beam..

To verify the proposed formulation, several numerical examples are made. They confirm, that all of the algorithms are built in our spatial formulation efficiently. Many examples are verified with respect to the relevant problems taken from literature, but we also show good comparison to experiment with de-

manding geometrical and material nonlinearities included. In this manner, we conclude the dissertation with three extensive numerical studies: optimal lateral support positioning and lateral buckling capacity of curved timber arches, bearing capacity of reinforced concrete beams with additional steel-plate reinforcement with possible delaminations and analysis of nailed composite timber beam.

From the obtained results, the following conclusions can be made:

- The spatial beam element based on strain measures is suitable for post-critical analyses of frame structures if the nonlinearities of the configuration space of three dimensional of rotations and the related rotational deformations are properly considered. In that case the convergence of the basic finite element is preserved.
- With the presented method, load deflection paths can be traced accurately also when using large arc-length steps and lower order elements. An arbitrary initial shape of the element allows us to analyse initially curved and axially twisted beams.
- Delaminated structures can be modeled as separate elements, considering the eccentricity of the elements and correct boundary conditions. Numerical results for critical buckling loads are in good agreement with our own analytical results and results, taken from the literature. With modified arc-length method, also the post-critical behaviour of delaminated beams can be observed. The delaminations in general reduce the bearing capacity of beam elements.
- The contact phenomena is taken into consideration by using discrete spatial springs between the lamina. A proper constitutive spring model prevents overlapping and represents an arbitrary presumed conditions at delaminations.
- The effectiveness and robustness of the presented method is shown on three parametric studies, from which we can point out:
  - An optimal height of timber arch, regarding to lateral buckling is shown, together with optimal supporting position.
  - The bearing capacity of reinforced concrete columns can be improved substantially by using additional steel plate reinforcement. Such reinforced columns are exposed to initial imperfections, such as initial deflection and delaminations.
  - The numerical investigation of timber composite beams confirms the applicability of the presented method. By using nonlinear constitutive model for timber and interlayer slip, our numerical results are in agreement with experimental ones.

## 10 VIRI

- Abbott, J.R. 1978. An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points. *J. Comput. Appl. Math.* 4: 19–27.
- Abdollahi, A., 1996a. Numerical strategies in the application of the FEM to RC structures-I. *Comput. and Struct.* 58 (6): 1173–1182.
- Abdollahi, A., 1996b. Investigation of objectivity in the application of the FEM to RC structures-II. *Comput. Struct.* 58 (6): 1183–1211.
- Alart, P., Barboteu, M., Gril, J. 2004. A numerical modelling of nonlinear 2D-frictional multicontact problems: application to post-buckling in cellular media. *Comput. Mech.* 34: 208–309.
- Alemdar, B.N., White, D.W. 2005. Displacement, flexibility, and mixed beam-column finite element formulations for distributed plasticity analysis. *J. Struct. Engrg.* 131 (12): 1811–1819.
- Alfano, G., Crisfield, M.A. 2003. Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 58: 999–1048.
- Alfano, G., Crisfield, M.A. 2001. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 50: 1701–1736.
- Ali, A., 1996. FEM analysis of concrete structures subjected to mode-I and mixed-mode loading conditions. *Comput. Struct.* 61 (6): 1043–1055.
- Almond, E. A. 1970. Delamination in banded steels, *Metallurgical transactions* 1.
- Al-Rasby, S.N. 1991. Solution techniques in nonlinear structural analysis. *Comput. & Struct.* 40: 985–993.
- Argyris, J. 1982. An excursion into large rotations, *Comput. Method Appl. M.* 32, 85–155.
- Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannkis, G., Scharpf, D.W. 1978a. On large displacement small analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Comput. Method Appl. M.* 15: 99–135.
- Argyris, J.H., Dunne, P.C., Scharpf, D.W. 1978b. On large displacement small analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Comput. Method Appl. M.* 14: 401–451.
- Batoz, I.L. and Dhatt, G. 1979. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 14: 1262–1266.
- Bažant, Z.P., Lin, F.B., 1988. Nonlocal smeared crack model for concrete fracture. *J. Eng. Mech.-ASCE* 114 (11): 2493–2510.
- Begley, M.R., Cox, B.N., McMeeking, R.M. 1995. Time dependent crack growth in ceramic matrix

composites with creeping fibers. *Acta Metall. Mater.* 43: 3927–3936.

Bellini, P.X., Chulya, A. 1987. Improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations. *Compos. Struct.* 26: 99–110.

Bergan, P.G., Holand, I. 1979. Nonlinear finite element analysis of concrete structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 17: 443–467.

Bocca, P., Carpinteri, A., Valente, S., 1990. Size effects in the mixed-mode crack propagation: softening and snap-back analysis. *Eng. Fract. Mech.* 35 (9): 159–170.

Bocca, P., Carpinteri, A., Valente, S., 1991. Mixed-mode fracture of concrete. *Int. J. Solids Struct.* 27 (9): 1139–1153.

Bolander, J., Hikosaka, H., 1992. Applying nonlocal smeared crack concepts to modelling concrete fracture. V: Bazant, Z.P. (Ed.), *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Elsevier, London: 198–203.

Borri, A., Corradi, M., Grazini, A. 2005. A method for flexural reinforcement of old wood beams with CFRP materials. *Compos. Part B-Eng.* 36: 143–153.

Brandinelli, L., Massabo, R. 2003. Free vibration of delaminated beam-type structures with crack bridging. *Compos. Struct.* 61: 129–142.

Bruns, T.E., Sigmund, O., Tortelli, D.A. 2002. Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 29: 1365–1391.

Cardona, A., Geradin, M. 1988. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 26: 2403–2438.

Cardona, A., Huespe, A. 1998. Continuation methods for tracing the equilibrium path in flexible mechanics analysis. *Eng. Computation* 15: 190–220.

Carpinteri, A., 1989. Size-scale effect on the brittleness of concrete structures: dimensional analysis and snap-back instability. V: Li, V.C., Bazant, Z.P. (Eds.), *Fracture Mechanics: Application to Concrete ACI-SP 118*. American Concrete Institute, Detroit: 197–235.

Carpinteri, A., Massabo, R. 1997. Continuous vs discontinuous bridged-crack model for fiber-reinforced materials in flexure. *Int. J. Solids Struct.* 34: 2321–2338.

Carrera, E. 1994. A study on arc-length methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Comput. Struct.* 50 (2): 217–229.

Cartie, D.D.R., Cox, B.N., Fleck, N.A. 2004. Mechanisms of crack bridging by composite and metallic rods. *Compos. Part A-Appl. S.* 35: 1325–1336.

Cendon, D.A., Galvez, J.C., Elices, M., Planas, J., 2000. Modelling the fracture of concrete under mixed loading. *Int. J. Fracture* 103, 293–310.

Chai, H., Babcock, C. D., Knauss, W. G. 1981. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Struct.* 17: 1069–1083.

Chan, S.L. 1992. Large deflection kinematic formulations for three-dimensional framed structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 95: 17–36.

Chen, H. P. 1991. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth. *AIAA Journal* 29, No 5.: 813–819.

Clarke, M. J., Hancock, G. J. 1990. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis.

Int. J. Numer. Meth. Eng. 55: 1215–1237.

Crisfield, M.A. 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Comput. Struct.* 13: 55–62.

Crisfield, M.A. 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1 (John Wiley & Sons, Chichester).

Crisfield, M.A. 1997. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 2 (John Wiley & Sons, Chichester).

Cui, W., Wisnom, M.R. 1993. A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites. *Composites* 24, 467–474.

Čas, B. 1999. Vpliv podajnosti stika na togost in nosilnost sestavljenih nosilcev. *Diplomska naloga*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

DaDeppo, D.A., Schimdt, R. 1975. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *J. Appl. Mech.* 42: 894–896.

Dadkhah, M.S., Cox, B.N., Morris, W.L. 1995. Compression-compression fatigue of 3D woven composites. *Acta Metall. Mater.* 43: 4235–4245.

Darlington, L. Zidani, K. 2002. The stabilizing effects of fiber bridges on delamination cracks. *Compos. Sci. Techno.* 62: 83–90.

De Borst, R., 1987. Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solid. *Comput. Struct.* 25: 211–224.

De Borst, R., Remmers, J.J.M. 2006. Computational modelling of delamination. *Compos. Sci. Techno.* 66: 713–722.

Dellnitz, M, Werner, B. 1989. Computational methods for bifurcation problems with symmetries - with special attention to steady-state and hopf-bifurcation points. *J. Comput. Appl. Math.* 26: 97–123.

Deng, C.-G. 1996. Tracing equilibrium paths of elastic plates under different loading paths. *Int. J. Solids Struct.* 33: 595–608.

Desayi, P., Krishnan, S. 1964. Equation for the stress-strain curve of concrete. *Journal of American Concrete Institute* 61: 345–350.

Dutta, A., White, D.W. 1992. Large displacement formulation of three-dimensional beam element with cross-sectional warping. *Comput. Struct.* 45: 9–24.

Edwards, A.D., Yannopoulos, P.J. 1979. Local bond-stress to slip relationship for hot rolled deformed bars and mild steel plain bars. *J. Am. Concrete I.* 76: 405–420.

El-Ghazaly H.A., Monforton, G.R. 1989. Analysis of flexible frames by energy search. *Comput. Struct.* 32: 75–86.

Euler, L. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Lausanne.

Fafard, M., Massicotte, B. 1993. Geometrical interpretation of the arc-length method. *Comput. Struct.* 46: 603–615.

Felippa, C. A. 1987. Traversing critical points with penalty spring, Pande and Middleton, eds., *Transient/dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials* (Nijhoff, Dordrecht) C2/1–C2/8.

- Feng, Y.T., Perić, D., Owen, D. Rj. J. 1995. Determination of Travel Directions in Path-Following Methods. *Math. Comput. Model.* 21: 43–59.
- Feng, Y.T., Perić, D., Owen, D. Rj. J. 1996. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Comput. & Struct.* 58: 479–485.
- Ferracuti, B., Savoia, M., Mazzotti, C. 2006. A numerical model for FRP-concrete delamination. *Compos. Part B-Eng.* 37: 356–364.
- Forde, B.M.R., Stiemer, S.F. 1987. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Comput. Struct.* 27: 625–630.
- Foster, S.J., Budiono, B., Gilbert, R.I., 1996. Rotating crack finite element model for reinforced concrete structures. *Comput. Struct.* 58 (1): 43–50.
- Freddi, F., Savoia, M. 2008. Analysis of FRP–concrete debonding via boundary integral equations. *Eng. Fract. Mech.* 75: 1666–1683.
- Fujii, F. 1989. Scheme for elasticas with snap-back and looping. *ASCE J. Engrg. Mech.* 115: 2166–2181.
- Fujii, F., Choong, K.K. 1992. Branch switching in bifurcation of structures. *J. Eng. Mech. - ASCE* 118: 1578–1596.
- Fujii, F., Ikeda, K., Noguchi, H., Okazawa, S. 2001. Modified stiffness iteration to pinpoint multiple bifurcation points. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190: 2499–2522.
- Fujii, F., Okazawa, S. 1997. Bypass, homopoty path and local iteration to cumpute the stability point. *Struct. Eng. Mech.* 5: 577–586.
- Fujii, F., Ramm, E. 1997. Computational bifurcation theory: path-tracing, pinpointing and path-switching. *Eng. Struct.* 19: 385–392.
- Fujikake, M. 1985. A simple approach to bifurcation and limit point calculations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 21: 183–191.
- Galvez, J.C., Cervenka, J., Cendon, D.A., Saouma, V., 2002. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. *Cement and Concrete Res.* 32: 1567–1585.
- Geers, M.G.D. 1999a. Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part I - The subplane control approach. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 46: 177–204.
- Geers, M.G.D. 1999b. Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part II - Comparative performance analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 46: 205–230.
- Geradin, M., Rixen, D. 1995. Parametrization of finite rotational and computational dynamics: a review. *Revue europeenne dees elements finis* 4: 497–553.
- Gerstle, W.H., Xie, M., 1992. FEM modelling of fictitious crack propagation in concrete. *J. Eng. Mech.-ASCE* 118 (2): 416–434.
- Gjelsvik, A., Bodner, S.R. 1962. The energy criterion and snap buckling of arches. *J. Appl. Mech.:* 87–134.
- He, M., Cox, B.N. 1998. Crack bridging by through-thickness reinforcement in delaminating curved structures. *Compos. Part A-Appl. S.* 29: 377–393.
- Hellweg, H.-B., Crisfield, M.A. 1998. A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Comput.*

Struct. 66 (5): 705–709.

Hsiao, K.M., Horng, H.J., Chen, Y.R. 1987. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Comput. & Struct.* 27: 769–981.

Huang, H., Kardomateas, G.A. 1998. Buckling of orthotropic beam-plates with multiple delaminations. *Int. J. Solids Struct.* 35: 1355–1362.

Huang, N.N., Tauchert, T.R. 1991. Large deflections of laminated cylindrical and doubly-curved panels under thermal loading. *Comput. Struct.* 41: 303–312.

Hwang S. F., Liu, G.H. 2001. Buckling behavior of composite laminates with multiple delaminations under uniaxial compression. *Compos. Struct.* 53: 235–243.

Hwang S. F., Mao, C.P. 1999. The delamination buckling of single-fibre system and interply hybrid composites. *Compos. Struct.* 46: 279–287.

Hwang S. F., Mao, C.P. 2001. Failure of delaminated interply hybrid composite plates under compression. *Compos. Sci. Technol.* 61 (11): 1513–1527.

Ibrahimbegović, A. 1995. On the finite element implementation of geometrically non-linear Reissner's beam theory: 3d curved beam element. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 122: 11–26.

Ibrahimbegović, A. 1997. On the choice of finite rotation parameters. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 149: 49–71.

Ibrahimbegović, A., Frey, F. 1993. Finite element analysis of linear and nonlinear deformations of elastic initially curved beams. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 36: 3239–3258.

Ingraffea, A.R., Gerstle, W.H., 1984. Non-linear fracture models for discrete crack modelling. In: Shah, S.P. (Ed.), *Applications of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO-ARW., September. Martinus-Nijhoff, pp. 247–285.

Iura, M., Atluri, S. N. 1989. Dynamics analysis of finetely stretched and rotated three-dimensional space curved beams. *Comput. Mech.* 4: 73–88.

Iura, M., Suetake, Y., Alturi, S.N. 1998. Variational principle of beams undergoing finite rotations, *Modeling and Simulation basee engineering*, vol.II. , P. E. O'Donoghue (ur.), Palmdale, Tech Science Press: 1979–1988.

Jelenić, G. 1993. Velike deformacije ravninskih linijskih elastičnih nosilcev v prostoru. Doktorska naloga, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana.

Jelenić, G., Crisfield, M.A. 1999. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 171: 141–171.

Jelenić, G., Saje, M. 1995. A kinematically exact space finite strain beam model-finite element formulation by generalized virtual work principle. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 120: 131–161.

Jeusette, J.P., Laschet, Idelsohn, S. 1989. An effective automatic incremental iterative method for static nonlinear structural analysis. *Comput. Struct.* 32: 125–135.

Johnson, H., Blanksvard, T., Carolin, A. 2006. Glulam members strengthened by carbon fibre reinforcement. *Mater. Struct.* 40: 47–56.

Kanno, Y., Martins, J.A.C. 2006. Arc-length method for frictional contact problems using mathematical programming with complementarity constraints. *J. Optimiz. Theory App.* 131: 89–113.

- Kapania, R.K., Li, J. 2003. A formulation and implementation of geometrically exact curved beam elements incorporating finite strains and finite rotations. *Comput. Mech.* 30: 444–459.
- Kapania, R.K., Wolfe, D.R. 1989. Buckling of axially loaded beam-plate with multiple delaminations. *Journal of Pressure Vessel Technology* 111: 151–158.
- Kardomateas, G.A., Schmueser, D.W. 1988. Buckling and postbuckling of delaminated composites under compressive loads including transverse shear effect. *AIAA Journal* 26, No.3: 337–343.
- Karihaloo, B.L., Wang, K., Grzybowski, J. 1996. Doubly periodic arrays of bridged cracks and short fibre-reinforced cementitious composites. *J. Mech. Phys. Solids* 44: 1565–1586.
- Koiter, W.T. 1973. On the principle of stationary complementary energy in the nonlinear theory of elasticity. *SIAM J. Appl. Math.* 25: 424–434.
- Koo, J.S., Kwak, B.M. 1996. Post-buckling analysis with frictional contacts combining complementarity relations and an arc-length method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 39: 1161–1180.
- Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S. sprejeto v objavo. Exact buckling load of a restrained RC columns. *Struct. Eng. Mech.*
- Kuklarni, S.V., Frederic, D. 1973. Propagation of delamination in a layered cylindrical-shell. *Int. J. Of Fracture* 9 (1): 113–115.
- Kutlu, Z., Chang, F. K. 1992. Modeling compression failure of delaminated composites containing multiple through-the-width delaminations, *J. Compos. Mater.* 26: 350–387.
- Kweon, J. H., Hong, C. S. 1994. An improved arc-length method for postbuckling analysis of composite cylindrical panels. *Comput. Struct.* 53, 541–549.
- Lam, W. F., Morley, C. T. 1990. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *J. Struct. Eng–ASCE.* 118: 169–185.
- Lee, S., Park, T., Voyiadjis, G. Z. 2002a. Free vibration analysis of axially compressed laminated composite beam-columns with multiple delaminations, *Composites* 33: 605–617.
- Lee, J.J., Oh, I.-K., Lee, I, Yeom, C.H. 2002b. Thermal post-buckling behavior of patched laminated panels under uniform and non-uniform temperature distributions. *Compos. Struct.* 55: 137–145.
- Li, Q.S. 2001. Buckling of multi-step cracked columns with shear deformation, *Eng. Struct.* 23: 356–364.
- Li, Q.S. 2003. Effect of shear deformation on the critical buckling of multi-step bars, *Struct. Eng. Mech.* 15: 71–81.
- Li, Y., Shen, Z. 2004. Improvements on the arc-length type method. *Acta Mech. Sinica* 20: 541–550.
- Liew, K.M., Wang, J., Tan, M.J., Rajendran, S. 2004. Nonlinear analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method based on FSDT. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 193: 4763–4779.
- Ligaro, S., Valvo, P. 1999. A self-adaptive strategy for uniformly accurate tracing of the equilibrium paths of elastic reticulated structures. *Int. J. Numer. Methods Engng.* 46: 783–804.
- Lim, Y.B., Parson, I.D. 1993. The linearized buckling analysis of a composite beam with multiple delaminations. *Int. J. Solids Struct.* 30: 3085–3099.
- Lorenz, E., Badel, P. 2004. A new path-following constraint for strain-softening finite element simula-



tions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 60: 499–526.

LUSAS v.13 1999. Theory Manual vol.-II. FEA Ltd., Kingston upon Thames.

MacNeal, R.H., Harder, R. L. 1985. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element. Anal. Design* 1: 3–20.

Madhsudhana, N., Gautham, B.P., Ganesan, N. 1995. Buckling behaviour of uniformly and non-uniformly pretwisted beams. *Comput. Struct.* 54, 551–556.

Magnusson, A. 2001. Analysis of post-buckling branches at multiple symmetric bifurcations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 51: 413–428.

Magnusson, A., Svensson, I. 1998. Numerical treatment of complete load-deflection curves. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 41: 955–971.

May, I.M., Duan, Y. 1997. A Local arc-length procedure for strain softening. *Comput. Struct.* 64: 297–303.

Meek, J.L., Tan, H.S. 1984. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 47: 261–282.

Meek, J.L., Xue, Q. 1998. A study on the instability problem for 3D frames. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 158: 235–254.

Mi, Y., Crisfield, M.A., Davies, G.A.O. 1998. Progressive delamination using interface elements. *J. Compos. Mater.* 32, 1246–1272.

Mittelmann, H.D., Weber, H. 1980. Numerical methods for bifurcation problems—a survey and classification, eds., *Bifurcation Problems and Their Numerical Solution* (Birkhuser, Basel): 1–45.

Moore, G., Spence, A. 1980. The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 17: 567–576.

Moradi, S., Taheri, F. 1999. Delamination buckling analysis of general laminated composite beams by differential quadrature method. *Composites: Part B* 30: 503–511.

Mouritz, A.P., Cox, B.N. 2000. A mechanistic approach to the properties of stitched laminates. *Compos Part A-Appl. S.* 31: 1–27.

MSRao, P., Shu, D. 2004a. Buckling analysis of tri-layer beams with double delaminations. *Comp. Mater. Sci.* 60: 482–488.

MSRao, P., Sylvain, D., Shu, D., Della, C. N. 2004b. Buckling analysis of two-layer beams with an asymmetric delamination. *Eng. Struct.* 26: 651–658.

MSRao, P., Sylvain, D., Shu, D., Della, C. N. 2004c. Buckling analysis of tri-layer beams with multiple separated delaminations. *Compos. Struct.* 66: 53–60.

MSRao, P., Hao, S., Shu, D. 2005a. Buckling analysis of tri-layer beams with overlapped delaminations. *J Compos. Mater.* 39: 109–125.

MSRao, P., Wenge, T., Shu, D. 2005b. Buckling analysis of tri-layer beams with enveloped delaminations. *Compos. Part B-Eng.* 36: 33–39.

MSRao, P., Shu, D. 2006a. S-shaped mode in the lower and upper bounds of the buckling of composite beams with two equal delaminations. *Compos. Struct.* 81: 185–194.

MSRao, P., Shu, D. 2006b. Effects of bridging on buckling of trilayer beams with separated delamina-

tions. *AIAA J.* 44: 2108–2117.

MSRao, P., Shu, D. 2006c. Buckling analysis of two layer delaminated beams with bridging. *Eur. J. Mech. A-Solid.* 25: 834–853.

MSRao, P., Shu, D. 2007. Buckling of composite beams with two non-overlapping delaminations: Lower and upper bounds. *Int. J. Mech. Sci.* 49: 793–805.

Murakawa, H., Atluri, S.N. 1978. Finite elasticity solutions using hybrid finite elements based on complementary energy principle. *J. Appl. Mech.* 45: 539–546.

Nammur, G., Naaman, A.E. 1989. Bond stress model for fiber reinforced-concrete based on bond stress-slip relationship. *ACI Mater. J.* 86: 45–57.

Needleman, A. 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.* 54, 525–531.

Neto, E.A. de Souza, Feng, Y.T. 1999. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap backs'. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 179: 81–89.

Noguchi, H., Fujii, F. 2003. Eigenvector-free indicator, pinpointing and branch-switching for bifurcation. *Commun. Numer. Meth. Engrg* 19: 445–457.

Numayr, K.S., Haddad, R.H. 2001. Analytical solution of buckling of beams with two delaminations. *Mech. Compos. Mater. St.* 8: 283–297.

Oden, J.T. 1967. *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Oh, I.-K., Lee, I., 2001. Thermal snapping and vibration characteristics of cylindrical composite panels using layerwise theory. *Compos. Struct.* 51: 49–61.

Oñate, E., Matias, W.T. 1996. A critical displacement approach for predicting structural instability. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 134: 135–161.

Ozbolt, J., Reinhardt, H.W., 2002. Numerical study of mixed fracture in concrete. *Int.J. Fracture* 118, 145–161.

Shao P.L. 1990. Buckling analysis of nonlinear structures using Lanczos method, *Comput. Struct.* 36: 1111–1120.

Padmarajaiah, S.K., Ramaswamy, A. 2002. A finite element assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement. *Cement Concrete Comp.* 24: 229–241.

Pan, J., Leung, C.K.Y. 2007. Debonding along the FRP-concrete interface under combined pulling/peeling effects. *Eng. Fract. Mech.* 74: 132–150.

Papadrakakis, M. 1981. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Comput. Struct.* 14: 393–402.

Parente, E., de Holanda A.S., da Silva, S.M.B.A. 2006. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. *Comput. Mech.* 38: 505–520.

Planinc, I. 1998. Račun kritičnih konstrukcij s kvadratično konvergentnimi metodami. Doktorska naloga, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani.

Planinc, I., Saje, M. 1998. A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points: the application of the determinant of the tangent stiffness matrix. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 136: 347–361.

- Planinc, I., Schabl, S., Saje, M., Lopatič, J., Čas, B. 2008. Numerical and experimental analysis of timber composite beams with interlayer slip. *Eng. struct.*: 2959–2969.
- Qi, Z., Tianqi, Y. 1995. The adaptive parameter incremental method for the analysis of snapping problems. *Appl. Math. Mech.* 16 (9): 851–858.
- Ragon, S.A., Gurdal, Z., Watson, L.T. 2002. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems. *Int. J. Solids Struct.* 39: 689–698.
- Ramm, E. 1980. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in: K.J. Bathe, E. Stein and W. Wunderlich, eds., *Europe-US-Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Ruhr Universitat Bochum, Germany (Springer, Berlin): 63–89.
- Reese, S., Wriggers, P. 1995. A finite element method for stability problems in finite elasticity. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 38: 1171–1200.
- Reissner, E. 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. *J. Appl. Math. Phys.* 23: 795–804.
- Reissner, E. 1981. On finite deformation of space –curved beams. *J. Appl. Math. Phys.* 32: 734–744.
- Remmers, J.J.C., De Borst, R. 2008. Delamination buckling of fibre-metal laminates. *Compos. Sci. Technol.* 61: 2207–2213.
- Rezaiee-Pajand, M., Vejdani-Noghereiyan, H.R. 2006. Computation of multiple bifurcation point. *Eng. Computation* 23: 552–565.
- Rheinboldt, W.C. 1981. Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems. *Comput. Struct.* 13: 103–113.
- Riks, E. 1972. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech. ASME* 39: 1060–1065.
- Riks, E. 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Struct.* 15, 529–551.
- Rodman, U., Saje, M., Planinc, I., Zupan, D. 2008. Exact buckling analysis of composite elastic columns including multiple delamination and transverse shear. *Eng. Struct.* 30: 1500–1514.
- Rots, J., 1991. Smeared and discrete representations of localized fracture. *Int. J. Fracture* 51, 45–59.
- Rots, J., De Borst, R., 1987. Analysis of mixed-mode fracture in concrete. *J. Eng. Mech.-ASCE* 113 (11): 1739–1758.
- Sanchez-Hubert, J., Sanchez Palencia, E. 1999. Statics of curved rods on account of torsion and flexion. *Eur. J. Mech. A/Solids* 18: 365–390.
- Saje, M., Planinc, I., Turk, G., Vratinar, B. 1997. A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 144: 125–151.
- Saje, M., Turk, G., Kalagasidu, A., Vratinar, B. 1998. A kinematically exact finite element formulation of elastic-plastic curved beams. *Comput. Struct.* 67: 197–214.
- SAP2000, V10. 2006. *Integrated Software for Structural Analysis & Design*, Technical Reference Manual. Computers & Structures, Inc.
- Schulz, M., Filippou, F.C. 2001. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 50: 761–785.

- Schweizerhof, K.H., Wriggers, P. 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 59: 261–279.
- Seydel, R. 1988. *From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis* (Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York).
- Seydel, R. 1979. Numerical computation of branch points in nonlinear equations. *Numer. Math.* 33: 339–352.
- Shao, P.-L. 1990. Buckling analysis of nonlinear structures using Lanczos method. *Comput. & Struct.* 36: 1111–1120.
- Sheinman, I., Soffer, M. 1989. Post-buckling analysis of composite delaminated beams. *Int. J. Solids Struct.* 27: 639–646.
- Shu, D. 1998. Buckling of multiple delaminated beams, *Int. J. Solids Struct.* 35: 1451–1465.
- Shu, D., MSRao, P. 2004. Buckling analysis of bimaterial beams with single asymmetric delamination. *Compos. Struct.* 64: 501–509.
- Siegmund, T. 2004. A numerical study of transient fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. *Int. J. Fatigue* 26: 929–939.
- Simitses, G.J., Sallam, S., Yin, W.L. 1985. Effect of delamination of axially loaded homogeneous laminated plates. *AIAA Journal* 23, vol. 9: 1437–1445.
- Simo, J.C. 1985. A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem, Part I. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 49: 55–70.
- Simo, J.C., Vu-Quoc, L. 1986. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 58: 79–116.
- SIST EN 1995-1-1 (4), 2007. Projektiranje lesenih konstrukcij, Del 1.1, Splošna pravila in pravila za stavbe.
- Smolenski, W.M. 1999. Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 178: 89–113.
- Somers, M., Weller, T., Abramovich, H. 1991. Influence of predetermined delaminations on buckling and postbuckling behavior of composite sandwich beams. *Compos. Struct.* 17: 295–329.
- Spurrer, R.A. 1978. Comment on Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix. *J. Spacecraft* 15, 255.
- Stang, H., Olesen, J.F., Poulsen, P.N., Dick-Nielsen, L. 2007. On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.* 40: 365–374.
- Suemasu, H. 1992. Postbuckling behaviors of composite panels with multiple delaminations, *J. Compos. Mater.* 27: 1077–1096.
- Szyszkowski, W., Husband, J.B. 1999. Curvature controlled arc-length method. *Comput. Mech.* 24: 245–257.
- Tabarrok, B., Farshad, M., Yi, H. 1988. Finite element formulation of spatially curved and twisted rods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 70: 275–299.
- Teng, Y.G., Luo, Y.F. 1998. A user-controlled arc-length method for convergence to predefined deformation states. *Commun. Numer. Meth. En.* 14: 51–58.

- Tilbrook, M.T., Rutgers, L., Moon, R.J., Hoffman, M. 2007. Fatigue crack propagation resistance in homogeneous and graded alumina–epoxy composites. *Int. J. Fatigue* 29: 158–167.
- Tong, L., Sun, X. 2007. Bending effect of through-thickness reinforcement rods on mode II delamination toughness of ENF specimen: Elastic and rigid-perfectly plastic analyses. *Compos. Part.A-Appl. S.* 38: 323–336.
- Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic–plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1377–1397.
- Vratanar, B., Saje, M. 1997. A consistent equilibrium in a cross-section of an elastic - plastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 36: 311–337.
- Wan, B.L., Sutton, M.A., Petrou, M.F., Harries, K.A., Ning, U. 2004. Investigation of bond between fiber reinforced polymer and concrete undergoing global mixed mode I/II loading. *J. Eng. Mech.-ASCE* 130: 1467–1475.
- Wang, J. 2007. Cohesive-bridging zone model of FRP-concrete interface debonding. *Eng. Fract. Mech.* 74: 2643–2658.
- Washizu, K. 1975. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, Oxford.
- Wempner, G.A. 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *Int. J. Solids Struct.* 7: 1581–1599.
- Widjaja, B.R. 1998. Path-following technique based on residual energy suppression for nonlinear finite element analysis *Comput. Struct.* 66: 201–209.
- Wriggers, P., Wagner, W., Miehe, C. 1988. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 70: 329–347.
- Wriggers, P., Simo, J.C. 1990. A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 30: 155–176.
- Wright, J. E. 2006. Compound bifurcations in the buckling of a delaminated composite strut. *Nonlinear Dynam.* 43: 59–72.
- Xie, M., Gerstle, W.H., 1995. Energy-based cohesive crack propagation modelling. *J. Eng. Mech.-ASCE* 121 (12): 1349–1458.
- Xu, C., Siegmund, T., Ramani, K. 2003a. Rate-dependent crack growth in adhesives I. modeling approach. *Int. J. Adhes Adhesives*: 23: 9–13.
- Xu, C., Siegmund, T., Ramani, K. 2003b. Rate-dependent crack growth in adhesives II. experiments and analysis. *Int. J. Adhes Adhesives*: 23: 15–22.
- Xu, S. Zhang, X. 2008. Determination of fracture parameters for crack propagation in concrete using an energy approach. *Eng. Fract. Mech.* 75: 4292–4308.
- Yamaguchi, E., Chen, W.F., 1990. Cracking model for finite element analysis of concrete materials. *J. Eng. Mech.-ASCE* 116 (6): 1242–1260.
- Yamaguchi, E., Chen, W.F., 1991. Microcrack propagation study of concrete under compression. *J. Eng. Mech.-ASCE* 117 (3): 653–673.
- Yang, B., Ravi-Chandar, K. 1998. Antiplane shear crack growth under quasistatic loading in a damaging material. *Int. J. Solids Struct.* 35: 3695–3715.

- Yang, Z., Chen, J. 2004. Fully automatic modelling of cohesive discrete crack propagation in concrete beams using local arc-length method. *Int. J. Solids Struct.* 41: 801–826.
- Yang, Z.J., Proverbs, D. 2004. A comparative study of numerical solutions to non-linear discrete crack modelling of concrete beams involving sharp snap-back. *Eng. Fract. Mech.* 71: 81–105.
- Yin, W. L., Sallam, S., Simitises, G. J. 1986. Ultimate axial load capacity of a delaminated beam-plate. *AIAA Journal* 24: 123–128.
- Yuan, H., Teng, J.G., Seracino, R., Wu, Z.S., Yao, J. 2004. Full-range behavior of FRP-to-concrete bonded joints. *Eng. Struct.* 26: 553–565.
- Zhang, X. 1999. A study on crack growth in ductile materials. *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 76: 583–590.
- Zhang, X., May, W.-Y., Jeffrey, R.G. 2003. A cohesive plastic and damage zone model for dynamic crack growth in rate-dependent materials. *Int. J. Solids Struct.* 40: 5819–5837.
- Zhiliang, F. 1994. A study of variable step-length incremental/iterative methods for nonlinear finite element equations. *Comput. & Struct.* 52: 1269–1275.
- Zhou, Z., Murray, D.W. 1994. An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures. *Comput. & Struct.* 55: 749–759.
- Zhu, J.-F., Chu, X.-T. 2002. An improved arc-length method and application in the post-buckling analysis for composite structures. *Appl. Math. Mech.-Engl.* 23: 1081-1088.
- Zupan, D. 2001. Teorija prostorskih nosilcev, osnovana na ukrivljenostih. Magistrska naloga. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Zupan, D. 2003a. Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev. Doktorska disertacija. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Zupan, D., Saje, M. 2003b. A new finite element formulation of three-dimensional beam theory based on interpolation of curvature. *Cmes-Comp. Model. Eng.* 4 (2): 301–318.
- Zupan, D., Saje, M. 2005. Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections. *Comput. & Struct.* 83: 2368–2380.
- Zupan, D., Saje, M. 2005. Nelinearna statična analiza vodnih toboganov = Non-linear static analysis of water slides. V: Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, september 2005. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: 343–352.
- Zupan, D., Saje, M. 2006. The linearized three-dimensional beam theory of naturally curved and twisted beams: The strain vectors formulation. *Comput. Method Appl. M.* 195: 4557–4578.