

HOMOPOLARNI MOTORJI

ROBERT HAUKO

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Mariboru

PACS: 41.20.Gz

Homopolarni motorji, tako kot homopolarna indukcija na splošno, niso vključeni v standardne fizikalne učbenike. Kljub temu pa lahko pojave, povezane s homopolarno indukcijo, uporabimo kot zanimivo učno dopolnilo pri rednem pouku fizike, v okviru dodatnih ur ali pri različnih raziskovalnih projektih. Homopolarni motorji so najbolj preprost primer elektromotorja na enosmerni tok in elementarna oblika pretvorbe električne energije v mehansko. Na višjih ravneh poučevanja fizike omogočajo preprosto demonstracijo sile na gibajoči naboj (tokovni vodnik) in analizo njenega navora. Kot vse homopolarne naprave lahko tudi motorna izvedba s svojo zagonetnostjo, ki ima dolgo zgodovinsko ozadje, ponudi miselni izziv izkušenim fizikom.

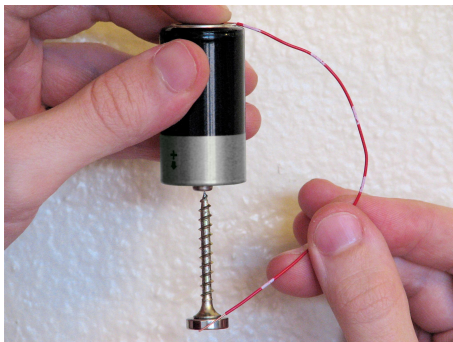
THE HOMOPOLAR MOTORS

Homopolar motors, like homopolar induction in general, are usually not included in the physics textbooks. However, the phenomena associated with homopolar induction can be used as an interesting supplementary chapter in regular physics classes, as part of additional hours or in various school research projects. Homopolar motors are the simplest example of a direct-current electric motor, and thus an elemental example of converting electricity into the mechanical energy. At the higher levels of physics education, the motors can serve for demonstration of the magnetic force on a moving charge (wire segment) and for analysis of magnetic torque. Like all homopolar devices, the motor version with its puzzle, that has a long history, offers a mental challenge also for experienced physicists.

Uvod

O homopolarni indukciji smo prav na tem mestu že pisali [3], za lažje nadaljevanje ponovimo v uvodu ključne značilnosti pojava:

- Homopolarna indukcija je elektromagnetna indukcija s homogenim ali z osno simetričnim magnetnim poljem.
- Oznaka »homopolarna« (tudi »unipolarna«) izvira iz sredine 19. stoletja, ko je prevladovalo prepričanje, da je pri pojavu pomemben samo en pol magneta.
- Če vrtimo kovinski disk okrog simetrijske osi magnetnega polja, se med središčem in robom diska inducira napetost U_i .



Slika 2. Homopolarni motor – najbolj preprosta oblika elektromotorja [8].

Ekspiriment

Povežimo baterijo, kovinski vijak in majhen ploščni magnet tako, kot je prikazano na sliki 2.

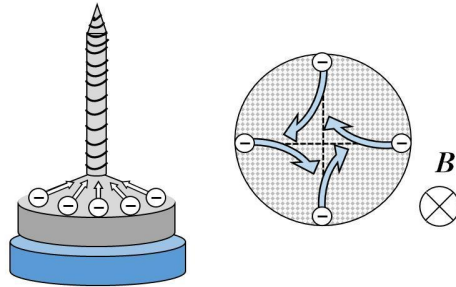
Brž ko sklenemo električni krog, se vijak (skupaj z magnetom) začne vrteti! Dobili smo preprosto napravo, ki pretvarja električno energijo v mehansko, kar je osnovna značilnost elektromotorjev. Tako kot pri homopolarni indukciji, imamo opravka z osno simetričnim magnetnim poljem, zato ga imenujemo homopolarni motor. Še pred razlago delovanja motorja si zastavimo nekaj osnovnih vprašanj:

- Kakšna je vloga vijaka? Ga lahko nadomestimo z žebljem ali z žico?
- Od katerih fizikalnih količin je odvisna končna hitrost vijaka?
- Kako bi odvisnost raziskali s (šolskim) eksperimentom?
- Kaj se zgodi, če vijaku preprečimo vrtenje? Se bo v tem primeru vrtel preostanek vezja? Bi bila potem smer vrtenja enaka ali nasprotna smeri vrtenja vijaka?
- Ali vrtenje magnetu vpliva na delovanje motorja?
- Kako je z ohranitvijo vrtilne količine? Kaj je »akcija« in kaj »reakcija«?

Razlaga

Pri iskanju odgovorov na zastavljena vprašanja začnemo razlago s tokom, ki ga požene baterija skozi zaključeno tokovno zanko, katere del je tudi vijak. Začetni tok je odvisen od napetosti baterije U_0 in od električnega upora vijaka (celotnega vezja) R . Ker ima električni tok v področju glave vijaka

pretežno radialno smer, se na posamezne tokovne odseke pojavi pravokotna magnetna sila, ki povzroči navor in vrtenje vijaka. V mikroskopski sliki deluje na gibajoče se elektrone magnetna sila, zato ti pridobivajo v povprečju tudi tangencialno komponento hitrosti. Trke elektronov z ioni v tangentialni smeri zazna vijak kot magnetni navor (slika 3).



Slika 3. Pri električnem toku skozi vijak pridobijo elektroni zaradi magnetne sile še tangencialno komponento hitrosti, na vijak deluje magnetni navor.

V [4] je bilo pokazano, da velja za magnetni navor zveza:

$$M = \frac{I}{2\pi} \Phi_B, \quad (2)$$

pri čemer je Φ_B magnetni pretok skozi zanko, ki gre po obodu glave vijaka. Magnetni navor je premo sorazmeren z električnim tokom, kakor to poznamo pri tokovni zanki [6], le da zdaj kaže vektor navora v smeri zunanjšega magnetnega polja in ne v pravokotni smeri.

Navor lahko torej povečamo tako, da povečamo tok skozi zanko ali da uporabimo močnejši magnet oz. vijak s širšo glavo. Na stikih med vrtečim se vijakom in baterijo na eni strani ter žičnim kontaktom na drugi strani se ustvarja majhen zunanji zaviralni navor M_{zum} ; privzemimo, da je njegova vrednost stalna. Dovolj velika napetost na viru povzroči rezultanto navora ter posledično enakomerno pospešeno vrtenje vijaka. Vendar nas izkušnje z motorji iz vsakdanjega življenja učijo, da pospeševanje običajno traja zelo kratek čas. Večina elektromotorjev dokaj hitro doseže končno hitrost in od takrat naprej se vrti motorna gred enakomerno. Razlog je reakcijski navor, ki je posledica inducirane napetosti v motorju.

Zaradi vrtenja vijaka v magnetnem polju se med osjo in robom vijaka inducira električna napetost, podobno kot v primeru vrtenja Faradayevega diska (1). Inducirana napetost ima nasprotno polariteto kot vir napetosti, zato se celotna gonilna napetost tokovne zanke in s tem električni tok zmanjšata. Za neto električni tok velja torej:

$$I = \frac{U_0 - U_i}{R}. \quad (3)$$

V stacionarnem stanju ob enakomernem vrtenju vijaka sta magnetni navor in zunanji zaviralni magnetni navor v ravnovesju:

$$M = M_{zun}, \quad (4)$$

Iz enačb (2), (3) in (4) dobimo zvezo

$$\frac{(U_0 - U_i)\Phi_B}{R 2\pi} = M_{zun}.$$

Ker poznamo zvezo med inducirano napetostjo in kotno hitrostjo vijaka (1), dobimo za končno hitrost vijaka izraz

$$\omega = \frac{2\pi U_0}{\Phi_B} - \frac{M_{zun} 4\pi^2 R}{(\Phi_B)^2}. \quad (5)$$

Za primer, ko velja $M_{zun} \approx 0$, lahko v (5) izpustimo drugi člen in dobimo končno hitrost vijaka

$$\omega = \frac{2\pi U_0}{\Phi_B}, \quad (6)$$

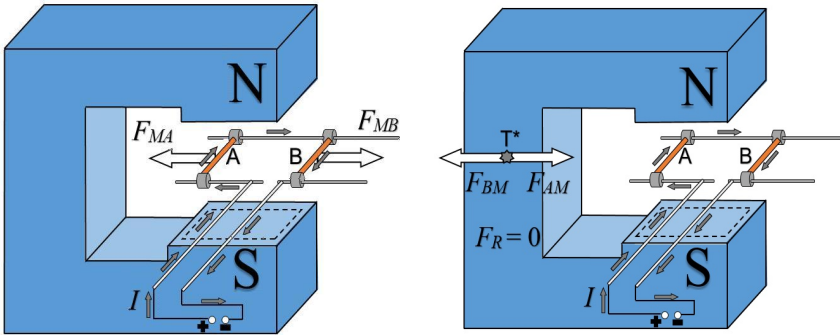
kjer je Φ_B magnetni pretok skozi vrhno ploskev glave vijaka. Končna hitrost vijaka je torej premo sorazmerna z napetostjo baterije in obratno sorazmerna z gostoto magnetnega polja in ploščino glave vijaka. S spreminjanjem baterije, magnetov in dimenzije vijaka se da enačbo (6) dokaj hitro kvalitativno potrditi, natančnejša meritev pa se zdi primerna tudi za laboratorijsko vajo ali projektno oz. raziskovalno nalogo.

Na koncu poudarimo še enkrat, da velja približek za končno kotno hitrost (6) samo, ko je zunanji navor zanemarljiv. V primeru homopolarnih motorjev v funkciji delovnih orodij, ko je premagovanje zunanjega navora ključna naloga, je treba za končno hitrost vijaka uporabiti celotno rešitev (5). V limitnem primeru največjih obremenitev sta kotna hitrost in inducirana napetost zanemarljivi, tako da lahko neposredno iz zveze (2) dobimo zahteve po električnem toku in lastnostih uporabljene magneta.

Analogija

V šolah se na splošno premo gibanje obravnava podrobneje od kroženja in vrtenja. Z uporabo analogije z ravnimi tokovnimi vodniki poskusimo zato še poglobiti razumevanje principa delovanja homopolarnega motorja. Namesto o navorih bomo govorili o silah, vrtilno količino pa nadomestili z gibalno količino. Analizirali bomo reakcije v obliki magnetnih sil na gibajoče naboje in induciranih napetosti. Zanimalo nas bo, ali sta tudi v primeru homopolarnih motorjev obe razlagi homopolarne indukcije enakovredni (pomembnost absolutnega ali relativnega gibanja) in ali ima gibanje izvira magnetnega

Homopolarni motorji



Slika 4. Prikaz delovanja homopolarnega motorja s pomočjo razlage magnetne sile na gibljive prečke znotraj pravokotne tokovne zanke. Rezultanta sil na magnet je enaka nič.

polja kakšen vpliv na delovanje motorja. S spoznanji bomo dopolnili zbirko odgovorov na zastavljena vprašanja v poglavju Eksperiment.

Skozi tokovno zanko, ki se zvečine nahaja v zunanjem homogenem magnetnem polju, naj teče enosmerni tok v smeri, kot je prikazano na sliki 4. Drsnici A in B dolžine l sta na medsebojni razdalji r in se lahko prosto (premo) gibljeta po dveh pritrjenih kovinskih nosilcih. Brez zunanjega magnetnega polja deluje med prečkama A in B odbojna magnetna sila

$$F = \frac{\mu l I^2}{2\pi r},$$

ki se s povečevanjem medsebojne razdalje zmanjšuje. V primeru zunanjega magnetnega polja čuti vsaka od prečk silo

$$F_{MA} = F_{MB} = IlB. \quad (7)$$

Magnetna sila, ki deluje na prečki v različnih smereh in ni odvisna od njune medsebojne razdalje, povzroči gibanje prečk. Tudi v tem primeru se električna energija pretvarja v mehansko, spet imamo opravka s homopolarnim elektromotorjem. Po 3. Newtonovem zakonu deluje vsaka od prečk z nasprotno enako silo na magnet. Obe sili se uravnesita, tako da magnet ne zazna nobene efektivne sile. Enaka ugotovitev velja tudi za drugi par vzporednih vodnikov. Rezultanta sil na magnet F_R je enaka nič vsaj dotlej, dokler se večji del tokovne zanke nahaja znotraj homogenega magnetnega polja magneta.

Če izberemo smer električnega toka tako, da kaže lastno magnetno polje zanke v smeri zunanjega magnetnega polja, je učinek delovanja magnetne sile večanje razdalje med prečkama in s tem zmanjševanje lastnega magnetnega polja zanke. Obratno se zgodi, če smer toka skozi zanko zamenjamo.

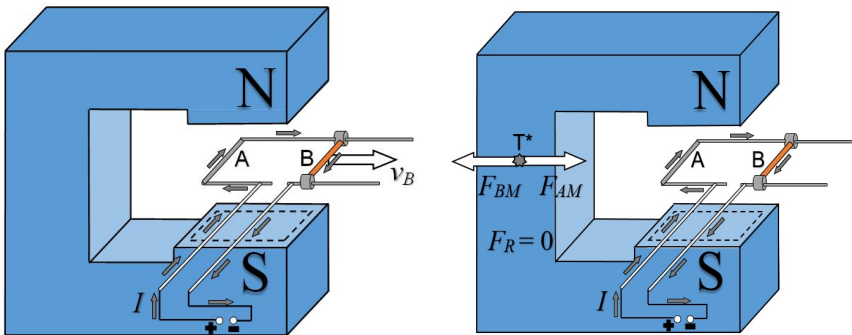
V obeh primerih se zdi, kot da zunanje magnetno polje deluje le kot sredstvo za medsebojno interakcijo posameznih delov električne zanke. Dokler so vsi deli tokovne zanke v enakem magnetnem polju, se izvir magnetne sile v učinkovitem smislu prenese z zunanjega magneta na posamezne vzporedne odseke tokovne zanke.

Kot smo že povedali, se gredi v elektromotorjih zaradi indukcije prej ali slej začnejo vrteti enakomerno. S hitrejšim vrtenjem se povečuje reakcijski navor, ki čez čas uravnesi primarni magnetni navor. Poglejmo, kako je z reakcijo v uporabljeni analogiji. Na nosilce naboja v prečkah A in B, ki se zaradi gibanja prečk gibljejo pravokotno na homogeno magnetno polje, deluje magnetna sila

$$F_m = evB.$$

Med krajiščema obeh gibajočih se prečk se, merjeno v laboratorijskem sistemu mirujočega preostanka kroga, inducira električna napetost. Učinka obeh induciranih napetosti se seštejeta in poženeta inducirani tok v nasprotno smer glede na prvotno smer toka. Zaradi tega se skupni tok v zanki zmanjša, s tem se zmanjša tudi sila med prečkama (7) in slej ko prej se zaradi mehanskega trenja prečki gibljeta enakomerno.

V naslednjem koraku predpostavimo, da se lahko giblje samo prečka B, medtem ko ostane prečka A del negibljivega dela tokovne zanke (slika 5).



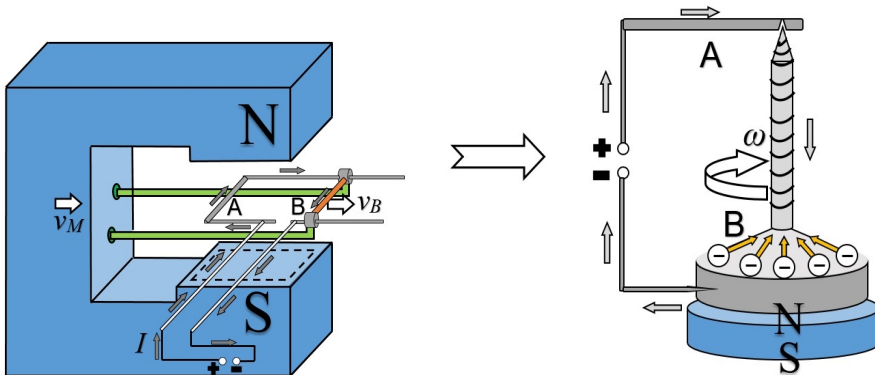
Slika 5. Analogija z eno samo gibljivo stranico B. Rezultanta sil na magnet ostaja enaka nič.

Sila na prečko B ostane enaka, magnetno silo na prečko A pa uravnesi okolica, tj. podlaga, na katero je zanka pričvrščena. Enako velja za preostala dva odseka vezja. Celotna neto sila magneta na tokovno zanko je enaka nič in podobno kot v prejšnjem zgledu tudi magnet ne čuti nobene rezultante. Na prvi pogled se lahko zdi, kot da deluje sila samo na prečko B. Ker je izvor te sile v magnetu in ker ne zaznamo ustrezne reakcije premikanja magneta, se zdi, kot da delovanje motorja krši zakon o ohranitvi gibalne količine. V tej luči so razlage, ki ne upoštevajo zunanjih opornih sil (ali navorov),

nepopolne. Napetost se zdaj inducira samo na gibljivi prečki B, zato je dvakrat manjša glede na napetost v prejšnjem zgledu, a slej ko prej se bo prečka zaradi trenja spet gibala enakomerno.

Analizirajmo še problem gibanja magneta. Privzemimo, da se magnet na sliki 5 giblje enakomerno z majhno hitrostjo v desno, v smeri gibanja prečke B. Magnetni sili na prečki A in B se ne spremenita (7), rezultanta sil na magnet ostaja nič. Kako pa je z reakcijsko inducirano napetostjo? Če privzamemo hipotezo o pomembnosti relativne hitrosti med izviro in nosilci naboja, se zaradi gibanja magneta inducirana napetost na prečki B nekoliko zmanjša, primanjkljaj nadomesti napetost na mirujoči prečki A. Celotna inducirana napetost ostane nespremenjena. Pridemo torej do istega rezultata kot ob privzetku, da je za velikost inducirane napetosti pomembno le absolutno gibanje obeh prečk (absolutna razlaga).

Z ugotovitvijo, da gibanje magneta pri homopolarnih motorjih ne vpliva na inducirano napetost, naredimo še dodatni korak v razvoju analogije. Ko povežemo magnet z gibljivo prečko B preko togega izolatorja, postane podobnost z obravnavano obliko homopolarnega motorja iz eksperimenta (slika 2) še bolj očitna: gibljiva prečka B predstavlja glavo vijaka, negibljiva prečka A predstavlja del vezja v eksperimentu, ki je pravokoten na magnetno polje, povezovalni togi izolator pa nadomesti lepenje med magnetom in glavo vijaka (slika 6).



Slika 6. Podobnost v delovanju dveh oblik homopolarnega motorja; premo gibanje dela tokovne zanke (analogija) primerjamo z vrtenjem (eksperiment). V obeh primerih sledi gibanju prevodnika tudi magnet.

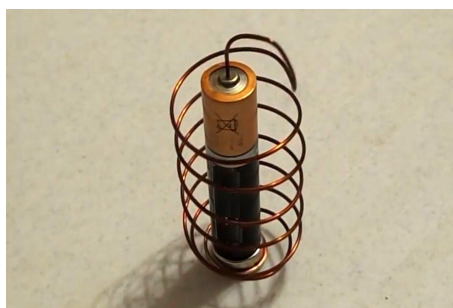
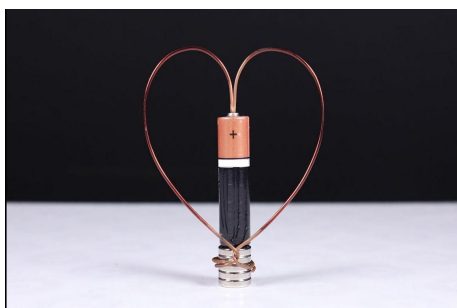
V analogiji smo privzeli, da se večji del tokovne zanke nahaja v enakem (homogenem) magnetnem polju. V realnem eksperimentu je najverjetneje magnetno polje na oddaljenem mestu šibkejše kot v neposredni bližini magnetu. V tem primeru se magnetne silnice razklenejo, magnetno polje pa pridobi poleg oslabiljene navpične komponente tudi vodoravno komponento.

Primanjkljaj magnetne sile na del vodnika A se nadomesti s silo na navpični odsek vodnika (slika 6), celotna magnetna sila na tokovno zanko pa tako, kot smo ugotovili v analogiji, ostaja nič. Sklep potrjuje tudi eksperimentalna izkušnja, ki kaže na to, da v grobem delovanje homopolarnega motorja (slika 2) ni odvisno od dolžine in geometrije tokovnih vodnikov.

Pedagoški vidik

Homopolarni motorji zelo nazorno prikazujejo spreminjanje električne energije v mehansko, zato lahko imajo veliko demonstrativno moč že pri osnovnošolskem pouku fizike ali tehnike. Njihova izdelava in optimizacija posameznih parametrov delovanja se zdi primerna naloga za projektno oz. raziskovalno delo (slika 7). Pri pouku fizike na srednjih šolah in fakultetah lahko služijo homopolarni motorji za ponazoritev magnetne sile na gibajoči se naboj (tokovni vodnik) oziroma so lahko v pomoč pri analizi elektromagnetne indukcije in narave elektromagnetizma. Ponuja se primerjava homopolarnega motorja s klasičnim elektromotorjem na izmenični tok: vloge rotorja, statorja, kolektorja, komutatorja in drugih sestavnih delov se precej poenostavijo ali celo izginejo. Tudi načrtovanje dovolj natančnega eksperimenta in preverjanje enačb (2) in (6) je lahko primeren izziv.

Poleg resnih znanstvenih člankov o homopolarnih motorjih [7, 1, 2] lahko najdemo množico izvedb in navodil za izdelavo v obliki fotografij in filmov tudi na spletu [9, 10]. Ob vsem naštetem preseneča relativno slabo poznavanje teh preprostih naprav, tako s strani dijakov kot tudi s strani učiteljev. V pomoč učitelju pri iskanju rešitev in ustreznih razlag ob demonstracijski uporabi homopolarnih motorjev lahko med drugim služi tudi prej prikazana analogija, pri tem se zdi ključen prehod iz opisa tokovne zanke z dvema gibljivima prečkama k zanki z eno gibljivo prečko.



Slika 7. Dva primera izvedbe homopolarnih motorjev [9, 10]. Oba pola baterije predstavljata za žični sistem drsni kontakt. Magnetno polje ustvarja ploščni magnet pod baterijo. Tako kot pri motorju z vijakom na sliki 2 je pomemben magnetni navor na del vezja, ki je pravokoten na smer magnetnega polja (os vrtenja).

Zaključek

Za zaključek citirajmo Rovellija [5]. Čeprav se njegove besede zvečine nanašajo na večje konceptualne probleme, pa lahko prenesemo njegov pogled na negotovost in verjetnost v okviru fizike toplote tudi na problem razumevanja inducirane napetosti v homopolarnih napravah. Hkrati naj citat velja kot vabilo za bolj splošen pogled na električno in magnetno polje, ki ga prikažemo v dodatku.

Napovedljivost ali nenapovedljivost se ne tiče njenega točnega stanja. Tiče se le dokaj omejene podskupine njenih lastnosti, s katerimi součinkujemo mi. Ta podskupina lastnosti je odvisna od našega posebnega součinkovanja z žličko in balonom. Verjetnost se ne nanaša na razvoj snovi same. Nanaša se le na razvoj tistih njenih posebnih lastnosti, na katere delujemo mi. In že spet se pokaže, da so zamisli, s katerimi si urejamo svet, v bistvu relacijske – kako součinkujejo deli sveta med seboj.

Dodatek – Teorija EM polja

Za bralca, ki ga, tako kot včasih M. Faradaya, vprašanje o gibanju magnetnega polja pri homopolarnih napravah še zmeraj bega, prikličemo teorijo elektromagnetnega (EM) polja. Kako torej bolj splošno pristopiti k problemu in razlagi odnosa med izviro in poljem? Sestavili bomo četverec elektromagnetnega polja, ga transformirali z Lorentzovo transformacijo v koordinatni sistem gibajočega se naboja (in magnetna) ter pogledali, kaj se pri tem zgodi z magnetnim in električnim poljem.

Za začetek zapišimo Maxwelllove enačbe:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (11)$$

Enačbe postanejo bolj simetrične z vpeljavo vektorskega potenciala \vec{A} in skalarne potenciala ϕ , tako da velja:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12)$$

S tako definicijo potencialov sta enačbi (9) in (10) identično izpolnjeni, iz enačb (8) in (11) ter s pomočjo vektorske identitete $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ pa dobimo

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right).\end{aligned}\quad (13)$$

Simetrija med \vec{B} in \vec{E} , ki je razvidna iz Maxwellovih enačb, se prenese tudi na enačbi za vektorski potencial \vec{A} , s katerim predstavimo magnetno polje, ter skalarni potencial ϕ , ki predstavlja električno polje. Iz definicije (12) ugotovimo, da rodita vektorska potenciala \vec{A} in \vec{A}' , ki se razlikujeta za gradient poljubnega potenciala $-\nabla\psi$, isto magnetno polje \vec{B} . Podobna ugotovitev velja tudi za dva skalarna potenciala; ϕ in ϕ' , ki se razlikujeta za člen $\partial\psi/\partial t$, pripeljeta do istega električnega polja \vec{E} :

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\psi \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}.\end{aligned}\quad (14)$$

Ker sta \vec{B} in \vec{E} edini merljivi količini, sta potenciala \vec{A} in ϕ nedoločena do umeritvenega (kalibracijskega) polja ψ . To imenujemo umeritvena invarianta elektromagnetnega polja. Omogoča nam, da lahko izberemo polji \vec{A} in ϕ tako, da ustrezata še dodatnemu skalarnemu pogoju. Zelo ugodno je izbrati pogoj:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.\quad (15)$$

Do izbranega pogoja (15) (ki naj velja tudi za potenciala \vec{A}' in ϕ'), nas privede umeritveni potencial ψ , za katerega velja:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.\quad (16)$$

Ker gre za (rešljivo) valovno enačbo, si lahko torej z umeritvijo (16) poenostavimo desne strani enačb (13) tako, da dobimo

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\end{aligned}\quad (17)$$

Zapis valovnega operatorja $\nabla^2 - \partial^2/(c^2\partial t^2)$, ki na levi strani enačb (16) in (17) deluje na ψ , \vec{A} in ϕ , se z uvedbo dodatne časovne koordinate ct , ki je značilnost teorije relativnosti, poenostavi. Ob tem bomo s četvercem predstavili tudi elektromagnetno polje, hkrati razširili s četrto komponento še vektor gostote toka, s čimer dobimo iz enačb (13) enotno enačbo EM polja. Še prej pojasnimo pravila zapisa, značilnega za teorijo relativnosti.

Četverec koordinate dogodka $P(ct, x, y, z,)$ označimo z (x^0, x^1, x^2, x^3) . Vpeljimo še matriko Minkovskega s komponentami $\eta^{\mu\nu}$ tako, da je $\eta^{00} = -1$, $\eta^{ii} = 1$ za $i = 1, 2, 3$, vse druge komponente pa so enake 0. Za zgled zapišimo delovanje valovnega operatorja $\nabla^2 - \partial^2/(c^2\partial t^2)$ na skalarnem potencialu ϕ v krajši obliki:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} \quad (18)$$

V zgornjem zapisu (18) se skrivata dva dogovora: če se grški indeks v produktu ponovi tako, da nastopa enkrat zgoraj in enkrat spodaj, potem gre za tekoči indeks, po katerem seštevamo, ko teče od 0 do 3. Drugi dogovor je ta, da označimo parcialni odvod funkcije po koordinati x^μ kot:

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad \phi_{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Vpeljimo četverec elektromagnetnega polja tako, da vektorskemu potencialu \vec{A} dodamo ničelno komponentno, ki jo sestavimo iz skalarnega potenciala ϕ kot:

$$A_0 = -\frac{\phi}{c},$$

kjer je c svetlobna hitrost. Umeritvena invarianta (14) se zapiše

$$A'_\mu = A_\mu + \psi_{,\mu}.$$

Valovni enačbi (17), ki smo ju dobili z umeritvijo (15), lahko sedaj združimo:

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\mu_0 j_\lambda,$$

pri čemer smo razširili še vektor gostote toka \vec{j} v četverec z dodano časovno komponento $j_0 = -\rho c$.

Valovni operator $\eta^{\mu\nu} \partial^2 \phi / (\partial x^\mu \partial x^\nu)$ se pri prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega s klasično Galilejevo transformacijo ne ohranja. Da elektromagnetna teorija ni invariantna na Galilejevo transformacijo, je bilo jasno že konec 19. stoletja. Ustrezna transformacija \underline{L} , ki ohrani valovni operator, mora zadostiti pogoju:

$$\underline{L} \underline{\eta} \tilde{\underline{L}} = \underline{\eta}, \quad (19)$$

pri čemer je $\tilde{\underline{L}}$ inverzna transformacija \underline{L} . Pogoj (19) zadovoljijo Lorentzovi potiski, to je matrika oblike:

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_x \gamma & \beta_y \gamma & \beta_z \gamma \\ \beta_x \gamma & & & \\ \beta_y \gamma & & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \otimes \vec{\beta} & \\ \beta_z \gamma & & & \end{pmatrix},$$

pri čemer je vektor $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$ in pomeni zapis $\vec{\beta} \otimes \vec{\beta}$ matriko

$$\vec{\beta} \otimes \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \beta_x & \beta_x \beta_y & \beta_x \beta_z \\ \beta_y \beta_x & \beta_y \beta_y & \beta_y \beta_z \\ \beta_z \beta_x & \beta_z \beta_y & \beta_z \beta_z \end{pmatrix}.$$

Lorentzove transformacije, značilnost Einsteinove teorije relativnosti, so torej ustrezne tudi za transformacije četvercev elektromagnetne teorije, kar nakazuje na to, da je tudi ta v svojem bistvu relativistična.

Poglejmo sedaj, kako \underline{L} transformira četverec EM polja. V koordinatnem sistemu $S : x^0, x, y, z$ naj kaže konstantno magnetno polje $\vec{B} = (0, 0, B)$ v smeri osi z . Najbolj preprost \vec{A} , ki ustreza temu polju, tvori četverec:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V sistemu $S' : x^0, x', y', z'$, ki se giblje glede na sistem S z relativno hitrostjo \vec{v} , je

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{\beta} \gamma \\ \vec{\beta} \gamma & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \otimes \vec{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{A} \\ \vec{A} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}) \end{pmatrix}.$$

Za naše polje velja $\vec{\beta} \cdot \vec{A} = \beta_y Bx$, tako da dobimo:

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix} \gamma B \beta_y x \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \begin{pmatrix} \beta_x \beta_y Bx \\ \beta_y \beta_y Bx \\ \beta_z \beta_y Bx \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Z inverzno Lorentzovo transformacijo dobimo zvezo med x in x' . Iz

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{\beta} \gamma \\ -\vec{\beta} \gamma & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \otimes \vec{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dobimo

$$x = -\beta_x \gamma x^{0'} + x' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta_x (\beta_x \cdot x' + \beta_y \cdot y' + \beta_z \cdot z')$$

ter

$$\underline{A}' = \left(\begin{array}{c} \gamma B \beta_y \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ B \\ 0 \end{array} \right) + \vec{\beta} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta_y B \end{array} \right) \cdot \left(-\beta_x \gamma x^{0'} + x' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta_x (\beta_x \cdot x' + \beta_y \cdot y' + \beta_z \cdot z') \right),$$

iz česar lahko po definiciji (12) izluščimo polji \vec{B}' in \vec{E}' . Tako dobimo vrednosti:

$$\vec{B}' = \left(\begin{array}{c} -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} B \beta_x \beta_z \\ -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} B \beta_y \beta_z \\ B + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} B (\beta_x^2 + \beta_y^2) \end{array} \right) \text{ in } \vec{E}' = \left(\begin{array}{c} \gamma B v_y (1 + 2 \frac{\gamma^3}{\gamma + 1} \beta_x^2) \\ \gamma B v_x (1 + 2 \frac{\gamma^3}{\gamma + 1} \beta_y^2) \\ \gamma 2 \frac{\gamma^4}{\gamma + 1} B c \beta_x \beta_y \beta_z \end{array} \right). \quad (20)$$

Ker smo uporabili magnetno polje, ki je imelo komponento samo v smeri osi z , se nam je v zapisu rezultata navidezno izgubila simetrija v zapisu komponent \vec{B}' in \vec{E}' . Vendar lahko, upoštevajoč aditivnost obeh polj in linearnost Lorentzove transformacije \underline{L} , uganemo polje v transformiranem sistemu tudi pri gibanju po magnetnem polju, ki vsebuje vse tri neničelne komponente.

Iz rezultata (20) je razvidno, da v lastnem sistemu delca, ki se giblje v ravnini xy , pravokotni na izbrano smer magnetnega polja, magnetno polje ostaja nespremenjeno. Ker velja $\beta_z = 0$, odpadeta komponenti $B'_x = B'_y = 0$, izraz $B'_z = B + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} B (\beta_x^2 + \beta_y^2)$ pa se z upoštevanjem $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ poenostavi v $B'_z = \gamma B$. Pri nerelativističnih hitrostih ($\gamma \approx 1$) se torej magnetno polje z opisano transformacijo ohranja $\vec{B}' = \vec{B}$. V primeru gibanja v smeri homogenega polja ($\beta_x = \beta_y = 0$) pa velja ohranitev magnetnega polja tudi za relativistične hitrosti.

Z Lorentzovo transformacijo v koordinatni sistem S' smo pridelali tudi električno polje. V (20) se v komponentah električnega polja skriva vektorski produkt $\gamma \vec{v} \times \vec{B}$. Ta je okleščen, saj smo uporabili najbolj preprosto obliko magnetnega polja z le eno neničelno komponento. V lastnem sistemu delca, ki se giblje v ravnini xy , ostaja električno polje v ravnini in kaže pravokotno na smer njegovega gibanja. Nastanek električnega polja je v skladu z relativistično sliko elektromagnetizma. Lorentzova sila na naboj v polju

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (21)$$

ki je merljiva količina, mora biti v vseh inercialnih sistemih enaka. Ker je hitrost v lastnem sistemu gibajočega se naboja enaka nič, delec ne čuti magnetne sile, njeno vlogo prevzame električna sila.

Vidimo, da med pojmom električno in magnetno polje ni absolutne razlike, delitev je odvisna od posameznega inercialnega sistema. Tako je tudi (izmerjena) inducirana napetost odvisna od izbire opazovanega koordinatnega sistema, najpogosteje je ta vezan na preostanek električnega kroga (slika 1). Ugotovimo, da brez sklenjenega električnega kroga o inducirani napetosti ni smiselno govoriti. Vse to se ujema tudi z enakovrednostjo absolutne in relativne razlage inducirane napetosti, ki smo jo uporabili pri opisu delovanja homopolarnih naprav.

Vrnimo se k transformaciji magnetnega polja. Ugotovili smo, da se homogeno magnetno polje v sistemu, ki se giblje v ravnini, pravokotni na smer \vec{B} , ohranja. Ugotovitev mora veljati tudi v sistemu gibajočega se magneta. Gibanje izvira magnetnega polja se torej ne odraža v spremembi magnetnega polja, temveč v nastalem električnem polju (v sistemu magneta). Privzemimo, da se magnet giblje v smeri osi x z nerelativistično hitrostjo $v = v_x$, v njegovi okolici pa se nahaja mirujoči naboj e . Sila na naboj, ki jo izmerimo v sistemu magneta (21), ima dve komponenti: poleg električne komponente, ki je posledica nastalega električnega polja $F_{el} = ev_x B$, vsebuje še magnetno komponento $F_m = -ev_x B$. Slednja je posledica tega, da mirovanje naboja v gibajočem se magnetu zaznamo kot gibanje s hitrostjo $v = -v_x$. Obe komponenti sile se izničita, celotna Lorentzova sila na mirujoči naboj ostaja nič. Naboj torej ne zazna vpliva gibanja magneta. Podobno velja za vrtenje magneta okrog simetrijske osi in za gibajoči naboj znotraj prevodnika v homopolarnih napravah.

LITERATURA

- [1] R. D. Eagleton, *The radial magnetic field homopolar motor*, Am. J. Phys. **56** (1988), 858–.
- [2] J. Guala Valverde, P. Mazzoni in R. Arcilles, *The homopolar motor: A true relativistic engine*, Am. J. Phys. **70** (2002), 1052–.
- [3] R. Hauko, *Homopolarna indukcija*, Obzornik mat. fiz. **61** (2014), 52–60.
- [4] H. Montgomery, *Unipolar induction: a neglected topic in the teaching of electromagnetism*, Eur. J. Phys. **20** (1999), 271–280.
- [5] C. Rovelli, *Sedem kratkih lekcij iz fizike*, prev. A. Kodre, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2019, 50–51.
- [6] J. Strnad, *Fizika*, 2. del, 5. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1995, 362–365.
- [7] A. Serra-Valls in C. Gago-Bousquet, *Conducting Spiral as an Acyclic ou Unipolar Machine*, Am. J. Phys. **38** (1970), 1273–.
- [8] *Homopolar motor*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Homopolar_motor, ogled 14. 11. 2019.
- [9] *How to make a Homopolar Motor from Battery*, dostopno na www.youtube.com/watch?v=RGFtp0ZxThc, ogled 30. 10. 2019.
- [10] *DIY: How to Make a Simple Homopolar Motor*, dostopno na www.youtube.com/watch?v=voHz6sxwQ2Q, ogled 30. 10. 2019.