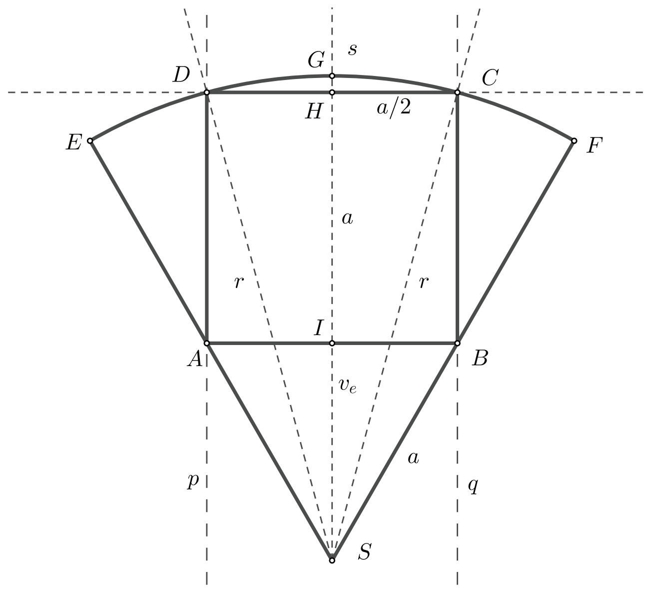
Kvadrat, včrtan krožnemu sekstantu

Marko Razpet

Krožnemu izseku s središčnim kotom 90° pravimo tudi *krožni kvadrant*, na kratko *kvadrant*, ker je to četrtina kroga. Krog lahko razdelimo na štiri skladne kvadrante. Če pa ima krožni izsek središčni kot 60°, imenujemo tak izsek *krožni sekstant*, na kratko *sekstant*, ker je to ravno šestina kroga. Krog lahko razdelimo na šest skladnih sekstantov. Kot vemo, lahko to naredimo zelo preprosto z ravnilom in šestilom. Kvadrant in sekstant sta določena s polmerom r.



SLIKA 1.
Krožni sekstant z včrtanim kvadratom.

Oglejmo si sekstant s središčem S in polmerom r (slika 1). Njegova simetrala s preseka krožni lok v točki G in razdeli sekstant na dva krožna izseka s središčnim kotom 30°. Njuni simetrali SC in SD pa ju razdelita na krožna izseka s središčnim kotom 15°. Vzporednici p in q k simetrali s skozi točki C in D presekata polmera sekstanta v točkah A in B. Točke A, B, C in D so očitno oglišča pravokotnika. Trdimo, da je pravokotnik $ABCD$ kvadrat.

Najprej opazimo, da je trikotnik SBA enakostraničnı s stranicami dolžine $|AB| = |SB| = |SA|$. Trikotnik SBC pa je enakokraki, ker sta enaka kota BSC in SCB. Oba merita 15°. Zato sta njuni nasprotni stranici enaki, $|SB| = |BC|$. Torej je res $|AB| = |BC|$. Pravokotnik $ABCD$ je kvadrat.

Naj bo a stranica kvadrata $ABCD$. Izrazimo jo s polmerom r sekstanta. Uporabimo enakokraki trikotnik SCD. Njegova kraka imata dolžino r, višina v z nožiščem H na stranici CD pa je vsota višine $v_e = a\sqrt{3}/2$ enakostraničnega trikotnika SBA in stranice a kvadrata: $v = v_e + a$. Uporabimo Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku SCH:

$$(a\sqrt{3}/2 + a)^2 + (a/2)^2 = r^2.$$

Ko izraz na levi strani zgornje relacije poenostavimo, dobimo najprej

$$(2 + \sqrt{3})a^2 = r^2$$

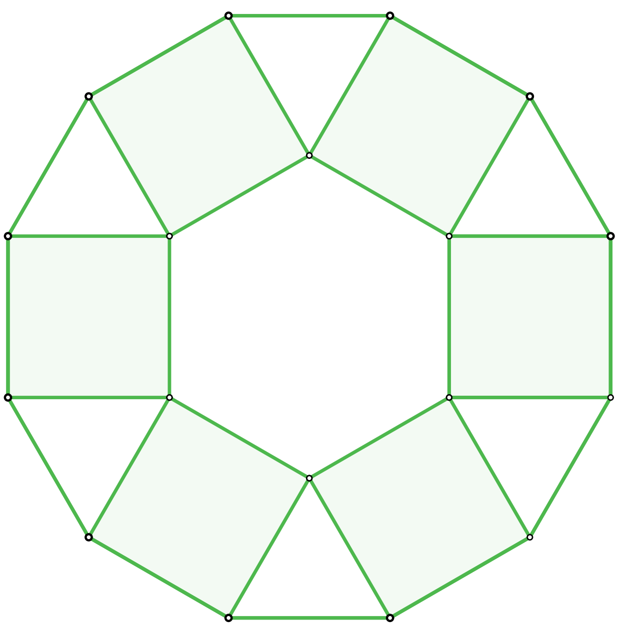
in nato z malo računanja še

$$a^2 = \frac{r^2}{2+\sqrt{3}} = r^2(2-\sqrt{3}) = \frac{r^2(8-4\sqrt{3})}{4} = \frac{r^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}.$$

Stranica a kvadrata $ABCD$ in njegova ploščina p sta nazadnje

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad p = r^2(2-\sqrt{3}).$$

To pomeni, da znamo vsakemu sekstantu simetrično včrtati kvadrat, ki ima dve svoji oglišči na polmerih in dve na loku sekstanta. Če to naredimo na vseh šestih sekstantih istega kroga in odstranimo nekaj odvečnih črt, dobimo sliko 2. V pravilnem dvanajstkotniku imamo na obodu izmenoma šest kvadratov in šest enakostraničnih trikotnikov, na sredini pa pravilni šestkotnik. Vsi pravilni liki imajo enako stranico.



SLIKA 2.
V vseh šest sekstantov včrtani kvadrati.

Naloga A. S pomočjo slike 1 in izraza za a izpelji vrednosti

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3},$$
$$\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}.$$

Naloga B. V kvadrant s polmerom r simetrično včrtaj kvadrat, ki ima dve svoji oglišči na polmerih in dve na loku kvadranta. Dokaži, da ima tako včrtani kvadrat stranico $a = r\sqrt{10}/5$ in ploščino $p = 2r^2/5$.

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

				5	2		4
	4		6				
							7
	3	5	1		6		
		8		2			
			5		7		1
	8		2		1	5	
					8		