Trideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tokratna izvedba je bila po selitvi na splet prva, ki je potekala spet izključno v živo. Posledično je bilo tekmovalcev pol manj kot lani, vendar pa več kot v letu pred pandemijo. Na tradicionalnem mestu, v Blagoevgradu v Bolgariji, se je med 31. julijem in 6. avgustom zbralo 393 študentov, ki so predstavljali 72 ekip (večinoma univerzitetnih, nekatere nacionalne).

Iz Slovenije je bilo letos spet veliko udeležencev, kar 11 tekmovalcev in trije spremljevalci. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali **Lovro Drofenik** in **Jaka Vrhovnik** iz drugega letnika, **Maša Žaucer**, **Luka Horjak** in **Job Petrovčič** iz tretjega letnika, **Matevž Miščič** in **Beno Učakar** iz prvega letnika druge stopnje. Štirje so tekmovali za Univerzo na Primorskem, natančneje FAMNIT: **Yllkë Jashari** in **Dmytro Tupkalenko** iz prvega letnika, **Dren Neziri** iz drugega letnika in **Diar Gashi** iz tretjega letnika. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Blas Fernández, pomočnik vodje ekipe FMF pa je bil Matija Šteblaj.

Slika 1. Polna predavalnica na otvoritveni slovesnosti.

Po lanskem zgodovinskem uspehu je bilo letos še boljše. Prvič je kak naš študent osvojil veliko prvo nagrado, Luka Horjak je zasedel šesto mesto. Poleg njega so prvo nagrado dobili tudi Jaka Vrhovnik, Job Petrovčič in Beno Učakar, drugo nagrado je dobila Maša Žaucer, tretjo pa Lovro Drofenik in Matevž Miščič. Diar Gashi in Dren Neziri sta osvojila pohvalo, Yllkë Jashari in Dmytro Tupkalenko pa potrdilo o udeležbi.

Ekipni uspeh se je odrazil pri skupni uvrstitvi, kjer je ekipa FMF dosegla **peto mesto**, kar je daleč najboljša uvrstitev naše ekipe (do sedaj). V zadnjih treh letih smo osvojili osem prvih nagrad (od tega Luka Horjak tri), pred tem obdobjem pa vsega skupaj sedem (osvojilo jih je sedem različnih tekmovalcev). To res kaže, kako izjemna je trenutna generacija tekmovalcev na FMF. Ekipa FAMNIT se je uvrstila na 67. mesto.

Slika 2. Ekipa FMF na trgu pred univerzo pred začetkom prvega tekmovalnega dela.

Skoraj 400 tekmovalcev in ustrezno število spremljevalcev je številka, ki skoraj presega zmogljivosti, ki so na razpolago organizatorjem. Z običajnimi nevšečnostmi, ki se primerijo (na primer, poluren izpad elektrike na Univerzi med reševanjem nalog, pri čemer je kar nekaj predavalnic brez dnevne svetlobe), predstavlja organizacija tega tekmovanja tudi vajo v potrpežljivosti, tako za udeležence kot za organizatorje. Po drugi strani pa se informacije med tekmovalci hitro širijo, znanje iz preteklih let pa je tudi dosegljivo na raznih forumih. Tako je bilo na primer prva dva dneva v menzi precej natrpano, v poznejših dnevih se je gneča preselila tudi v bližnje lokale, ki so ponujali hrano.

Glavni sponzor je vsako leto bolj prisoten, letos smo bili celo deležni nekaj predavanj z resnimi matematičnimi vsebinami. Vendar pa so določeni deli (na primer, otvoritvena slovesnost) vedno bolj videti kot novačenje sposobnih mladih kadrov. Kar morda niti ni narobe, dokler nima za posledice dejstva, da akademsko kariero nadaljuje vedno manj najsposobnejših tekmovalcev. Na to temo je bilo tudi kar nekaj diskusij med vodji ekip.

Slika 3. Piknik večerja po drugem tekmovalnem dnevu.

Sledijo tri naloge s tekmovanja. Izbrane niso najtežje naloge, tako da jih lahko poskusite rešiti sami. Zato tokrat najprej poglejmo naloge, rešitve sledijo za njimi.

Začnimo s polinomi.

Naloga 1. Poiščite vse realne polinome $P(x, y)$, za katere velja

$$P(x,y)P(z,t) = P(xz - yt, xt + yz)\,.$$

Nadaljujemo z matrikami:

Naloga 2. Dana je matrika $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Izberemo stolpec (ali vrstico) in elementa tega stolpca bodisi množimo bodisi delimo z istoležnima elementoma drugega stolpca (ali vrstice). Ali lahko po končnem številu korakov iz dane matrike dobimo matriko $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$?

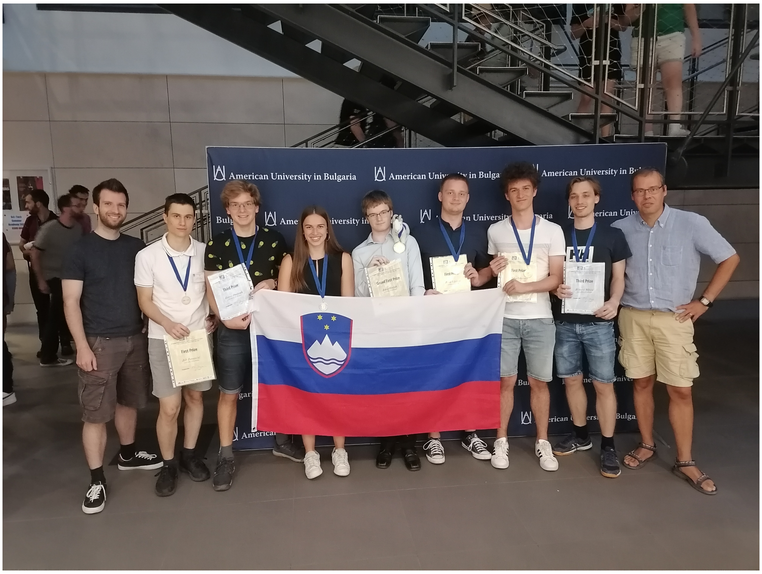
Končajmo z nalogo iz teorije grafov, ki jo je predlagal Slobodan Filipovski z Univerze na Primorskem.

Naloga 3. T naj bo drevo z n vozlišči. Naj $d(u, v)$ označuje razdaljo med vozliščema u in v (število povezav na najkrajši poti od u do v). Definiramo dve vsoti:

$$W(T)=\sum_{\substack{u,v\in V(T)\\ u\neq v}} d(u,v) \quad \text{in} \quad H(T)=\sum_{\substack{u,v\in V(T)\\ u\neq v}} \frac{1}{d(u,v)}\,.$$

Dokažite, da velja

$$W(T)\cdot H(T)\geq \frac{(n-1)^3(n+2)}{4}\,.$$



Slika 4. Zadovoljni tekmovalci po podelitvi nagrad.

Rešitev naloge 1. Najprej poiščimo polinome s kompleksnimi argumenti, ki zadoščajo navedeni enakosti. Če opazimo, da je $(x+iy)(z+it)=xz-yt+i(xt+yz)$, smo na dobri poti do rešitve. Ena rešitev je seveda konstantni polinom $P(x,y)=0$. Poiščimo še druge. Zapišimo $P(x,y)=(x+iy)^n(x-iy)^mQ(x,y)$, kjer sta n in m nenegativni celi števili, polinom $Q(x,y)$ pa ni deljiv niti z $x+iy$ niti z $x-iy$. Iz zahtevane enakosti za P izpeljemo enačbo, ki ji mora zadoščati Q: $Q(x,y)Q(z,t)=Q(xz-yt,xt+yz)$. Če vstavimo $z=t=0$, dobimo $Q(x,y)Q(0,0)=Q(0,0)$. Če $Q(0,0)$ ni enak nič, je $Q(x,y)$ identično enak 1, od koder je $P(x,y)=(x+iy)^n(x-iy)^m$.

Preverimo sedaj možnost, da je $Q(0,0)=0$. V enačbo, ki ji zadošča polinom Q, vstavimo $x=iy$ in $z=-it$. Dobimo $Q(iy,y)Q(-it,t)=Q(0,0)$. Ker Q ni deljiv z $x-iy$, obstaja y, da $Q(iy,y)\neq 0$. Podobno, ker

Q ni deljiv z $x + iy$, obstaja t, da je $Q(-it, t) \neq 0$. To pa je protislovje, ker je produkt $Q(iy, y)Q(-it, t) = 0$ za vse y, t.

Torej je polinom P bodisi $P(x, y) = 0$ bodisi $P(x, y) = (x + iy)^n(x - iy)^m$. Vendar za $n \neq m$ polinom P vsebuje kompleksne koeficiente. Če torej iščemo realne polinome, morata biti n in m enaka, v tem primeru je $P(x, y) = (x^2 + y^2)^n$.

Rešitev naloge 2. Očitno je treba poiskati neko invarianto za opisani korak. Vemo, da je determinanta matrike taka invarianta, če bi namesto množenja (in deljenja) imeli seštevanje (in odštevanje) stolpcev (oziroma vrstic). Tako moramo samo ugotoviti, kako iz množenja pridelati seštevanje. Seveda, z logaritmiranjem! Ker je $\det \log_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \log_2(4/3)$, je tudi $\det \log_2$ katerekoli matrike, dobljene s končnim številom navedenih operacij, enaka $\log_2(4/3)$. Ker je $\det \log_2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \log_2(3/4)$, do te matrike ne moremo priti.

Rešitev naloge 3. Označimo (po velikosti urejene) razdalje med vsemi pari vozlišč z $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$, pri čemer je $k = \binom{n}{2}$. Ker v drevesu obstaja natanko $n - 1$ parov vozlišč z razdaljo 1, je prvih $n - 1$ razdalj enakih 1, ostale so vsaj 2. Tako dobimo

$$\begin{aligned} W(T) \cdot H(T) &= (n - 1 + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_k) \cdot \\ &\cdot \left(n - 1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k}\right) = \\ &= (n-1)^2 + (n-1)\left(\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) + \cdots + \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)\right) + \\ &+ (x_n + x_{n+1} + \cdots + x_k)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k}\right). \end{aligned}$$

Ker je $x_j + \frac{1}{x_j} \geq 2 + \frac{1}{2}$, je

$$\begin{aligned} (n-1)\left(\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) + \cdots + \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)\right) &\geq \frac{5}{2}(n-1)(k-n+1) = \\ &= \frac{5(n-1)^2(n-2)}{4} \end{aligned}$$

(enakost velja, ko so vsi x_j enaki 2). Cauchyjeva neenakost (za ustrezna vektorja) nam pove, da je

$$(x_n + x_{n+1} + \cdots + x_k)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k}\right) \geq (1 + 1 + \cdots + 1)^2 =$$

$$(k-n+1)^2 = \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{4}$$

(enakost velja, kadarkoli so vsi x_j enaki).

Tako dobimo

$$W(T) \cdot H(T) \geq (n-1)^2 + \frac{5(n-1)^2(n-2)}{4} + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{4} =$$

$$= \frac{(n-1)^3(n+2)}{4},$$

enakost velja za drevo, v katerem sta vsaki nesosednji točki na razdalji 2. To je drevo s korenom in $n-1$ listi oziroma zvezda.

O težavnosti naloge lahko nekaj pove povprečno število točk. Izdelki so točkovani s celim številom od 0 do 10, prva naloga je imela povprečje 3,93, druga 5,13 in tretja 1,99. Sicer je imela na tekmovanju najvišje povprečje prva naloga prvega dne, kar 7,47, najnižje pa peta naloga prvega dne, samo 0,13.

Kogar zanimata ti dve ter druge naloge, si jih lahko ogleda na internetni strani tekmovanja `www.imc-math.org.uk`.

Tako se je uspešno zaključilo jubilejno 30. tekmovanje. Verjetno ni bil nihče presenečen, ko je bilo napovedano, da bo 31. izvedba spet potekala v Blagoevgradu.

Gregor Šega

VESTI

Zoisove nagrade in priznanja

Konec novembra so bile slavnostno podeljene Zoisove nagrade in priznanja, Puhove nagrade ter priznanja Ambasadorka znanosti. To so najvišja nacionalna priznanja za dosežke v slovenski znanosti in jih prejmejo znanstvenice in znanstveniki, ki s svojim prispevkom navdihujejo mlajše generacije k raziskovanju in inovacijam ter prispevajo k razvoju slovenske družbe in krepitvi njenega ugleda v mednarodni znanstveni skupnosti.

Zoisovo nagrado za življenjsko delo na področju razvojne psihologije je prejela zaslužna profesorica dr. Ljubica Marjanovič Umek s Filozofske fakultete na Univerzi v Ljubljani. Je raziskovalka na področju razvojne psihologije, s poudarkom na razvoju mišljenja in govora pri otrocih. Zoisovo nagrado za življenjsko delo na področju kemijskega inženirstva je prejel akademik profesor dr. Željko Knez s Fakultete za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru. Je vodilni strokovnjak na področju separacijskih